

Aufbau und Inbetriebnahme einer Stern-Gerlach-Apparatur

von
Lisa Felker

Bachelorarbeit in Physik
vorgelegt der
Fakultät für Mathematik, Physik und Informatik
im Juli 2009
angefertigt im III. Physikalischen Institut A
bei
Prof. Dr. T. Hebbeker

Ich versichere, dass ich die Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe,

Aachen, den

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theorie und Geschichte des Stern-Gerlach Versuchs	2
2.1	Historische Aspekte	2
2.2	Kraftwirkung im inhomogenen Magnetfeld	4
2.3	Klassisches magnetisches Moment	5
2.4	Magnetisches Moment des Bahndrehimpulses	5
2.5	Magnetisches Moment des Elektronenspins	6
3	Theoretische Aspekte zu Versuchsaufbau und -durchführung	8
3.1	Magnetisches Zweidrahtfeld	8
3.2	Teilchenbahn	11
3.3	Geschwindigkeitsverteilung im Ofen	12
3.4	Idealfall, Methode A	13
3.5	Realer Strahlquerschnitt	15
3.6	Asymptotisches Verhalten für große Felder, Methode B	17
4	Aufbau der Stern-Gerlach Apparatur	19
4.1	Prinzip	19
4.2	Schaltung	20
4.3	Detektor	21
4.4	CASSY	23
5	Installation der Apparatur	28
6	Durchführung des Versuchs	30
6.1	Heizen des Atomstrahlofens	30
6.2	Einfluss verschiedener Temperaturen	32
6.3	Messung der Intensitätsverteilung	34

7 Auswertung	35
7.1 Messungen	35
7.2 Bestimmung des Bohrschen Magnetons	36
7.2.1 Methode A	38
7.2.2 Methode B	39
7.3 Wertung	42
8 Schlussbemerkung	43
Literatur	I
A I-B-Kennlinie	III
B Poster	V

1 Einleitung

Gegenstand dieser Arbeit ist das 1921 erstmals von Otto Stern und Walther Gerlach durchgeführte Stern-Gerlach-Experiment (SGE). Ziel ist, diesen Versuch eigenständig aufzubauen und in Betrieb zu nehmen, sodass er für das Fortgeschrittenenpraktikum der Bachelorstudenten der Physik nutzbar ist. Dazu werden eine Versuchsbeschreibung und ein Plakat zur historischen Bedeutung des SGEs angefertigt und im Anhang beigelegt. Da es wichtig ist, Physik auch als Erkenntnisprozess darzustellen, wird zudem ein Kapitel der historischen Bedeutung und den geschichtlichen Hintergründen des SGE gewidmet.

Der Aufbau der Stern-Gerlach Apparatur erfolgte in Zusammenarbeit mit Benjamin Glauß. Insbesondere wurde die Versuchsbeschreibung gemeinsam angefertigt. Der Theorieteil zu dieser Versuchsbeschreibung wurde anhand der PHYWE-Anleitung[8] erarbeitet, er deckt sich im Wesentlichen mit dem Kapitel "Theoretische Aspekte zu Versuchsaufbau und -durchführung" dieser Arbeit.

Der Stern-Gerlach-Versuch ist sowohl der erste experimentelle Nachweis für die Richtungsquantelung magnetischer Momente, als auch dafür, dass die Quantenzahlen die Menge der Elektronenzustände abzählbar machen. Außerdem wird durch ihn belegt, dass nur die durch die Quantenzahlen beschriebenen Zustände auch real angenommen werden. Hierin liegt seine große historische Bedeutung, denn durch das SGE wurde die klassische Vorstellung, dass alle Orientierungen der magnetischen Momente in einem Atomstrahl gleich wahrscheinlich sind, zu Gunsten der Quantenphysik widerlegt. Zugleich ist an dem Versuch erkennbar, dass die niedrigste Drehimpulsquantenzahl l nicht 1, sondern 0 ist, und dass das magnetische Moment der s -Elektronen nur durch einen Eigendrehimpuls (Spin) erklärt werden kann.

Die Orientierungen der magnetischen Momente vermaßen Stern und Gerlach, indem sie einen Strahl von Silberatomen gleicher Geschwindigkeit quer zur Feldrichtung durch ein inhomogenes Magnetfeld schossen, wodurch der Atomstrahl entsprechend der Orientierung der magnetischen Momente seiner Atome in genau zwei Richtungen aufgespalten wurde.

In ihrem Experiment wählten Stern und Gerlach mit den Silberatomen chemisch recht inaktive und zugleich ungeladene Teilchen, da im Magnetfeld auf Ladungen eine wesentlich stärkere Ablenkung durch die Lorentzkraft entstanden wäre, als durch Wechselwirkung von Magnetfeld und magnetischen Momenten der Atome.

Das SGE muss nicht mit Silber durchgeführt werden, magnetisch entsprechen sich aufgrund der ähnlichen Elektronenkonfiguration alle einwertigen Atome mit nicht teilgefüllten inneren Elektronenschalen. Für das Fortgeschrittenenpraktikum soll aus Kostengründen mit einem Kaliumstrahl gearbeitet werden. Das äußerste Elektron ist dabei im Grundzustand ein $4s$ -, beim Silber ein $5s$ -Elektron.

2 Theorie und Geschichte des Stern-Gerlach Versuchs

Zum Verständnis und zur Auswertung des SGE sind einige theoretische Grundlagen nötig, die im Folgenden diskutiert werden sollen.

Zunächst wird der geschichtliche Hintergrund beschrieben, um einen Einblick in die Bedeutung des SGE für die Entwicklung und Interpretation der frühen Quantenphysik zu vermitteln.

2.1 Historische Aspekte

Otto Stern wurde am 17.02.1888 in Sorau, Schlesien geboren. Nach seinem Studium der physikalischen Chemie in Breslau wurde er 1912 Schüler von Einstein, zunächst in Prag, danach ab 1913 als Privatdozent in Zürich. 1915 wechselte er zum Institut für theoretische Physik nach Frankfurt, wo er mit dessen Leiter Max Born und mit Walther Gerlach zusammen arbeitete. Letzterer war am 01.08.1889 in Biebrich geboren und nach seiner Habilitation 1916 in Tübingen nach Frankfurt gewechselt, wo er zunächst als Assistent am Institut für Experimentalphysik unter Professor Wachsmuth und ab 1921 als außerordentlicher Professor wirkte. Hier in Frankfurt wurde die „für die Quantenphysik bahnbrechend gewordene Entdeckung des Stern-Gerlach-Effekts“ gemacht[7]. Als Schüler Einsteins wurde Otto Stern von Beginn seiner wissenschaftlichen Laufbahn an in die Arbeitsbereiche der statistischen Thermodynamik und der Molekulartheorie eingeführt, die wesentlich auf der in der Antike im 5. Jhdt. vor Christus besonders von Leukipp und Demokrit aus ihrer Philosophie heraus entwickelten Atomtheorie ruhte. Wenn auch schon 1738 Daniel Bernoulli auf der Atomthese aufbauend die kinetische Gastheorie begründet und so das Boyle-Mariottesche Gesetz hergeleitet hatte, so wurde doch erst durch die 1803 gegebene Daltonsche Erklärung der Gesetze der konstanten und multiplen Proportionen die Atomvorstellung im allgemeinen Bewusstsein mit elementarer chemischer Erfahrung verbunden. Dennoch aber blieb die Existenz von Atomen unbewiesen, der Positivist Ernst Mach bezeichnete sie als Gedankenkonstrukte, denen keine reale Bedeutung zukomme, und selbst Max Planck glaubte noch 1896, dass sich aus einer Atomhypothese ein Widerspruch zum zweiten Hauptsatz herleiten lasse.

Erst „im Jahre 1905 lieferte Einstein in seiner Theorie der Brownschen Bewegung auf rein klassischer Grundlage einen direkten und abschließenden Beweis für die atomistische Struktur der Materie“[5]. Durch das im Jahr 1900 von Max Planck veröffentlichte Strahlungsgesetz angeregt, überprüfte Einstein ab 1906 die Verträglichkeit der Quantenhypothese mit der Wärmetheorie durch ihre Anwendung auf die Energie der Atom- und Molekularbewegungen. So fand er 1907 eine Näherungsformel für die spezifischen Wärme fester Körper, „die sich später zwar im Einzelnen nicht vollkommen bestätigt hat, aber doch die Grundlagen für die weitere Entwicklung der neueren kinetischen Atomistik schon richtig angibt.“ [10]

Hierauf aufbauend begründete Max Born in Frankfurt eine Quantentheorie der spezifischen Wärme, womit sich im Rahmen der statistischen Thermodynamik und Molekulartheorie ein breiter Arbeitsbereich entfaltete, in den Otto Stern von Einstein eingeführt wurde und in dem er als dessen

Assistent mit Born zusammen arbeitete. Stern gelang eine Bestätigung der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung, indem er zur Beobachtung eine Apparatur zur Erzeugung eines Atom- oder Molekularstrahls im Vakuum nutzte und wesentlich verfeinerte. Die so von ihm in die Atomphysik eingeführte Molekularstrahlmethode entwickelte er zu einem Hauptinstrument der damaligen Forschung. Das veranlasste Bohr in Briefen an Einstein zu den Aussagen „Durch ihn angeregt, habe auch ich damals ganz erfolgreich experimentiert“ (Es ging dabei um Untersuchungen von Atomen mit Hilfe von Atomstrahlen) und „Stern hat unser kleines Institut in die Höhe gebracht“[1]. Natürlich wurde nicht nur von den Schülern Einsteins nach dessen Beweis der Atomstruktur im Jahre 1905 der weitere Verlauf der Atomwissenschaft interessiert verfolgt. Nach dem nur fünf Jahre später von Ernest Rutherford und auch dem 1913 von Nils Bohr entwickelten und schon 1914 von Arnold Sommerfeld erweiterten Atommodell sollten unter anderen die Atome des Wasserstoffs, der Alkalimetalle und des Silbers kleine Magnete sein. Dies war auch durch spektroskopische Beobachtungen am Zeeman-Effekt belegt. Laut Bohr und Sommerfeld sollte dieser Magnetismus gequantelt sein, Peter Debye hatte postuliert, dass dies auch für die Parallelkomponente zu einem äußeren Feld gelte, was als Orientierungsquantelung bezeichnet wird.

Otto Stern erkannte, dass solche Quantelungen mit seiner Atomstrahlmethode im inhomogenen Magnetfeld erkennbar sein müssten, und veröffentlichte dazu 1921 das Prinzip des Versuchs. Allerdings waren zunächst seine Apparatur weiter zu verfeinern und Magnete zu entwickeln, die bereits in Größenbereichen der Atome deutliche Inhomogenitäten aufzeigen. Diese Arbeit ging er mit Walther Gerlach an und erhielt 1922 ein befriedigendes Ergebnis, auf das inzwischen die Atomforscher voller Interesse gewartet hatten. Stern selbst vermutete eine Aufweitung des Gesamtstrahls im Sinne der klassischen Vorstellung, ebenso Debye, da er seine Hypothese der Richtungsquantelung lediglich als Rechenvorschrift für Elektronen ansah und nicht als physikalische Realität, Bohr erwartete entsprechend einem Bahndrehimpuls der Quantenzahl $l = 1$ durch Parallel- und Antiparallelstellung (allein $m = 1$ und $m = -1$) eine Aufspaltung in zwei symmetrisch zur Strahlungsachse verlaufende Teilstrahlen und Sommerfeld schwankte zwischen der Erwartung eines Strahlungstriplets mit einem zusätzlichen unabgelenkten Strahl ($m = 0$) und der Vorstellung von Debye.

Das Ergebnis zeigte eine Aufspaltung in zwei Teilstrahlen, die auch fast genau so groß ausfiel, wie es der Annahme von Bohr entsprach. Somit war die Quantenhypothese auch bezüglich der Orientierungsquantelung eindeutig belegt, und zwar in dem Sinne, dass die Quantenphysik nicht nur die Menge aller real existierenden Elektronenzustände als Abzählungsvorschrift liefert, sondern diese Zustände exakt und vollständig beschreibt. Dennoch aber sollte sich die Vorstellung Bohrs als falsch erweisen, indem zu einer Bahnquantenzahl $l = 1$ die drei Einstellungen $m = -1; 0$ und 1 gehören. Erst als Pauli 1925 im Zuge seines Ausschließungsprinzips eine vierte Quantenzahl postulierte, die Georg Uhlenbeck als weiteren Freiheitsgrad der Elektronen ansah, „als ob jedes Elektron einen Spin besäße“[5] und als L. H. Thomas die unerwartete Höhe des Spinmoments (Landé-Faktor ≈ -2 statt -1) durch eine relativistische Berechnung erklärte, fand das SGE eine endgültige Erklärung: Nicht durch genau zwei Einstellungen der Orientierung des Bahndrehimpulses ist die Aufspaltung in zwei Teilstrahlen erklärbar, sondern durch die zwei Spineinstellungen

für $s = \pm \frac{1}{2}$, die Halbzahligkeit der Spinquantenzahl wird durch den Landé-Faktor $g_s = -2$ ausgeglichen, womit die „zufällig“ erscheinende Übereinstimmung mit der quantitativen Erwartung von Bohr geklärt ist.

2.2 Kraftwirkung im inhomogenen Magnetfeld

In den folgenden Kapiteln sollen die Grundlagen des SGE erläutert werden. Der experimentelle Ansatz besteht in der sogenannten Atomstrahlmethode von Otto Stern, nach der ein Atomstrahl senkrecht in ein inhomogenes Magnetfeld eingeschossen wird.

Atome, die ein magnetisches Moment $\vec{\mu}$ mit einer Parallelkomponente zum Feld besitzen, erfahren in ihm eine Kraft, die zu einer messbaren Ablenkung führt. Aus der Ablenkung lässt sich diese Parallelkomponente quantitativ bestimmen.

Damit kann die klassische Erwartung (siehe Kapitel 2.3) widerlegt und die quantenphysikalische, nach der diese Orientierungskomponente quantisiert ist (Orientierungsquantelung), bestätigt werden.

In einem homogenen Magnetfeld besteht lediglich eine Ausrichtungswirkung auf die magnetischen Momente der eingestrahlten Atome. Eine beschleunigende Kraft ergibt sich nur im inhomogenen Feld, da dort die Dichte der Feldlinien ortsabhängig ist. Die Kraft auf der Seite mit dichteren Feldlinien ist größer, als die auf der anderen Seite.

Die ablenkende Kraft ist demnach von der Höhe der Inhomogenität und natürlich von der Größe der Parallelkomponente des magnetischen Moments der Atome abhängig.

Um den Zusammenhang dieser Kraft mit der Orientierung des magnetischen Moments eines Kaliumatoms zu bestimmen, soll zunächst ein Koordinatensystem festgelegt werden:

Die Bewegung des Atomstrahls vor Eintreffen in das Magnetfeld sei in x -Richtung, das B -Feld in z -Richtung orientiert. Es gelte

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial B}{\partial z} \neq 0.$$

In diesem Feld erhalten Teilchen mit magnetischem Moment $\vec{\mu}$, die potentielle Energie

$$E_{pot} = -\vec{\mu}\vec{B} = -\mu_z B_z.$$

Es wird also auf sie die folgende Kraft ausgeübt:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\vec{\nabla} E_{pot} \\ &= -\vec{\nabla} (-\vec{\mu}\vec{B}) \\ &= -\mu_z \cdot \frac{\partial B}{\partial z} \cdot \vec{e}_z \end{aligned} \quad (1)$$

Auch aus dieser Gleichung erkennt man, warum beim SGE ein inhomogenes Feld benutzt werden muss. Bei einem homogenen Feld wäre $\frac{\partial B}{\partial z}$ und somit die resultierende Kraft gleich Null. Die Ato-

me würden also keine Ablenkung erfahren.

Aus der resultierenden Ablenkung von Probeatomen kann die Kraft (Gleichung 1) ermittelt werden. Dies wird im SGE genutzt, um die Orientierungskomponente (Parallelkomponente) des magnetischen Moments der Atome zu bestimmen. Zunächst aber soll hier die klassische und anschließend die quantenphysikalische Erwartung des magnetischen Moments von Silber- und Kaliumatomen quantitativ beschrieben werden.

2.3 Klassisches magnetisches Moment

Klassisch betrachtet stellt ein bewegtes Elektron einen Strom I dar. Umläuft dieses auf einer Kreisbahn mit dem Radius r und der Geschwindigkeit v einen Atomkern, so erzeugt es dabei ein magnetisches Moment μ_e . Dieses ergibt sich aus dem Produkt des Stromes mit der eingeschlossenen Fläche $A = \pi \cdot r^2$ zu

$$\mu_e = I \cdot A = -\frac{ev}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = -\frac{e}{2m_e} \cdot L.$$

Dabei ist die Größe L der Bahndrehimpuls des Elektrons mit der Masse m_e und der Ladung e . Um diese Formel auf analoge Fälle anwenden zu können, wurde der sogenannte Landé-Faktor g eingeführt. Er wird für umkreisende Elektronen hier mit g_L bezeichnet und wurde für sie mit dem Wert -1 angesetzt. Das magnetische Moment des umkreisenden Elektrons ist damit gegeben durch

$$\mu_e = g_L \cdot \frac{e}{2m_e} \cdot L.$$

Mit dem Bohrsches Magneton

$$\mu_B = \mu(\hbar) = -\frac{e\hbar}{2m_e} \approx 9.24 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2$$

und unter Einbezug der Richtung, lässt sich diese Gleichung umschreiben zu

$$\vec{\mu}_e = g_L \cdot \frac{\mu_B}{\hbar} \cdot \vec{L}. \quad (2)$$

Da der Drehimpuls L in der klassischen Physik kontinuierlich veränderbar ist, kann das magnetische Moment also alle möglichen Werte und Richtungen annehmen. Selbst, wenn der Bahndrehimpuls wie im Bohrschen Atommodell eindeutig festgelegt ist, so bleibt klassisch gesehen seine Orientierung im Raum frei. Die Orientierungskomponente $\mu_{e,z}$ ist gleichmäßig verteilt auf alle Werte zwischen $-\mu_e$ und $+\mu_e$. Dem widerspricht im SGE die Aufspaltung in diskrete Linien.

2.4 Magnetisches Moment des Bahndrehimpulses

Silber und Kalium haben im Grundzustand je ein einzelnes Valenzelektron, beim Silber in der $5s$ -, beim Kalium in der $4s$ -Unterschale. Bei beiden Metallen addieren sich nach der Hundschen

Regel die Bahndrehimpulse der inneren Elektronen genau zu Null[2]. Daher kann das magnetische Moment nur allein durch das 5s- bzw. das 4s-Elektron, erzeugt werden.

Im quantenmechanischen Bild ist der Bahndrehimpuls diskret gegeben durch

$$|L| = \sqrt{l \cdot (l + 1)} \hbar$$

mit ganzzahligen, positiven Werten von l , die Formel 2 behält ihre Gültigkeit mit unverändertem Landé-Faktor $g_L = -1$.

Die Projektion

$$L_z = m_l \hbar$$

dieses Bahndrehimpulses auf die z-Achse (Quantisierungsachse) ist nach der Quantenphysik ebenfalls quantisiert und kann wegen der Bedingung $|m_l| \leq l$ mit ganzzahligem m_l genau $2l + 1$ Werte annehmen. Bei $l = 1$ würden sich demnach drei mögliche Orientierungen ergeben, bei $l = 0$ nur eine. Beidem widerspricht im SGE die Aufspaltung in genau zwei Teilstrahlen. Demnach kann die Aufspaltung nicht durch den Bahndrehimpuls bedingt sein. Zudem muss dieser im SGE Null sein, da anderenfalls eine vielfältigere Aufspaltung des Atomstrahls folgen würde. Entsprechend gilt auch auf der s-Unterschale im Bohr-Sommerfeldschen Atommodell $l = 0$, im Grundzustand haben Silber- und Kaliumatome somit auch keinen Bahndrehimpuls. Auch dieses widerspricht der klassischen Vorstellung eines den Atomkern umlaufenden Elektrons.

2.5 Magnetisches Moment des Elektronenspins

Das Ergebnis des SGE widerlegt also sowohl die klassische Vorstellung vom magnetischen Moment, als auch die Vorstellung, dass das magnetische Moment eines Silberatoms durch den Bahndrehimpuls \vec{L} bestimmt ist¹. Hierin zeigt sich die Notwendigkeit einer Erweiterung der Theorie durch Einführung einer neuen Quantenzahl, die die Aufspaltung in zwei Teilstrahlen erklären kann.

Eine vierte Quantenzahl hat Pauli postuliert, die nach Uhlenbeck einen Elektronenspin festlegt. Unter dieser Annahme wird das magnetische Moment eines Silberatoms durch den Spin \vec{S} des 5s-Elektrons bestimmt, das eines Kaliumatoms durch den Spin des 4s-Elektrons. Es gilt dann in Analogie zur Formel 2

$$\vec{\mu}_s = g_s \cdot \frac{\mu_B}{\hbar} \cdot \vec{S}$$

mit dem Landé-Faktor für Elektronenspins g_s . Der aber kann klassisch nicht hergeleitet werden, sondern nur relativistisch, und zwar zu $g_s \approx -2.0024$ [5].

Die z-Komponente des Spins hat die Eigenwerte

$$S_z = m_s \hbar$$

¹sofern man die Möglichkeiten der Orientierungsquantelungen (bei $l = 1$ neben $m = \pm 1$ auch $m = 0$) voraussetzt

mit den Spinquantenzahlen

$$m_s = \pm \frac{1}{2}.$$

Für die Projektion des magnetischen Moments auf die z -Achse gilt demnach

$$\mu_{s,z} = g_s \mu_B m_s.$$

Da offenbar

$$F(-\mu_s) = -F(\mu_s)$$

gilt, werden die Atome mit Eigenwert $m_s = +\frac{1}{2}$ nach der Beziehung 1 entgegengesetzt zu denen mit $m_s = -\frac{1}{2}$ abgelenkt. Der Strahl spaltet sich also in zwei Teilstrahlen ungefähr gleicher Intensität auf.

Dies steht im Einklang mit dem Ergebnis des SGE. Damit ist die Spinthese verifiziert. Durch eine exakte Auswertung des SGE ist nun entweder unter Vorgabe des Bohrschen Magnetons experimentell der Landé-Faktor für Elektronenspins bestimmbar, oder umgekehrt aus dem Landé-Faktor der Wert des Bohrschen Magnetons verifizierbar.

3 Theoretische Aspekte zu Versuchsaufbau und -durchführung

In diesem Kapitel werden die zur Auswertung des Versuchs benötigten Grundlagen behandelt. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, wurden diese gemeinsam von Herrn Glauß und mir, wesentlich auf der Beschreibung des Herstellers [8] basierend, erarbeitet. Die Rechnungen wurden selbstständig überarbeitet, sie haben sich im Original als teilweise fehlerhaft erwiesen.

In Einverständnis mit PHYWE wurden einige Bilder (Abbildungen 1; 3) aus ihrer Versuchsbeschreibung übernommen.

3.1 Magnetisches Zweidrahtfeld

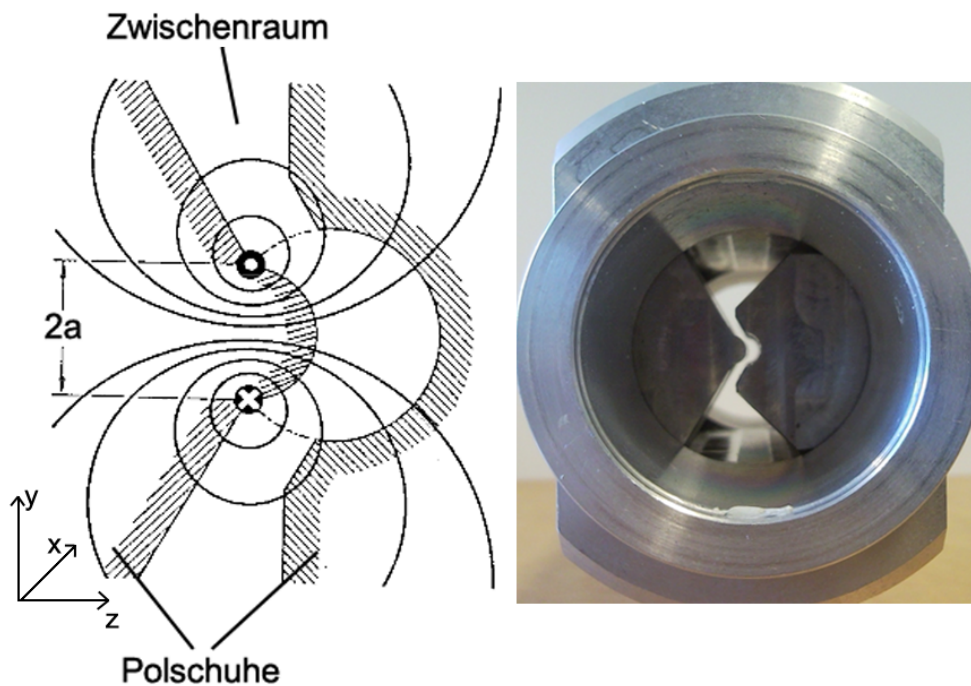


Abbildung 1: Polschuhe zur Erzeugung eines Zweidrahtfeldes[8]

Zur Erzeugung des inhomogenen Magnetfeldes dienen die in Abbildung 1 gezeigten Polschuhe. Durch ihre spezielle Form bilden sie ein Feld, wie es von zwei parallelen Drähten mit dem Abstand $2a$ und entgegengesetzter Stromrichtung erzeugt wird. Dieses Zweidrahtfeld ist für die Aufspaltung des Atomstrahls besonders geeignet, da es für den Atomstrahl eine günstig liegende Durchlaufebene nahezu konstanter Feldinhomogenität enthält, das heißt eine Ebene mit praktisch konstantem Feldgradienten $\frac{\partial B}{\partial z}$. Damit erfahren die beteiligten Atome eine weitgehend konstante Kraft, wodurch die Auswertung wesentlich vereinfacht wird. Dies wird bei Justierung des Atomstrahls in

einem Abstand von etwa $\sqrt{2}a$ zu der Ebene der fiktiven Drähte nahezu erreicht, wie im Folgenden gezeigt wird:

Die magnetische Induktion zweier antiparalleler Ströme mit dem Abstand $2a$ ergibt sich durch Addition ihrer einzelnen Komponenten

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{I}_i \times \vec{r}_i}{2 \cdot \pi \cdot r_i^2}.$$

Mit $\vec{I}_1 = -\vec{I}_2 = \vec{I} \perp \vec{r}_i$ folgt

$$\begin{aligned} B(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I a}{\pi r_1 r_2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Die gesuchte Ebene muss aus Symmetriegründen parallel zu der Ebene liegen, die beide Leiter enthält. Um ihren Abstand von diesen Leitern zu ermitteln, wird ein Koordinatenkreuz gewählt, in dem sie durch $z = 0$ festgelegt ist und die Zwei-Leiter-Ebene durch $z = -z_0$ (siehe Abb.2).

Aus Abbildung 2 folgen die Zusammenhänge für die Abstände r_1 und r_2 :

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (a - y)^2 + (z + z_0)^2 \\ r_2^2 &= (a + y)^2 + (z + z_0)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Damit ergibt sich durch Einsetzen von Gleichung 4 in 3 für B

$$B(y, z) = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot a}{\pi} \cdot \left[(a^2 - y^2)^2 + 2(z + z_0)^2 (a^2 + y^2) + (z + z_0)^4 \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung nach z folgt für die Feldinhomogenität

$$\frac{\partial B}{\partial z} = -\frac{2 \cdot \mu_0 \cdot I \cdot a \cdot (z + z_0)}{\pi} \cdot \frac{a^2 + y^2 + (z + z_0)^2}{\left[(a^2 - y^2)^2 + 2(z + z_0)^2 (a^2 + y^2) + (z + z_0)^4 \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (5)$$

Bei $z = 0$ soll die Inhomogenität an jeder Stelle y gleich sein, die Abhängigkeit der Inhomogenität von y also verschwinden. Diese Randbedingung definiert mit Gleichung 5 eine Ebene. Um diese Ebene zu finden, wird $\frac{\partial B}{\partial z}$ an der Stelle $y = 0$ um y^2 bis zur ersten Ordnung entwickelt. Die Näherung ergibt

$$\frac{\partial B}{\partial z}(y, z) \approx -\frac{2\mu_0 I \cdot a \cdot (z + z_0)}{\pi (a^2 + (z + z_0)^2)^2} \cdot \left[1 + 2y^2 \cdot \frac{2a^2 - (z + z_0)^2}{(a^2 + (z + z_0)^2)} \right].$$

Für $z = 0$ verschwindet die Abhängigkeit von y , also für

$$2a^2 = z_0^2 \Leftrightarrow z_0 = \sqrt{2}a.$$

(Tatsächlich wird der Atomstrahl in einem Abstand von $1.3a$ zu den fiktiven Drähten platziert². Das macht einen Unterschied von $\sim 0.11a \ll z_0$. Die Inhomogenität kann auch in diesem Bereich als hinreichend konstant angesehen werden.)

Für die Berechnung des magnetischen Moments ist eine möglichst genaue Kenntnis der Feldin-

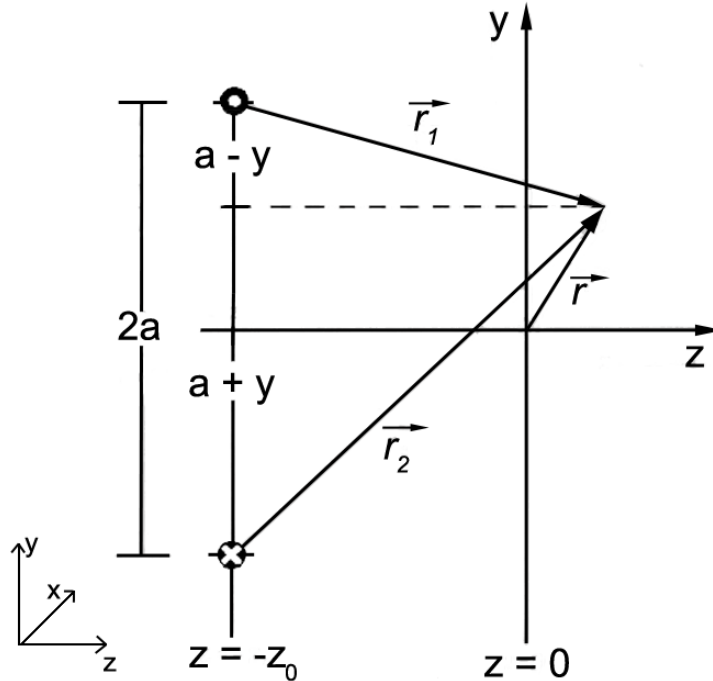


Abbildung 2: Festlegung des Koordinatensystems

mogenität notwendig. Diese kann in der Praxis nicht direkt gemessen werden, aber sie kann unter der Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen B und $\frac{\partial B}{\partial z}$ für kleine Ablenkungen z aus der magnetischen Feldstärke berechnet werden. Um nun den Proportionalitätsfaktor

$$\epsilon = \left| \frac{\partial B}{\partial z} \right| \cdot \frac{a}{B}$$

in der Umgebung von $y = 0$ zu finden, wird wie oben $\epsilon(y, z)$ an der Stelle $y = 0$ bis zur ersten Ordnung um y^2 entwickelt:

$$\epsilon(y, z) \approx \frac{2a(z + z_0)}{a^2 + (z + z_0)^2} \cdot \left(1 + \frac{3a^2 - (z + z_0)^2}{(a^2 + (z + z_0)^2)^2} \cdot y^2 \right)$$

Das Blendensystem des Apparates ist so gestaltet, dass der Atomstrahl eine Breite von etwa $\frac{4}{3}a$ in y -Richtung und eine Breite von $2D$ in z -Richtung besitzt. Im Bereich dieses Strahlkastens ändert sich $\epsilon(y, 0)$ geringfügig mit y , daher wird zur Berechnung der Inhomogenität der Mittelwert aus dem höchstmöglichen Wert $\epsilon(\frac{2}{3}a, 0) \approx 0.9894$ und dem niedrigsten $\epsilon(0, 0) \approx 0.9428$

²Dies geht auf einen Vorzeichenfehler des Herstellers zurück.

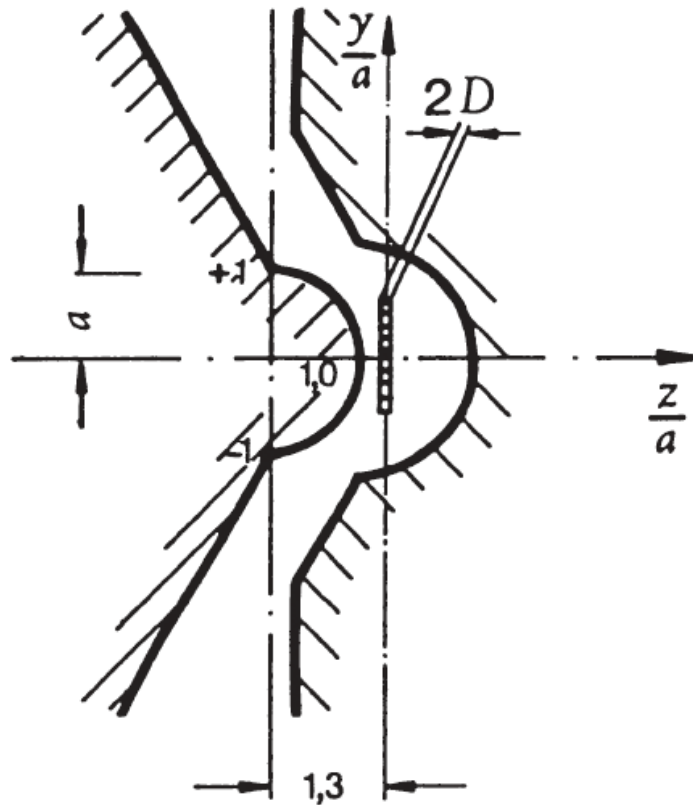


Abbildung 3: Position des Atomstrahls beim Eintreffen in den magnetischen Analysator[8]

gebildet. Es ergibt sich so für den Umrechnungsfaktor $\epsilon \approx 0.9661$. Damit folgt für die Umrechnung vom Magnetfeld auf die Inhomogenität

$$\frac{\partial B}{\partial z} = 0.9961 \cdot \frac{B}{a}.$$

3.2 Teilchenbahn

Zur Auswertung des SGEs muss der Zusammenhang zwischen der Atommasse M , der Geschwindigkeit und der Bahn eines einzelnen Teilchen berechnet werden (Abbildung 4: Das Teilchen im Auftreffort $u^{(2)}$ ist schneller als das, welches in $u^{(1)}$ auftrifft. Das Teilchen in $u^{(3)}$ unterscheidet sich durch die Spinorientierung von den anderen beiden.). Dieses durchläuft zunächst das Magnetfeld der Länge L , wofür es die Zeit $\Delta t = \frac{L}{v}$ benötigt. Es gilt $\Delta z \ll L$, sodass die Näherung $\vec{v} \approx \vec{v}_x$ genutzt werden kann. Die Ablenkung Δz , die die Teilchen dabei in z -Richtung erfahren, ist gegeben durch

$$\Delta z = \frac{1}{2} \ddot{z} (\Delta t)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_z}{M} \cdot (\Delta t)^2.$$

Die Geschwindigkeit \dot{z} in z -Richtung ist beim Verlassen des Magnetfeldes über den Impuls

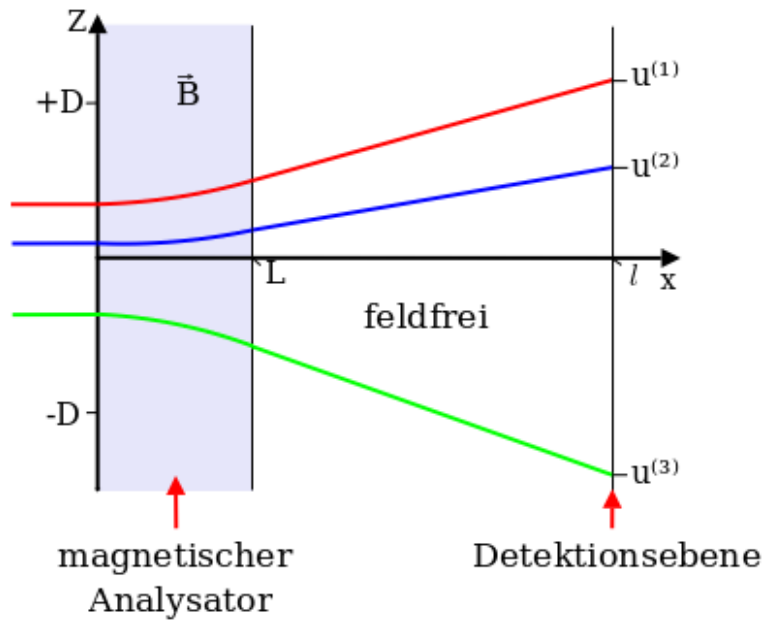


Abbildung 4: Bahn einzelner Teilchen vom Eintritt in den magnetischen Analysator bis zur Detektionsebene: x ist die Ausbreitungsrichtung des Atomstrahls, z die Richtung der Feldinhomogenität

$$M\dot{z} = F_z \cdot \Delta t$$

der Teilchen gegeben. Mit dieser Geschwindigkeit bewegen sie sich bis zum Detektor an der Position $x = l$ gleichförmig, geradlinig weiter. Die Gesamtzeit t_{ges} , die vom Eintreten in das Magnetfeld bis zum Erreichen des Detektors benötigt wird, ist also $t_{ges} = \frac{l}{v}$. Damit lässt sich nun der Auftreffort u der Teilchen in Abhängigkeit ihrer Geschwindigkeit und der Feldinhomogenität berechnen:

$$\begin{aligned} u &= z_0 + \Delta z + \dot{z} \cdot (t_{ges} - \Delta t) \\ &= z_0 + \frac{L \cdot l}{Mv^2} \cdot \left(1 - \frac{L}{2l}\right) \cdot \mu_z \frac{\partial B}{\partial z} \end{aligned} \quad (6)$$

Schnellere Teilchen werden also weniger abgelenkt, sie sind dem Magnetfeld kürzer ausgesetzt.

3.3 Geschwindigkeitsverteilung im Ofen

Für die Teilchen des Atomstrahls wollen wir nun die Verteilungsfunktion der Geschwindigkeiten im Ofen finden, um damit auf die Ortsabhängigkeit der Teilchenstromdichte in der Detektorebene schließen zu können. Im Ofen genügen die Kalium-Atome bei der Temperatur T der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung. Für die Teilchenzahl dn mit einer Geschwindigkeit zwischen v und

$v + dv$ gilt also

$$dn \sim e^{-\frac{Mv^2}{2kT}} v^2 dv.$$

Auch die Teilchen des Atomstrahls, die aus dem Ofen austreten, unterliegen dieser Proportionalität. Jedoch spielen hier noch weitere Aspekte eine Rolle. So geht der Ursprungsort der Teilchen im Ofen als geometrische Eigenschaft unter der Annahme einer geradlinig gleichförmigen Bewegung als folgende Proportionalität ein:

$$dn \sim v dv$$

Soll die Teilchenzahl, welche zwischen z und $z+dz$ im Detektor registriert wird, angegeben werden, so geht letztendlich das magnetische Moment der Atome ein, beschrieben durch die Funktion $\Phi_m(z)$. Dabei steht der Index m für die zwei möglichen Orientierungen. Demnach gilt

$$dn \sim \Phi_m(z) dz.$$

Unter Berücksichtigung eines Normierungsfaktors ergibt sich zusammengefasst als gesuchte Verteilungsfunktion

$$d^2 n = \frac{\Phi_m(z) \cdot \exp\left(-\frac{Mv^2}{2kT}\right) \cdot v^3 dv dz}{2 \cdot \int_0^\infty \exp\left(-\frac{Mv^2}{2kT}\right) v^3 dv} \quad (7)$$

3.4 Idealfall, Methode A

In diesem Abschnitt soll die Teilchenstromdichte I in Abhängigkeit vom Auftreffort u bestimmt werden. Dabei wird die Annahme gemacht, dass es sich bei dem Strahlprofil um einen infinitesimal schmalen Strahlkasten handelt.

Die Atome, die in das Magnetfeld eintreten, streuen an der Stelle u wegen ihrer Geschwindigkeitsunterschiede dv um du . Bei gleichem z gilt

$$[v(u)]^3 dv = \frac{1}{4} \left| \frac{d[v(u)]^4}{du} \right| du. \quad (8)$$

Außerdem folgt aus Gleichung 6 direkt

$$[v(u)]^4 = \left[\frac{lL}{M} \cdot \left(1 - \frac{L}{2l}\right) \cdot \mu_B \cdot \frac{\partial B}{\partial z} \right]^2 \cdot \frac{1}{(u-z)^2}. \quad (9)$$

Durch Einsetzen von 9 in 8 erhält man

$$[v(u)]^3 dv = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{lL \cdot \left(1 - \frac{L}{2l}\right) \cdot \mu_B \cdot \frac{\partial B}{\partial z}}{2M} \right]^2 \cdot \frac{du}{|u-z|^3}.$$

Setzt man nun in Gleichung 7 den Zusammenhang

$$\frac{Mv^2}{2kT} = -\frac{lL \cdot \left(1 - \frac{L}{2l}\right) \cdot \mu_B \cdot \frac{\partial B}{\partial z}}{2kT} \cdot \frac{1}{|u-z|}$$

mit den Abkürzungen

$$q = \frac{lL \cdot \left(1 - \frac{L}{2l}\right) \cdot \mu_B \cdot \frac{\partial B}{\partial z}}{2kT} \quad (10)$$

$$n_0 = \frac{\left[lL \cdot \left(1 - \frac{L}{2l}\right) \cdot \mu_B \cdot \frac{\partial B}{\partial z}\right]^2}{4M^2 \int_0^\infty e^{-\frac{Mv^2}{2kT}} v^3 dv} \quad (11)$$

ein, so erhält man die Verteilung

$$d^2n = n_0 \cdot \Phi_m(z) \cdot e^{-\frac{q}{|u-z|}} \frac{dz}{|u-z|^3}.$$

Eine Integration über z und Summieren über alle möglichen Orientierungen liefert die Teilchenstromdichte

$$I(u) = n_0 \cdot \int_{-D}^D \Phi_{+\frac{1}{2}}(z) \cdot e^{-\frac{q}{|u-z|}} \frac{dz}{|u-z|^3} + n_0 \int_{-D}^D \Phi_{-\frac{1}{2}}(z) \cdot e^{-\frac{q}{|u-z|}} \frac{dz}{|u-z|^3}.$$

Da das Teilchenzahlprofil für beide Orientierungen $m = \pm\frac{1}{2}$ gleichwertig ist, ist die Definition

$$\Phi_{+\frac{1}{2}}(z) \equiv \Phi_{-\frac{1}{2}}(z) := I_0(z)$$

sinnvoll. Damit folgt

$$I(u) = n_0 \cdot \int_{-D}^D I_0(z) \cdot e^{-\frac{q}{|u-z|}} \frac{dz}{|u-z|^3}.$$

Im Falle eines verschwindenden wie auch eines homogenen Magnetfeldes ist $u = z$ und die Teilchenstromdichte ist

$$I(u)|_{B=\frac{\partial B}{\partial z}=0} = I_0(u) = I_0(z).$$

Wir wollen nun eine Näherung der Teilchenstromdichte in einem infinitesimalen Strahlkasten betrachten. Hierfür ist angesetzt

$$I_0(z) = 2 \cdot D \cdot I_0 \cdot \delta(z).$$

Dabei ist $\delta(z)$ die Dirac-Funktion. Für sie gilt

$$\delta(z) = \frac{d\Theta(z)}{dx} \text{ und } \Theta(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } z < z_0 \\ 1 & \text{für } z \geq z_0 \end{cases}.$$

Einsetzen liefert

$$I(u) = 2 \cdot D \cdot n_0 \cdot I_0 \cdot \left\{ \left[\Theta(z) \cdot e^{-\frac{q}{|u-z|}} \frac{dz}{|u-z|^3} \right]_{-D}^D - \int_{-D}^D \Theta(z) \cdot \frac{d}{dz} \left[e^{-\frac{q}{|u-z|}} \frac{dz}{|u-z|^3} \right] \right\}.$$

Daraus ergibt sich

$$I(u) = 2 \cdot D \cdot n_0 \cdot I_0 \cdot e^{-\frac{q}{|u|}} \cdot \frac{1}{|u|^3}.$$

Damit lassen sich durch Ableiten und Null setzen die Maxima der Intensitäten bestimmen zu

$$\frac{dI(u)}{du} = 2 \cdot D \cdot n_0 \cdot I_0 \cdot \frac{q - 3|u|}{u^5} \cdot e^{-\frac{q}{|u|}} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow u_0^{(0)} = \pm \frac{q}{3} = \pm \frac{lL \cdot \left(1 - \frac{L}{2l}\right) \cdot \mu_B \cdot \frac{\partial B}{\partial z}}{6kT}. \quad (12)$$

Es ist erkennbar, dass die Lage der Maxima linear mit der Feldinhomogenität zunimmt. Mit dieser Gleichung lässt sich bei bekannter Lage der Maxima und der Feldinhomogenität das Bohrsche Magneton μ_B experimentell bestimmen. Diese Methode wird im Auswertungsteil, Abschnitt 7, als Methode A bezeichnet.

3.5 Realer Strahlquerschnitt

Um zu einer besseren Anpassung der Theorie an das Experiment zu gelangen, wird ein mathematisch präziserer Ansatz gewählt. Bei dieser Methode wird die Breite $2 \cdot D$ des Strahlquerschnittes als endlich angesehen. Das Strahlprofil soll dabei, wie in Abbildung 5 gezeigt, durch zwei steile, gerade Flanken und einen parabelförmigen Scheitel beschrieben werden, d.h.

$$\begin{aligned} I_0(z) &= i_0 \cdot \begin{cases} D + z & \text{für } -D \leq z \leq -p \\ D - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}\frac{z^2}{p} & \text{für } -p \leq z \leq p \\ D - z & \text{für } p \leq z \leq D \end{cases} \\ \frac{dI_0(z)}{dz} &= i_0 \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } -D \leq z \leq -p \\ -\frac{z}{p} & \text{für } -p \leq z \leq p \\ -1 & \text{für } p \leq z \leq D \end{cases} \\ \frac{d^2 I_0(z)}{dz^2} &= i_0 \cdot \begin{cases} 0 & \text{für } -D \leq z \leq -p \\ -\frac{1}{p} & \text{für } -p \leq z \leq p \\ 0 & \text{für } p \leq z \leq D. \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

Gehen wir nun von dem oben beschriebenen Modell des Strahlquerschnittes aus. Die Gleichungen 13 erfordern, dass $I_0(z)$ zwei mal differenzierbar ist. Die darauf basierende Bestimmung der Teilchenstromdichte $I(u)$ hängt von der Inhomogenität des magnetischen Feldes und somit von q (Gleichung 10) ab. Die Maxima von $I(u)$ befinden sich an den Positionen $u_0(q)$, welche sich

nun von den Positionen $u_0^0 = \pm \frac{q}{3}$ (Gleichung 12) unterscheiden, also von der Näherung für einen infinitesimalen Strahlkasten.

Um die Funktion $u_0(q)$ zu bestimmen gehen wir aus von

$$\frac{dI}{du}(u_0) = 0.$$

Dabei kann die Differentiation nach u in das Integral gezogen werden, wie man an folgender Rechnung erkennt:

$$\frac{dI}{du} = \frac{d}{du} n_{0m} \int_{-D}^D dz \cdot I_0 \frac{e^{-\frac{q}{|u-z|}}}{|u-z|^3} = n_0 \int_{-D}^D dz \cdot I_0 \frac{\partial}{\partial u} \frac{e^{-\frac{q}{|u-z|}}}{|u-z|^3}$$

Wird $\frac{\partial}{\partial u}$ durch $-\frac{\partial}{\partial z}$ ersetzt, ändert sich der Integrand nicht. Durch partielle Integration ist es

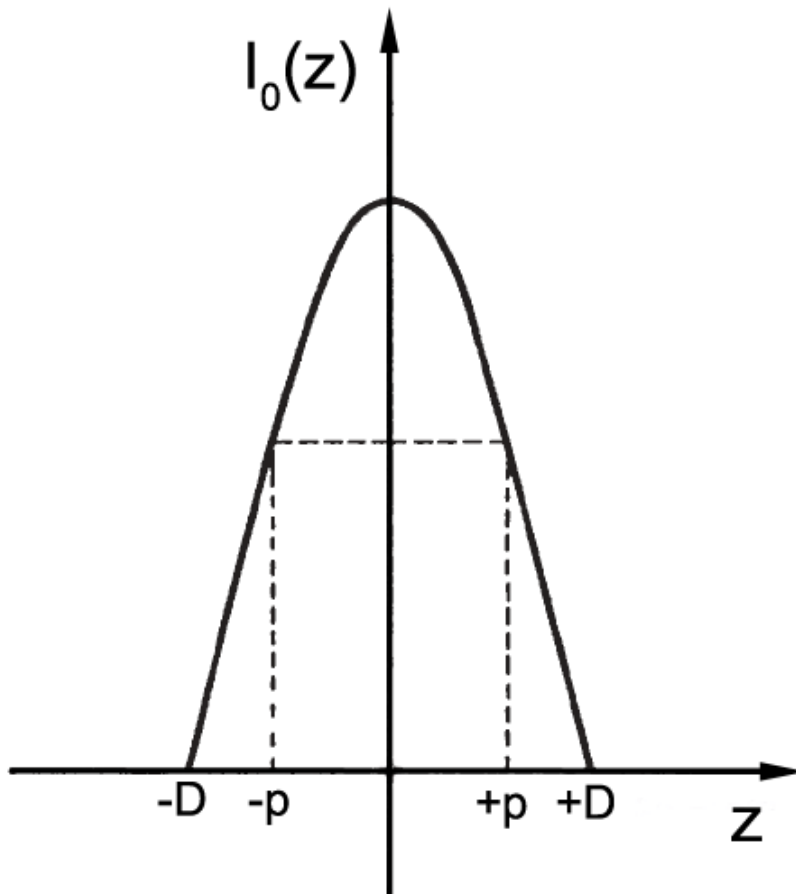


Abbildung 5: Mathematischer Ansatz für die Teilchenstromdichte bei verschwindendem Magnetfeld

möglich, die Differentiation auf I_0 anzuwenden:

$$\frac{dI}{du} = n_0 \cdot \int_{-D}^D dz \cdot \frac{dI_0}{du} \cdot \frac{e^{-\frac{q}{|u-z|}}}{|u-z|^3} + n_0 \cdot i_0 \cdot \left\{ \int_{+D}^{-p} dz - \frac{u}{p} \cdot \int_{-p}^{+p} dz - \int_{+p}^{+D} dz \right\} \cdot \frac{e^{-\frac{q}{|u-z|}}}{|u-z|^3} + n_0 \cdot i_0 \cdot \frac{1}{p} \cdot \int_{-p}^{+p} dz \cdot \frac{u-z}{|u-z|^3} \cdot e^{-\frac{q}{|u-z|}}$$

Bei den auftretenden Integralen handelt es sich um ein elementar lösbares Problem, aus dem sich

$$\frac{dI}{du} = \frac{n_0 \cdot i_0}{p \cdot q^2} \cdot F(u)$$

mit der Lösungsfunktion

$$F(u) = -|u+p| \cdot e^{-\frac{q}{|u-p|}} + |u-p| \cdot e^{-\frac{q}{|u-p|}} + p \cdot \frac{q+|u+D|}{u+D} \cdot e^{-\frac{q}{|u+D|}} + p \cdot \frac{q+|u-D|}{u-D} \cdot e^{-\frac{q}{|u-D|}}$$

ergibt. Für die Positionen der Maxima von I gilt (Ableitung gleich Null)

$$F(u_0) = 0.$$

Man kann erkennen, dass $F(u_0)$ punktsymmetrisch ist, die Lösungsfunktion $u_0(q)$, welche die Lage der Maxima angibt, ist folglich spiegelsymmetrisch. Dies bedeutet eine Vereinfachung, sodass wir uns lediglich auf die Bestimmung der positiven Werte beschränken können.

3.6 Asymptotisches Verhalten für große Felder, Methode B

Wenn die Feldinhomogenität genügend groß wird, nähert sich u_0 der Lösung, die durch den infinitesimal schmalen Strahlkasten gegeben ist. Geht man nun davon aus, dass

$$\frac{u_0}{p}, \frac{u_0}{D}, \frac{q}{p}, \frac{q}{D} \ll 1$$

gilt, dann beschreiben die folgenden Berechnung einen präziseren Verlauf der Funktion $u_0(q)$ für große Felder. Mit Hilfe der eben genannten Näherung kann $F(u)$ als Taylorreihe entwickelt werden, wozu wir die Funktion

$$f(u) = u \cdot e^{-\frac{q}{u}}$$

benötigen. Die relevanten Ableitungen lauten

$$f^{(3)}(u) = \frac{q^2}{u^4} \left(\frac{q}{u} - 3 \right) e^{-\frac{q}{u}}$$

$$f^{(5)}(u) = 12 \frac{q^2}{u^6} \left(5 \left(\frac{q}{u} - 1 \right) + \frac{1}{12} \frac{q^2}{u^2} \left(\frac{q}{u} - 15 \right) \right) e^{-\frac{q}{u}}.$$

Bis zur sechsten Ableitung sind nur die dritte und fünfte Ableitung von Interesse, da wegen der genannten Punktsymmetrie die Koeffizienten bei den geradzahligten Ableitungen Null sind. Somit

ergibt sich für $F(u)$ bei Abbruch nach dem sechsten Glied

$$F(u) = p \left(D^2 - \frac{1}{3}p^2 \right) \cdot f^{(3)}(u) + \frac{p}{12} \left(D^4 - \frac{1}{5}p^4 \right) \cdot f^{(5)}(u) + \dots$$

Daraus erhalten wir, ein weiteres Mal durch Null setzen, als Bestimmungsgleichung für u_0

$$0 = \left(D^2 - \frac{1}{3}p^2 \right) \cdot \left(\frac{q}{u_0} - 3 \right) + \frac{D^4 - \frac{1}{5}p^4}{u_0^2} \cdot \left(5 \cdot \left(\frac{q}{u_0} - 1 \right) + \frac{1}{12} \cdot \frac{q^2}{u_0^2} \cdot \left(\frac{q}{u_0} - 15 \right) \right).$$

Dabei ergibt der erste Summand die bereits bekannte Lösung $u_0^0 = \frac{q}{3}$. Zudem ist es zulässig, im zweiten Summanden u_0 durch u_0^0 zu ersetzen, da die damit verbundenen Abweichungen von noch höherer Ordnung sind. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \left(D^2 - \frac{1}{3}p^2 \right) \cdot \left(\frac{q}{u_0} - 3 \right) + \frac{D^4 - \frac{1}{5}p^4}{u_0^2} \\ \Rightarrow q &= 3u_0 - \frac{D^4 - \frac{1}{5}p^4}{D^2 - \frac{1}{3}p^2} \frac{1}{u_0} = 3u_0 - \frac{C}{u_0}. \end{aligned} \quad (14)$$

Durch Gleichsetzen von 14 und 10 gelingt es, ausschließlich der Messung zugängliche Größen mit μ_B in einer Gleichung zu haben:

$$\frac{lL \cdot \left(1 - \frac{L}{2l} \right) \cdot \mu_B}{2kT} \cdot \frac{\partial B}{\partial z} = 3u_0 - \frac{C}{u_0}$$

Trägt man die Feldinhomogenität $\frac{\partial B}{\partial z}$ gegen den Ausdruck $3u_0 - \frac{C}{u_0}$ auf, so lässt sich μ_B aus der Steigung p_0 berechnen zu

$$p_0 = \frac{lL \left(1 - \frac{L}{2l} \right) \mu_B}{2kT}. \quad (15)$$

Im Auswertungsteil, Abschnitt 7, wird das Bohrsche Magneton μ_B , zusätzlich zu Methode A, ebenfalls durch diese Methode B bestimmt.

4 Aufbau der Stern-Gerlach Apparatur

4.1 Prinzip

Die Stern-Gerlach Apparatur besteht im Wesentlichen aus einem Vakuumsystem, einem Atomstrahl, einem magnetischen Analysator und einem Detektor. Die schematische Funktionsweise ist in Abbildung 6 gezeigt.

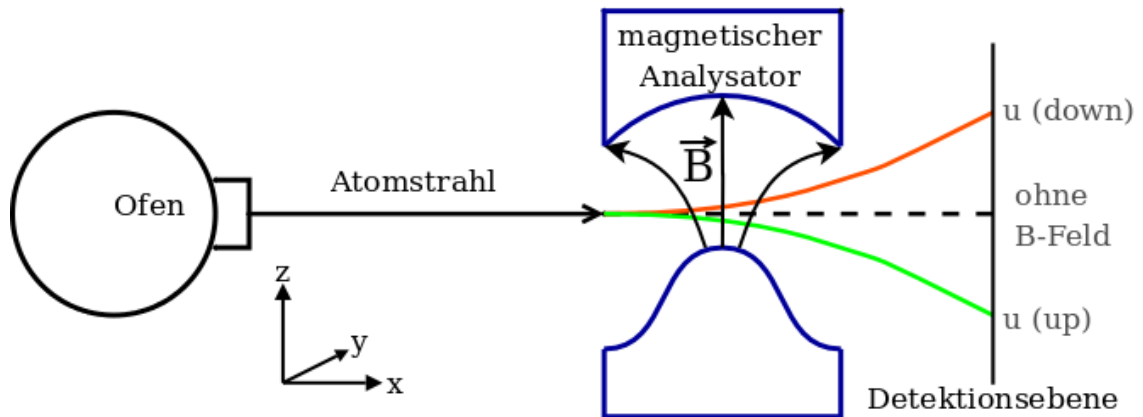


Abbildung 6: schematischer Aufbau: das Magnetfeld entspricht dem aus Abb. 1; die rote und die grüne Linie zeigen die Teilchenbahn für ein Spin-down bzw. Spin-up Teilchen

Im Ofen werden bei einer Temperatur von etwa 180°C Kaliumatome ausgedampft. Diese werden mit Hilfe von Blenden zu einem dünnen Strahl gebündelt und durchqueren ein inhomogenes Magnetfeld, das durch speziell geformte Polschuhe einem Zweidrahtfeld gleicht. Darin erfahren sie aufgrund ihres magnetischen Moments eine Ablenkung senkrecht zur Bewegungsrichtung. Hinter dem Magnetfeld befindet sich ein mittels einer Millimeterschraube drehbarer Detektor, dessen Drehachse durch den Atombahnmittelpunkt innerhalb des Magnetfeldes verläuft. Er nimmt die Teilchenstromdichte in Abhängigkeit von seiner Auslenkung auf. Das Detektorsignal wird über einen Strommessverstärker an ein Messgerät geleitet.

Zur Auslese des Signals benutzen wir ein Sensor-CASSY (s. Kap.4.4). Dieses hat den Vorteil, dass es leicht bedienbar und der Umgang mit dem Gerät den meisten Praktikanten aus dem physikalischen Grundpraktikum geläufig ist.

Im aufgeheizten Ofen beträgt der Dampfdruck des Kaliums ungefähr $5 \cdot 10^{-3}$ mbar. Der Rest der Apparatur darf einen Druck von etwa $4 \cdot 10^{-6}$ mbar nicht übersteigen, da ansonsten zu große Störeffekte aufgrund von Stößen der Kaliumatome mit Partikeln auftreten. Die Bauteile, insbesondere die Verbindungsstücke, sind daher für Ultrahochvakuum ausgelegt.

4.2 Schaltung

Abbildung 7 zeigt den Schaltplan des Experiments. Für Ofen, Magnet und Detektor ist je ein Schaltkreis aufgebaut. An den Ofen wird ein DC-Netzgerät angeschlossen, welches die Heizspannung liefert. Die Thermoelemente werden zur Kontrolle der Ofentemperatur mit einem Messgerät verbunden. Der Magnet wird über einen Kreuzschalter zur Umpolung des Spulenstroms an ein zweites DC-Netzgerät angeschlossen. Er dient der Entmagnetisierung des Magnets.

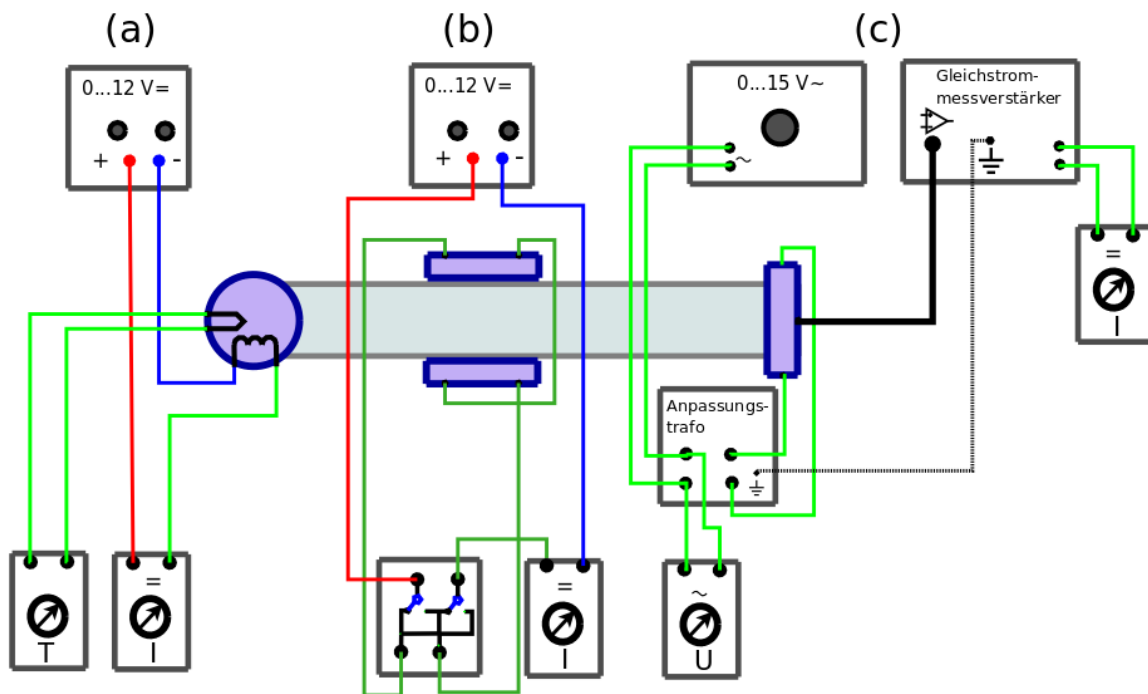


Abbildung 7: Schaltkreise: (a) Ofen; (b) magnetischer Analysator; (c) Detektor

Der Detektor wird über einen Anpassungstrafo versorgt. Dieser ist mit einem Stelltrafo verbunden, der die Heizspannung für den Wolframdraht liefert. Der Anpassungstrafo beinhaltet einen Transformator mit Wicklungsverhältnis 10 : 1 und eine stabilisierte 50 V DC-Spannungsquelle, die die Beschleunigungsspannung für die ionisierten Kaliumatome liefert (siehe Abschnitt 4.3). Der Detektorausgang ist über ein BNC-Kabel mit einem Gleichstrommessverstärker verbunden, der Ausgang des Verstärkers zur Datenaufnahme an das Ampèremeter eines Sensor-CASSYs angeschlossen, welches über die serielle Schnittstelle mit einem PC verbunden ist.

Der Gleichstrommessverstärker (Typ 11742.93) kann für Spannungs-, Strom- und Ladungsmessung benutzt werden. Zum Einstellen der hier erforderlichen Strommessung, wird der Knopf „I“ gedrückt.

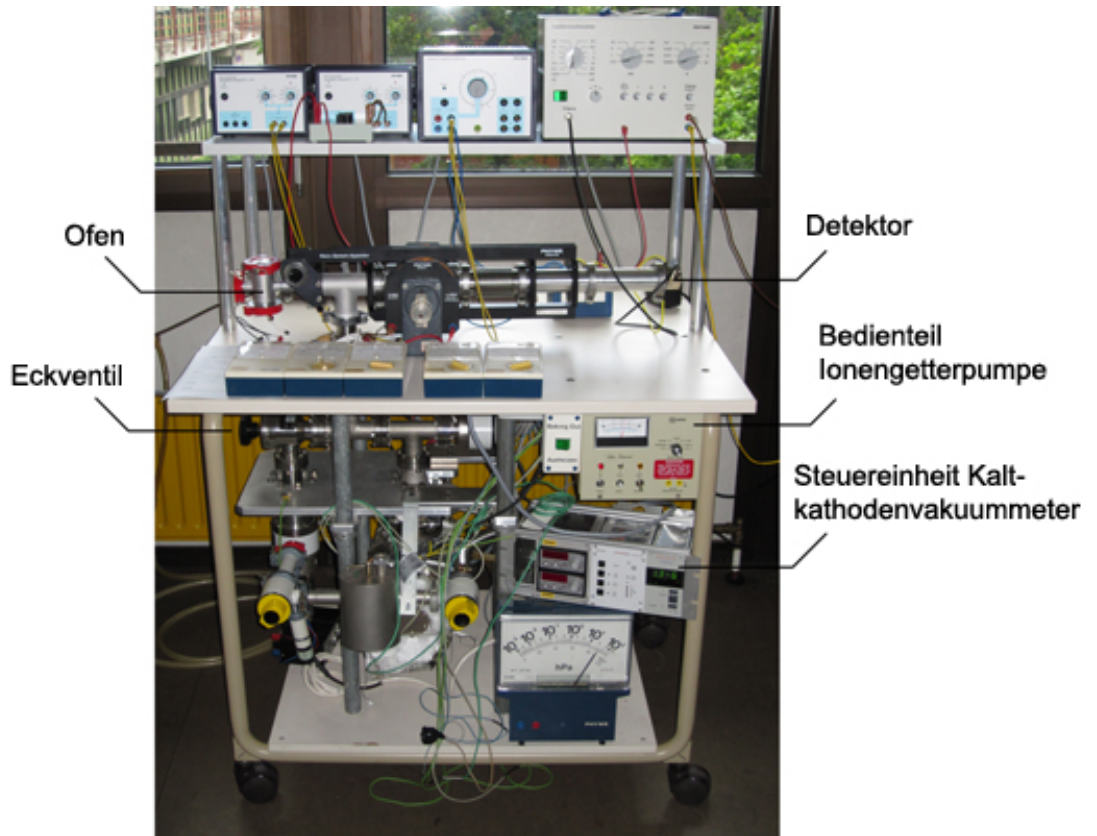


Abbildung 8: Foto der Versuchsapparatur

Es gibt vierzehn verschiedene Messbereiche für die Strommessung, die von 0.03 nA bis $100 \mu\text{A}$ reichen. Der Verstärker gibt ein Ausgangssignal von $(0 - 30) \text{ mA}$, wobei der Maximalwert von 30 mA einem Eingangssignal in Höhe des Messbereichsendwerts entspricht. Das Ausgangssignal ist somit immer mit einem messbereichsabhängigen Faktor zu multiplizieren, um das Eingangssignal zu erhalten. Beim gegebenen Experiment wird, je nach der Menge des Kaliums, vom empfindlichsten bis in den drittempfindlichsten Bereich gemessen.

Zu einem genaueren Verständnis der Wirkungsweise des von PHYWE entwickelten Aufbaus zum SGE gehören Kenntnisse der Vakuumapparatur und des Detektors. Erstere wird intensiv in der Arbeit meines Kommilitonen Glauß[4] beschrieben, der Detektor hier im nächsten Kapitel.

4.3 Detektor

Im Experiment wird ein Langmuir-Taylor-Detektor verwendet, der zur Detektion elektrisch neutraler Atome dient. Er besteht aus einem Wolframdraht, der auf eine Temperatur von $T = 800^\circ\text{C}$ erhitzt wird und von einem Nickelzylinder mit Eintrittsfenster für den Kaliumatomstrahl umgeben ist. An den Draht wird mittels des Anpassungstrafos, der über einen Stelltrafo betrieben wird, eine Spannung von etwa 50 V angelegt. Ohne Vorspannung würde er wegen einer Glühentladung

einen Strom liefern, der exponentiell mit der Temperatur des Glühdrahtes anwächst. Der Zylinder ist geerdet.

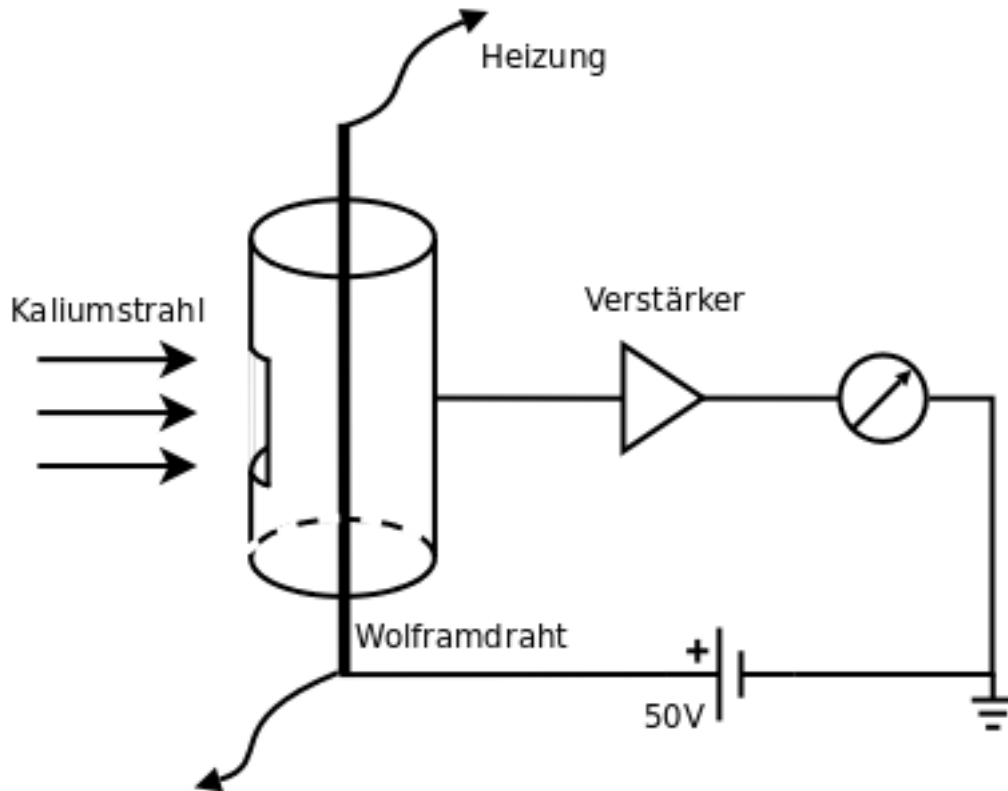


Abbildung 9: Detektor

Die Funktionsweise des Detektors beruht auf dem Tunneleffekt. Atome, deren Ionisierungsenergie geringer ist, als die Austrittsarbeit für Elektronen im Wolfram, werden ionisiert. Ihr Valenzelektron tunnelt in den Wolframdraht[6]. Treffen Kaliumatome auf den glühenden Draht, so werden sie ionisiert und aufgrund der Potentialdifferenz zwischen Draht und Zylinder zum Zylinder hin beschleunigt.

Der resultierende Ionenstrom ist in der Größenordnung $\sim \text{pA}$. Er wird zur Vermessung über einen Gleichstrommessverstärker an ein Messgerät angeschlossen und ist der Anzahl der auftreffenden Kaliumatome proportional, sofern der Wolframdraht auf der richtigen Temperatur ist. Bei zu niedriger Heizspannung können nicht alle Atome ionisiert werden. Wird die Temperatur erhöht, ist einerseits auch gegen die Vorspannung ein mit der Temperatur anwachsender Strom von der Glühentladung zu messen, andererseits dampfen Verunreinigungen anfangs ab und liefern ein zusätzliches Signal, da sie nach dem Abdampfen teilweise ionisiert sind.

Wegen dieser Verunreinigungen soll der Detektor zu Anfang der Messung ausgeheizt werden ("flashen"). Sie sammeln sich immer wieder von neuem an, wenn der Detektor ungeheizt ist.

4.4 CASSY

Der Detektor liefert, wie oben beschrieben, ein Stromsignal proportional zur Anzahl der Kaliumatome, die auf ihn in einer bestimmten Zeit auftreffen. Dieser Strom (verstärkt über den Gleichstrommessverstärker) muss zur Auswertung des Versuchs in Abhängigkeit von der Detektorposition gemessen werden. So erhält man bei eingeschaltetem Magnetfeld ein Aufspaltungsprofil und bei ausgeschaltetem Magnetfeld ein Profil zur Bestimmung der realen Strahlbreite.

Die Messwerterfassung erfolgt in diesem Versuch mit Hilfe des CASSY (**C**omputer **A**ssisted **S**cience **S**ystem) der Firma Leybold-Didactic[3], bestehend aus einem Sensor-CASSY und der dazugehörigen Software CASSY-Lab. Das ermöglicht eine schnellere, genauere und bequemere Aufnahme von Daten, als die Messung mit einem Ampèremeter, da nicht jeder Messwert einzeln abgelesen und per Hand notiert werden muss.

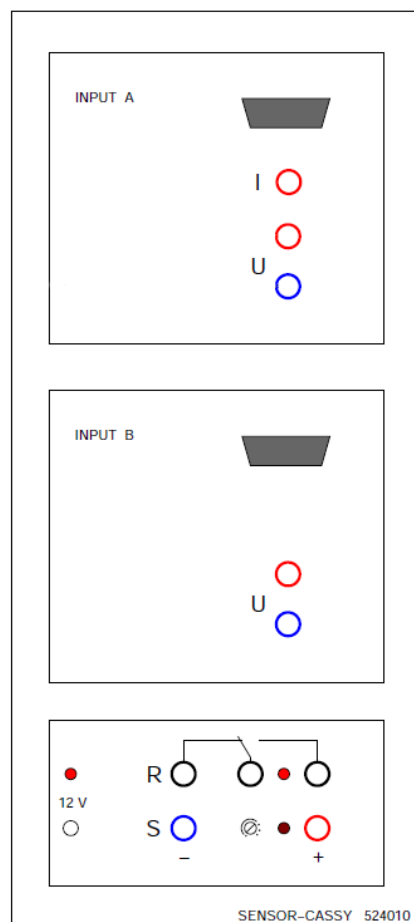


Abbildung 10: Sensor-CASSY: obere Kästen: Eingänge für die Messwertaufnahme; unterer Kasten: Stromversorgung, interne Gleichstromquelle (0-16V), sowie ein Relais

Das CASSY ist, wie der Name schon sagt, ein computerunterstütztes Messwerterfassungssystem. Es wird über eine serielle Schnittstelle mit einem PC verbunden. Es verfügt über fünf analoge Eingänge zur Messung von Spannung, Strom und anderen Größen (wie Druck, pH-Wert...), für die man spezielle Sensorboxen auf die Steckplätze oberhalb der Strom- und Spannungsbuchsen (in Abbildung 10 grau gekennzeichnet) aufstecken kann. Es sind immer zwei Eingänge gleichzeitig nutzbar, einer auf Input A und einer auf Input B (siehe Abb. 10).

Für die Durchführung des SGE ist lediglich der Stromeingang (Input A) relevant.

Der Umgang mit diesem System soll im Folgenden erläutert werden.

Beim Starten von CASSY-Lab wird automatisch das in Abbildung 11 gezeigte Fenster „*Einstellungen/Allgemein*“ geöffnet, bei dem zunächst der Begriff „CASSY“ in die passende serielle Schnittstelle eingegeben werden muss, damit die Software das Sensor-CASSY erkennt.



Abbildung 11: Einstellungen: Wahl der seriellen Schnittstellenbelegung

Im Menü „*Einstellungen/CASSY*“ (Abb. 12) wird nun das Sensor-CASSY angezeigt. Durch einen Mausklick auf den Input A können die Messgröße (Spannung oder Strom) und der Messbereich gewählt werden.

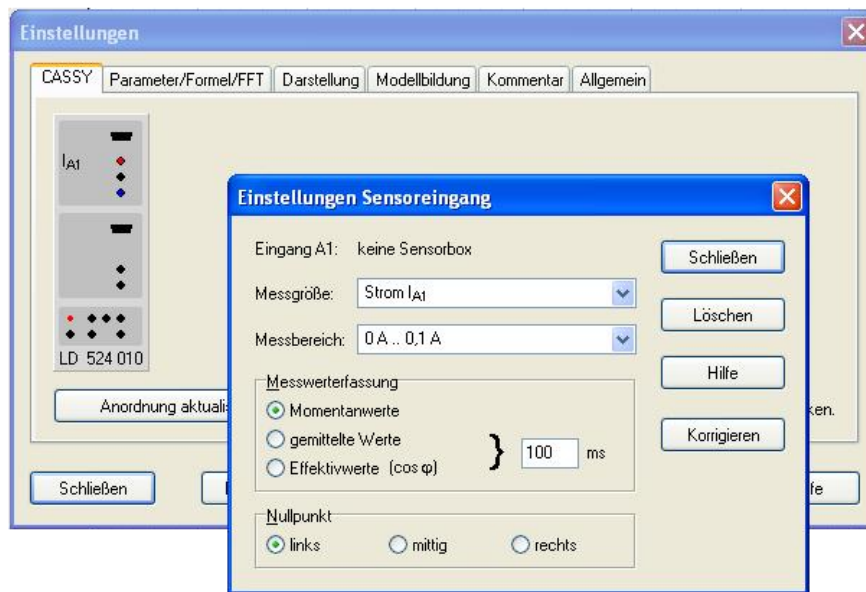


Abbildung 12: Einstellungen: Eingang und Messgröße wählen

Wird im Einstellungsfenster der Button „*Messparameter anzeigen*“ (s. Abb. 13) angeklickt, so können Messbedingungen wie Messdauer, Anzahl der Messwerte etc., eingestellt werden. Es ist ratsam, für jede Detektorposition eine Messreihe aufzunehmen. Es können z.B die Einstellungen in Abbildung 13 verwendet werden. Das Häkchen bei „*neue Messreihe anhängen*“ bedeutet, dass alle Messreihen zusammen in eine Datei gespeichert werden.

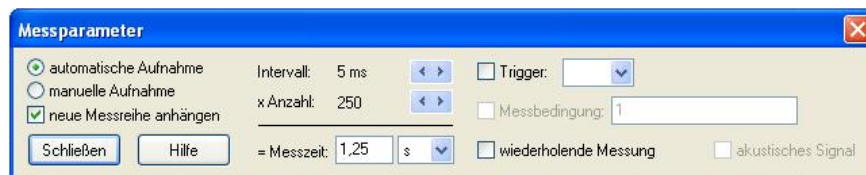


Abbildung 13: Fenster zur Einstellung der Messbedingungen

Bei einer Messung werden die Werte automatisch in eine Tabelle (s. Abb. 16) eingetragen. Damit bei dem SGE die Stromwerte den entsprechenden Detektorpositionen zugeordnet werden können, wird unter „*Einstellungen/Parameter/Formel/FFT*“ wie in Abbildung 14 diese Position als neue Größe (*Parameter*) definiert. Für jede Messreihe wird die aktuelle Position durch Eintragen der Anzeige der Millimeterschraube in das dafür vorgesehene Kästchen (s. Abb. 14) festgelegt.

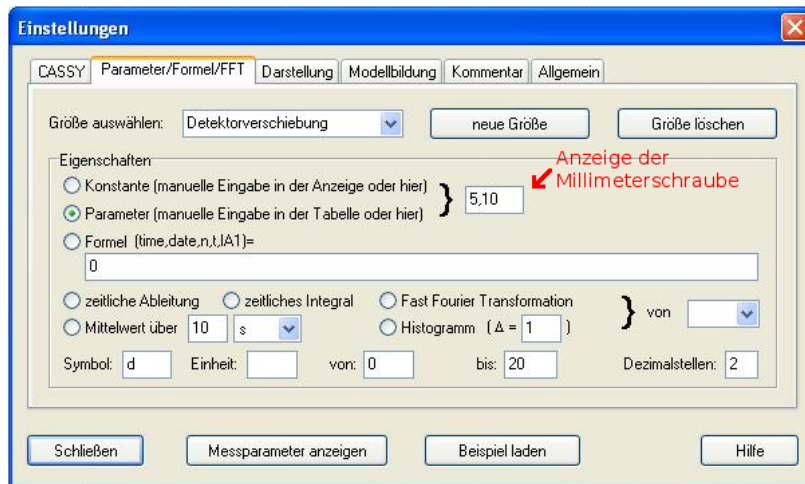


Abbildung 14: Einstellungen: Detektorposition als neue Größe wählen

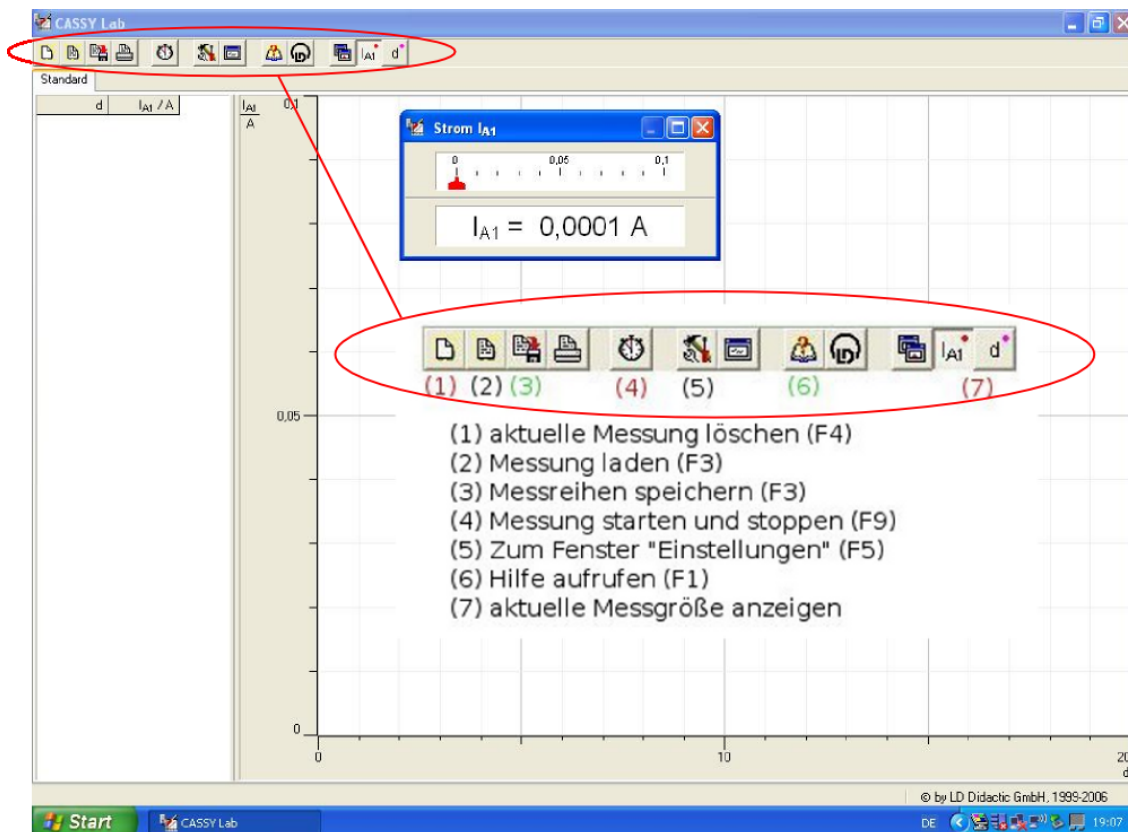


Abbildung 15: Benennung der Funktionsknöpfe in der Steuerleiste

Nachdem alle relevanten Einstellungen getätigt sind, kann mit der Messung begonnen werden. Dazu sind die in Abbildung 15 erläuterten Funktionsknöpfe zu nutzen. In Abbildung 16 ist beispielhaft eine Messung der Intensitätsverteilung der Kaliumatome bei einem Spulenstrom von $I = 0.8 \text{ A}$

gezeigt.

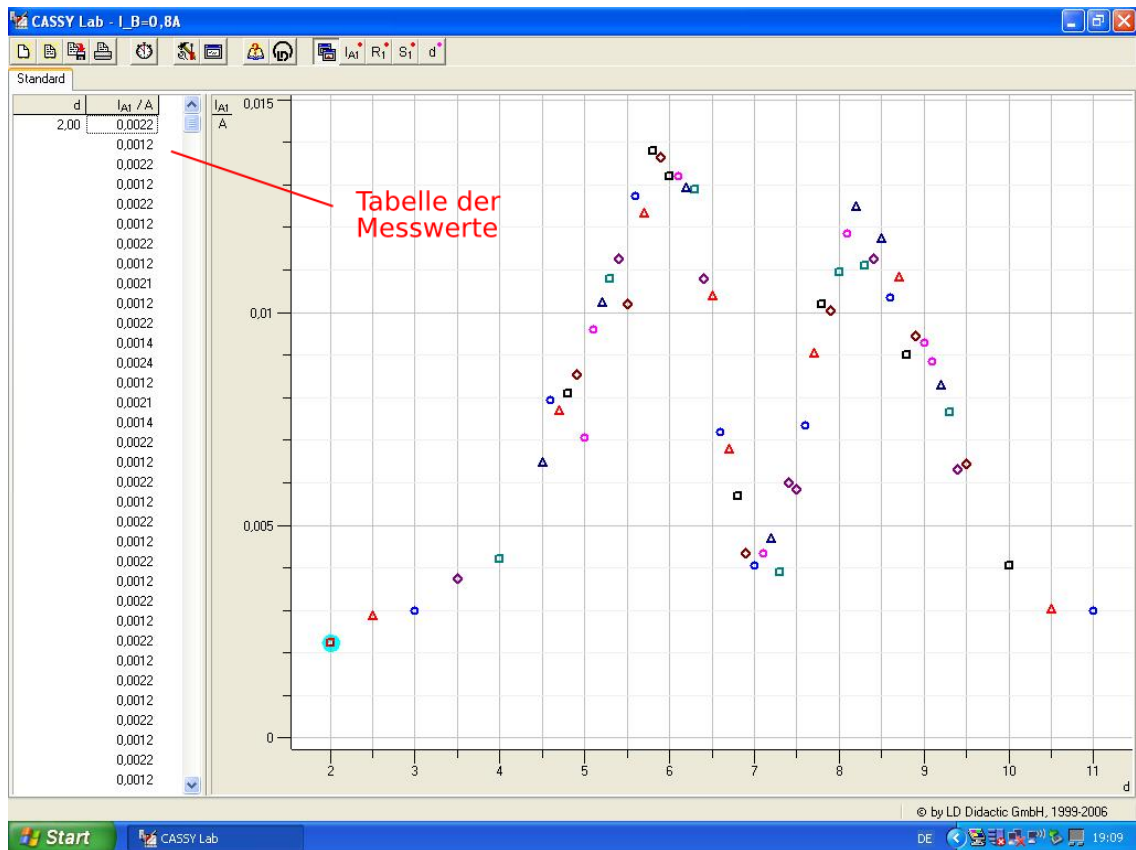


Abbildung 16: Beispiel einer Messung mit CASSY: hier ist der Strom gegen die Detektorposition aufgetragen

5 Installation der Apparatur

Die Apparatur, bestehend aus dem Atomstrahlofen, den Polschuhen und dem Detektor, wurde bereits justiert geliefert. So war bei der Installation lediglich eine visuelle Nachjustierung nötig. Zudem war die Apparatur mit Argon gefüllt, sodass beim Öffnen des Flanschs zur Verbindung mit den Vakuumpumpen keine Luft eindringen konnte. Dringt Luft in die Apparatur, so setzt sich Feuchtigkeit an, was ein Ausheizen der Apparatur und lange Evakuierungszeiten erfordert.

Die Apparatur wurde mit den Polschuhen zwischen die beiden Spulen des Elektromagneten gelegt, über einen Flansch NW 40 KF und eine Kupferdichtung mit dem Vakuumsystem verbunden und sofort evakuiert. Der Magnet wurde so platziert, dass die Polschuhe mittig zwischen den Magnetpolen liegen. Anschließend wurden die Spulen gerade soweit zusammengedreht, dass kein Luftspalt zwischen Magnet und Polschuhen auszumachen war. Die Polschuhe dürfen dabei nicht ineinander gedrückt werden. Zusätzlich wurde zur Stabilisierung des Aufbaus eine an der Unterseite der Polschuhe angebrachte Schraube soweit aufgeschraubt, dass sie eine zusätzliche Stütze bot.

Bevor die Apparatur geöffnet werden kann, zum Beispiel zum Justieren oder zur Befüllung des Ofens mit Kalium, muss sie immer zunächst mit Stickstoff aus einer Druckgasflasche geflutet werden, damit beim Öffnen des Geräts kein Sauerstoff hinein gelangt. Die Detektorheizung darf währenddessen nicht eingeschaltet sein, da sonst der Wolframdraht zerstört wird. Der genaue Vorgang wird in der Arbeit von Herrn Glauß[4] und in der Apparatebeschreibung der PHYWE [9] beschrieben.

Justierung von Detektordraht und Ofen

Der Detektordraht und der Austrittsschlitz am Ofen müssen justiert werden. Dazu werden der seitliche Blindflansch am Ofen, die Abdeckklappe am Detektor, die Schraube mittig am Detektorflansch und die Stielschraube an der seitlichen Ofenöffnung entfernt. Die Ausrichtung des Ofens ist dann korrekt, wenn durch diese Öffnung durch den Apparat hindurch bis zu dem Loch am Detektor geguckt werden kann. Gegebenenfalls muss die Ofenposition durch Drehen des unteren Flanschs, mit dem der Ofen fest verbunden ist, korrigiert werden. Befindet sich der Wolframdraht bereits in einer senkrechten Position mittig zur Öffnung, so muss der Detektor nicht nachkorrigiert werden.

Wird die Apparatur wieder zusammengebaut und verschlossen, so darf die Stielschraube nicht festgezogen werden, damit der Ofen noch ein wenig Spielraum hat. Hiernach kann mit der Kaliumfüllung begonnen werden.

Kaliumfüllung

Der Umgang mit Kalium ist aufgrund der starken Reaktionen bei Kontakt mit Wasser nicht ganz ungefährlich. Es verbindet sich unter explosionsartigen Reaktionen zu Kaliumhydroxid. Laut Gefahrstoffverordnung gilt Kalium als leicht entzündlich und ätzend. Daher müssen vorm Befüllen des Ofens ein paar Sicherheitsmaßnahmen getroffen werden. Unverzichtbar ist dabei das Tragen von Sicherheitskleidung (Schutzbrille, Kittel, Gummihandschuhe). Kommt Kalium mit der Haut in Kontakt, so reicht schon wenig Schweiß, um eine schwere Verbrennung zu verursachen.

Während des Befüllens wird der Stickstofffluss auf etwa $2 \frac{l}{min}$ gestellt. Der Deckel des Ofens wird mit dem Ofenschlüssel abgeschraubt und das Kalium mit dem Injektor an den Boden des Ofens gedrückt. Anschließend kann der Ofen wieder komplett verschlossen, der Stickstofffluss gestoppt, und mit der Reevakuierung begonnen werden.

Alles, was mit Kalium in Kontakt gekommen ist, muss in ein Wasserbehältnis gebracht werden, um es von Rückständen zu befreien. Dabei ist auf genügenden Sicherheitsabstand zu achten.

6 Durchführung des Versuchs

Die Apparatur kann nach Befüllen des Ofens in Betrieb genommen werden, sobald der Druck wieder einen Wert von weniger als $4 \cdot 10^{-6}$ mbar erreicht hat. Dies war nach etwa 2 – 4 h der Fall.

Einstellungen für die Versuchsdurchführung

Die Tabellen 1 und 2 zeigen die nötigen Einstellungen für den Betrieb von Ofen und Detektor. Der Spulenstrom darf von (0 – 1.2) A variiert werden.

Aufheizen		Temperatur halten
max. 10 min 12 V	dann: ca.6 V	ca.5 V

Tabelle 1: Ofen: Einstellungen

Normalbetrieb	Flashen
10 V \sim	max. 18 V \sim

Tabelle 2: Detektor: Einstellungen

6.1 Heizen des Atomstrahlofens

Damit das Kalium verdampft und die Atome auf die für den Versuch benötigte Geschwindigkeit beschleunigt werden, muss der Ofen auf $T \approx 175$ °C geheizt werden. Die Wahl dieser Temperatur soll in diesem und dem folgenden Kapitel erläutert werden.

Die Messung erfolgt, nachdem bereits Messdaten zur Versuchsauswertung aufgenommen worden sind; somit ist bereits bekannt, bei welcher Lage die Intensität des Atomstrahls maximal ist. Der Detektor wird auf diese Position eingestellt, das Magnetfeld ist während der Messreihe ausgeschaltet. Der Ofen ist dabei an eine Gleichspannungsquelle angeschlossen, welche bis zu 12 V bei 1 A liefert. Dabei wird die ersten zwölf Minuten bei Maximaleinstellung geheizt, dann werden Spannung und Strom für den letzten Abschnitt des Aufheizens auf $V = 6$ V und $I = 500$ mA herunter geregelt, um langsamer und somit präziser heizen zu können. Der Verlauf der Temperatur gegen die Zeit ist in Abbildung 17 dargestellt.

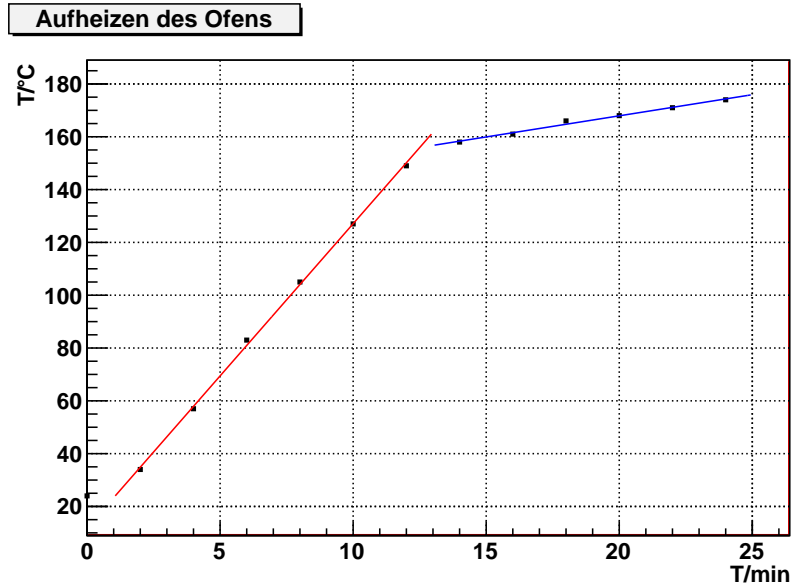


Abbildung 17: Aufheizen des Ofens: Temperatur gegen Zeit

Hier ist sehr gut zu erkennen, dass die Temperatur bei konstanter Spannung weitestgehend linear ansteigt und die Steigung nach zwölf Minuten auf Grund der dann geringeren Spannung kleiner wird.

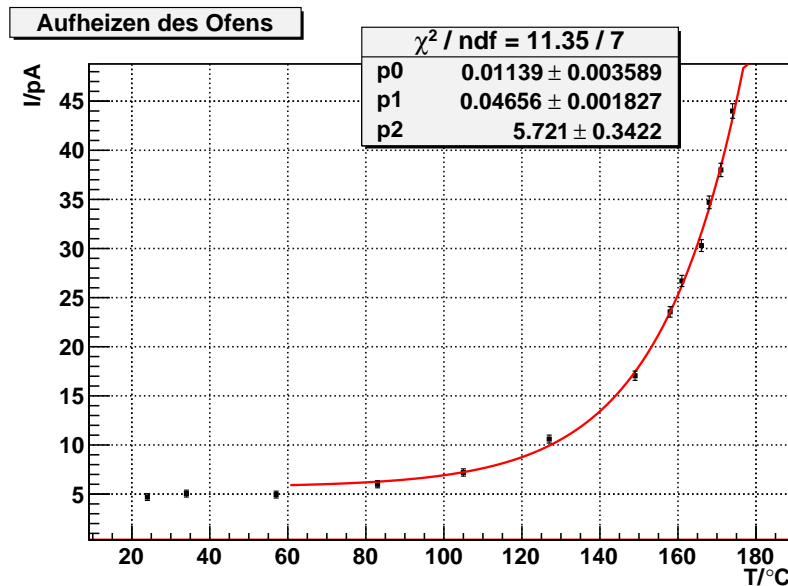


Abbildung 18: Aufheizen des Ofens: Detektorstrom gegen Temperatur

Zudem zeigt Abbildung 18 den Zusammenhang zwischen Detektorstrom und Ofentemperatur. Im Vergleich mit Abbildung 19 zeigt sich, welche Auswirkung eine höhere Temperatur auf das Auf-

spaltungprofil hat.

Kalium verdampft erst bei etwa 60 °C^[9], daher kann bei niedrigeren Temperaturen kein messbares Signal zu Stande kommen. Der Verlauf ab einem Messwert von 60 °C ist exponentiell. Der Fehler auf den Detektorstrom wird wie in Kapitel 7.1 beschrieben ermittelt.

6.2 Einfluss verschiedener Temperaturen

Während des Aufheizvorgangs wird bei verschiedenen, jeweils konstanten Temperaturen der Strom in der Detektorebene aufgenommen. Dabei liegt an den Spulen ein Strom von 0.7 A an. Bei der Aufnahme weiterer Messreihen hat sich bereits herausgestellt, dass dies ein guter Wert ist, um bei deutlicher Aufspaltung des Atomstrahls klar erkennbare Peaks zu erhalten.

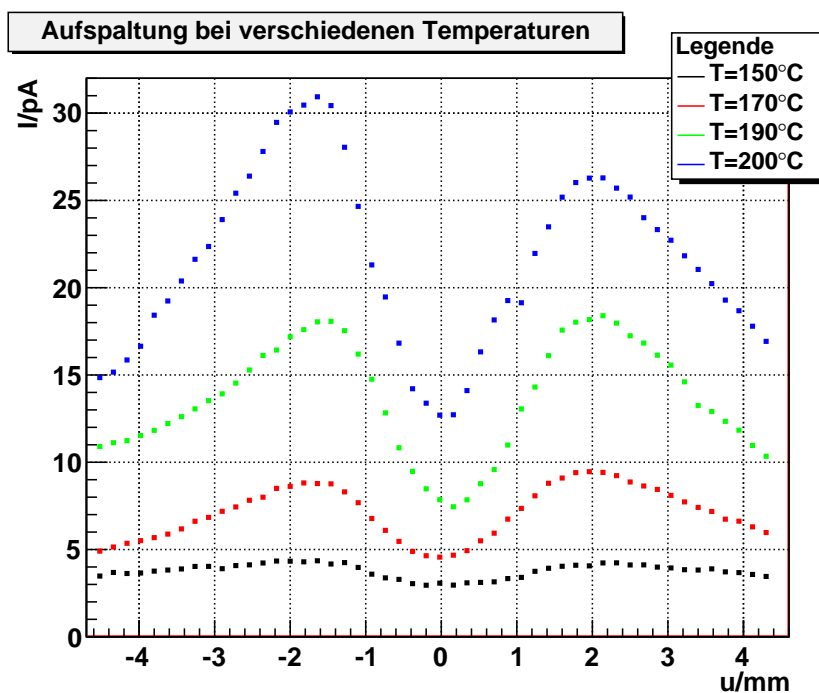


Abbildung 19: Aufspalten des Atomstrahls bei verschiedenen Ofentemperaturen; In der Abbildung sind vier von sieben Messreihen dargestellt

An Hand dieses Vorversuches soll erläutert werden, welche Mindesttemperatur für die Versuchsdurchführung notwendig ist. Zur Illustration soll dabei Abbildung 19 dienen, welche zum einen ebenfalls die mit zunehmender Temperatur ansteigende Intensität des Detektorstroms und somit des Atomstrahls, zum anderen auch die Verkleinerung des Abstandes der Maxima mit zunehmender Temperatur wiedergibt³, welche durch Gleichung 12 vorausgesagt wurde.

Es ist ebenfalls sehr gut zu erkennen, dass bei einer Temperatur $T \leq 150^\circ\text{C}$ das Aufspaltungsprofil erst sehr wenig ausgeprägt ist. Die daraus resultierenden Fehler auf die Peakbestimmung einer

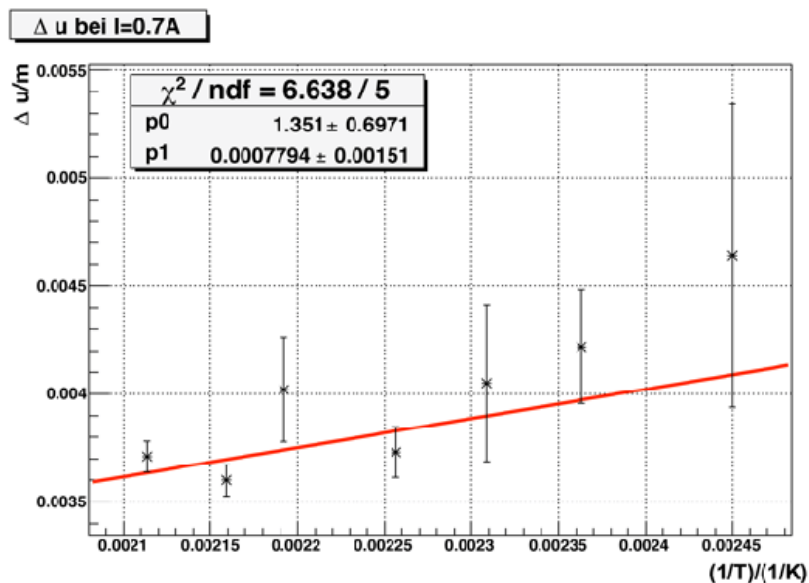
³Zu beachten ist die breiter werdende Verteilung bei niedrigen Temperaturen

Messreihe bei diesen Temperaturen würden demnach sehr groß. Aus diesem Grund wird für die folgenden Messungen eine Temperatur von $T \geq 170^\circ\text{C}$ gewählt. Trotzdem wird darauf geachtet, keine unnötig hohen Temperaturen zu nutzen, um den Kaliumverbrauch nicht unnötig zu erhöhen. Die Ergebnisse für die Peakbestimmung und die Fehler auf die jeweiligen Mittelwerte sind in Tabelle 3 aufgelistet

Temperatur/ $^\circ\text{C}$	135	150	160	170
u_1/mm	10.61 ± 0.57	10.48 ± 0.18	10.90 ± 0.31	11.10 ± 0.10
u_2/mm	15.25 ± 0.41	15.06 ± 0.20	14.95 ± 0.19	14.83 ± 0.06
$\Delta u/\text{mm}$	4.64 ± 0.70	4.22 ± 0.26	4.05 ± 0.36	3.73 ± 0.12
Temperatur/ $^\circ\text{C}$	180	190	200	
u_1/mm	9.88 ± 0.10	11.24 ± 0.06	11.14 ± 0.05	
u_2/mm	13.9 ± 0.22	14.84 ± 0.04	14.85 ± 0.05	
$\Delta u/\text{mm}$	4.02 ± 0.24	3.60 ± 0.07	3.71 ± 0.07	

Tabelle 3: Fitresultate

Mit Gleichung 12, Kapitel 3.4, kann ebenfalls bei Variation der Temperatur die Lage der Maxima bei konstanter Feldinhomogenität $\frac{\partial B}{\partial z}$ beschrieben werden. Eine solche Messreihe ist in Abbildung 20 dargestellt.

Abbildung 20: Geradenfit zur Bestimmung von μ_B bei verschiedenen Ofentemperaturen

Es ergibt sich ein Wert von $\mu_{B,T} = (8.82 \pm 4.55) \cdot 10^{-24} \text{Am}^2 = 8.82 \cdot 10^{-24} \text{Am}^2 \pm 51\%$. Man erkennt gut, dass die Fehler auf Δu für geringe Temperaturen sehr groß werden, Δu kann nicht mehr präzise bestimmt werden. Daraus resultiert der große Fehler von 51% auf μ_B . Dies ist der Grund, warum die Bestimmung von μ_B durch Variation des Spulenstroms bei konstanter Temperatur erfolgt und nicht umgekehrt. Der Fehler auf den Spulenstrom ist geringer. Anhand der in Tabelle 3

hervorgehobenen Werte erscheint die Wahl einer Temperatur von $T > 170^\circ\text{C}$ sinnvoll. Der Fehler von 6% bei 150°C lässt sich auf 3% bei 170°C reduzieren (vergleiche auch mit Abbildung 19). Während des Aufheizvorgangs sollte auch der Detektor schon mit Spannung versorgt werden, damit der Wolframdraht im Detektor bei der Messung eine Temperatur von etwa $T = 800^\circ\text{C}$ erreicht.

6.3 Messung der Intensitätsverteilung

Das Ausgangssignal des Verstärkers wird anfangs im kleinsten Messbereich auf Null gestellt, ohne dass der Detektor angeschlossen ist.

Die Millimeterschraube zur Variation der Detektorposition wird bis zum Anschlag in eine Richtung gedreht. Von hier ausgehend wird die Messwertaufnahme begonnen, zunächst bei ausgeschaltetem Magneten. Es ist wichtig, die Messungen ohne Magnetfeld zu beginnen und dann den Spulenstrom nach und nach zu erhöhen, um den Effekt der magnetischen Remanenz zu vermeiden. Es wird mit Hilfe des CASSY-Systems für verschiedene Spulenströme der Detektorstrom in Abhängigkeit von der Detektorposition gemessen.

In Tabelle 4 sind die Spulenströme und entsprechenden magnetischen Feldstärken, bei denen gemessen wurde, eingetragen. Die Übertragung wurde der $I - B$ -Kennlinie für die verwendeten Polschuhe im Anhang A entnommen, die der Apparatur bei der Lieferung beigelegt war.

I_B/A	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.06	1.2
B/T	0	0.14	0.31	0.40	0.48	0.57	0.64	0.71	0.79	0.83

Tabelle 4: Magnetfeldstärke für verschiedene Spulenströme

7 Auswertung

Ein wesentlicher Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Bestimmung des Bohrschen Magnetons, die im Folgenden über die zwei im Theorieteil (Kapitel 3.4 und 3.6) angesprochenen Methoden erfolgt.

7.1 Messungen

In Abbildung 21 sind für verschiedene Spulenströme die Intensitätsverteilungen aufgetragen. Hier zeigt sich bereits deutlich, wie mit steigendem Spulenstrom und damit größerem Feldgradienten einerseits die maximale Intensität stark abnimmt und sich andererseits die Peaklagen weiter voneinander entfernen.

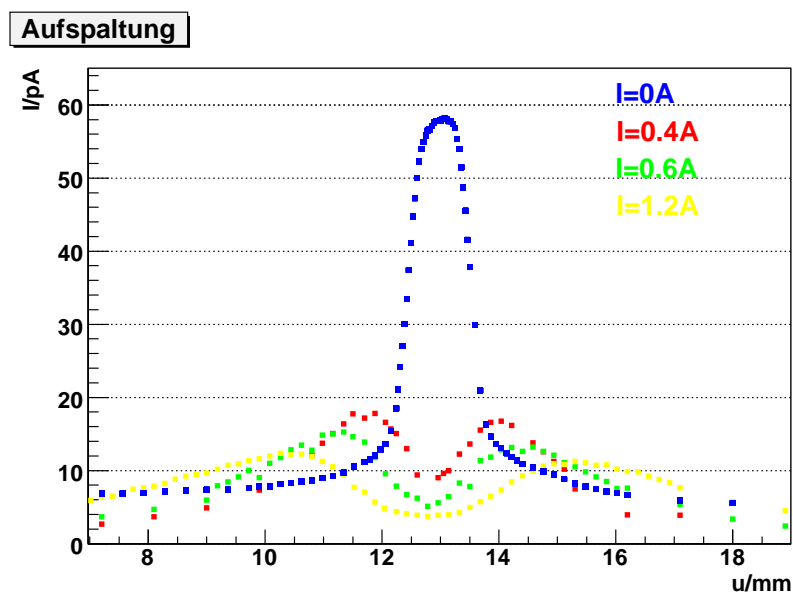


Abbildung 21: Intensitätsverteilung für verschiedene Spulenströme: Bei $I = 0$ A gibt es keine Aufspaltung ($B = 0$ T). Dieser Peak wird für Methode B (Kapitel 7.2.2) zur Bestimmung der realen Strahlbreite benutzt.

Fehlerbetrachtung

Der Fehler auf die einzelnen Messpunkte wird aus der quadratischen Addition von statistischem und systematischem Fehler bestimmt. Auf die Strommessung wird ein systematischer Fehler von 1% auf den Messwert zzgl. maximal 0.5% auf den Messbereichsendwert angegeben[3]. Ein eventueller Fehler vom Gleichstrommessverstärker kann hier nicht betrachtet werden, da keine Daten über diesen vorhanden sind (weder in den bereits vorhandenen Akten, noch beim Hersteller, nach unserer Erfahrung spielt ein solcher Fehler keine Rolle). Der Fehler auf die Millimeterschraube für

die Detektorverschiebung ist vernachlässigbar klein.

Zur Bestimmung des statistischen Fehlers wurde eine Rauschmessung durchgeführt und ein Histogramm angefertigt. Das Ergebnis ist in Abbildung 22 zu sehen. Der statistische Fehler auf die Stromwerte ist $\sigma_{I,stat} = 0.02 \text{ pA}$.

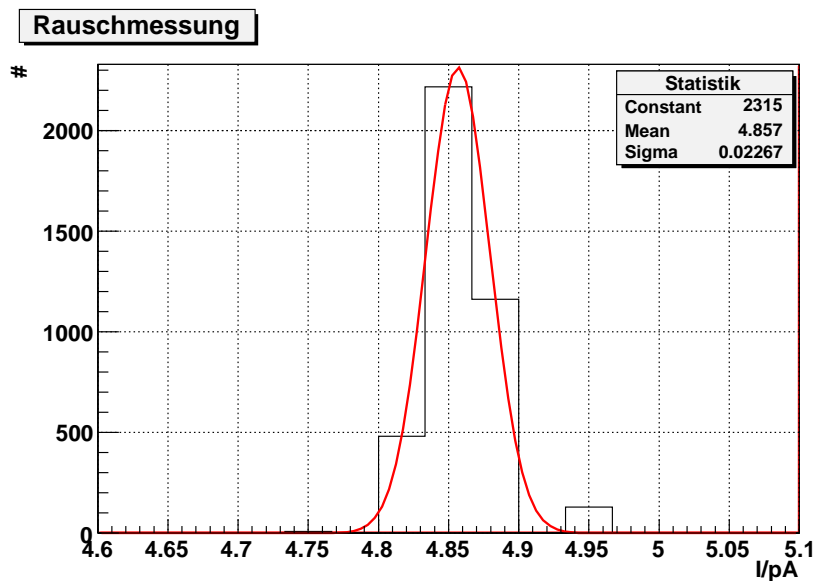


Abbildung 22: Verteilung der Stromwerte zur Bestimmung des statistischen Fehlers

7.2 Bestimmung des Bohrschen Magnetons

Zur Bestimmung des Bohrschen Magnetons werden die genauen Lagen der Maxima der Intensitätsverteilung hinter dem inhomogenen Magnetfeld benötigt. Dazu werden hier zwei Methoden beschrieben. Bei Methode A wird eine Näherung durchgeführt, bei welcher der Strahlquerschnitt als infinitesimal schmal angesehen wird (Kapitel 3.4). Bei Methode B wird die reale Strahlbreite bei verschwindendem Magnetfeld (Kapitel 3.5) genutzt.

Bestimmung der Lage der Maxima

Aus den Messungen der Intensitätsverteilungen bei eingeschaltetem Magnetfeld wird die Lage der Maxima bestimmt.

Die Schwierigkeit dabei liegt darin, einen sinnvollen Fit an die Messungen zu finden, da beide Peaks einseitig asymmetrisch sind. Es wurden verschiedene Anpassungen ausprobiert. Am besten hat das Anpassen einer Gaußkurve an jeden Peak (Abb. 23) die Maxima getroffen. Dabei wurde der Fitbereich so angepasst, dass das χ^2 optimiert wurde.

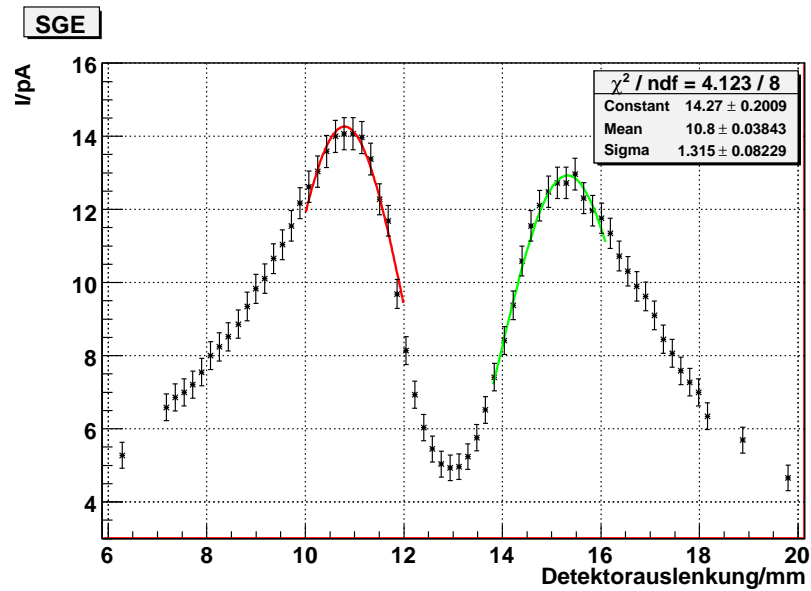


Abbildung 23: Bestimmung der Maxima durch Anfitzen jeweils einer Gaußkurve

Tabelle 5 zeigt die Resultate der Fits⁴.

<i>Spulenstrom/A</i>	0.4	0.5	0.6	0.7
u_1/mm	11.71 ± 0.03	11.87 ± 0.12	11.21 ± 0.03	9.96 ± 0.11
u_2/mm	14.03 ± 0.03	14.88 ± 0.07	14.49 ± 0.04	13.87 ± 0.11
$\Delta u/mm$	2.23 ± 0.04	3.01 ± 0.14	3.28 ± 0.05	3.91 ± 0.16
<i>Spulenstrom/A</i>	0.8	0.9	1.06	1.2
u_1/mm	10.76 ± 0.08	10.81 ± 0.04	10.57 ± 0.04	10.22 ± 0.05
u_2/mm	14.93 ± 0.05	15.38 ± 0.05	15.41 ± 0.05	15.48 ± 0.06
$\Delta u/mm$	4.17 ± 0.09	4.57 ± 0.06	4.84 ± 0.06	5.26 ± 0.08

Tabelle 5: Maxima der Teilchenintensität

⁴Die Nulllage des Detektors kann bei verschiedenen Messreihen variieren

7.2.1 Methode A

Der Abstand Δu zwischen den Maxima wird nun gegen die Inhomogenität $\frac{\partial B}{\partial z}$ aufgetragen. Diese ergibt sich aus Umrechnung der magnetischen Feldstärke mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{0.9661}{a} \cdot B$$

(Kapitel 3.1). Es ergibt sich ein annähernd linearer Zusammenhang, daher wird an die Daten eine Gerade mit der Steigung p_0 angefitet.

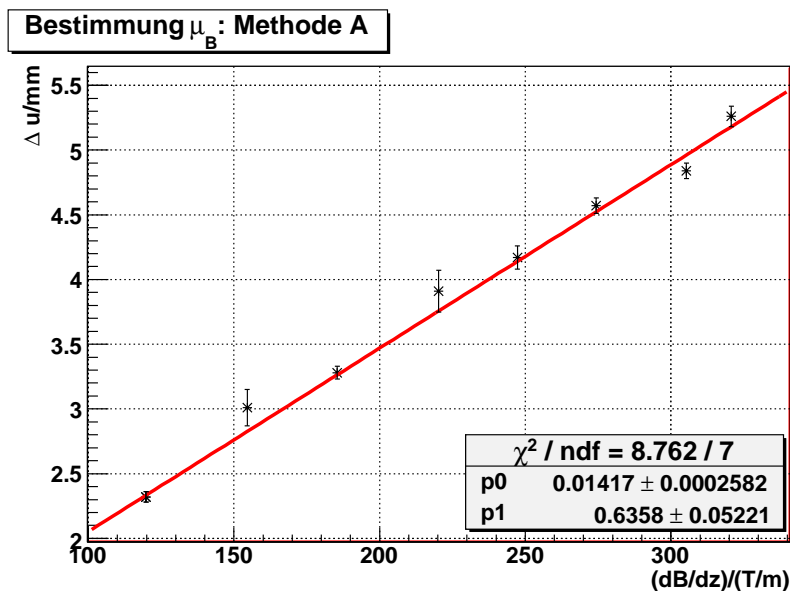


Abbildung 24: Geradenfit zur Bestimmung von μ_B , Methode A

Das Ergebnis ist in Abbildung 24 zu sehen. Für die Steigung erhalten wir

$$p_0 = (0.0142 \pm 0.0003) \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{T}}$$

Hieraus kann nun mit der im Theorieteil, Kapitel 3.4, hergeleiteten Beziehung

$$u_i = \pm \frac{q}{3}$$

$$\Rightarrow \Delta u = \frac{2}{3} \cdot q$$

das Bohrsche Magneton μ_B bestimmt werden. Mit

$$q = \frac{l \cdot L}{2kT} \cdot \left(1 - \frac{L}{2l}\right) \cdot \mu_B \cdot \frac{\partial B}{\partial z}$$

folgt die Bestimmungsgleichung für μ_B

$$\mu_B = \frac{3k_B T}{lL \left(1 - \frac{L}{2l}\right)} \cdot p_0.$$

Es ergibt sich für $T = 456.15 \text{ K}$

$$\mu_{B,A} = (9.13 \pm 0.17) \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2.$$

Der Fehler auf μ_B ergibt sich dabei durch Fortpflanzen der Fehler auf Temperatur und Geradensteigung⁵.

Der Literaturwert ist $\mu_{B,Lit} = 9.27 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2$ ⁶. Trotz Nutzung einer Näherung im Ansatz von Methode A wird μ_B hier in sehr guter Übereinstimmung innerhalb einer 1σ -Umgebung zum Literaturwert bestimmt.

7.2.2 Methode B

Für die zweite Möglichkeit der Bestimmung des Bohrschen Magnetons wird zusätzlich zum Abstand der Maxima die reale Strahlbreite bei verschwindendem Magnetfeld benötigt. Hierzu wird unmittelbar an das Maximum der Messwerte ohne Spulenstrom eine Parabel und an die Flanken je eine Gerade $y = a \cdot x + b$ angefügt (siehe Abb. 25). Die Differenz der Schnittpunkte der Geraden mit der x -Achse ist $2D$ und entspricht der Breite der Einhüllenden des Atomstrahls⁷. Die andere charakteristische Größe des Strahls ist p . Sie entspricht der halben Breite des Strahls im Bereich des Maximums.

Anhand der Fitparameter der Geraden lässt sich der jeweilige Schnitt mit der x -Achse durch $x_0 = -\frac{b}{a}$ bestimmen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6 aufgelistet.

Die Bestimmung von p erfolgt durch Anpassen des Fitbereichs. Ein angemessener Fitbereich lässt sich zwar anhand des Wertes von χ^2/n_{dof} erkennen, seine Festlegung aber erscheint recht subjektiv. Daher wird der Fehler auf p recht hoch eingeschätzt.

⁵Die Temperatur schwankte während des Experiments leicht um 183°C , der Fehler wird auf $\sigma_T = \pm 1^\circ\text{C}$ geschätzt.

⁶

<http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?mub>

⁷Die tatsächliche Breite ist kleiner, der Strahl ist leicht divergent.

	Messung 1		Messung 2	
	a_1	b_1	a_2	b_2
links	0.093 ± 0.001	0.086 ± 0.001	0.090 ± 0.001	0.085 ± 0.001
$ x_{0,l} $	0.931 ± 0.007		0.938 ± 0.005	
rechts	-0.085 ± 0.001	0.085 ± 0.001	-0.088 ± 0.001	0.084 ± 0.001
$ x_{0,r} $	1.000 ± 0.007		0.958 ± 0.007	
$D = \frac{ x_{0,l} + x_{0,r} }{2}$	$(0.966 \pm 0.005)\text{mm}$		$(0.948 \pm 0.004)\text{mm}$	
p	$(0.38 \pm 0.03)\text{mm}$		$(0.39 \pm 0.03)\text{mm}$	

Tabelle 6: Geradenfit

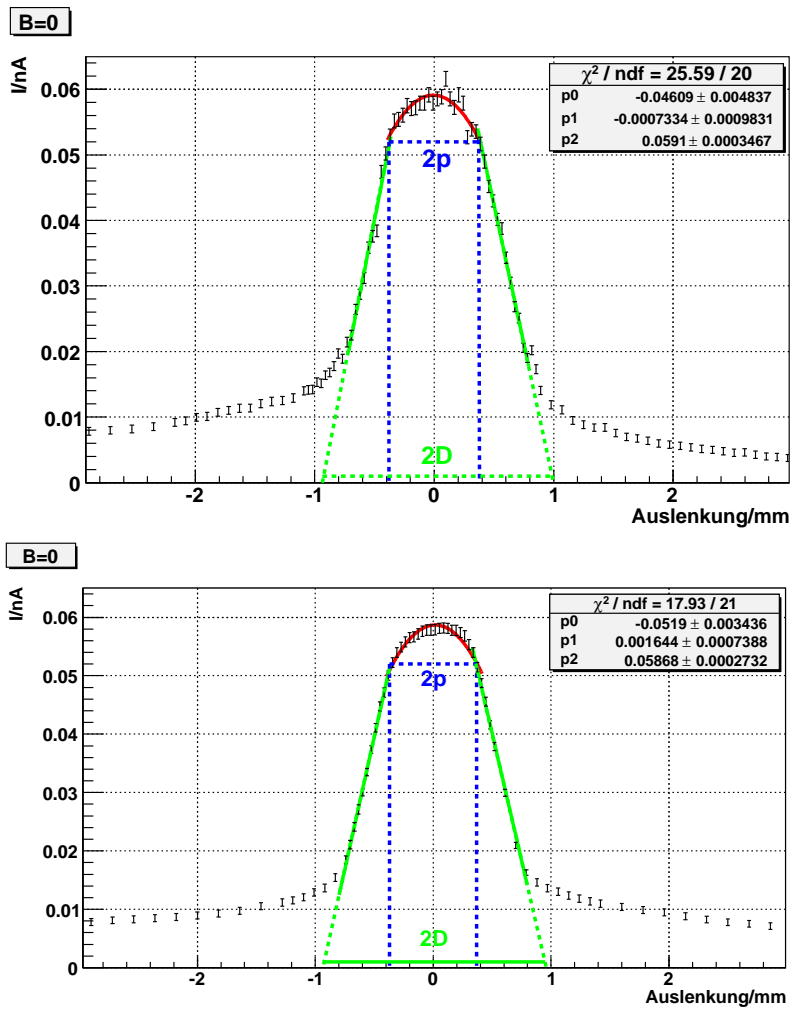


Abbildung 25: Bestimmung der Parameter p und D des Strahlprofils (Vergleich Abb. 5)

Für den Fall des realen Strahlquerschnittes wird q bestimmt durch

$$\begin{aligned} q &= \frac{3}{2} \cdot \Delta u - \frac{D^4 - \frac{p^4}{5}}{D^2 - \frac{p^2}{3}} \cdot \frac{2}{\Delta u} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \Delta u - \frac{2C}{\Delta u} \end{aligned}$$

mit der Definition

$$C = \frac{D^4 - \frac{p^4}{5}}{D^2 - \frac{p^2}{3}}$$

Es wird nun q gegen den Feldgradienten $\frac{\partial B}{\partial z}$ aufgetragen und eine lineare Regression durchgeführt (Abb. 26). Aus der daraus resultierenden Steigung p_0 ist μ_B berechenbar. Für die Berechnung von C wird das gewichtete Mittel der Größen p und D aus den beiden in Abbildung 25 ersichtlichen Messungen benutzt, also $p = (0.39 \pm 0.02)\text{mm}$ und $D = (0.955 \pm 0.005)\text{mm}$. Es ergibt sich $C = (0.96 \pm 0.01)\text{mm}^2$.

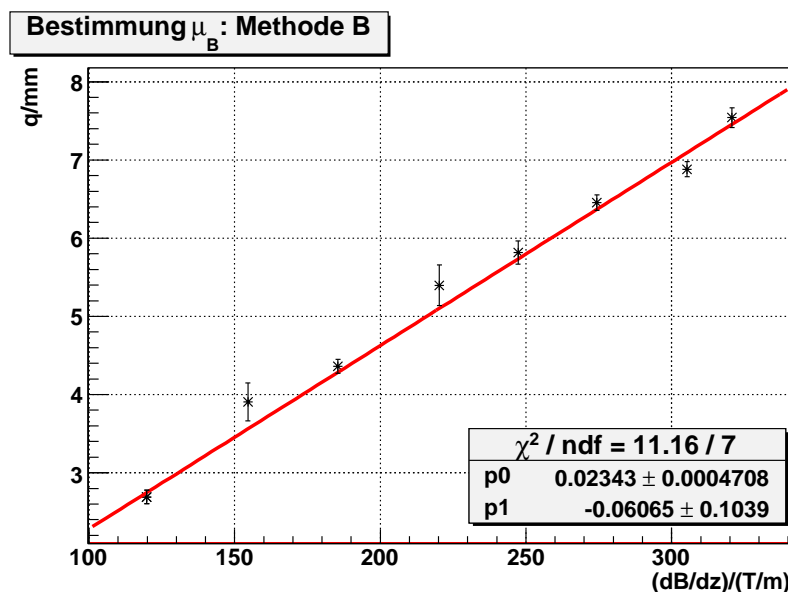


Abbildung 26: Geradenfit zur Bestimmung von μ_B , Methode B

Für die Steigung gilt demnach $p_0 = (0.0234 \pm 0.0005) \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{T}}$. Damit ergibt sich μ_B zu

$$\begin{aligned} \mu_{B,B} &= \frac{2k_B T}{lL \left(1 - \frac{L}{2l}\right)} \cdot p_0 \\ &= (10.03 \pm 0.22) \cdot 10^{-24} \text{Am}^2. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis weicht trotz der mathematisch genaueren Vorgehensweise weiter vom Literaturwert ab, als das durch Methode A gewonnene. Das kann an der bereits angesprochenen relativ willkürlichen Bestimmung der Grenze zwischen Parabel und Geradenfit liegen, durch welche die

Größe p festgelegt wird.

7.3 Wertung

Abschließend sind in Tabelle 7 die verschiedenen Messergebnisse für das Bohrsche Magneton μ_B und der Literaturwert aufgelistet. Wie sich gezeigt hat, ist es mit Methode A am besten gelungen, den Literaturwert zu bestätigen, welcher sich im 1σ -Bereich des gemessenen Wertes befindet. Die Qualität der Messung wird durch den sehr guten χ^2/n_{dof} -Wert bestätigt, welcher den Geradenfit beschreibt, aus dessen Steigung μ_B berechnet wird. Das Ergebnis aus Methode B hingegen ist trotz der mathematisch genaueren Herangehensweise weiter vom Literaturwert entfernt ($> 3\sigma$). Dies liegt wahrscheinlich vor allem an der komplizierten Bestimmung der Parameter p und D , genauer gesagt an der nicht exakt bestimmbar Grenze zwischen Parabel- und Geradenfits. Die Fehler sowie der χ^2/n_{dof} -Wert lassen trotzdem auf eine präzise Messung schließen.

$\mu_B/(10^{-24} \text{ Am}^2)$	
$\mu_{B,T}$	8.82 ± 4.55
$\mu_{B,A}$	9.13 ± 0.17
$\mu_{B,B}$	10.03 ± 0.22
$\mu_{B,Lit.}$	9.27

Tabelle 7: Vergleich der ermittelten Werte für μ_B

Zudem ist zur Vollständigkeit der Wert $\mu_{B,T}$ aus dem Vorversuch zum Temperatureinfluss, Abschnitt 6.2 aufgeführt. Auch hier liegt der Wert innerhalb eines 1σ -Bereiches, was bei einem relativen Fehler von $\sigma_{\mu_{B,T}} = 51.6\%$ nicht weiter verwunderlich ist. Aus dem Vergleich ist ersichtlich, warum die Messung nicht bei Variation der Temperatur, sondern bei Variation der Magnetfeldinhomogenität stattfindet. Im ersten Fall werden die Fehler bei geringen Temperaturen sehr groß (breitere Verteilung, vgl. Abbildung 19 und 20).

8 Schlussbemerkung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde neben einer Darstellung historischer Aspekte die Theorie des Versuches aufgearbeitet, sodass sie für Studierende eine gute Grundlage zum Verständnis des Stern-Gerlach Experiments bildet. Dazu dient auch die neu angefertigte Versuchsanleitung (s. Anhang ??). Diese enthält anschauliche Bilder und, durch Trennung von wichtigen Grundlagen des SGE und mathematischen Herleitungen, eine übersichtliche Gliederung.

Der Stern-Gerlach Versuch wurde erfolgreich aufgebaut und in Betrieb genommen. Bei den Messungen wurden vernünftige Ergebnisse erzielt, die Aufspaltung des Kaliumstrahls bei eingeschaltetem Magnetfeld ist sehr schön zu erkennen (s. Abb. 21) und das Bohrsche Magneton kann vor allem mit Methode A (Kapitel 7.2.1) sehr zufriedenstellend bestimmt werden (vergl. Tab. 7).

Bessere Ergebnisse könnten noch erzielt werden, wenn der verwendete Gleichstrommessverstärker (Typ 11742.93) durch die neuere Version (Typ 13620.93) ersetzt würde. Dieser liefert an Stelle eines Stromsignals von (0–10) mA am Ausgang ein Spannungssignal von (0–10) V. Dieses Signal kann wesentlich genauer gemessen werden.

Die Versuchsanleitung und die Apparatur wurden bereits von zwei Studenten auf ihre Eignung für das Fortgeschrittenenpraktikum getestet. Auf der Grundlage der Verbesserungsvorschläge dieser Studenten, wurde die Versuchsanleitung nochmal überarbeitet. Somit ist die Apparatur für das Fortgeschrittenenpraktikum einsatzbereit.

Literatur

- [1] Max Born Albert Einstein. *Briefwechsel 1916-1955*. Nymphenburger Verlagshandlung, 1969.
- [2] W. Demtröder. *Experimentalphysik 3, Atome, Moleküle und Festkörper*. Springer Verlag.
- [3] Leybold Didactic. *CASSY Lab Handbuch (524 201)*.
- [4] Benjamin Glauß. *Aufbau und Inbetriebnahme einer Stern-Gerlach Apparatur*.
- [5] Armin Hermann. *Lexikon der Geschichte der Physik A-Z*. Aulis Verlag Deubner & Co KG, Köln, 1987.
- [6] Schulz Hertel. *Atome, Moleküle und optische Physik 1*. Springer Verlag.
- [7] Pascual Jordan. *Begegnungen*. Gerhard Stalling Verlag, Oldenburg, 1971.
- [8] Göttingen PHYWE Systeme GmbH. *PHYWE Series of Publications, Laboratorx Experiments, Physics, Stern-Gerlach Experiment*.
- [9] Göttingen PHYWE Systeme GmbH. *Stern-Gerlach-Apparatur*.
- [10] Physiker über Physiker. *Wahlvorschläge zur Aufnahme von Physikern in die Berliner Akademie 1870-1929*. Akademie-Verlag, Berlin, 1975.

A I-B-Kennlinie

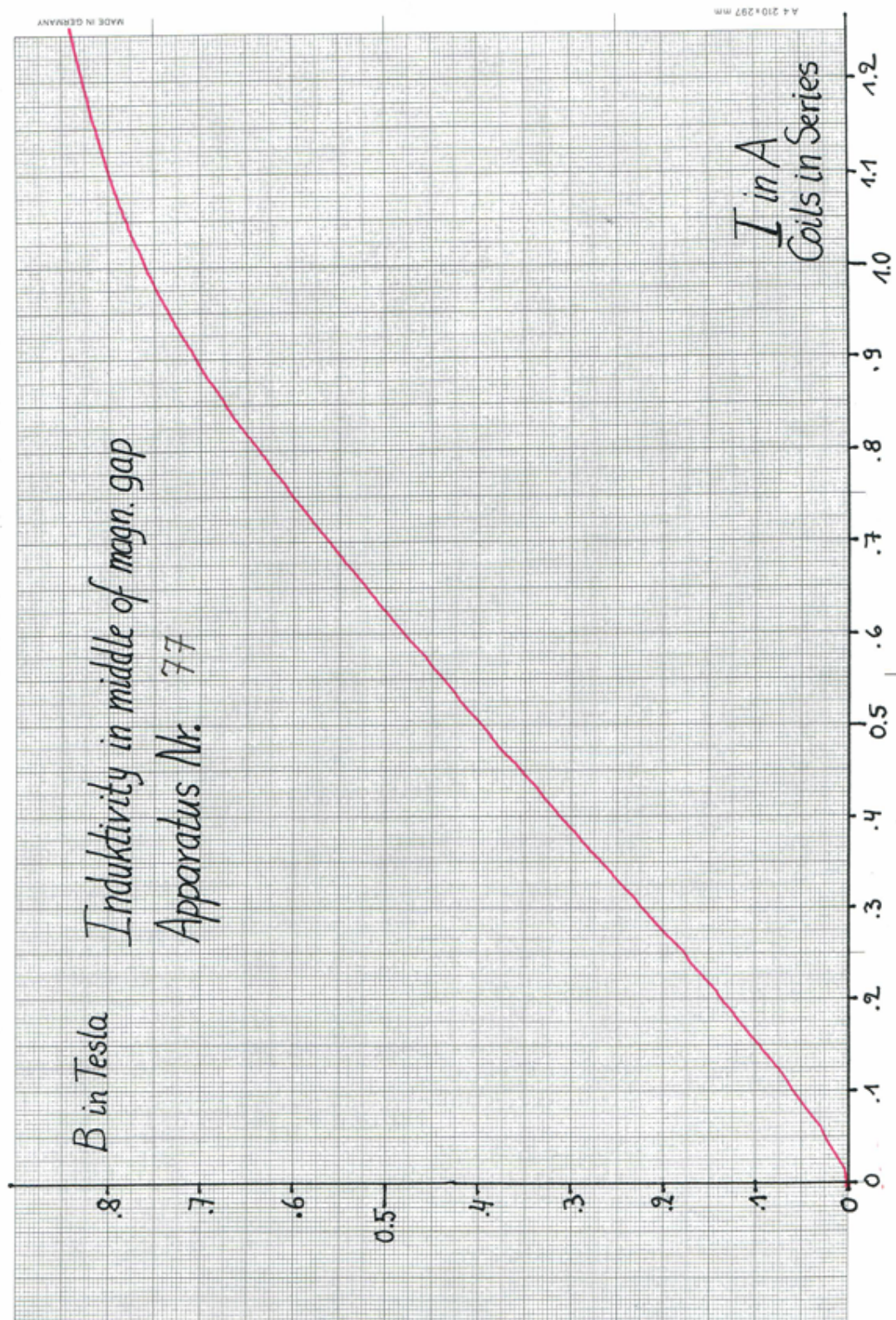
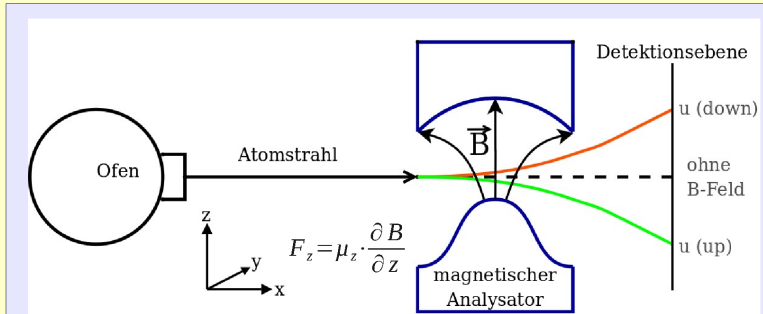


Abbildung 27: Spulenstrom gegen magnetische Feldstärke[9]

B Poster

Stern-Gerlach-Experiment



Schematischer Aufbau des SGE

In einem Ofen werden Silberatome verdampft, zu einem dichten Strahl gleich schneller Atome gebündelt und durch ein starkes, *inhomogenes Magnetfeld* geschossen. Hierin werden sie aufgrund ihres magnetischen Moments abgelenkt.

Erwartung:

- **klassisch:** *Aufweitung des Strahls* entsprechend einer kontinuierlichen Verteilung der Orientierungen der magnetischen Momente
- **quantentheoretisch:** *Aufspaltung* in drei Strahlen aufgrund einer Orientierungsquantelung der Bahndrehimpulse von Valenzelektronen

Ergebnis:

Aufspaltung in **zwei Strahlen**

Das war die erste direkte Beobachtung des **Elektronenspins**. Er besitzt genau zwei Einstellmöglichkeiten und entspricht einem *halbzahligen Eigendrehimpuls*.

Entdeckung des Zeeman-Effekts

1896

Bohrsches Atommodell: Elektronen haben quantisierten Bahndrehimpuls

1912

Entdeckung der Richtungsquantelung durch Stern und Gerlach

Pauli-Prinzip:

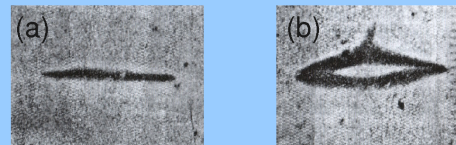
- Postulation einer vierten Quantenzahl
- kein Elektron darf in allen Quantenzahlen übereinstimmen

1922

1925

Interpretation der vierten Quantenzahl als quantisierte, halbzahlige Eigenrotation (Spin) durch Goudsmit und Uhlenbeck

Gedenktafel in Frankfurt zu Ehren von Stern und Gerlach



Original Ergebnisse: (a) ohne Magnetfeld; (b) mit Magnetfeld

Die Abbildung zeigt von Stern und Gerlach in Frankfurt am Main. aufgenommene Daten von 1922.

Bei ausgeschaltetem Magnetfeld wirkt keine Kraft auf den Atomstrahl (Abbildung(a)). Wird das Feld eingeschaltet, so spaltet sich der Strahl aufgrund der durch den Spin der 5s-Elektronen verursachten magnetischen Momente in zwei Teilstrahlen auf (Abbildung.(b)).

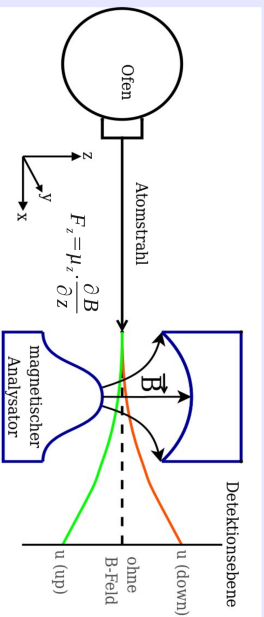
Die Entdeckung der *Richtungsquantelung des magnetischen Moments* von Silberatomen durch das SGE hat die Quantenphysik entscheidend gefördert. Sie hat Anlass zur Entwicklung der Theorie vom Spin, und damit einen Grundstein für viele weitere Entwicklungen und Theorien gegeben.

Die Atomstrahlmethode zur Trennung verschiedener Spinkomponenten ist noch immer eines der Hauptinstrumente der heutigen Forschung. Zu den größten Erfolgen, die aus dem SGE hervorgegangen sind, zählen:

- Erklärung der Feinstrukturaufspaltung und des Zeeman-Effekts
- das **Pauli-Prinzip** und damit Verständnis des **Atomaufbaus** sowie des Aufbaus des **Periodensystems**
- die Hyperfeinstrukturaufspaltung
- die Hundschen Regeln
- Messung des magnetischen Moments des Protons
- Entwicklung der **Kernspinresonanzmethode**
- Entwicklung des **Lasers**

Abbildung 28: Poster zur historischen Bedeutung des SGE (Version 1)

Stern-Gerlach-Experiment



Schematischer Aufbau des SGE

In einem Ofen werden Silberatome verdampft, zu einem dichten Strahl gleich schneller Atome gebündelt und durch ein starkes, inhomogenes Magnetfeld geschossen. Hierin werden sie aufgrund ihres magnetischen Moments abgelenkt.

Erwartung:

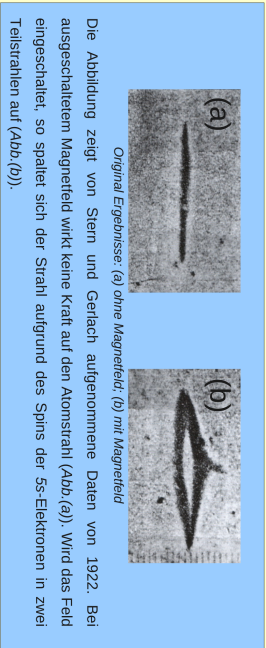
-klassisch: Aufweitung des Strahls entsprechend einer kontinuierlichen Verteilung der Orientierungen der magnetischen Momente

-quantentheoretisch: Aufspaltung in drei Strahlen aufgrund einer Orientierungsquantelung der Bahndrehimpulse von Valenzelektronen

Erggebnis:

-Aufspaltung in zwei Strahlen

Das war die erste direkte Beobachtung des **Elektronenspins**. Er besitzt genau zwei Einsteilmöglichkeiten und entspricht einem halbzahligigen Eigen Drehimpuls.



Original Ergebnisse: (a) ohne Magnetfeld, (b) mit Magnetfeld

Die Abbildung zeigt von Stern und Gerlach aufgenommene Daten von 1922. Bei ausgeschaltetem Magnetfeld wirkt keine Kraft auf den Atomstrahl (Abb.(a)). Wird das Feld eingeschaltet, so spaltet sich der Strahl aufgrund des Spins der s-Elektronen in zwei Teilstrahlen auf (Abb.(b)).



Gedenktafel in Frankfurt zu Ehren von Stern und Gerlach

Die Entdeckung der **Richtungsquantelung des magnetischen Moments** von Silberatomen durch das SGE hat die Quantenphysik entscheidend gefördert. Sie hat Anlass zur Entwicklung der Theorie vom Spin, und damit einen Grundstein für viele weitere Entwicklungen und Theorien gegeben. Die Atomstrahlmethode zur Trennung verschiedener Spin-Komponenten ist noch immer eines der Hauptinstrumente der heutigen Forschung. Zu den größten Erfolgen, die aus dem SGE hervorgegangen sind, zählen:

- Erklärung der Feinstruktur aufspaltung und des Zeeman-Effekts
- das **Pauli-Prinzip** und damit Verständnis des **Atombaus** sowie des Aufbaus des **Periodensystems**
- die Hyperfeinstruktur aufspaltung
- die Hundtschen Regeln
- Messung des magnetischen Moments des Protons
- Entwicklung der **Kernspinnresonanzmethode**
- Entwicklung des **Lasers**

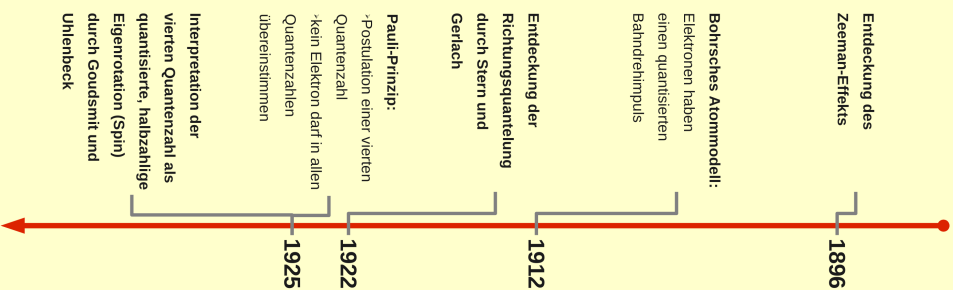


Abbildung 29: Poster zur historischen Bedeutung des SGE (Version 2)