

Seminar: Hadron-Kollider-Experimente bei sehr hohen
Energien

Extra-Raumdimensionen und schwarze Löcher ?

Radin Dardashti

Januar 2007

Betreut durch Frau Dr.Klein

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	4
2.1	Kaluza-Klein-Theorie	4
2.2	String-Theorie	6
2.3	Hierarchie-Problem	7
2.4	ADD-Modell	8
2.5	Randall-Sundrum-Modell	11
3	Experiment	14
3.1	ADD-Modell	14
3.1.1	Gravitative und Astrophysikalische Einschränkungen	14
3.1.2	Hadron-Kollider Experimente	15
3.2	RS-Modell	17
3.2.1	Hadron-Kollider Experimente	17
4	Mini-Schwarze-Löcher	23
5	Zusammenfassung	26

1 Einleitung

Viele Physiker sind sich darin einig, dass die heute bekannte Version des Standard Modells der Teilchenphysik nicht vollständig ist. Zu viele freie Parameter, das Hierarchie-Problem und die Abwesenheit der Gravitation in der Theorie sind nur einige Probleme des Standard Modells. Deswegen arbeiten viele Theoretiker an Theorien jenseits des Standard Modells. Ein Bereich der Physik jenseits des Standard Modells hat sich hierbei als besonders fruchtbar erwiesen: extra-dimensionale Theorien. Der Grund hierfür ist vor allem das Unwissen über die Anzahl, Größe und Geometrie dieser Extra-Dimensionen. So bietet sich eine regelrechte Spielwiese für Theoretiker, die schon zu mehreren tausend Publikationen führte. In dieser Ausarbeitung werde ich mich auf nur zwei Theorien beschränken, das ADD- und das RS-Modell (Typ1). Diese beiden Modelle lösen beide das Hierarchie-Problem und sind konsistent mit der String-Theorie, die vielversprechendste Theorie zur Vereinigung des Standard Modells mit der Gravitation. Beide Modelle machen Vorhersagen, die am Tevatron/LHC getestet werden können. Eine weitere Konsequenz extra-dimensionaler Theorien sind die sogenannten Mini-Schwarze-Löcher die ab bestimmten Energien auftauchen könnten.

2 Theorie

2.1 Kaluza-Klein-Theorie

Bereits 1919 hat Theodor Kaluza (1885-1954), anlehnend an eine Idee von Gunnar Nordstrom¹, versucht Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie (ART) mit Elektromagnetismus in einer Theorie zu vereinigen[1]. Hierzu führte er ohne Begründung eine weitere Dimension ein und definierte eine 5-dimensionale Metrik g_{MN} mit $x_M = (x_\mu, y)$ ($M, N = 0, 1, 2, 3, 4$) der Form [2]

$$g_{MN} = \left(\begin{array}{c|c} {}^4g_{\mu\nu} & \alpha A_\mu \\ \hline \alpha A_\nu & 2\phi \end{array} \right). \quad (2.1)$$

Hierbei ist $g_{\mu,\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) die übliche 4-dimensionale Metrik der ART, A_μ das Photon-Feld und ϕ das Dilaton-Feld, das Kaluza zusätzlich einführen musste. Zusätzlich musste Kaluza fordern, dass

$$\partial_y g_{MN} = 0. \quad (2.2)$$

Dies besagt, dass die Felder alle unabhängig von der Extra-Dimension sein sollen.

Seine Theorie hatte vor allem zwei Probleme:

- Wenn es eine Extra-Dimension gibt, warum sehen wir sie nicht?
- Warum sollten die Felder unabhängig von der Extra-Dimension sein?

Beide Probleme konnten durch eine einfache Annahme von Oskar Klein(1894-1977) 1926 gelöst werden [3]. Er postulierte eine periodische Randbedingung für die Extra-Dimension $y = y + 2\pi R$, wobei R der Radius der Extra-Dimension ist. Dies erlaubte ihm die Felder zu entwickeln (Fourier), d.h. am Beispiel der Metrik²:

$$g_{\mu\nu}(x_\mu, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{\mu\nu}(x_\mu) e^{iny/R}. \quad (2.3)$$

Das heisst aber auch, dass er das ursprüngliche Feld durch eine unendliche Anzahl von Feldern der Form $g_{\mu\nu}^{(n)}(x_\mu, y) = g_{\mu\nu}(x_\mu) e^{iny/R}$ darstellen kann. Für $n = 0$ haben wir gerade ein Feld, welches unabhängig von der y -Komponente ist. D.h. die von Kaluza formulierte Bedingung (2.2) entspricht gerade der 0-Mode der Fourier-Entwicklung. Das

¹Nordstrom hatte seine 5-dimensionale Theorie bereits 1914 formuliert, zu Zeiten wo die ART noch nicht bekannt war.

²Die Metrik wird auch als Feld betrachtet, da in der QFT das Graviton hiermit identifiziert wird.

zweite Problem von Kaluza's Theorie konnte Klein einfach durch die Wahl von R lösen. Ist der Radius nämlich sehr klein (Plancklänge), so ist die Extra-Dimension für uns nicht sichtbar.

Wir skizzieren nun noch kurz, warum man diese Theorie als Vereinigung der ART und des Elektromagnetismus betrachten kann. Die von Klein verwendete Metrik unterschied sich von (2.1)

$$g_{MN} = \left(\begin{array}{c|c} {}^4g_{\mu\nu} + \phi^2 A_\mu A_\nu & \phi A_\mu \\ \hline \phi A_\nu & \phi^2 \end{array} \right). \quad (2.4)$$

Verallgemeinert man die in der ART verwendete Wirkung auf 5 Dimensionen, so erhält man

$$S^{(5)} = \int dx_M^5 (\sqrt{-g^5} R^{(5)}) \quad (2.5)$$

Wobei g^5 die Determinante von (2.4) ist und $R^{(5)}$ der 5-dimensionale Ricci-Skalar ist. Durch die Fourier-Entwicklung ist es möglich, den y -Anteil der Felder zu separieren. D.h. nach Berechnung der Determinante und des Ricci-Skalar³ [5] ist es möglich, die y -Integration auszuführen und man erhält

$$S^{(5)} = S_{ART} + S_{EM}. \quad (2.6)$$

Nach dem Kaluza-Klein-Modell ist also die ART und der Elektromagnetismus als effektive 4-dimensionale Theorie der ursprünglich 5-dimensionalen Theorie zu verstehen. Es ist interessant, zu betrachten, wie der Elektromagnetismus in diesem Modell auftaucht. Während üblicherweise der Elektromagnetismus in der ART durch den entsprechenden Energie-Impuls-Tensor berücksichtigt wird, ist der Elektromagnetismus hier als Eigenschaft der Geometrie des Raumes aufgetaucht.

Nun betrachten wir ein 5-dimensionales masseloses, skalares Feld. Dieses gehorcht der 5-dimensionalen Klein-Gordon-Gleichung [4]

$$\partial_M \partial^M \phi(x, y) = (\partial_\mu \partial^\mu - \partial_y^2) \phi(x, y) = 0 \quad (2.7)$$

Aus der periodischen Randbedingung folgt für das Feld

$$\phi(x, y) = \phi(x, y + 2\pi R) \Rightarrow \phi_n(x, y) = e^{ip_\mu x^\mu} e^{iny/R}. \quad (2.8)$$

Setzt man nun (2.8) in (2.7) ein, so erhält man $p_\mu p^\mu = \frac{n^2}{R^2}$ und aus diesem folgt

$$m_n = \frac{|n|}{R}. \quad (2.9)$$

D.h. obwohl man mit einem masselosen Feld in 5 Dimensionen angefangen hat, erhält man massenbehaftete Felder in 4 Dimensionen. Diese hängen vom Radius der Extra-

³Der Ricci-Skalar hängt nur von der Metrik ab.

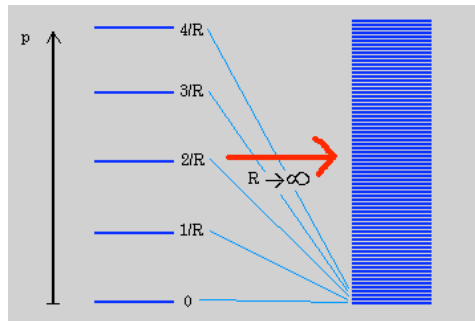


Abbildung 2.1: Linker Bereich: Massenspektrum mit äquidistanten Abstand. Rechter Bereich: Für große R erhält man ein quasikontinuierliches Spektrum [6].

Dimension ab und haben äquidistante Abstände (siehe Abbildung 2.1 linker Bereich). Dieses Massenspektrum wird auch Kaluza-Klein-Turm genannt. Wäre nun z.B. der Radius in diesem Toy-Modell in der Größenordnung TeV^{-1} , so wären die Massen im TeV-Bereich und man könnte diese sog. Kaluza-Klein-Teilchen am LHC entdecken.

2.2 String-Theorie

Während die Extra-Dimension in der Kaluza-Klein-Theorie postuliert wurde, taucht sie in der String-Theorie auf eine fundamentalere Weise auf. Die Grundidee besteht darin, das gesamte Spektrum der Elementarteilchen durch ein Objekt, den String, welcher geschlossen oder offen sein kann, zu ersetzen. Dies ist möglich, da bei der Quantisierung⁴ der Theorie Zustände mit den Eigenschaften der uns bekannten Elementarteilchen als verschiedene Energiezustände des Strings auftauchen [7]. Diese Quantisierung ist jedoch nur unter Einführung weiterer Dimensionen möglich. Bei den Superstring-Theorien sind es gerade 6 weitere Raumdimensionen die man einführen muss⁵, d.h. in der String-Theorie ist die Anzahl der Extra-Dimensionen eine Vorhersage der Theorie.

In der String-Theorie tauchen auch noch weitere Objekte auf, die Branes. Diese tauchen sowohl als fundamentale mehrdimensionale Objekte in der Theorie auf, als auch als Randbedingung für die offenen Strings. Für die Enden der offenen Strings müssen Randbedingungen bestimmt werden. Nun können diese so gewählt werden, dass die Bewegung der Enden der Strings sich auf einen 3-dimensionalen Unterraum beschränkt. Dieses 3-dimensionale Objekt, auf denen die offenen Strings sich dann bewegen können, wird D3-Brane genannt und wird in manchen Fällen als unser Universum betrachtet. In der Theorie entsprechen die möglichen Zustände der offenen Strings gerade den Ele-

⁴Hierbei werden natürlich nicht die klassischen Strings quantisiert, sondern die relativistischen Strings, die zusätzlich dann noch supersymmetrisch erweitert werden müssen, um auch fermionische Zustände zu erhalten, und deshalb auch Superstrings genannt werden.

⁵Von diesen Superstring-Theorien gibt es 5 Stück, die wiederum über bestimmte Symmetrien identifiziert werden können in einer 11-dimensionalen Theorie, der M-Theorie.

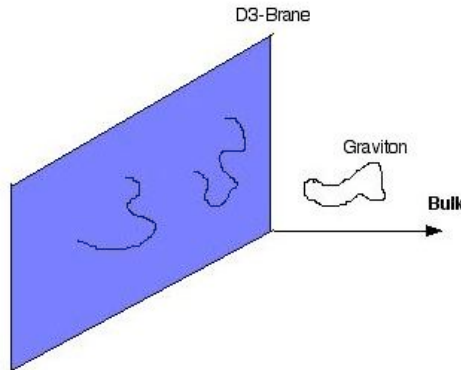


Abbildung 2.2: D3-Brane, welche mit unserer 3+1 dimensionalen Raumzeit identifiziert wird, im höher dimensional Bulk. Offene Strings die auf unserer Brane enden, entsprechen den SM-Teilchen, während die geschlossenen Strings Gravitonen entsprechen, die sich im gesamten Bulk bewegen können.

mentarteilchen des Standard-Modells (SM) und die Zustände der geschlossenen Strings gerade den Gravitonen. Die offenen Strings sind jedoch auf unsere Brane beschränkt und damit auch die SM-Teilchen, während die Gravitonen sich in der gesamten höherdimensionalen Raumzeit, dem Bulk (siehe Abb.2.2), frei bewegen können. Dies ist ein grundlegender Gedanke, von dem viele extra-dimensionale Theorien Gebrauch machen, um das Hierarchie-Problem zu lösen.

2.3 Hierarchie-Problem

Das Hierarchie-Problem besteht darin, dass die fundamentalen Skalen der Physik einen sehr großen Abstand voneinander haben. Dies hat zur Folge, dass die Gravitation viel schwächer ist als die elektroschwache Kraft. Die Frage, die sich hierbei stellt, ist: Warum ist die Gravitation so schwach? Auf den ersten Blick erscheint es vielleicht als ein rein ästhetisches Problem, jedoch hat dies Auswirkungen auf das SM. Will man die Masse des Higgs-Bosons berechnen, so muss man die zusätzlich zur Rohmasse m_0 auftretenden Massenkorrekturen δm berücksichtigen:

$$m_H^2 = m_0^2 + \delta m_H^2. \quad (2.10)$$

Dies entspricht gerade den zum Propagator des Teilchens hinzukommenden Loop-Diagrammen (siehe Abb.2.3). Nun gilt für skalare Teilchen wie das Higgs-Boson, dass diese Korrekturen quadratisch-divergent sind. Dies wird dadurch gelöst, dass man das Integral durch einen Cut-off Λ beschränkt, d.h. die Korrektur ist $\delta m_H^2 \propto \Lambda^2$. Nun sollte man diesen Cut-off gerade in der Größenordnung wählen, bei der man erwartet, dass das

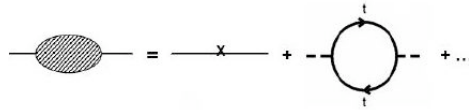


Abbildung 2.3: Korrektur zum Propagator, hier durch $t\bar{t}$ -Erzeugung.

SM versagt. Dies ist spätestens bei der Planck-Skala der Fall, da in diesem Bereich die Gravitation nicht mehr vernachlässigbar ist und das SM diese nicht berücksichtigt.

Nun erwartet man, dass die Masse des Higgs-Teilchens in der Größenordnung von 100 GeV ist. Ist also $\Lambda \sim m_{Pl}$, so muss man die Rohmasse m_0 auf etwa 26 Stellen exakt einstellen, damit man eine Higgsmasse im 100 GeV Bereich erhält. Dieses Finetuning-Problem ist eine direkte Konsequenz des Hierarchie-Problems.

Es sind viele Vorschläge zur Lösung dieses Problems gegeben worden. Einige sind z.B.:

- Supersymmetrie: Es entstehen zusätzliche Diagramme in der Korrektur, die die quadratisch-divergenten Terme gerade wegheben.
- Neue Physik bereits im TeV-Bereich
- Fine-Tuning-Problem ist nicht so schlimm
- Gravitation ist gar nicht so schwach

Die letzte Lösung ist die, auf die ich mich hier konzentrieren werde. In extra-dimensionalen Theorien kann man nämlich Lösungen erhalten, in denen die Gravitations-Skala im TeV-Bereich ist und wir in einem Universum leben, in der uns die Gravitation nur effektiv schwach vorkommt.

2.4 ADD-Modell

1998 haben Arkani-Hamed, Dvali und Dimopoulos eine extra-dimensionale Theorie vorgeschlagen [8], in der es sogar Extra-Dimensionen mit Radien im Millimeter-Bereich gibt. Dieses Modell wurde unabhängig von der String-Theorie vorgeschlagen, ist jedoch mit ihr vereinbar.

Es werden d weitere kompakte Extra-Dimensionen eingeführt, die alle auf einen Radius R kompaktifiziert sind. Die SM-Teilchen werden auf der Brane lokalisiert, während die Gravitonen sich im $3+1+d$ dimensionalen Raum bewegen können. Dies hat die Folge, dass die Extra-Dimensionen im Grunde beliebig groß gewählt werden können, da der Elektromagnetismus auf die Brane beschränkt ist und wir die Extra-Dimensionen so nicht sehen könnten. Für die Gravitation erwartet man nun jedoch, wegen der vervielfachten Ausbreitungsmöglichkeiten der Gravitonen, dass sie sich in Bereichen, die klein sind gegenüber dem Kompaktifikationsradius, anders als mit $1/r^2$ verhält.

Aus der Poisson-Gleichung für das Gravitationspotential $\phi^{(D)}$ [2]

$$\Delta\phi^{(D)} = 4\pi G^{(D)}\rho^{(D)} \quad (2.11)$$

folgt, dass die Einheit der Gravitationskonstante eine dimensionsabhängige Größe ist, da die Einheit des Potentials sich nicht ändert und die Dichte $\rho^{(D)}$ sicherlich von der Dimension abhängt. Es folgt für die Einheit der Gravitationskonstante

$$[G^{(D)}] = \frac{\text{energy} \times \text{length}^{d-2}}{\text{mass}} = \text{length}^{d+2}, \quad (2.12)$$

wobei im letzten Schritt $\hbar = c = 1$ benutzt wurde. Die Planck-Größen erhält man durch Dimensionsanalyse der fundamentalen Konstanten G_N , \hbar und c ⁶. In 3 Dimensionen folgt für die Planckmasse $m_{Pl} = 1/\sqrt{G_N}$ und da die Plancklänge für $\hbar = c = 1$ immer dem inversen der Planckmasse entspricht erhält man für die Gravitationskonstante $G_N = l_{Pl}/m_{Pl}$. Für den D-dimensionalen Fall folgt für die D-dimensionale Gravitationskonstante aus (2.12)

$$m_{Pl(D)} = \frac{1}{\sqrt{d+2}G^{(D)}} \Rightarrow G^{(D)} = \frac{l_{Pl(D)}^{d+1}}{m_{Pl(D)}} \quad (2.13)$$

Von nun an nenne ich die D-dimensionale Planckmasse $m_{Pl(D)} \equiv M_f$, welche unsere fundamentale Skala sein soll. Um eine Beziehung zwischen der 4 und der D-dimensionalen Gravitationskonstante zu erhalten, kann man das Newtonsche Gravitationsgesetz benutzen. Das D-dimensionale Gesetz kann man z.B. aus (2.11) herleiten. Man erhält

$$F_{(D)} = G_{(D)} \frac{mM}{r^{d+2}} \quad (2.14)$$

Es muss nun gelten, dass im Limes für große Abstände im Vergleich zum Radius der Extra-Dimension R (2.14) in das bekannte 4-dimensionale Gesetz übergeht, d.h.

$$\lim_{r \gg R} F_{(D)} = G_{(D)} \frac{1}{R^d} \frac{mM}{r^2} = G_N \frac{mM}{r^2} \quad (2.15)$$

Durch Vergleich beider Seiten erhält man die Beziehung zwischen der 4-dimensionalen Planckmasse und der D-dimensionalen

$$m_{Pl}^2 = M_f^{d+2} R^d. \quad (2.16)$$

Die Größe der D-dimensionalen Planckmasse ist also von der Anzahl und dem Radius der Extra-Dimensionen abhängig. Damit das Hierarchie-Problem gelöst wird, muss $M_f \sim 1\text{TeV}$ sein. In der Tabelle 2.1 sind die zu $M_f = 1\text{TeV}$ entsprechend möglichen Werte für R und d eingetragen

⁶ \hbar und c werden im folgenden immer gleich Eins gesetzt

Tabelle 2.1: Radius und Anzahl der Extra-Dimensionen für $M_f = 1TeV$.

d	R(in m)
1	10^{13}
2	10^{-3}
3	4.5×10^{-9}
4	10^{-12}
5	2.5×10^{-13}
6	2.1×10^{-14}

Der Fall für eine Extra-Dimension kann ausgeschlossen werden, da diese gravitative Auswirkungen auf unser Sonnensystem hätte, die man nicht misst. Zur Zeit der Publikation war das Newtonsche Gravitationsgesetz in Millimeter-Bereich noch nicht getestet und es bestand die Möglichkeit von Extra-Dimensionen in der Größenordnung eines Millimeters. Diese können aber nach neueren Messungen auch ausgeschlossen werden, wie wir später sehen werden.

Da in diesem Modell wieder periodische Randbedingungen für die Extra-Dimensionen angenommen wurden, wie beim Kaluza-Klein-Modell, erhält man auch wieder unendlich viele KK-Anregungen, deren Massen durch (2.9) gegeben sind. Aus der Tabelle 2.1 erkennen wir, dass die möglichen Werte für R im Millimeter- bis Fermi-Bereich sind, was zur Folge hat, dass die Massenabstände zwischen eV und MeV sind und somit das Spektrum als quasikontinuierlich⁷ betrachtet werden kann. Aus den Feynman-Regeln des ADD-Modells folgt, dass die Wechselwirkung eines KK-Teilchens mit den SM-Teilchen mit $1/m_{Pl}$ unterdrückt ist. Somit ist der Wirkungsquerschnitt für diese Wechselwirkung $\sigma \propto \alpha/m_{Pl}^2$, wobei α die Feinstrukturkonstante ist. Nun kann man aus statistischen Betrachtungen die mögliche Anzahl von KK-Anregung in Abhängigkeit von der Energie berechnen. Diese ergibt $N(E) = (ER)^d$. Für den gesamten Wirkungsquerschnitt heisst das, dass man alle die möglicherweise bei einer bestimmten Energie entstandenen KK-Teilchen berücksichtigen muss, und über alle Beiträge summieren, bzw. da quasikontinuierlich, integrieren muss. Für den gesamten Wirkungsquerschnitt ergibt sich[2]

$$\sigma \sim \frac{\alpha}{m_{Pl}^2} N(E) \sim \frac{\alpha}{E^2} \left(\frac{E}{M_f} \right)^{d+2}, \quad (2.17)$$

wobei im letzten Schritt (2.16) verwendet wurde. Setzt man für die Energie E die Schwerpunktsenergie⁸ ein, d.h. beim LHC 14TeV, so ist der Effekt der Wechselwirkung der SM-Teilchen mit den KK-Teilchen nur noch TeV-unterdrückt und somit sollte man, falls das Modell korrekt ist, Abweichungen vom SM-Drell-Yan-Wirkungsquerschnitt am LHC

⁷Im Vergleich zu Energien im TeV-Bereich, die es am LHC geben wird.

⁸Genauer: Energie der wechselwirkenden Partonen

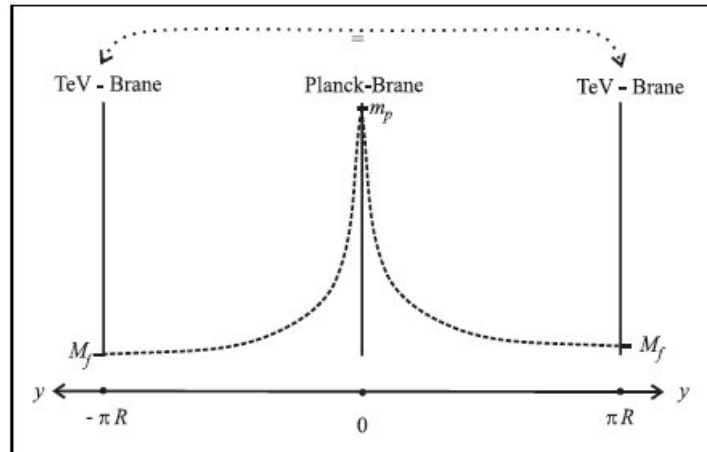


Abbildung 2.4: TeV- und Planck-Brane im RS-Modell [2].

messen können. Das ADD-Modell löst somit das Hierarchie-Problem und bietet eine Möglichkeit das Modell zu überprüfen. Ein Nachteil ist, dass man sich fragen könnte, warum der Energieabstand zwischen der ersten KK-Anregung und der fundamentalen Skala M_f so groß ist, welches eine Art schwächeres Hierarchie-Problem darstellt.

2.5 Randall-Sundrum-Modell

Kurze Zeit nach dem Erscheinen der Publikation des ADD-Modells schlugen Lisa Randall und Raman Sundrum ein anderes Modell⁹ vor [9], welches ebenfalls das Hierarchie-Problem löst und dabei keine neue Hierarchie einführt.

In diesem Modell wird nur eine weitere Dimension eingeführt und diese soll auf einen Radius R kompaktifiziert sein. Es befinden sich zwei Branes in dieser Theorie. Zum einem die TeV-Brane, welche unser Universum ist und sich bei $y = \pi R$ befinden soll, und eine weitere, welche Planck-Brane genannt wird und sich bei $y = 0$ befinden soll (siehe Abb.2.4). Es sollen noch folgende Randbedingungen gelten

$$y = -y \quad \text{und} \quad y = y + 2\pi R, \quad (2.18)$$

wobei y die Koordinate der Extra-Dimension ist. Im Gegensatz zum ADD-Modell geht man im RS-Modell von einer nichtverschwindenden kosmologischen Konstante aus. Zusätzlich wird den Branes eine Energiedichte zugeordnet. Dies hat zur Folge, dass man

⁹Ich behandle hier nur das Typ1-Modell

keine flache Metrik mehr erhält, sondern¹⁰

$$ds^2 = \underbrace{e^{-2k|y|}}_{\text{Warp-Faktor}} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2.$$

Der Warp-Faktor ist von y abhängig. Das wiederum heisst, dass die Metrik auf unserer Brane von ihrer Position in der Extra-Dimension abhängt, dabei ist k eine zuerst beliebige Konstante, die von der Vakuumenergiedichte abhängt. Benutzt man $y = \phi R$, so erhält man für die Metrik

$$ds^2 = e^{-2kR_c\phi} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + R^2 d\phi^2. \quad (2.19)$$

Der Bereich zwischen der Planck- und der TeV-Brane ist ein Teil vom AdS5-Raum (Anti-de Sitter-Raum). Diese ist eine Lösung der Einstein-Gleichung im Vakuum für eine negative kosmologische Konstante.

Um den Zusammenhang zwischen der 4-dimensionalen Planckmasse und der fundamentalen Skala zu erhalten, benutzt man die 5-dimensional Gravitationswirkung, separiert den y -Anteil und führt die Integration aus. Durch Vergleich mit der 4-dimensionalen Gravitationswirkung erhält man

$$m_{Pl}^2 = \frac{M_f^3}{k} [1 - e^{-2k\pi R}]. \quad (2.20)$$

Für große kR hängt die fundamentale Skala M_f nur sehr schwach von R ab. Wir nehmen nun an, dass m_{Pl} , M_f und k alle in der gleichen Größenordnung sind. In diesem Fall gäbe es keine Hierarchie. Um nun zu verstehen, wie die Massenskalenunterdrückung auf unserer Brane zustande kommt, betrachten wir ein skalares Feld ϕ mit Masse m auf unserer Brane. Ihre Wirkung ist gegeben durch [2]

$$S_{TeV} = \int d^4x \sqrt{g_{TeV}} [g_{TeV}^{\mu\nu} (D_\mu \phi)(D_\nu \phi) + m^2 \phi^2], \quad (2.21)$$

wobei $g_{TeV}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(x, \pi)$ ist, also die Metrik auf unserer Brane. Unter Benutzung von $g_{\mu\nu}(x, y) = \bar{g}_{\mu\nu}(x) e^{-2kR\phi}$ folgt

$$S_{TeV} = \int d^4x \sqrt{\bar{g}} e^{-2kR\pi} [\bar{g}^{\mu\nu} (D_\mu \phi)(D_\nu \phi) + e^{-2kR\pi} m^2 \phi^2]. \quad (2.22)$$

Durch Renormierung des skalaren Feldes, d.h. $\phi \rightarrow e^{-kR\pi} \phi$, kürzt sich der zusätzliche Exponent vor dem kinetischen Term der Lagrange-Dichte weg. Man kann nun den so

¹⁰Die Metrik erhält man durch einen allgemeinen Ansatz der Form $ds^2 = e^{-2\sigma(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2$. Diese Metrik wird dann in die Einstein-Gleichung, unter Berücksichtigung der Randbedingungen, eingesetzt und die entsprechende Differentialgleichung für $\sigma(y)$ gelöst.

erhaltenen Massenterm mit (2.21) vergleichen und erhält

$$m = e^{-kR_c\pi} m_0. \quad (2.23)$$

Das besagt, dass die Massenskala auf unserer Brane exponentiell unterdrückt ist. Dies ist die Ursache dafür, dass die Gravitation so schwach ist. Um nun die Planckmasse auf die TeV-Skala zu drücken reicht ein $kR \simeq 12$. Da nun $k \sim m_{Pl}$ gilt, folgt für den Radius der Extra-Dimension $R \sim 12l_{Pl}$, also eine experimentell nicht nachweisbare Größe.

Auch im RS-Modell gibt es einen Turm von KK-Anregungen. Diese sind gegeben durch

$$m_n = x_n k e^{-\pi k R_c}, \quad (2.24)$$

wobei x_n die Nullstellen der Besselfunktion 1.Ordnung sind. Einige ihrer Werte sind in Tabelle 2.2 gegeben.

Tabelle 2.2: Nullstellen der Besselfunktion 1.Ordnung

$x_1 = 3.83171$	$x_5 = 16.47063$
$x_2 = 7.01559$	$x_6 = 19.61586$
$x_3 = 10.17347$	$x_7 = 22.76008$
$x_4 = 13.32369$	$x_8 = 3.83171$

Aus (2.24) folgt dann, dass die ersten KK-Anregungen im TeV-Bereich sind. Der Koppelungsparameter der Theorie ist $1/\Lambda_\pi$, wobei Λ_π die exponentiell unterdrückte Planckmasse ist, die wir auf 1TeV setzen wollen. Das RS-Modell sagt somit Teilchen vorher, die Massen im TeV-Bereich haben und nur TeV-unterdrückt sind und somit am LHC gefunden werden können.

Also zusammenfassend kann man sagen: die Planck-Skala ist die fundamentale Skala der Physik, da alle Parameter der Theorie diese Größe haben. Wir leben nur auf einer Brane, wo die Massenskala exponentiell unterdrückt ist und deshalb die Gravitation uns schwach erscheint.

3 Experiment

3.1 ADD-Modell

3.1.1 Gravitative und Astrophysikalische Einschränkungen

Wie bereits erwähnt, gibt es im ADD-Modell die Möglichkeit, dass der Radius der Extra-Dimension im Millimeter-Bereich ist. Erst seit einigen Jahren ist es überhaupt möglich, Abweichungen in diesen Bereichen zu messen.

Diese Experimente wurden z.B. mit Torsionspendeln gemacht [10], welche so eingestellt sind, dass sie nur Abweichungen vom normalen Potential messen. Für diese Experimente ist es sinnvoll, die folgende Notation für das Gravitationspotential zu verwenden

$$V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} \left[1 + \alpha e^{-r/\lambda} \right], \quad (3.1)$$

wobei der letzte Term Yukawa-Term genannt wird und die Abweichung vom Newtonschen Potential beinhaltet. Die gemessenen Werte sind in der Abbildung 3.1 dargestellt. Die gelb markierte Fläche ist der ausgeschlossene Bereich. Der violette Punkt entspricht gerade dem Wert für die zwei Parameter α und λ , für die das Gravitationspotential (3.1) einer Theorie mit zwei Extra-Dimensionen entspricht. Man sieht deutlich, dass dieser ausgeschlossen werden konnte. Hierdurch konnten dann untere Grenzen für den Radius und die fundamentale Skala gesetzt werden. Für den Radius kann man mit 95 % CL aussagen, dass $R < 44\mu m$ ist für $d = 2$ und dass die fundamentale Skala $M_f > 1,9 TeV$ sein muss. Der Fall für drei Extra-Dimensionen wird mit diesen Experimenten wohl nicht mehr ausgeschlossen werden können.

Zusätzlich zu den Gravitationsexperimenten gibt es noch unzählige Einschränkungen durch astrophysikalische Experimente [11]. Man würde z.B. erwarten, dass die KK-Gravitonen zur Energieemission der Supernovae beitragen. Dies konnte jedoch schon mit Hilfe von EGRET-Messungen der Energieemission von SN1987A ausgeschlossen werden und eine untere Grenze für die fundamentale Skala von $M_f > 14 TeV$ bei $d=2$ gesetzt werden. Messungen vom Hubble Space Telescope für die Luminosität von Pulsaren konnten sogar die untere Grenze auf $M_f = 750 TeV$ für $d=2$ anheben. Dies würde jegliche Chancen einer Beobachtung am LHC ausschließen. Jedoch bietet die Theorie einen großen Freiraum für die Variation der Parameter, wie die möglichen Arten von kompaktifizierten Volumina. Dadurch ist es möglich, die Massen der leichtesten KK-Gravitonen anzuheben, sodass sie nicht mehr in Supernovae erzeugt werden können.

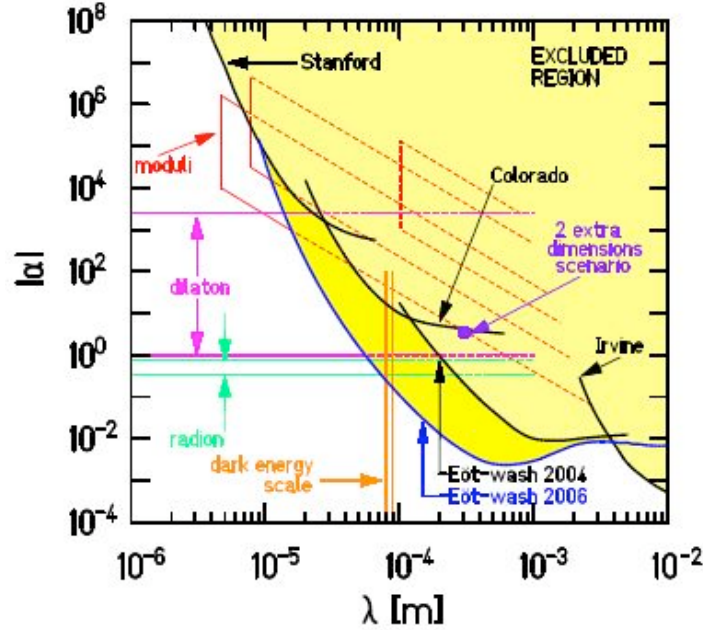


Abbildung 3.1: Beschränkungen an die Yukawa-Parameter α und λ [10].

3.1.2 Hadron-Kollider Experimente

Im ADD-Modell ist sowohl die direkte als auch die virtuelle Beobachtung der KK-Gravitonen möglich. In der direkten Beobachtung werden einzelne KK-Gravitonen erzeugt (siehe Abb.3.2), die mit dem Detektor nicht wechselwirken und deshalb zu fehlender Energie führen. Die Signaturen im Detektor sind Jets oder Photonen und fehlende Energie. Am Tevatron wurde bereits nach diesen Signaturen gesucht, es sind jedoch keine Abweichungen vom SM gefunden worden. Dadurch konnten untere Grenzen für die fundamentale Skala gesetzt werden [12](siehe Abb.3.3). Die besten Grenzen setzt hierbei LEP für kleine d , während für große d Tevatron die besseren Grenzen setzt. Beim LHC wird man in der Lage sein, für 2 Extra-Dimensionen bereits den Bereich $M_f < 9,1\text{TeV}$ ausschließen zu können. Es ist noch wichtig zu erwähnen, dass man hier mit einer effektiven Theorie rechnet, da keine Quantengravitationstheorie bekannt ist. Dies hat zur Folge, dass die Theorie nur sinnvolle Aussagen macht solange $\sqrt{s} < \mathcal{O}(M_f)$ gilt.

Zusätzlich zur direkten Erzeugung der Gravitonen ist es auch möglich, durch Abweichungen vom SM-Drell-Yan Wirkungsquerschnitt auf die KK-Gravitonen zu schließen. Da nämlich die Gravitonen an alle Teilchen koppeln, welche Masse haben, können sie auch als Austauscheteilchen dienen (siehe Abb.3.4). Der totale Wirkungsquerschnitt σ_{tot} ist nun von der Form [13]

$$\sigma_{tot} = \sigma_{SM} + \eta_G \sigma_{int} + \eta_G \sigma_G, \quad (3.2)$$

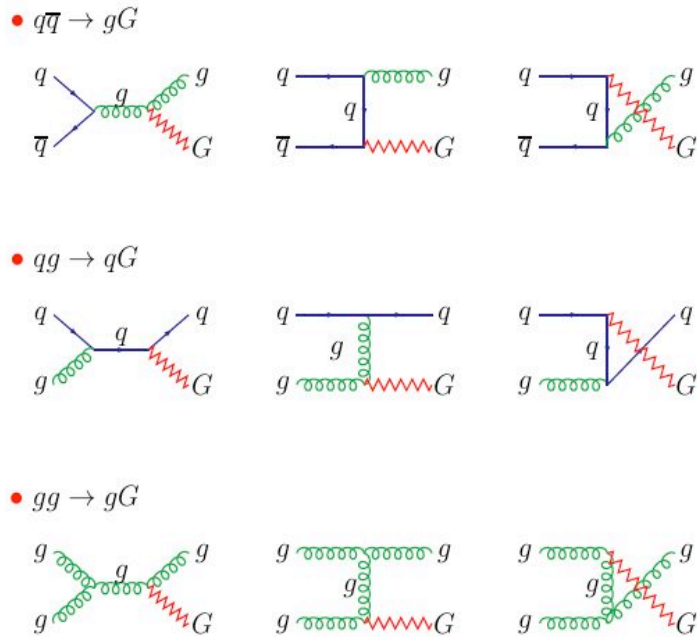


Abbildung 3.2: Direkte Erzeugung der KK-Gravitonen im ADD-Modell.

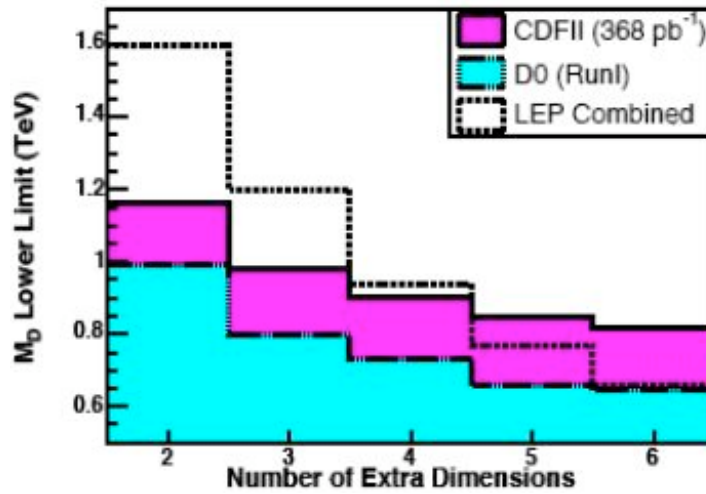


Abbildung 3.3: Untere Grenze für M_f bei D0,CDF und LEP [12].

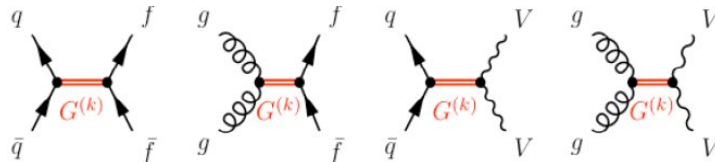


Abbildung 3.4: Virtueller Gravitonenaustausch: Feynman-Diagramme, welche zum Drell-Yan-Wirkungsquerschnitt beitragen.

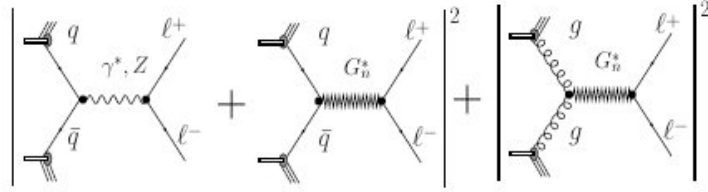


Abbildung 3.5: Zusätzliche Beiträge zum Drell-Yan-Wirkungsquerschnitt [13].

$$F = \begin{cases} 1 & \text{(GRW),} \\ \log\left(\frac{M_G^2}{M^2}\right), (n = 2), & \frac{2}{n-2}, (n > 2) \quad \text{(HLZ),} \\ \frac{2\lambda}{\pi} = \pm \frac{2}{\pi} & \text{(Hewett).} \end{cases}$$

Abbildung 3.6: Die von den Gruppen GRW, HLZ und Hewett berechneten Werte für F [13].

wobei σ_{int} und σ_G den Interferenz- und den direkten Graviton-Effekt berücksichtigen. Die zugehörigen Beiträge sind in Abb.3.5 zu sehen. Der Parameter η_G beschreibt die Stärke der Effekte der KK-Gravitonen. Nun haben drei Gruppen diese Berechnungen ausgeführt und haben jeweils unterschiedliche Definitionen. Mit $\eta_G = F/M_S^4$ sind die verschiedenen Definitionen in Abb.3.6 aufgelistet. M_S beschreibt hierbei den Cut-Off Parameter, der ebenfalls in der Größenordnung TeV liegen soll. Am D0-Experiment am Tevatron hat man nach den Effekten von Gravitonaustausch gesucht. In Abb.3.7 sieht man für den Dielektron und Diphoton-Kanal in 3-dimensionalen Plots die Ereigniszahl gegen die invariante Masse und deren Winkelverteilung aufgetragen. Das Signal für Extra-Dimensionen zeigt eine höhere Ereigniszahl bei hohen invarianten Massen im Vergleich zum Untergrund. Betrachtet man die Daten, sieht man, dass die Standard Modell Vorhersage gut mit dieser übereinstimmt und die einzelnen Ausreißer bei hoher invarianter Masse noch mit dem Untergrund vereinbar sind. In Tabelle 3.8 sind die unteren Grenzen für die unterschiedlichen Theorien und Anzahl Extra-Dimensionen angezeigt. Man erwartet, dass am LHC diese Grenzen deutlich angehoben werden, z.B. wird der Bereich unter 8TeV für 3 Extra-Dimensionen bei einer Datenmenge von $100fb^{-1}$ ausgeschlossen werden können [14].

3.2 RS-Modell

3.2.1 Hadron-Kollider Experimente

Für das RS-Modell erwartet man die direkte Beobachtung einzelner Resonanzen. Im Modell treten zwei freie Parameter auf, die Krümmungsskala k und Λ_π , die exponentiell unterdrückte Planckmasse. Im Experiment ist es üblicher, zwei andere Parameter zu

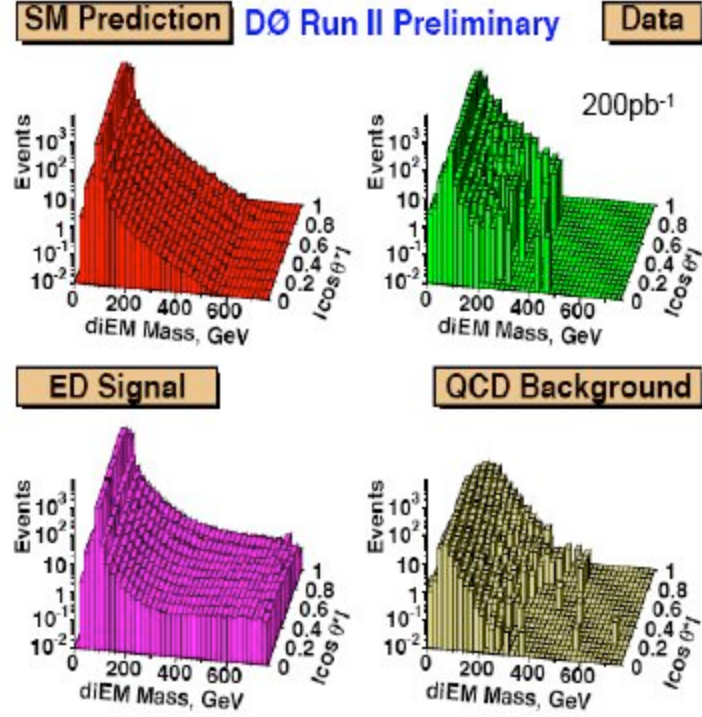


Abbildung 3.7: Verteilung der invarianten Masse gegen die Winkelverteilung. Links oben: Vorhersage des SM; Rechts oben: Daten; Links unten: das zu erwartende Signal für $\eta_G = 2$; Rechts unten: Untergrund [13]

Experiment	GRW [6]	HLZ [30]						Hewett [29]	
		$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$\lambda = +1$	$\lambda = -1$
CDF Run II	1.06	1.32	1.11	1.00	0.93	0.88	0.99	0.96	
DØ Run II	1.36	1.56	1.61	1.36	1.23	1.14	1.22	1.10	
DØ Run I + Run II	1.43	1.67	1.70	1.43	1.29	1.20	1.14	1.14	

Abbildung 3.8: Untere Grenze für die fundamentale Skala; $\lambda = \pm 1$ steht für konstruktive bzw. destruktive Interferenz im Formalismus von Hewett [13].

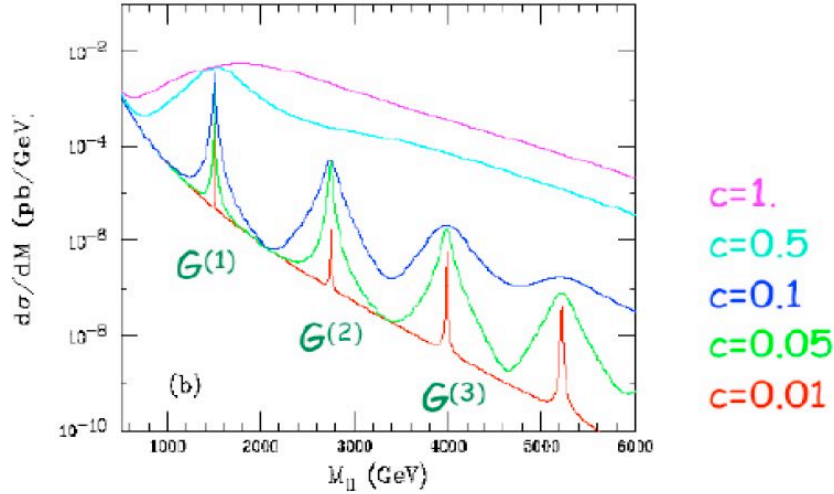


Abbildung 3.9: KK-Graviton Resonanzen für verschiedene c -Werte. Steigt die Breite, so ist die invariante Masse nicht mehr so gut zu bestimmen, jedoch steigt das Signal auch stark an, sodass man für hohe c -Werte ein deutlicheres Signal erhält als bei klaren Resonanzen.

verwenden [2]: die Masse der ersten KK-Anregung $m_1 = 3.83 \frac{k}{\bar{m}_{Pl}} \Lambda_\pi$ und $c = \frac{k}{\bar{m}_{Pl}}$, wobei \bar{m}_{Pl} die reduzierte Planckmasse ist. Dies ist vor allem deshalb sinnvoll, weil sowohl die Breite als auch der Wirkungsquerschnitt Funktionen von c sind. Es gilt $\Gamma_n \propto m_n c^2$ und $\sigma \propto c^2$. In Abb.3.9 sind einige Resonanzen für verschiedene c -Werte eingetragen. Der mögliche Parameter-Bereich ist in Abb.3.10 dargestellt. Er ist zum einen beschränkt durch die Anforderung $\Lambda_\pi < 10 TeV$, weil für größere Werte das Hierarchie-Problem nicht gelöst wäre, zum anderen durch die Anforderung $c < 0,1$, was aus Anforderungen an die maximale Krümmung folgt. Am Tevatron hat man im Dilepton und Diphoton-Kanal nach KK-Gravitonen gesucht [15] und keine Abweichungen von den SM-Vorhersagen finden können.

Um am LHC die RS-Gravitonen nachweisen zu können, muss man in der Lage sein, die Resonanzen von anderen neuen Teilchen, die man auch in diesem Energiebereich erwartet, zu unterscheiden [16]. Hierzu kann man zum einen verwenden, dass die Gravitonen universell koppeln. Dies erlaubt Aussagen über das Verzweungsverhältnis. Man erwartet z.B., dass $BR(G_n \rightarrow \gamma\gamma) = 2 \times BR(G_n \rightarrow l^+l^-)$ gilt. Desweiteren sind Gravitonen Spin-2 Teilchen und durch Analyse der Winkelverteilung gibt es eine weitere Möglichkeit, diese von anderen Teilchen zu unterscheiden (siehe Abb.3.11). Die zu erwartende Ereignisrate im Diphoton-Kanal [17] für ein KK-Graviton mit $m_1 = 1,5/3$ TeV ist in Abbildung 3.12 dargestellt. Das schwarze Histogramm stellt den Untergrund dar. Hier wird also ein deutliches Signal erwartet, falls es KK-Gravitonen gibt. In Abbildung 3.13 ist der Parameter-Bereich dargestellt und der Bereich links von der grünen bzw. blauen Linie ist der Bereich, den man am LHC untersuchen kann. Im Diphoton-Kanal wird

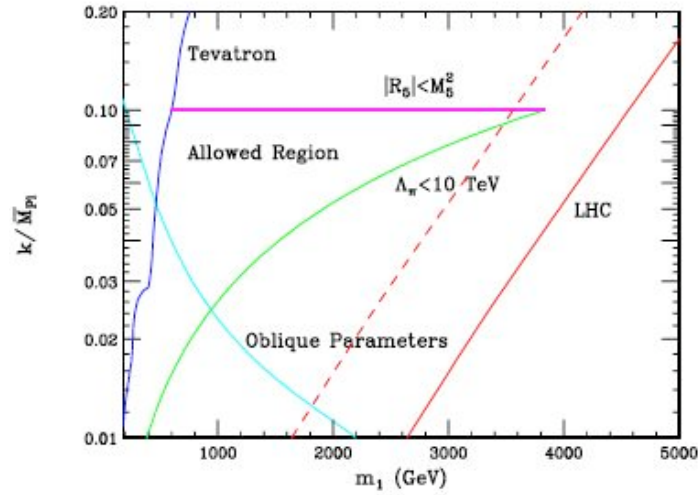


Abbildung 3.10: Mögliche Parameter-Bereich des RS-Modells für die Parameter c und m_1 . Einschränkungen: $\Lambda_\pi < 10 \text{ TeV}$ und $c < 0, 1$ [13].

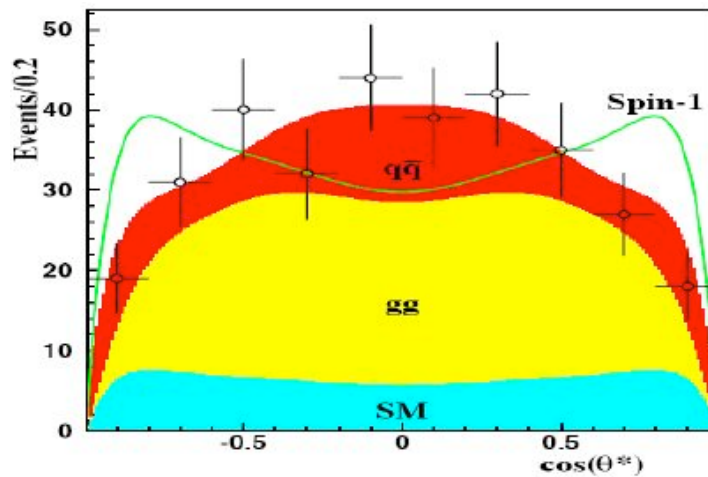


Abbildung 3.11: Monte-Carlo-Analyse für ein 1-TeV KK-Graviton bei 100 fb^{-1} . Die grüne Linie beschreibt die erwartete Winkelverteilung für ein Spin-1 Teilchen [16].

3 Experiment

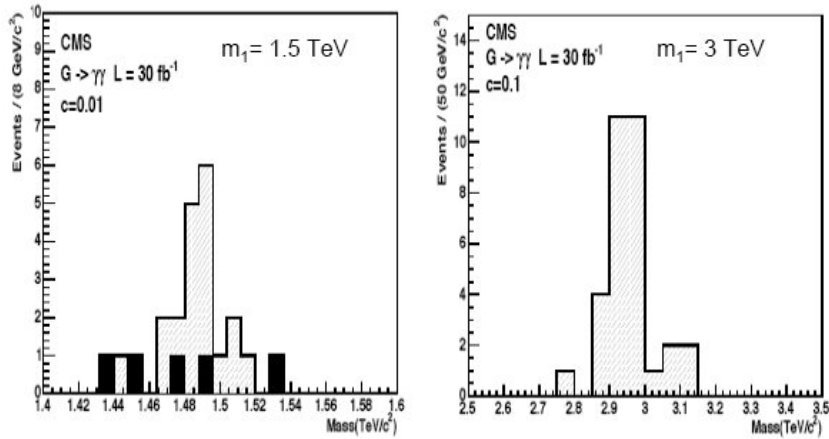


Abbildung 3.12: Ereigniszahl im Diphoton-Kanal. Das schwarze Histogramm stellt den zu erwartenden Untergrund dar. Links: $m_1 = 1.5\text{TeV}$ und $c = 0.01$; Rechts: $m_1 = 3\text{TeV}$ und $c = 0.1$ [17].

also bereits der ganze mögliche Parameter-Bereich bei einer Datenmenge von 30fb^{-1} untersucht werden können.

Zusammenfassend kann man sagen, dass der LHC die Möglichkeit bietet, das RS-Modell vollständig zu untersuchen. Die RS-Gravitonen können von anderen Teilchen unterschieden werden und der gesamte mögliche Parameter-Bereich ist bereits bei 30fb^{-1} erfassbar.

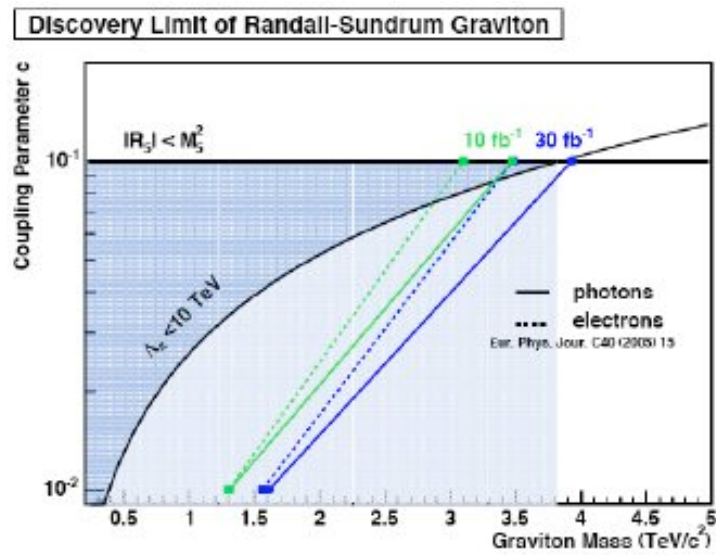


Abbildung 3.13: Parameter-Bereich des RS-Modells. Links von den Geraden ist der Bereich, in dem man eine 5σ -Signifikanz am CMS erreicht.

4 Mini-Schwarze-Löcher

Eine mögliche Konsequenz von Theorien mit Extra-Dimensionen sind sogenannte Mini-Schwarze Löcher (mini black holes) die in Beschleunigern erzeugt werden können [18].

Um die Idee zu verstehen, betrachten wir Schwarze Löcher, die nicht rotieren und keine Ladung tragen, also die Schwarzschildlösung. Der Schwarzschildradius R_S in 4 Dimensionen ist gegeben durch

$$R_S = \frac{2M_{BH}}{m_{Pl}^2}, \quad (4.1)$$

wobei M_{BH} die Masse des schwarzen Loches ist. Nun ist dieser Radius für kleine Massen sehr klein wegen der Planckmasse im Nenner. Dagegen gilt für den Schwarzschildradius in 4+d Dimensionen [11]

$$R_S = \left[\frac{2^d \pi^{(d-3)/2}}{d+2} \Gamma\left(\frac{d+3}{2}\right) \frac{M_{BH}}{M_f^{d+2}} \right]^{1/(d+1)}, \quad (4.2)$$

wo bereits die höherdimensionale Planckmasse durch M_f ersetzt wurde. Da in den hier betrachteten Modellen die fundamentale Skala in der Größenordnung TeV ist, ist die Unterdrückung nicht so groß wie im 4-dimensionalen Fall. Anders gesagt, da die Gravitation stärker bei kurzen Distanzen ist, ist der Ereignishorizont größer. Im Experiment kann es nun dazu kommen, dass bei hohen Energien $\sqrt{s} = M_{BH}$ die Protonen sich näher kommen als der Ereignishorizont. In diesem Fall entsteht ein Mini-Schwarzes Loch¹.

Man schätzt den Wirkungsquerschnitt hierfür mit dem geometrischen Wirkungsquerschnitt ab, d.h. $\sigma \simeq \pi R_S^2$. Dies hat zur Folge, dass, falls die Theorie korrekt ist, ein Schwarzes Loch pro Sekunde am LHC erzeugt wird. Die Ereignisrate ist gegen die Schwerpunktsenergie in Abb.4.1 dargestellt.

Die erzeugten schwarzen Löcher zerfallen nach sehr kurzer Zeit, d.h. $\tau \sim 10^{-25} - 10^{-27}$ s. Der Zerfall ist demokratisch. Dies hat zur Folge, dass die meiste Strahlung auf der Brane stattfindet, da alle Teilchen bis auf die Gravitonen auf diese beschränkt sind. Ihre Energie ist abhängig von der Hawking-Temperatur [18]

$$T_H = m_{Pl} \left[\frac{m_{Pl}}{M_{BH}} \frac{d+2}{8\Gamma\left(\frac{d+3}{2}\right)} \right]^{1/(d+1)} \frac{d+1}{4\sqrt{\pi}}. \quad (4.3)$$

Erstaunlicherweise hängt die Temperatur invers mit der Schwerpunktsenergie zusammen. Dies hat zur Folge, dass je schwerer das Schwarze Loch ist, desto kleiner die Energie der

¹Hierfür muss $\sqrt{s} > M_f$ sein, da ansonsten, wegen einer fehlenden Quantengravitation, keine Aussagen gemacht werden können.

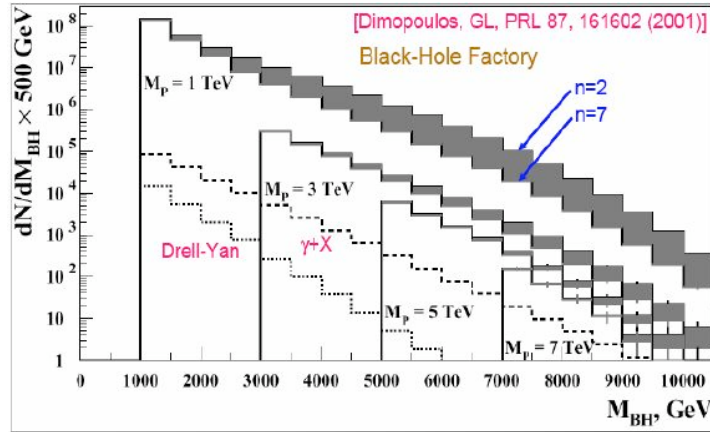


Abbildung 4.1: Anzahl schwarzer Löcher, die am LHC erzeugt werden, bei $100 fb^{-1}$, als Funktion der Masse des schwarzen Loches. n entspricht hierbei der Anzahl an Extra-Dimensionen. [18]

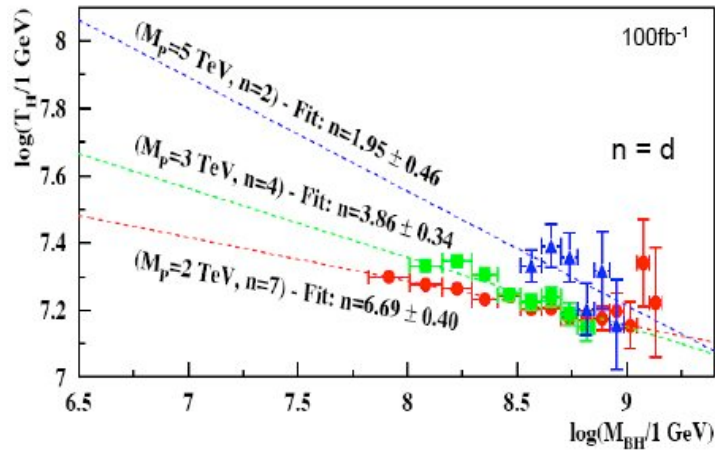


Abbildung 4.2: Temperatur gegen die Masse des schwarzen Loches in doppellogarithmischer Auftragung. Dies Darstellung bietet die Möglichkeit, die Anzahl der Extra-Dimensionen zu bestimmen.[18]

Zerfallsprodukte sein muss. Formel (4.3) bietet zusätzlich noch eine einzigartige Weise, die Anzahl der Extra-Dimensionen zu bestimmen (siehe Abb.4.2). Aus (4.3) folgt

$$\log T_H = -\frac{1}{d+1} \log M_{BH} + \text{const.} \quad (4.4)$$

Die Hawking-Temperatur bestimmt man hierbei aus dem Energiespektrum der Zerfallsleptonen/photonen und M_{BH} setzt sich aus der gesamten invarianten Masse zusammen.

Falls es diese Mini-Schwarze Löcher wirklich gibt, kommt die Frage auf, ob das das Ende für die Elementarteilchenphysik bedeutet. Erreicht man nämlich Energien bei der der Ereignishorizont größer wird als der Radius des Protons, so würden nur noch schwarze Löcher entstehen und somit naiv betrachtet keinen neuen Teilchen produziert werden. Jedoch würden dann die Zerfallskanäle der schwarzen Löcher die Möglichkeit bieten, neue Physik zu entdecken.

Es besteht die Möglichkeit, dass noch vor dem Start des LHC durch Untersuchung der kosmischen Strahlung Mini-Schwarze Löcher entdeckt werden.

5 Zusammenfassung

Wir haben gesehen, dass extra-dimensionale Theorien das Hierarchie-Problem lösen können. Des Weiteren machen sie konkrete Vorhersagen, die an aktuellen (Tevatron) und an zukünftigen (LHC, ILC) Beschleunigern überprüft werden können. Ein Nachteil ist sicherlich die große Auswahl an Anzahl, Art und Größe der Extra-Dimensionen. Welche Konfiguration gerade unser Universum beschreibt und ob diese dann überhaupt Vorhersagen machen, die falsifiziert werden können, ist eine offene Frage. Bisher gibt es keinerlei experimentelle Evidenz dafür, dass wir in einem höherdimensionalen Universum leben.

Nichtsdestotrotz würde die Bestätigung einer dieser Modelle die Sichtweise der Physik revolutionieren und es wäre sicherlich ein weiterer Schritt in Richtung einer "Theory of Everything"¹.

¹Die hier besprochenen Modelle sind zwar mit der String-Theorie vereinbar, wurden jedoch unabhängig von ihr formuliert. Das heisst eine Bestätigung dieser Modelle wäre nicht konsequenterweise eine Bestätigung der String-Theorie.

Literaturverzeichnis

- [1] T. Kaluza, Sitzungsber.Preuss.Akad.Wiss.Berlin (Math.Phys.) 1921:966-972
- [2] S. Hossenfelder, "Black holes in extra dimensions," Dissertation
- [3] O. Klein, Z. Phys. **37** (1926) 895
- [4] V. A. Rubakov, Phys. Usp. **44** (2001) 871 [arXiv:hep-ph/0104152].
- [5] V. H. Satheesh Kumar and P. K. Suresh, arXiv:gr-qc/0605016.
- [6] <http://www.sukidog.com/jpierre/strings/extradim.htm>
- [7] B. Zwiebach, "A first course in string theory," *Cambridge, UK: Univ. Pr. (2004)*
- [8] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, Phys. Rev. D **59** (1999) 086004
I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, Phys. Lett. B **436** (1998) 257
N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, "The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter," Phys. Lett. B **429** (1998) 263
- [9] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370
- [10] D. J. Kapner, T. S. Cook, E. G. Adelberger, J. H. Gundlach, B. R. Heckel, C. D. Hoyle and H. E. Swanson, Phys. Rev. Lett. **98**, 021101 (2007)
- [11] <http://pdg.lbl.gov/2004/reviews/extradims071.pdf>
- [12] A. Abulencia *et al.* [CDF Collaboration], [arXiv:hep-ex/0605101].
- [13] G. Landsberg [CDF Collaboration], *In the Proceedings of 32nd SLAC Summer Institute on Particle Physics (SSI 2004): Nature's Greatest Puzzles, Menlo Park, California, 2-13 Aug 2004, pp MOT006*
- [14] I. Belotelov *et al.*, CMS NOTE 2006/076 (2006)
- [15] V. M. Abazov *et al.* (D0 Collaboration), Phys.Rev.Lett.95:091801,2005
- [16] B. C. Allanach, K. Odagiri, M. A. Parker and B. R. Webber, JHEP **0009** (2000) 019
- [17] M.C. Lemaire, V. Litvin, H. Newman, CMS NOTE 2006/051 (2006)
- [18] S. Dimopoulos and G. Landsberg, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 161602