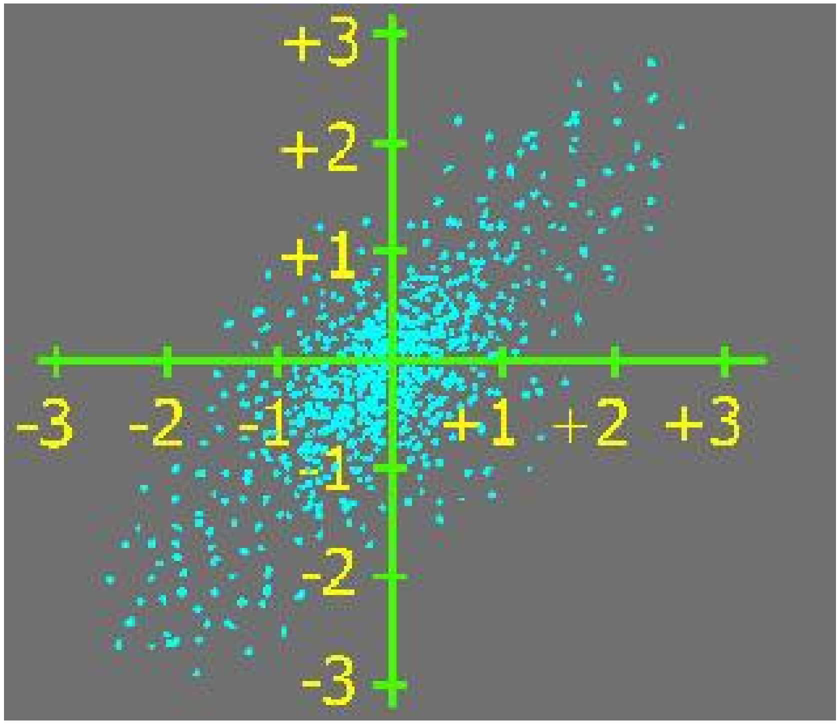
Statistik - Fehlerrechnung - Auswertung von Messungen TEIL II

Vorbereitungskurs F-Praktikum B (Physik), RWTH Aachen

Thomas Hebbeker

- Eindimensionaler Fall:
  - Parameterbestimmung - Beispiele [Übung]
- Mehrdimensionaler Fall:
  - Grundbegriffe
  - Variablentransformation
  - Fehlerfortpflanzung
  - Parameterbestimmung (Fit):
    - χ^2

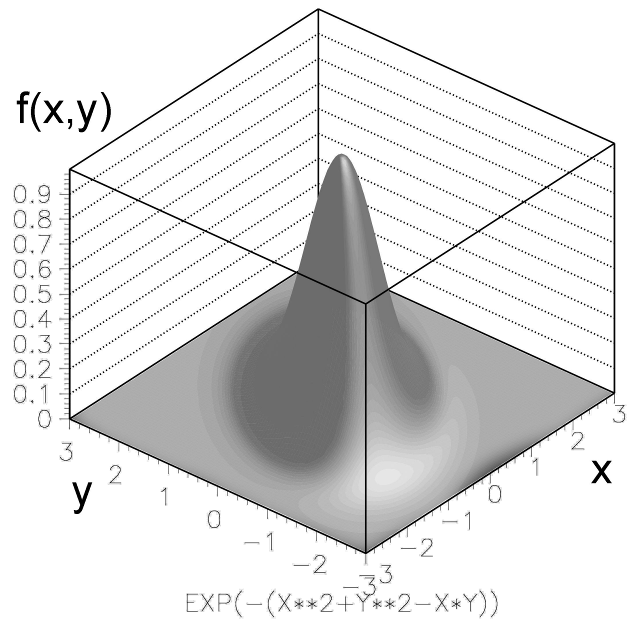


2014-12-22

Definitionen (mehrdimensional)

Wahrscheinlichkeitsdichte von zwei Zufallsvariablen: $f(x, y)$

Beispiel:



$e^{-x^2-y^2+x\,y}$

Normierung:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$$

Eindimensionale Wahrscheinlichkeitsdichten (Projektionen):

$$f_x(x) = \int f(x, y)\,dy \qquad f_y(y) = \int f(x, y)\,dx$$

Erwartungswert: (ähnlich: Estimator - Summe statt Integral!)

$$\boldsymbol{\mu_x} \equiv \langle \boldsymbol{x} \rangle = \int\int \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

Varianz:

$$\boldsymbol{\sigma_x^2} \equiv \langle (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_x})^2 \rangle = \int\int (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_x})^2\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

NEU: Kovarianz:

$$\boxed{\mathrm{cov}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} = \langle (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_x}) \cdot (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu_y}) \rangle = \int\int (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_x})\,(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu_y})\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \mathrm{d}\boldsymbol{y}}$$

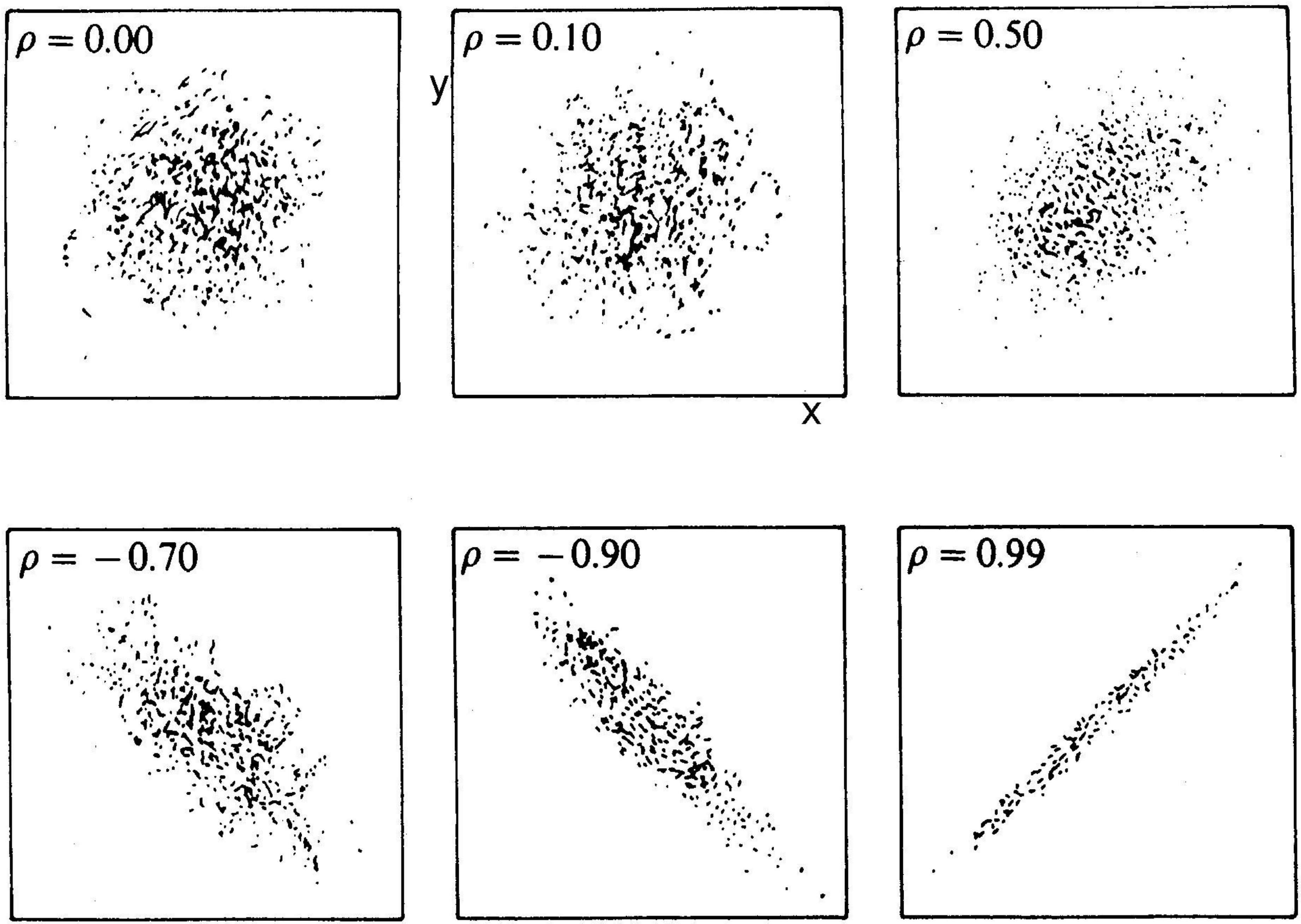
$$= \langle \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \rangle - \langle \boldsymbol{x} \rangle \cdot \langle \boldsymbol{y} \rangle$$

Korrelationskoeffizient:

$$\boxed{\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathrm{cov}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}}{\boldsymbol{\sigma_x} \cdot \boldsymbol{\sigma_y}} \quad = -1 \ldots 1}$$

gibt an, wie stark die beiden Variablen ‘korreliert’ sind.

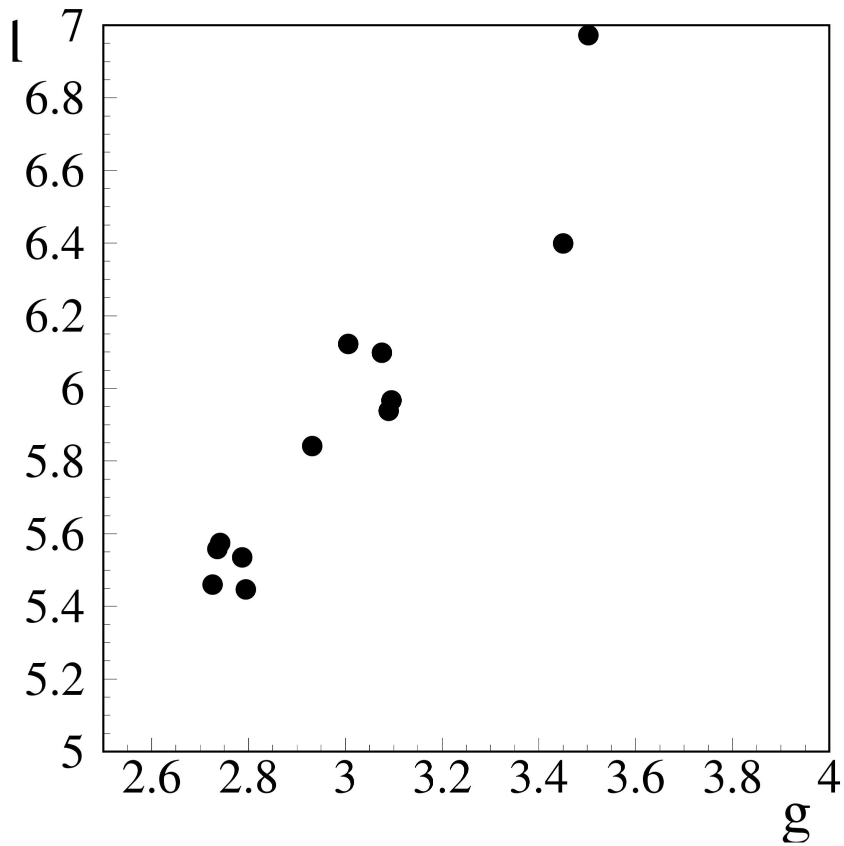
Beispiel:



Beispiel:

Gewicht/Gramm g_i und Länge/cm l_i von $N = 12$ Schrauben:

g_i	3.4	2.7	2.9	3.1	2.7	3.0	3.5	3.1	2.8	2.8	3.1	2.8
l_i	6.3	5.4	5.8	5.9	5.6	5.9	6.9	6.2	5.4	5.6	6.0	5.5



Hier Näherung:

'$N = 12$ ist groß' (na ja . . .)

Estimatoren:

$$
\begin{aligned}
\bar{g} &= \frac{1}{N}\sum g_i = 2.99 \\
\bar{l} &= \frac{1}{N}\sum l_i = 5.88 \\
\overline{g^2} &= \frac{1}{N}\sum g_i^2 = 9.01 \\
\overline{l^2} &= \frac{1}{N}\sum l_i^2 = 34.7 \\
\overline{gl} &= \frac{1}{N}\sum g_i\, l_i = 17.7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_g &= \sqrt{\overline{g^2} - (\bar{g})^2} = 0.25 \\
\sigma_l &= \sqrt{\overline{l^2} - (\bar{l})^2} = 0.42 \\
\Delta\bar{g} &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma_g = 0.07 \\
\Delta\bar{l} &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma_l = 0.12 \\
\rho &= \frac{\overline{gl} - \bar{g}\,\bar{l}}{\sigma_g\,\sigma_l} = 0.94
\end{aligned}
$$

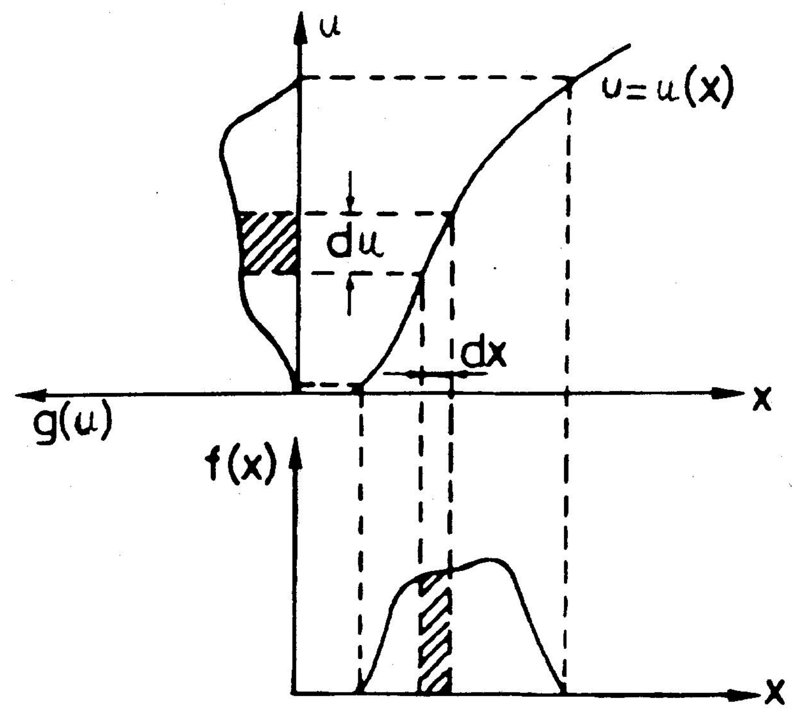
Variablentransformation

Eindimensional:

Gegeben: Verteilung $f(x)$ (= Wahrscheinlichkeitsdichte)

Variablentransformation: $x \rightarrow u \quad u = u(x)$

Gesucht: Verteilung $g(u(x))$



Erhaltung Wahrscheinlichkeit: $g(u)du = f(x)dx$

$$\boxed{g(u) = |\frac{dx}{du}| \cdot f(x) = |\frac{1}{du/dx}| \cdot f(x)}$$

Beispiel: Winkelverteilung

$$x \equiv \theta \quad (0 \ldots \pi) \qquad u \equiv z \qquad z = \cos\theta$$

$$\frac{dN}{d\theta} \equiv f(\theta) = \sin\theta \cdot (1 + \cos^2\theta)$$

$$|\frac{dz}{d\theta}| = |\sin\theta| = \sin\theta$$

$$\frac{dN}{d\cos\theta} \equiv g(z) = \frac{1}{\sin\theta} \cdot f(\theta) = 1 + z^2$$

Beispiel: Strahlungsdichte schwarzer Körper

$$x \equiv \nu \qquad u \equiv \lambda = \frac{c}{\nu} \quad \rightarrow \quad \nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$\rho_\lambda(\lambda, T) = \frac{c}{\lambda^2} \cdot \rho_\nu(c/\lambda, T)$$

Mehrdimensional, hier zwei Variable:

Gegeben: Verteilung $f(x_1, x_2)$

Variablentransformation: $x_1, x_2 \rightarrow u_1 \qquad u_1 = u_1(x_1, x_2)$
$x_1, x_2 \rightarrow u_2 \qquad u_2 = u_2(x_1, x_2)$

Gesucht: Verteilung $g(u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2))$

ohne Beweis:

$$\boxed{g(u_1, u_2) = |J(\frac{x_1, x_2}{u_1, u_2})| \cdot f(x_1, x_2)}$$

$$J(\frac{x_1, x_2}{u_1, u_2}) = \det(S) = \underline{\mathrm{Jakobi-Determinante}}$$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} \\ \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

Beispiel: Lepton-Nukleon-Streuung

$$x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv y \qquad u_1 \equiv Q^2, \quad u_2 \equiv \nu$$

Differentieller Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy} \qquad x, y \;\rightarrow\; Q^2, \nu \qquad x = Q^2/(2M\nu) \qquad y = \nu/E$$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial Q^2} & \frac{\partial y}{\partial Q^2} \\ \frac{\partial x}{\partial \nu} & \frac{\partial y}{\partial \nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2M\nu} & 0 \\ \ldots & \frac{1}{E} \end{pmatrix}$$

$$|J| = 1/(2M\nu E)$$

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{1}{2M\nu E} \cdot \frac{d^2\sigma}{dxdy}$$

Fehlerfortpflanzung [für 'kleine' Fehler!]

Eindimensional:

Gegeben: Messresultat $\hat{x} \pm \Delta x$

Variablentransformation: $x \rightarrow u \qquad u = u(x)$

Gesucht: $\hat{u} \pm \Delta u$

$$\hat{u} = u(\hat{x})$$

Entwicklung:

$$u(x) \approx u(\hat{x}) + \frac{du}{dx}|_{x=\hat{x}} \cdot (x - \hat{x})$$

$$\boxed{\Delta u = |\frac{du}{dx}|\,\Delta x}$$

Beispiel: Kantenlänge und Volumen eines Würfels

$$\boldsymbol{a = (4.0 \pm 0.1)\,\mathrm{cm}}$$

$$\boldsymbol{V = a^3 = 64.0\,\mathrm{cm}^3} \qquad \boldsymbol{\Delta V = \frac{d\,V}{d\,a} \cdot \Delta a = 3\,a^2\,\Delta a = 4.8\,\mathrm{cm}^3}$$

$$\boldsymbol{V = (64.0 \pm 4.8)\,\mathrm{cm}^3}$$

Relative Fehler:

$$\boldsymbol{\frac{\Delta V}{V} = \frac{3\,a^2\,\Delta a}{a^3} = 3 \cdot \frac{\Delta a}{a}}$$

Mehrdimensional (hier zweidimensional):

Gegeben: korrelierte Messresultate $\hat{x}_1 \pm \Delta x_1,\ \hat{x}_2 \pm \Delta x_2 \quad (\Delta x_i \equiv \sigma_{x_i}),\ \mathrm{cov}_{x_1 x_2}$

Kovarianzmatrix = Fehlermatrix:

$$\boxed{V(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \mathrm{cov}_{x_1 x_2} \\ \mathrm{cov}_{x_1 x_2} & \sigma_{x_2}^2 \end{pmatrix}}$$

Variablentransformation: $x_1, x_2 \;\rightarrow\; u_1, u_2 \qquad u_1 = u_1(x_1, x_2),\ u_2 = u_2(x_1, x_2)$

Gesucht: $\hat{u}_1 \pm \Delta u_1, \hat{u}_2 \pm \Delta u_2$ und Korrelation

Linearisierung:

$$(u_i(x_1, x_2) - u_i(\hat{x}_1, \hat{x}_2))^2$$

$$\approx \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_1}(x_1 - \hat{x}_1)\right]^2 + \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_2}(x_2 - \hat{x}_2)\right]^2 + 2\,\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\frac{\partial u_i}{\partial x_2}(x_1 - \hat{x}_1)(x_2 - \hat{x}_2)$$

Dann Bildung der Erwartungswerte - man erkennt die Elemente der Kovarianzmatrix!

Kovarianzmatrix transformiert sich so (ohne Beweis):

$$\boxed{V(u_1, u_2) = T^T \cdot V(x_1, x_2) \cdot T} \qquad T = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Beispiel: Summe und Differenz zweier Zufallsvariablen

x_1 und x_2 unkorreliert mit Standardabweichung σ_{x_1}, σ_{x_2}. Neue Variablen:

$$u_+ = x_1 + x_2 \qquad u_- = x_1 - x_2$$

$$V(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{x_2}^2 \end{pmatrix}$$

$$T = T^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$V(u_+, u_-) = \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 & \sigma_{x_1}^2 - \sigma_{x_2}^2 \\ \sigma_{x_1}^2 - \sigma_{x_2}^2 & \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\sigma_{u_+}^2 = \sigma_{u_-}^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2}$$

Varianzen σ^2 sind zu addieren, nicht Fehler σ !

Verallgemeinerungen

Die $\boldsymbol{x_i}$ seien unkorreliert, die zugehörigen Fehler bezeichnen wir mit $\boldsymbol{\sigma_i}$. Wir betrachten eine Variable $\boldsymbol{u \equiv u_1}$:

a) $\boldsymbol{u = \sum x_i}$

$$\boldsymbol{(\Delta u)^2 = \sum \sigma_i^2}$$

b) $\boldsymbol{u = \sum \alpha_i\, x_i}$

$$\boldsymbol{(\Delta u)^2 = \sum \alpha_i^2\, \sigma_i^2}$$

c) $\boldsymbol{u = u(x_i)}$

$$\boldsymbol{(\Delta u)^2 = \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_i^2}$$

Anwendung: Mittelwert

Verallgemeinerung: $\boldsymbol{N}$ Messungen $\boldsymbol{x_i}$ der gleichen Größe:

Mittelwert:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_i x_i}$$

Fehler des Mittelwertes:

$$\boxed{\Delta x = \frac{1}{N}\sqrt{\sum_i \Delta x_i^2} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{1}{N}\sum_i \Delta x_i^2}}$$

Falls alle $\boldsymbol{\Delta x_i}$ gleich:

$$\boxed{\Delta x = \frac{1}{\sqrt{N}} \Delta x_i}$$

Bedeutung: Gesamtgenauigkeit verbessert sich mit der Wurzel der Zahl der Messungen!

Anwendung: gewichteter Mittelwert

Falls Fehler verschieden, benutze gewichteten Mittelwert:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum w_i \cdot x_i}{\sum w_i} \qquad w_i = \frac{1}{(\Delta x_i)^2}}$$

minimiert Gesamtfehler (hier ohne Beweis):

$$\boxed{(\Delta x)^2 = \frac{1}{\sum w_i}}$$

Beispiel:

$$x_1 = 13.5 \pm 0.4 \qquad x_2 = 13.9 \pm 0.2$$

Ungewichtet: $\bar{x} = 13.70 \pm 0.22$

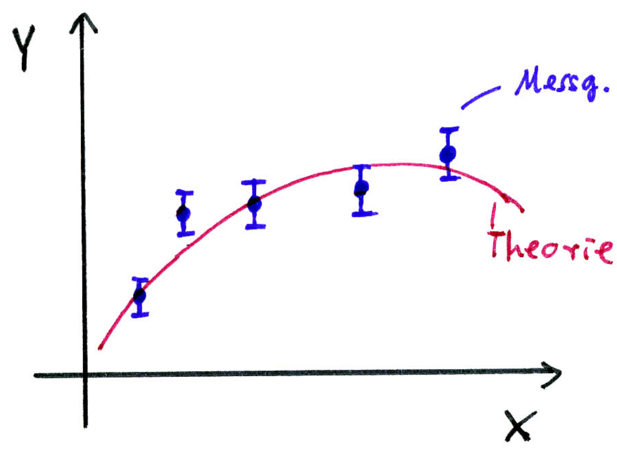
Gewichtet: $\bar{x} = 13.82 \pm 0.18 =$ besser !

χ^2-Fit-Methode, unkorreliert, 1-dimensional

N Messungen: $x_i,\ y_i \pm \sigma_i$ (gaußisch)

KEINE Korrelationen zwischen Messwerten

Theorie: 1 freier Parameter a



A-posteriori-Wahrscheinlichkeit:

$$f(x_i, y_i|a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \cdot e^{-(y_i - t(x_i|a))^2/(2\,\sigma_i^2)}$$

Zu minimieren:

$$\boxed{L(a) \equiv \chi^2(a) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - t(x_i|a))^2}{\sigma_i^2} = \sum \left(\frac{\text{Messung} - \text{Theorie(a)}}{\text{Fehler}}\right)^2}$$

Estimator für a: $\chi^2(a) = \chi^2_{\min}$

Fehler von a:

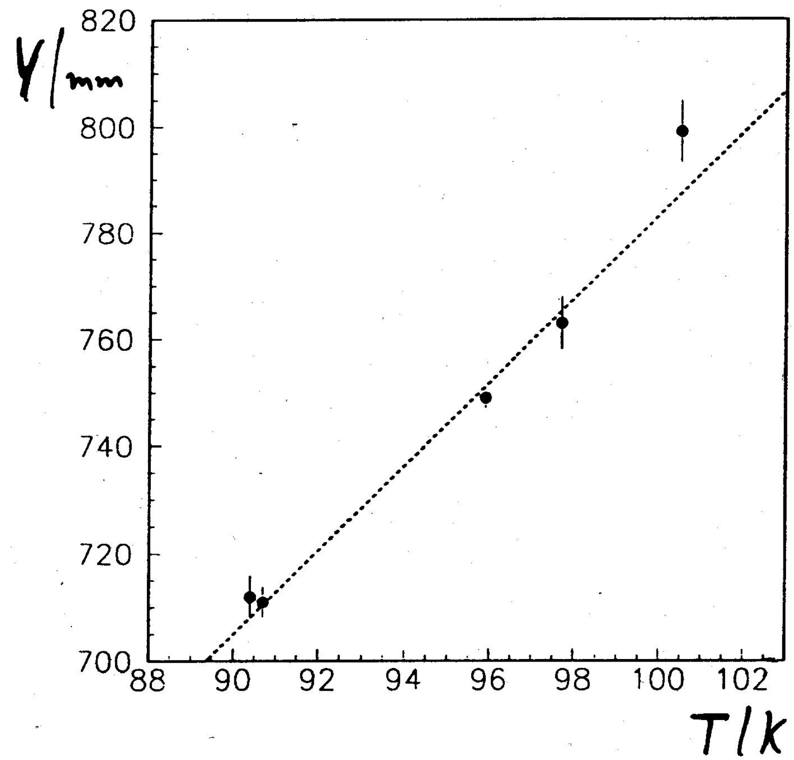
$$\chi^2(a \pm \Delta a) = \chi^2_{\min} + 1$$

Qualität des Fits: Falls gut: $\chi^2_{\min}$ ist χ^2-verteilt (!) mit N_{dof} = Zahl Messpunkte N minus Zahl Parameter = $N - 1$

Beispiel: Temperaturkoeffizient, Folge 1

Unkorrelierte Daten:

i	T_i/K	y_i/mm
1	$\mathbf{90.4}$	$\mathbf{712 \pm 4}$
2	$\mathbf{100.5}$	$\mathbf{799 \pm 6}$
3	$\mathbf{95.9}$	$\mathbf{749 \pm 2}$
4	$\mathbf{90.7}$	$\mathbf{711 \pm 3}$
5	$\mathbf{97.7}$	$\mathbf{763 \pm 5}$



Theorie: $y_i(T_i) \leftrightarrow t(T_i|a) = a \cdot T_i$

χ^2-Fit liefert:

$$\boxed{a = (7.833 \pm 0.015)\ \mathrm{mm/K}}$$

$$\chi^2/N_{dof} = 6.4/4 \approx 1 \quad \text{ok!}$$

χ^2-Fit-Methode, korreliert, 1-dimensional

N Messungen: $x_i,\ y_i \pm \sigma_i$ (gaußisch)
KORRELATIONEN zwischen Messwerten y_i
Theorie: 1 freier Parameter a

A-posteriori-Wahrscheinlichkeit:

$$\boxed{\chi^2(a) = \sum_{i,j}^{N} w_{ij}\,(y_i - t(x_i|a))\,(y_j - t(x_j|a))}$$

$$\text{Gewichtsmatrix} = (w_{ij}) = W = V^{-1} \qquad V = (v_{ij}) = \text{Kovarianzmatrix}$$

Spezialfall: $\rho_{ij} = 0$, alle Messungen unkorreliert:

$$V = \left(\sigma_i^2\right) \qquad v_{ij} = \delta_{ij}\,\sigma_i^2 \qquad w_{ij} = \delta_{ij}\,\frac{1}{\sigma_i^2} \qquad W = \left(1/\sigma_i^2\right)$$

Beispiel: Temperaturkoeffizient, Folge 2

Zusätzlicher gemeinsamer systematischer Fehler (gaußisch !) für alle Messwerte:

$$\boldsymbol{\sigma_{ij}^2 \quad \rightarrow \quad \sigma_{ij}^2 + \sigma_c^2 \qquad\qquad \sigma_c = 10\,\mathrm{mm} \quad (\widehat{=}1.3\%)}$$

Systematische Fehler (Eichung Maßstab): 100%-ige Korrelation zwischen allen Messwerten!

Kovarianzmatrix (modulo Einheiten) und Gewichtsmatrix:

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{116} & \mathbf{100} & \mathbf{100} & \mathbf{100} & \mathbf{100} \\ \mathbf{100} & \mathbf{136} & \mathbf{100} & \mathbf{100} & \mathbf{100} \\ \mathbf{100} & \mathbf{100} & \mathbf{104} & \mathbf{100} & \mathbf{100} \\ \mathbf{100} & \mathbf{100} & \mathbf{100} & \mathbf{109} & \mathbf{100} \\ \mathbf{100} & \mathbf{100} & \mathbf{100} & \mathbf{100} & \mathbf{125} \end{pmatrix} \qquad \frac{\boldsymbol{W}}{\mathbf{0.001}} = \begin{pmatrix} \mathbf{54.7} & \mathbf{-3.5} & \mathbf{-31.2} & \mathbf{-13.9} & \mathbf{-5.0} \\ \mathbf{-3.5} & \mathbf{26.2} & \mathbf{-13.9} & \mathbf{-6.2} & \mathbf{-2.2} \\ \mathbf{-31.2} & \mathbf{-13.9} & \mathbf{125.3} & \mathbf{-55.4} & \mathbf{-19.9} \\ \mathbf{-13.9} & \mathbf{-6.2} & \mathbf{-55.4} & \mathbf{86.5} & \mathbf{-8.9} \\ \mathbf{-5.0} & \mathbf{-2.2} & \mathbf{-19.9} & \mathbf{-8.9} & \mathbf{36.8} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\chi^2}$-Fit:

$$\boldsymbol{a = (7.83 \pm 0.10)}\ \mathrm{mm/K} \qquad \boldsymbol{\chi^2/N_{dof} = 6.2/4}$$

Systematik dominiert!

χ^2-Fit-Methode, unkorreliert, n-dimensional

N Messungen: $x_i,\ y_i \pm \sigma_i$ (gaußisch)
keine Korrelationen zwischen Messwerten
Theorie: L freie Parameter a_l

$$f(x_i, y_i | a_1, \ldots, a_L) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \cdot e^{-(y_i - t(x_i|a_1,\ldots,a_L))^2/(2\,\sigma_i^2)}$$

$$\boxed{\chi^2(a_l) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - t(x_i|a_l))^2}{\sigma_i^2}}$$

Estimator für Vektor (a_l): MINIMUM von χ^2 $(= \chi^2_{\min})$

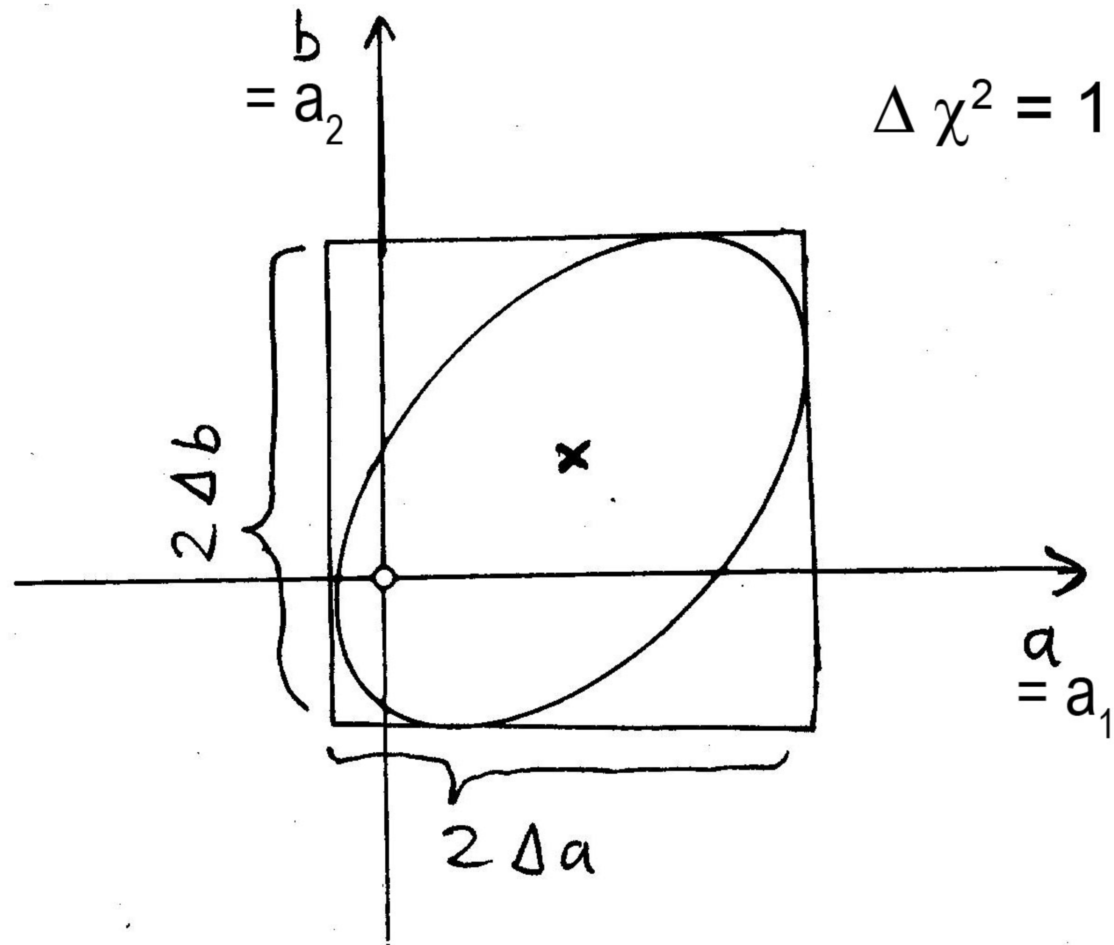
Fehlerkontur von (a_l):

$$\chi^2 = \chi^2_{\min} + \Delta\chi^2(CL, L)$$

Achtung: a_l sind i.a. korreliert !

$\Delta\chi^2$:

L	68%	90%	95%
1	1.00	2.70	3.84
2	2.30	4.61	5.99
3	3.53	6.25	7.82
4	4.72	7.78	9.49
5	5.89	9.24	11.07
6	7.04	10.65	12.59
7	8.18	12.02	14.07
8	9.31	13.36	15.51
9	10.43	14.68	16.92
10	11.55	15.99	18.31



Beispiel: Temperaturkoeffizient, Folge 3

Unkorrelierte Daten wie in Folge 1

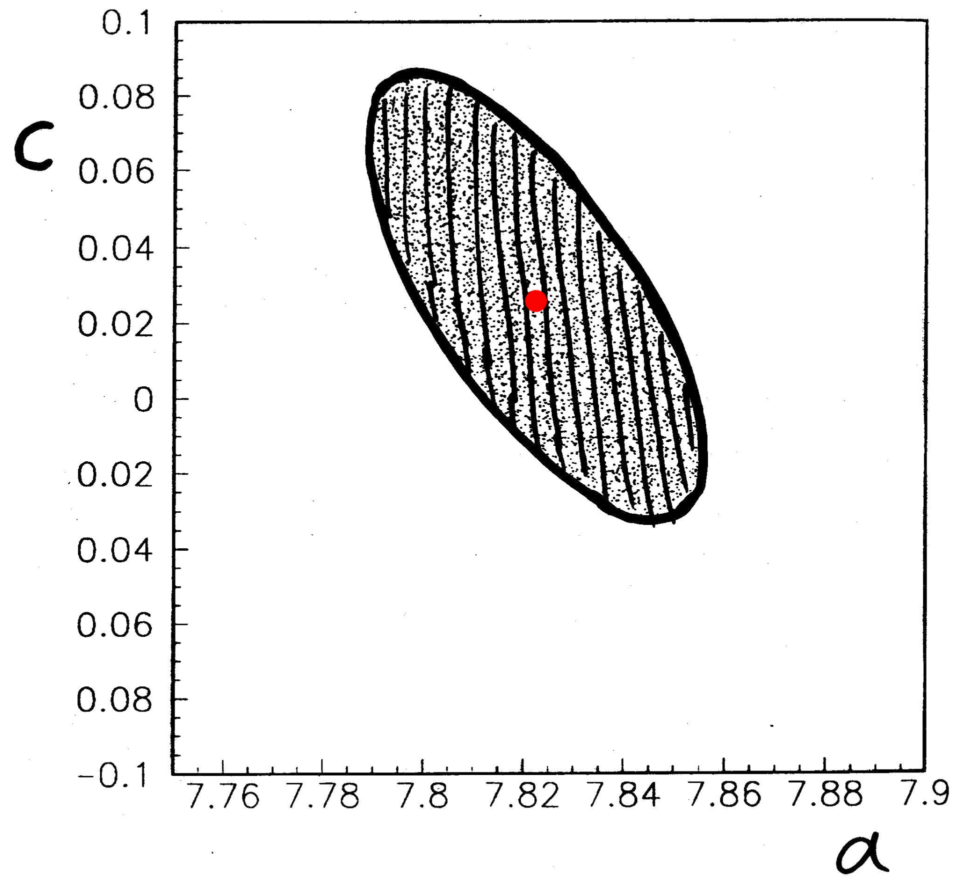
Theoretisches Modell:

$$g(T; a, c) = a \cdot T + c \cdot (T - T_0)^2 \qquad T_0 = 100\,\mathrm{K}$$

Beide Parameter a und c sind zu fitten. Modulo Einheiten:

$CL = 68\%, L = 2 \;\rightarrow\; \Delta\chi^2 = 2.30.$

$\chi^2/N_{dof} = 5.9/3 \approx 1 \quad \text{ok!}$

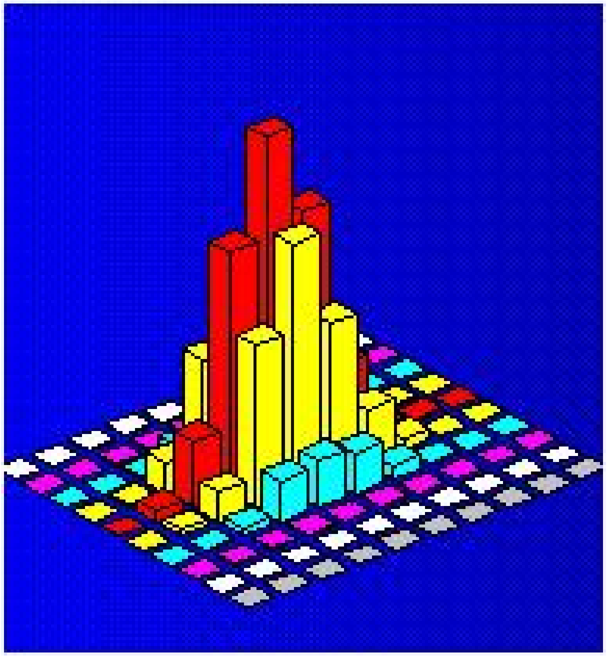


χ^2-Fit-Methode, korreliert, n-dimensional

...

Zusammenfassung (Teile I + II)

- Erwartungswerte und Estimatoren
- Mittelwert und Standardabweichung
- Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen:
  - Gauß $\leftarrow$ *zentraler Grenzwertsatz*
  - Poisson
  - Binomial
  - χ^2



- Kovarianz und Korrelation
- Variablentransformationen
- Fehlerfortpflanzung
- Fehler des Mittelwertes
- Parameterbestimmung:
  - Maximum-Likelihood-Methode
  - χ^2-Methode