Einfache mechanische Systeme und die Galileitransformation

Thomas Hebbeker

III. Physikalisches Institut A, RWTH Aachen
hebbeker@physik.rwth-aachen.de

16.April 2021

Kurzfassung

Einfache mechanische Systeme wie idealisierte Pendel kann man qualitativ und quantitativ gut verstehen. Auch die Galilei-Transformation stellt keine besondere konzeptionelle Herausforderung dar. Und doch bekommen Studierende häufig Probleme bei der konkreten Anwendung von Koordinatentransformationen auf simple mechanische Systeme. Hier wird an drei Beispielen auf verschiedene Stolperfallen hingewiesen. Dabei bestätigt sich die Erkenntnis, dass die Analyse eines Systems von verschiedenen Bezugssystemen aus sehr lehrreich ist.

1. Einfache mechanische Systeme

Es gibt keinen Physikunterricht an Gymnasien und Hochschulen, der nicht elementare idealisierte mechanische Systeme wie schwingende Pendel oder das Planetensystem behandelt. Zu diesen Systemen ist schon alles gesagt und sie stellen auch anscheinend keine didaktischen Herausforderungen dar.

2. Die Galilei-Transformation

Auch das ist ein vermeintlich einfaches Kapitel: Bei nicht zu hohen Geschwindigkeiten $\vec{w}$ ändern sich unter Galilei-Koordinatentransformationen

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{\mathbf{q}} - \vec{\mathbf{w}}\,\mathbf{t} \qquad \{1\}$$

zwischen zwei Inertialsystemen die Naturgesetze nicht. Man kann sie zum Beispiel im Zusammenhang mit dem zentralen elastischen Stoß diskutieren. Hier sorgt der konstante Vektor $\vec{q}$ für eine Verschiebung des Koordinatensystems. Der Term $\vec{\mathbf{w}}\,\mathbf{t}$ beschreibt den Geschwindigkeitsanteil der Galileitransformation (Boost). Eine mögliche zusätzliche Drehung diskutieren wir hier nicht, auch Zeittranslationen lassen wir außen vor. Sofern wir eindimensionale Bewegungen untersuchen, schreiben wir einfacher

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{q} - \mathbf{w}\,\mathbf{t}\,.$$

Natürlich kann man die erwähnten einfachen mechanischen Systeme von verschiedenen Inertialsystemen aus analysieren, ohne dass in den Rechnungen Schwierigkeiten zu erwarten sind. Richtig, aber zumindest Überraschungen und Stolperfallen – für Lernende wie für Lehrende – können auftreten, wie an den folgenden Beispielen gezeigt wird.

3. Beispiel 1: Ein einfaches Pendel

Wir betrachten ein idealisiertes horizontal schwingendes Federpendel im System der ruhenden Erde, siehe Abbildung 1.

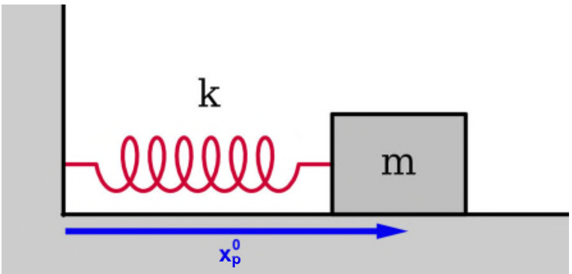


Abb.1.: Idealisiertes Federpendel, hier in der Ruhelage

Deren Rotation und Bewegung relativ zur Sonne wird ignoriert, wir idealisieren die Erde also als Inertialsystem. Die Pendelaufhängung ist fest mit unserem Planeten verbunden, Reibung tritt nicht auf, die Schraubenfeder ist elastisch und masselos. Die Gesamtenergie E des Pendels muss zeitlich konstant sein:

$$E = \frac{1}{2}\,k\,\left(x_p - x_p^0\right)^2 + \frac{1}{2}\,m\,v_p^2\,.$$

Hier ist m die Masse des Pendelkörpers, x_p die zeitabhängige Ortskoordinate, x_p^0 die Ruheposition, $v_p = \dot{x}_p$ die Geschwindigkeit und k die Federkonstante.

Ausgehend von der Energieerhaltung erhält man aus

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

auch sofort die Schwingungsgleichung

$$m\,\ddot{x}_p\ + k\,(x_p - x_p^0) = 0\,.$$

Haben wir alles richtig gemacht? Müssen wir nicht auch die Erde (Masse M, ohne Pendelmasse) und deren Oszillationsbewegung berücksichtigen (mit zeitabhängiger Geschwindigkeit v_E)? Die Impulserhaltung besagt

$$m\,v_p + M\,v_E\ = const$$

in jedem Inertialsystem. Wir setzen uns hier ins Schwerpunktsystem von Erde und Pendelkörper, so dass

$$m\,v_p + M\,v_E\ = 0$$

gilt.

Der die kinetische Energie der Erde beschreibende Zusatzterm in der Energieformel wird damit

$$\frac{1}{2}\,M\,v_E^2 = \frac{1}{2}\,\frac{m}{M}\,m\,v_p^2\,.$$

Nimmt man an, dass die Pendelmasse von der Größenordnung 1 kg ist, so ist wegen M = 2 ·10^{30} kg der Faktor m/M winzig klein, die kinetische Energie der Erdbewegung ist also völlig vernachlässigbar und muss nicht berücksichtigt werden.

So weit, so gut. Jetzt betrachten wir das Pendel in einem mit konstanter Geschwindigkeit w relativ zur Erde bewegten System. Die Richtung von w soll der Linie der Pendelbewegung entsprechen, sodass wir weiterhin eindimensional rechnen können:

$$x'_p = x_p - \mathrm{w\,t} \qquad ; \qquad v'_p = v_p - w\,.$$

Man beachte: das neue Koordinatensystem ist - wie die Erde - bestenfalls „näherungsweise“ ein Inertialsystem. Die Größenordnung von w wie auch von v'_p sei 1 m/s, also ist die nichtrelativistische Behandlung gerechtfertigt. Selbstverständlich muss auch die Gesamtenergie E' im neuen, „gestrichenen“ Bezugssystem zeitlich konstant sein:

$$E' = \frac{1}{2}\,k\,\left(x'_p - x'^0_p\right)^2 + \frac{1}{2}\,m\,v'^2_p$$

$$= \tfrac{1}{2}\,k\,\left(x_p - x_p^0\right)^2 + \tfrac{1}{2}\,m\,v_p^2\ + \tfrac{1}{2}\,m\,w^2 - m\,v_p w\,,$$

$$E' = E\ + \frac{1}{2}\,m\,w^2 - m\,v_p w\,.$$

Wegen des letzten Terms ist E' aber zeitabhängig! Der Fehler unserer Rechnung liegt darin, dass wir hier die Erdbewegung nicht ignorieren dürfen! Richtig lautet die Rechnung, jetzt im Schwerpunktsystem von Erde und Pendel, welches ein echtes Inertialsystem darstellt:

$$E' = E\ + \frac{1}{2}\,m\,w^2 - m\,v_p w + \frac{1}{2}\,M\,v'^2_E$$

$$= E + \frac{1}{2}\,m\,w^2 - m\,v_p\,w + \frac{1}{2}M\,v_E^2 - M\,v_E\,w + \frac{1}{2}M\,w^2$$

$$= E + \tfrac{1}{2}\,m\,w^2 + \tfrac{1}{2}M\,w^2 = \mathrm{const}\,.$$

Jetzt stimmt alles: die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems ist zeitlich konstant. Die Lehre: man muss zunächst korrekt rechnen, und kann dann im Endergebnis eventuell Grenzwertbildungen oder andere Näherungen vornehmen. Aber die umgekehrte Reihenfolge funktioniert im Allgemeinen nicht!

Übrigens ist der bei weitem größte Term in obiger Gleichung der letzte, $\frac{1}{2}M\,w^2$; allerdings spielt er für die Bewegung keine Rolle, da er zeitlich konstant ist.

Oft wird im Kontext der Pendelanalyse von vorneherein die Erdmasse explizit oder implizit als unendlich groß angenommen; dann kann man die Masse M gar nicht mehr in den Gleichungen unterbringen, und findet möglicherweise keine Erklärung für die scheinbar zeitabhängige Energie E'.

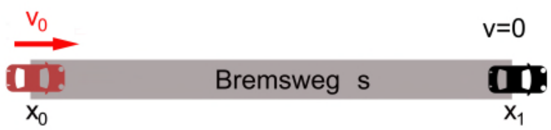
4. Beispiel 2: Autofahrt

4.1 Bremsen

Man soll bekanntlich nicht zu schnell fahren, denn der Bremsweg s eines Fahrzeugs wächst ja mit dem Quadrat der Geschwindigkeit v_0, wegen

$$\frac{1}{2}\,m\,v_0^2 = -F\,s\ = |F|\,s\,. \qquad \{2\}$$

Das ist die Energieerhaltung, betrachtet im Ruhesystem Erde, in dem wir den Vorgang jetzt analysieren. v_0 bezeichnet die Anfangs-geschwindigkeit, m die Fahrzeugmasse, und F ist die während der Vollbremsung als konstant angenommene negative Gleitreibungskraft zwischen Auto und Straße. F verschwindet vor und nach dem Bremsen. Der Bremsweg ist also



$$s = -\frac{1}{2}v_0^2\,\frac{m}{F} = \frac{1}{2}v_0^2\,\frac{m}{|F|} > 0\,.$$

Abb.2: Auto unmittelbar vor (links) und nach dem kompletten Abbremsen (rechts).

Luftreibung und andere Komplikationen ignorieren wir. Der Bremsweg s ist die Differenz der Ortskoordinaten am Ende (x_1) und am Anfang (x_0) des Bremsprozesses, siehe auch Abbildung 2:

$$s = x_1 - x_0\,.$$

Die entsprechenden Zeiten seien t_1 und t_0. Die kinetische Energie des Autos nach dem kompletten Abbremsen von v_0 auf v_1= 0 ist null, deshalb tritt ein entsprechender Term in obiger Gleichung {2} nicht auf. Im allgemeineren Fall mit $0 \le v_1 < v_0$ muss man schreiben

$$E_0 = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 + 0\ = \frac{1}{2}\,m\,v_1^2 - F\,s = E_1\,.$$

Links steht die Summe von kinetischer Energie und „Reibungsenergie“ vor dem Bremsprozess, E_0, rechts stehen die Energien am Ende des Bremsvorgangs, in der Summe ist das E_1. Hier gilt weiterhin $F < 0$.

Jetzt wechseln wir das Bezugssystem und betrachten von dort die Vollbremsung. Naheliegend ist die Betrachtung aus Sicht eines zweiten Autofahrers, der zunächst neben dem ersten mit gleicher Geschwindigkeit v_0 fährt, aber nicht abbremst. Beim Start des Bremsvorgangs gelte $t'_0 = t_0 = 0$ und $x'_0 = x_0$. Jetzt gilt für den bremsenden PKW im neuen Bezugssystem $v'_0 = 0$ und $v'_1 = -v_0$. An der Rechnung ändert sich nichts Grundsätzliches:

$$0 = E_1 - E_0 = \frac{1}{2}\, m\, (-v_0)^2 - F\, x'_1 - 0 + F\, x'_0$$

bzw.

$$\frac{1}{2}\, m\, (-v_0)^2 = F\, (x'_1 - x'_0) \quad .$$

Man beachte, dass die Kraft, die ja nach Newton proportional zur Beschleunigung ist, sich bei Galilei-Transformationen nicht ändert, also $F' = F < 0$. Es liegt nahe, für den Bremsweg im gestrichenen System $s' = x'_1 - x'_0$ zu setzen. Wir erhalten also

$$F\, s' = +\frac{1}{2}\, m\, v_0^2 \quad . \qquad \{3\}$$

Betragsmäßig stimmt das mit dem Ergebnis {2} überein – allerdings ist wegen $F < 0$ auch $s' < 0$. Das falsche Vorzeichen darf man nicht einfach `wegwischen', sondern hier müssen alle Alarmglocken schrillen. Zunächst muss man sich klarmachen, dass der Bremsweg nur im System der ruhenden Erde definiert ist. In anderen Bezugssystemen kann die Differenz $s' = x'_1 - x'_0$ beliebige Werte annehmen und insbesondere negativ werden – was bei einem Bremsweg keinen Sinn ergibt. Eine wohldefinierte Bedeutung hat der Bremsweg s also nur im Bezugssystem Erde. Wie kann man nun aus {3} den gesuchten Bremsweg s berechnen? Natürlich durch entsprechende Koordinatentransformation:

$$x' = x - w\, t \quad ,$$

mit $w = v_0$. Also:

$$s = x_1 - x_0 = (x'_1 + \mathrm{w}\, t_B) - (x'_0 + \mathrm{w} \cdot 0) \, .$$

Wenn man hier die leicht auszurechnende Galilei-invariante Bremsdauer

$$t_B = t'_1 - t'_0 = t_1 - t_0 = -v_0\, \frac{m}{F} = v_0\, \frac{m}{|F|}$$

einsetzt, folgt sofort

$$s = x_1 - x_0 = s' - v_0^2\, \frac{m}{F} = -\frac{1}{2} v_0^2\, \frac{m}{F}$$

Das ist das erwartete Ergebnis – mit korrektem Vorzeichen!

4.2 Beschleunigen

Jetzt soll – zunächst wieder im Ruhesystem der Erde – der PKW von $\boldsymbol{v} = 0$ auf $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_0}$ beschleunigt werden. Wir nehmen an, dass dies mit konstanter Motorleistung $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$ geschieht, wobei F die zeitabhängige beschleunigende Kraft und v die momentane Geschwindigkeit relativ zur Erde ist. Ganz offenbar nimmt die Kraft F mit schneller werdendem Auto ab – auch ohne Luftreibung, die wir wieder vernachlässigen. Aus diesem Grund kann man beim Anfahren stark beschleunigen, aber nicht bei hohen Geschwindigkeiten auf der Autobahn, unabhängig vom Luftwiderstand. Das bedeutet, dass mit unseren Annahmen der Beschleunigungsvorgang keineswegs ein in der Zeit rückwärts laufender Bremsvorgang ist, denn bei letzterem hatten wir ja eine konstante Kraft angenommen, den bekannten Gleitreibungsgesetzen entsprechend.

Wenn wir in ein anderes Bezugssystem wechseln, das sich mit fester Relativgeschwindigkeit w relativ zur Erde bewegt, bekommen wir andere Werte für die Geschwindigkeiten, $v' = v - w$. Wir können die durch eine Beschleunigung hervorgerufene Änderung der kinetischen Energie in beiden Bezugssystemen ausrechnen – und finden ein ähnliches Paradoxon wie beim Federpendel: Der Zuwachs an kinetischer Energie beim Beschleunigungsvorgang hängt von w ab! Dieses Rätsel wird ähnlich wie beim Pendel gelöst: auch hier muss die Bewegung der Erde mitberücksichtigt werden, dann stimmt wieder alles.

5. Beispiel 3: Drehimpuls von Massenpunkten

Bezogen auf den Ursprung des Koordinatensystems ist der Bahndrehimpuls für einen einzelnen Massenpunkt definiert durch

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \ ,$$

wobei $\vec{r}$ den vom Nullpunkt des Koordinatensystems auf den Massenpunkt zeigenden Ortsvektor und $\vec{p} = m\, \vec{v}$ den Teilchenimpuls bezeichnet.

5.1 Geradlinige Bewegung

Der einfachste Fall ist ein kräftefreier Massenpunkt der sich folglich in einem Inertialsystem geradlinig und gleichförmig bewegt, mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ und festem Impuls:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}\, t \ .$$

Schon an dieser Stelle haben Studierende oft Verständnisprobleme, denn obwohl sich „hier ja gar nichts dreht" ist der Drehimpuls im Allgemeinen nicht null. Die zweite Schwierigkeit besteht darin, dass zwar $\vec{r}$ zeitabhängig ist, das Kreuzprodukt $\vec{r} \times \vec{p}$ und damit der Drehimpuls aber zeitlich konstant sind – wie für ein abgeschlossenes System zu erwarten ist. Der Wert des Drehimpulses hängt vom Bezugspunkt des Ortsvektors $\vec{r}$ ab, den wir hier mit dem Koordinatenursprung identifizieren:

$$\vec{L} = m\, \vec{r}_0 \times \vec{v} \ .$$

Man beachte, dass der Term $\vec{v}\, t \times \vec{p}$ verschwindet.

Eine Verschiebung der Koordinaten um den festen Vektor $\vec{q}$ ergibt einen neuen - im Allgemeinen durch diese Transformation veränderten – Wert für den Drehimpuls:

$$\vec{L'} = (\vec{r} - \vec{q}) \times \vec{p} = \vec{L} - \vec{q} \times \vec{p} \ .$$

Auch dieser Drehimpuls $\vec{L'}$ ist wegen der Impulserhaltung zeitlich konstant.

Bei einem „Galilei-Boost“ mit der Geschwindigkeit $\vec{w}$ (und $\vec{q} = \vec{0}$) erhält man im neuen Referenzsystem

$$\vec{L'} = (\vec{r} - \vec{w}\,t) \times m\,(\vec{v} - \vec{w})$$
$$= \vec{L} + m\,t\,\vec{v} \times \vec{w} - m\,\vec{r} \times \vec{w}$$
$$= \vec{L} - m\,\vec{r}_0 \times \vec{w} = m\,\vec{r}_0 \times (\vec{v} - \vec{w}).$$

Die Drehimpulse $\vec{L'}$ und $\vec{L}$ in den beiden Inertialsystemen unterscheiden sich also um einen additiven konstanten Vektor – was natürlich erlaubt ist. Also ist mit $\vec{L}$ auch $\vec{L'}$ zeitunabhängig.

5.2 Planetensystem

Sehr häufig wird die Bewegung eines Massenpunktes in einem Zentralfeld diskutiert, zum Beispiel im Zusammenhang mit unserem Planetensystem und der Schwerkraft der Sonne. Wir betrachten die Bewegung eines Planeten in einem Inertialsystem, in dem der Schwerpunkt von Sonne und Planet ruht und den Ursprung des Koordinatensystems definiert. Nimmt man die das Gravitationsfeld erzeugende Sonnenmasse als unendlich groß an, so ist der Drehimpuls zeitlich konstant, denn

$$\dot{\vec{L}} = m\,\dot{\vec{r}} \times \vec{v} + m\,\vec{r} \times \dot{\vec{v}} = \vec{0} + \vec{0} \ .$$

Im letzten Schritt wurde benutzt, dass es sich um eine „zentrale“ Kraft $m\ddot{\vec{r}}$ proportional zu $\vec{r}$ handelt, so dass das Drehmoment $\vec{r} \times \vec{F}$ und das Kreuzprodukt $\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \dot{\vec{v}}$ verschwinden.

Also ist alles klar!? Nein, denn genau so wie man bei *geradliniger* Bewegung den *Drehimpuls* analysieren darf, kann man bei der hier betrachteten *Drehbewegung* auch den *translatorischen Impuls* $\vec{p}$ betrachten. Dieser ist aber offenbar nicht zeitlich konstant! Der Verweis auf die auftretenden Kräfte hilft nicht weiter, denn es handelt sich schließlich um ein abgeschlossenes System, in dem sowohl Impuls als auch Drehimpuls erhalten sind! Das ist nicht das einzige Problem: Bei einer Verschiebung des Bezugspunktes = Koordinatenursprungs erhält man

$$\vec{L'} = (\vec{r} - \vec{q}) \times \vec{p} = \vec{L} - \vec{q} \times \vec{p} \ .$$

Im Gegensatz zu $\vec{L}$ ist aber $\vec{L'}$ nicht zeitlich konstant! Kann die Frage der Drehimpulserhaltung vom Bezugspunkt abhängen?

Die Lösung sieht ähnlich aus wie die in Kapitel 3: Die Sonnenmasse M muss in den Rechnungen explizit berücksichtigt werden, auch wenn der Planet mit Masse m sehr viel „leichter“ ist, also $m/M \ll 1$. Jetzt ist der Gesamtdrehimpuls im Schwerpunktsystem der beiden Himmelskörper (das ein „exaktes“ Inertialsystem darstellt) gegeben durch

$$\vec{L} = M\,\vec{R} \times \vec{V} + m\,\vec{r} \times \vec{v} \ . \qquad \{4\}$$

Hierbei bezeichnen die Größen mit Großbuchstaben Masse, Ortsvektor und Geschwindigkeit der Sonne.

Das Schwerpunktsystem ist definiert durch

$$M\,\vec{R} + m\,\vec{r} = \vec{0} \,.$$

Daraus folgt die Impulserhaltung:

$$M\,\vec{V} + m\,\vec{v} = \vec{0} \,.$$

Der Gesamtdrehimpuls {4} ist zeitlich konstant, wie man leicht durch Bilden der zeitlichen Ableitung nachrechnen kann. Man beachte, dass der dominante Beitrag zu $\vec{L}$ von der Planetenbewegung kommt (und nicht von der Bewegung der Sonne), denn

$$M\,\vec{R} \times \vec{V} = -m\,\vec{r} \times \vec{V} = \frac{m}{M}\, m\,\vec{r} \times \vec{v} \ .$$

Jetzt überprüfen wir, was bei einer Verschiebung des Koordinatensystems um $\vec{q}$ passiert (ohne Boost):

$$\vec{L'} = M\left(\vec{R} - \vec{q}\,\right) \times \vec{V} + m\,(\vec{r} - \vec{q}) \times \vec{v}$$

Unter Benutzung der Impulserhaltung folgt

$$\vec{L'} = \vec{L} + \left[\,M\,\vec{V} + m\,\vec{v}\,\right] \times \vec{q} = \vec{L}$$

Jetzt ist alles konsistent.

5.3 Planetensystem und Galilei-Boost

Nachdem die Grundfragen geklärt sind, untersuchen wir schließlich wie Galileitransformationen mit $\vec{w} \neq \vec{0}$ den Drehimpuls verändern. Der Einfachheit halber setzen wir $\vec{q} = \vec{0}$. Jetzt erhalten wir im geboosteten Bezugssystem

$$\vec{L'} = M\left(\vec{R} - \vec{w}\,t\right) \times (\vec{V} - \vec{w}\,) + m\,(\vec{r} - \vec{w}\,t) \times (\vec{v} - \vec{w}\,).$$

Nach Sammeln ähnlicher Terme folgt

$$\vec{L'} = \vec{L} - \left[M\vec{R} + m\,\vec{r}\,\right] \times \vec{w} + \left[M\,\vec{V} + m\,\vec{v}\,\right] \times \vec{w}\,t = \vec{L}.$$

Hier haben wir wieder ausgenutzt, dass die Größen $\vec{R}, \vec{r}$ und $\vec{V}, \vec{v}$ im Schwerpunktsystem definiert sind.

Insbesondere ist also $\vec{L'}$ wie auch $\vec{L}$ zeitlich konstant. Dies „funktioniert“ nur deshalb, weil wir die Terme proportional zu M nicht einfach weggelassen haben!

Schließlich mag man sich wundern, warum wir beim Planetensystem bisher immer $\vec{L'} = \vec{L}$ gefunden haben, gilt das für jede beliebige Galilei-Transformationen? Nein, wendet man {1} an, also gleichzeitig eine Koordinatenverschiebung und einen Boost, treten zeitlich konstante Zusatzterme proportional zu $\vec{q} \times \vec{w}$ auf.

6. Fazit

Durch Vergleich der in verschiedenen Bezugssystemen durchgeführten Rechnungen wird deutlich, dass deren Komplexität sehr unterschiedlich sein kann: Eine kluge Wahl des Referenzsystems macht das Leben sehr viel einfacher! Andererseits erzielt man durch die Analyse unterschiedlicher Bezugssysteme oft ein tieferes Verständnis.

Dank

Ich danke Herrn Uli Arndt für viele wertvolle Hinweise zum Manuskript.