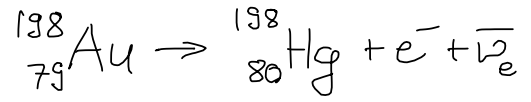
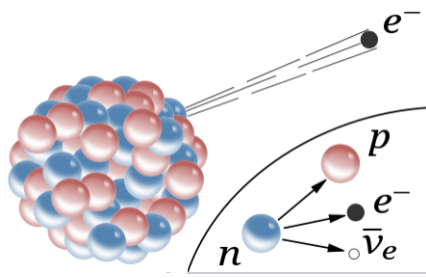


Quantenfeldtheorie

R. Harlander
July 2021

Ziele: Erzeugung + Vernichtung von Teilchen

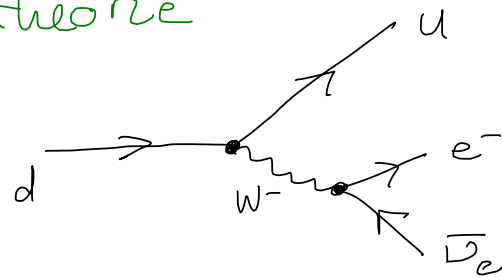
Beispiel:



- Wohin verschwindet das d ?
- Woher kommt das u ?
- Woher kommt das e^- ?
- Woher kommt das $\bar{\nu}_e$?

Antwort: Quantenfeldtheorie

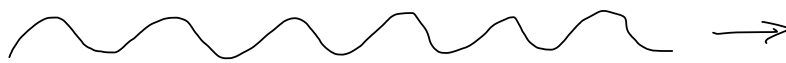
Feynman-Diagramm



Beispiel:

Photon = „Lichtteilchen“

Licht = elektromagnetische Welle



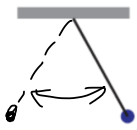
klassisch: Welle mit Frequenz ω (Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}$)

kann „beliebig klein“ sein

Quantenphysik: minimale Energie: $E = \hbar\omega$
 $\hat{=}$ 1 Photon

Mechanisches Analogon:

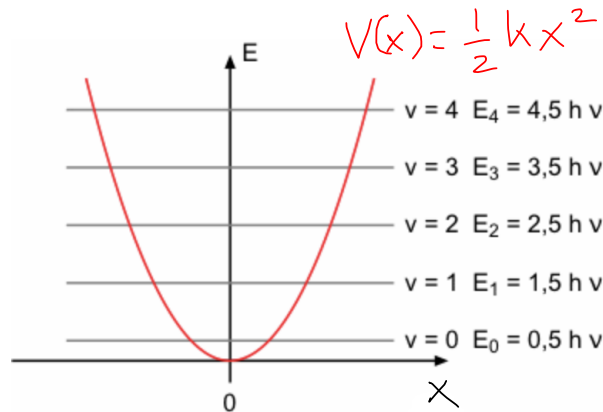
Pendel



$$\omega = \left(\sqrt{\frac{g}{l}}\right)^{-1}$$

klassisch: beliebig kleine Auslenkung (= Energie) möglich

QM: nur diskret: $\Delta E = \hbar \omega$



Beispiel: Photon = „Lichtteilchen“

Licht = elektromagnetische Welle



klassisch: Welle mit Frequenz ω (Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}$)

kann „beliebig klein“ sein

Quantenphysik: minimale Energie: $E = \hbar \omega$

$\hat{=}$ 1 Photon

Relativistische Energie-Impuls-Relation:

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}$$

Photon: $m=0 \Rightarrow E = |\vec{p}|c$

D.h. Anregung des Photon(quanten)feldes

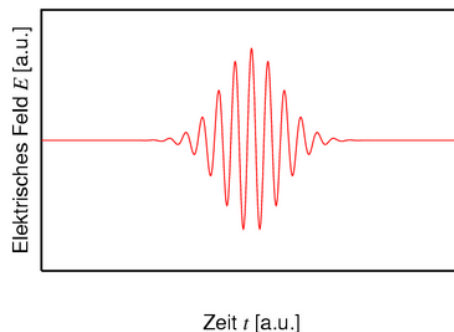
mit $E = \hbar\omega$

$\hat{=}$ Photon mit $|\vec{p}| = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}$

Heisenberg: $(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{\hbar}{2}$

hier $\Delta p = 0 \Rightarrow \Delta x = \infty!$

Lokalisierte Teilchen: „Überlagerung“ von
Anregungen mit verschiedenem p
(vgl. Fourier-Transformation)



Entsprechend:

e^- = Anregung des e^- -Quantenfeldes

\vdots

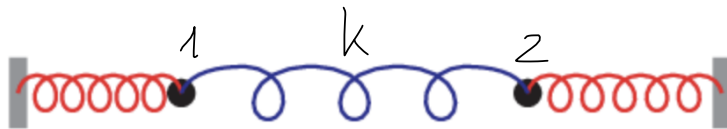
Higgs = - " - Higgs-Quantenfeldes

nur ist hier $m \neq 0$ in $E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}$

Erzeugung und Vernichtung

Zurück zum klassischen Analogon

→ Webseite

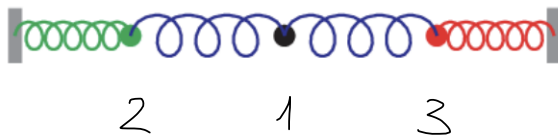


klassisch: Energie oszilliert zwischen 1 und 2

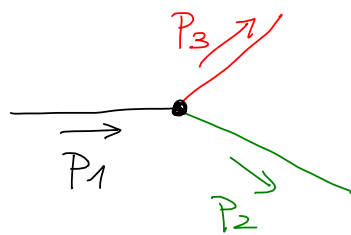
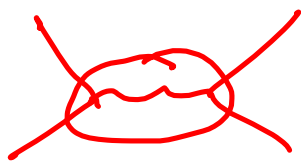
QM: Energie entweder bei 1 oder 2
(bei minimaler Anregung $E = \hbar\omega$)

Übergangsrate \sim Kopplung k ($\hat{=}$ Federkonstante)

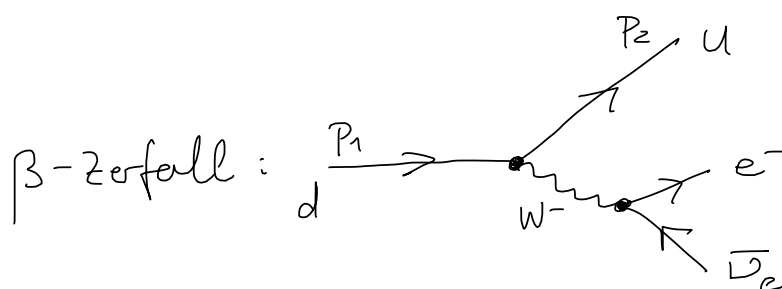
Übergang nur, falls $\omega_1 = \omega_2$!



Andere Möglichkeit: $\hbar\omega_1 = \hbar\omega_2 + \hbar\omega_3$



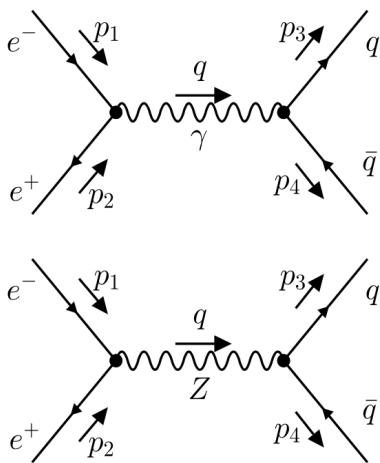
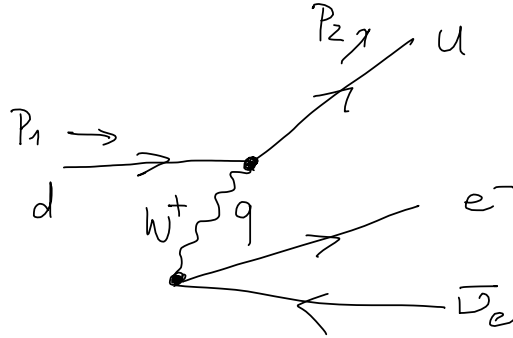
"Zerfall"



Zwischenfeildrher „virtuell“

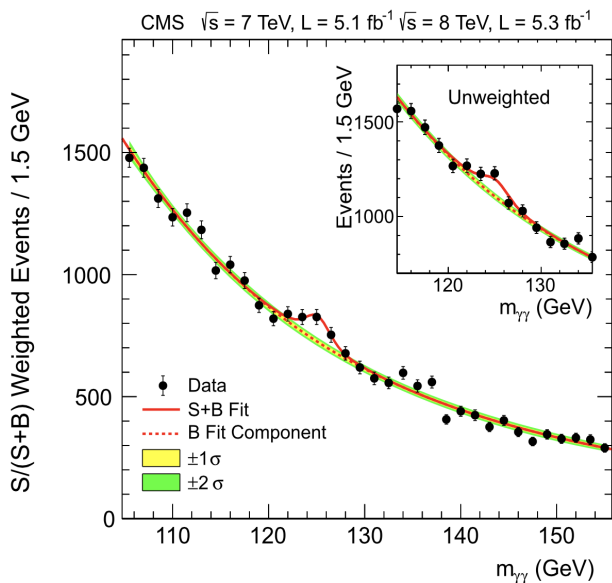
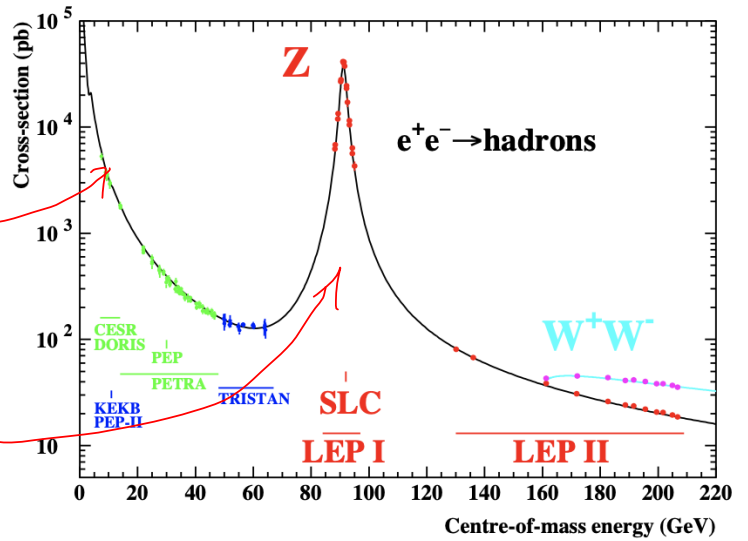
d.h. $E \neq \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$

beachte: zeitlicher Ablauf unphysikalisch



$\sim \frac{1}{q^2}$

$\sim \frac{1}{q^2 - M_Z^2}$



Mathematische Beschreibung

Lagrangefunktion \equiv mathematische Formulierung eines physikalischen Systems

klassische Mechanik: $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x)$

$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} x(t) = v(t)$

\uparrow kinetische Energie \uparrow potentielle Energie

z.B. Federpendel: $U(x) = \frac{1}{2} k x^2$

Euler-Lagrange-Gleichungen: $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$

$$-kx - m\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Lösung: $x(t) = x_0 \cos \omega(t - t_0)$

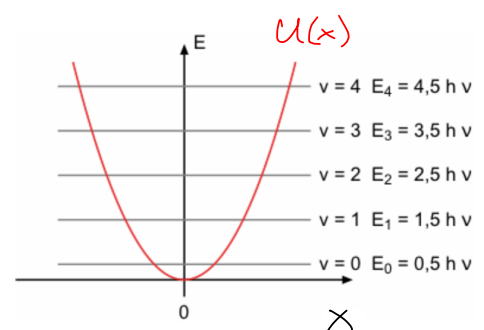
$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + U(x) = \frac{p^2}{2m} + U(x) \equiv H(x, p)$$

Hamiltonfunktion

E kann kontinuierliche Werte annehmen

Quantenmechanik:

Wellenfunktion $\psi(x, t)$



Energiewerte: $\hat{H} \psi(x, t) = E \psi(x, t)$

\uparrow Hamiltonoperator $\hat{H} = H(\hat{x}, \hat{p})$

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{x} = x$$

$$\begin{aligned} (\hat{x} \hat{p} - \hat{p} \hat{x}) \psi(x, t) &= \hat{x} (-i\hbar \partial_x) \psi - (-i\hbar \partial_x) x \psi = \\ &= -i\hbar x \psi' + i\hbar \psi + i\hbar x \psi' = i\hbar \psi(x, t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

$$\Rightarrow \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}kx^2\right) \psi(x, t) = E\psi(x, t)$$

hat nur Lösungen für $E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \equiv E_n$;

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

d.h. $\left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}kx^2\right) \psi_n(x, t) = E_n \psi_n(x, t)$

Grundzustand : $\psi_0(x, t)$, $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$

$$\psi_0(x, t) \sim e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2}$$

$$\psi_1(x, t) \sim x e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2}$$

$$\psi_2(x, t) \sim \left(1 - \frac{m\omega}{\hbar} x^2\right) e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2}$$

etc.

Normierung: $\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi_0(x, t)|^2 = 1$

allgemein:

$$\psi_{n+1}(x, t) \sim \underbrace{\left(x - \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial}{\partial x}\right)}_{= a^+ \cdot \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}} \psi_n(x, t)$$

kurz:
 $|n+1\rangle \sim a^+ |n\rangle$
 $(a^+ |n\rangle)^+ = \langle n| a = \langle n+1|$

$$\psi_{n-1}(x, t) \sim \underbrace{\left(x + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial}{\partial x}\right)}_{= a \cdot \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}} \psi_n(x, t)$$

$|n-1\rangle \sim a |n\rangle$
 $\langle 0|0\rangle = 1$

a^+ : Aufsteigeoperator, "Erzeuger"

a : Absteigeoperator, "Vernichter"

$$x = \frac{1}{2}(a + a^+) \cdot \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \quad , \quad x \sim a + a^+$$

$$p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} = \frac{im\omega}{2} (a^+ - a) \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \quad , \quad p \sim a - a^+$$

beachte:

$$a \psi_0(x) \sim \left(x + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2}$$
$$\sim (x - x) e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2} = 0 !$$

d.h. es gibt keinen Zustand
mit $E < E_0$

$$\text{kurz: } a|0\rangle = 0$$

auch:

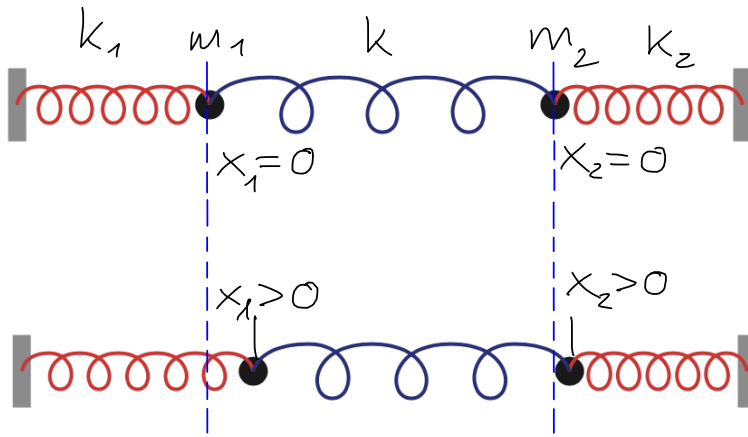
$$a a^\dagger \psi(x) = \frac{m\omega}{2\hbar} \left(x + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(x - \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x)$$
$$= \frac{m\omega}{2\hbar} \left(x^2 - x \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\hbar^2}{m^2\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi(x)$$
$$= 1 + x \frac{\partial}{\partial x}$$
$$= \frac{m\omega}{2\hbar} \left(x^2 - \frac{\hbar^2}{m^2\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\hbar}{m\omega} \right) \psi(x)$$

$$a^\dagger a \psi(x) = \frac{m\omega}{2\hbar} \left(x - \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(x + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x)$$
$$= \frac{m\omega}{2\hbar} \left(x^2 + x \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\hbar^2}{m^2\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi(x)$$
$$= 1 + x \frac{\partial}{\partial x}$$
$$= \frac{m\omega}{2\hbar} \left(x^2 - \frac{\hbar^2}{m^2\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar}{m\omega} \right) \psi(x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{a a^\dagger - a^\dagger a}_{=: [a, a^\dagger]} = 2 \frac{\hbar}{m\omega} \cdot \frac{m\omega}{2\hbar} = 1 !$$

$$\Rightarrow \langle 1|1\rangle = \underbrace{\langle 0|a a^\dagger|0\rangle}_{= \langle 1|1\rangle} = \underbrace{\langle 0|a^\dagger a|0\rangle}_{= 0} + \langle 0|0\rangle = 1$$

Wechselwirkung



$$L = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 - \frac{m_1 \omega_1^2}{2} x_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 - \frac{m_2 \omega_2^2}{2} x_2^2 - \frac{k}{2} (x_1 - x_2)^2$$

$$\rightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$$

$$x_1 \sim a_1 + a_1^\dagger$$

$$x_2 \sim a_2 + a_2^\dagger$$

$$\downarrow (a_1 + a_1^\dagger)(a_2 + a_2^\dagger)$$

$$\downarrow a_1 a_2 + a_1 a_2^\dagger + a_1^\dagger a_2 + a_1^\dagger a_2^\dagger$$

$$a_1^\dagger |n_1, n_2\rangle \sim |n_1+1, n_2\rangle$$

$$a_2^\dagger |n_1, n_2\rangle \sim |n_1, n_2+1\rangle$$

$$[a_1, a_1^\dagger] = 1 = [a_2, a_2^\dagger], \quad [a_1, a_2^\dagger] = \dots = 0$$

Wahrscheinlichkeit für Übergang $1 \leftrightarrow 2$:

$$|\mathcal{A}_{12}|^2 \text{ mit } \mathcal{A}_{12} \sim \langle n_1=0, n_2=1 | e^{i \int dt L(x_1, x_2)} | n_1=1, n_2=0 \rangle$$

$$1 + i \int dt L + \frac{1}{2} (i \int dt L)^2 + \dots$$

\downarrow
 $k^2 \dots$
 k^3

z.B.

$$\langle 0, 1 | k a_2^\dagger a_1 | 1, 0 \rangle$$

Feldtheorie

z.B. Elektrodynamik: Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x}, t) \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{x}, t) \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}, t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{x}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{x}, t)$$

kombinieren:
 $\rho = \vec{j} = 0$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \vec{\nabla}^2 \right) \vec{E}(\vec{x}, t) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \vec{\nabla}^2 \right) \vec{B}(\vec{x}, t) = 0$$

Wellengleichungen

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

1-dimensional: $\vec{\nabla} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi(x, t) = 0$$

Ansatz: $\Phi(x, t) = \Phi_p(t) e^{ipx}$

$$\Rightarrow \ddot{\Phi}_p + c^2 p^2 \Phi_p = 0$$

harmonischer Oszillator mit Frequenz $\omega_p = cp$!

Feld $\hat{=}$ ∞ Satz von harmonischen Oszillatoren, $p \in [-\infty, \infty]$

Quantenfeldtheorie:

$$\Phi_p \sim a_p + a_p^\dagger$$

$$E_p = \hbar \omega_p = \hbar c p$$

$\hat{=}$ masseloses Feld/Teilchen

$$\text{" } \Phi(x, t) \sim \int dp [a_p + a_p^\dagger] \text{"}$$

massiv: $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \vec{\nabla}^2 - m^2 c^4\right) \Phi = 0, \quad E_p = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$
 $= c^2 \partial_\mu \partial^\mu, \quad \partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$

ab jetzt: $c = \hbar = 1$ "natürliche Einheiten"

Analog zu $L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2} x^2 \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Lagrangedichte:

$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi) (\partial^\mu \Phi) - \frac{m^2}{2} \Phi^2 \Rightarrow (\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \Phi = 0$
 "Klein-Gordon-Gleichung"

"freies Feld Φ "

mit Wechselwirkung:

$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi) (\partial^\mu \Phi) - \frac{m^2}{2} \Phi^2 - \mu \Phi^3 - \lambda \Phi^4$

$\int d^3p \int d^3p' (a_p + a_p^\dagger) (a_{p'} + a_{p'}^\dagger) \quad \int d^3p_1 d^3p_2 d^3p_3 (a_{p_1} + a_{p_1}^\dagger) (a_{p_2} + a_{p_2}^\dagger) (a_{p_3} + a_{p_3}^\dagger)$

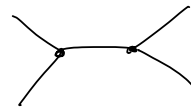
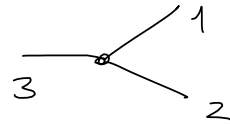
nur $a_p a_p^\dagger$ und
 $a_p^\dagger a_p$

kann beitragen



$a_1 a_2 a_3^\dagger$

$p_3 = p_1 + p_2$



Streuung!

Mehrere Teilchen:

$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi_1) (\partial^\mu \Phi_1) - \frac{m_1^2}{2} \Phi_1^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi_2) (\partial^\mu \Phi_2) - \frac{m_2^2}{2} \Phi_2^2 +$
 $- \mu_1 \Phi_1^3 - \mu_{12} \Phi_1 \Phi_2^2 + \dots$

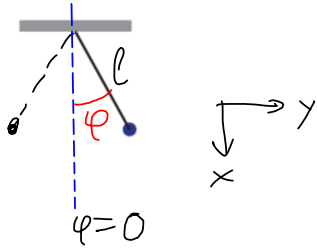
Wie sieht \mathcal{L} aus?

(1) Welche Felder?

(2) Welche Symmetrien?

Zunächst Analogie aus der Mechanik:

Pendel



$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r})$$

$$x = l \cos \varphi$$

$$y = l \sin \varphi$$

$$z = 0$$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 - U(\varphi)$$

$$U(\varphi) = ?$$

Symmetrie: $\varphi \rightarrow -\varphi$, d.h. $U(-\varphi) = U(\varphi)$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 - a\varphi^2 - b\varphi^4 - c\varphi^6 - \dots$$

↑ ↑ ↑
müssen experimentell
bestimmt werden

$$\text{es ergibt sich: } a = \frac{m\omega^2}{2}, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$b = -\frac{a}{2}$$

$$c = +\frac{a}{3!}, \quad \text{etc}$$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{m\omega^2}{2} \cos \varphi$$

Wie sieht \mathcal{L} aus?

(1) Welche Felder?

(2) Welche Symmetrien?

z.B. Feld: ϕ

Symmetrie: $\phi \rightarrow -\phi$, d.h. $\mathcal{L}(\phi) \stackrel{!}{=} \mathcal{L}(-\phi)$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \mu \phi^3 - \lambda \phi^4 + \dots$$

komplizierter: $e^{i\alpha} (e^{i\alpha})^\dagger = e^{i\alpha} \cdot e^{-i\alpha} = e^{i(\alpha-\alpha)} = 1$

$$\mathcal{L}(\phi(x)) \stackrel{!}{=} \mathcal{L}(e^{i\alpha} \phi(x)), \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ const.}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$$

noch komplizierter:

$$\mathcal{L}(\phi(x)) \stackrel{!}{=} \mathcal{L}(e^{i\alpha(x)} \phi(x)) \quad \text{„lokale Eichsymmetrie“}$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \phi(x) \rightarrow \partial_\mu e^{i\alpha(x)} \phi(x) = i(\partial_\mu \alpha) e^{i\alpha} \phi + e^{i\alpha} \partial_\mu \phi$$

$$\Rightarrow (\partial_\mu e^{i\alpha} \phi)^\dagger (\partial^\mu e^{i\alpha} \phi) = \underbrace{(\partial_\mu \alpha) (\partial^\mu \alpha)}_{\text{red}} \phi^\dagger \phi + (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi)$$

betrachte stattdessen:

$$\mathcal{L}(\phi, A) = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu(x)$$

$$\text{und} \quad \mathcal{L}(e^{i\alpha} \phi, A_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha) \stackrel{!}{=} \mathcal{L}(\phi, A_\mu)$$

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - ig A_\mu - i \partial_\mu \alpha) e^{i\alpha} \phi &= i(\cancel{\partial_\mu \alpha}) e^{i\alpha} \phi + e^{i\alpha} \partial_\mu \phi \\ &\quad - (ig A_\mu + i \cancel{\partial_\mu \alpha}) e^{i\alpha} \phi \\ &= e^{i\alpha} (\partial_\mu - ig A_\mu) \phi = e^{i\alpha} D_\mu \phi \end{aligned}$$

$$\left[(\partial_\mu - ig A_\mu - i \partial_\mu \alpha) e^{i\alpha} \phi \right]^\dagger = e^{-i\alpha} (D_\mu \phi)^\dagger$$

$$\Rightarrow (\mathbb{D}_\mu \Phi)^\dagger (\mathbb{D}^\mu \Phi) \rightarrow (\mathbb{D}_\mu \Phi)^\dagger (\mathbb{D}^\mu \Phi)$$

beachte:

$$\begin{aligned} (\mathbb{D}_\mu \Phi)^\dagger (\mathbb{D}^\mu \Phi) &= (\partial_\mu \Phi - ig A_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi - ig A^\mu \Phi) \\ &= (\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) + ig A_\mu (\Phi^\dagger \partial_\mu \Phi - (\partial_\mu \Phi)^\dagger \Phi) \\ &\quad + g^2 A_\mu A^\mu \Phi^\dagger \Phi \end{aligned}$$



noch komplizierter:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}(U\Phi) = \mathcal{L}(\Phi)$$

$$U \in SU(n)$$

$$\Rightarrow n^2 - 1 \text{ } A_\mu\text{-Felder} : A_\mu^\alpha, \alpha = 1, \dots, n^2 - 1$$

z.B. SM : $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

\nearrow
 $3^2 - 1 = 8$
 Gluonen

\nearrow
 $2^2 - 1 = 3$
 W^\pm, W^0

\nwarrow
 1
 B_μ
 Mischung

\searrow
 A_μ, Z_μ
 Mischungswinkel θ_w

Spontane Symmetriebrechung

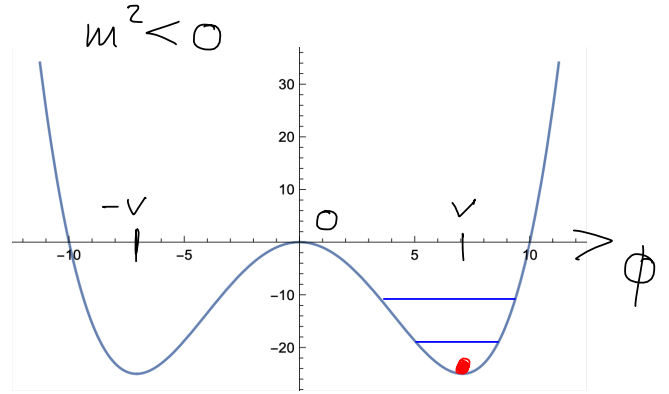
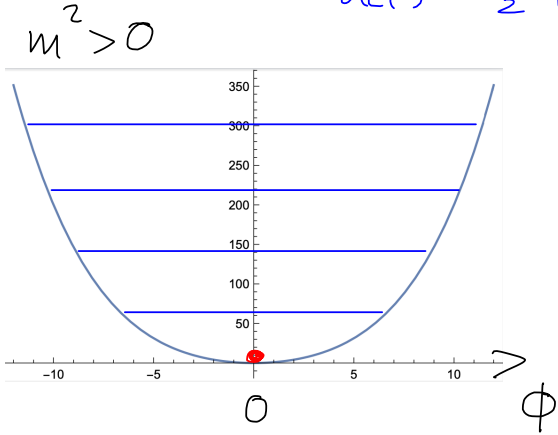
Vorüberlegung:

Erinnerung Lagrangedichte: Massenterm $\sim \phi^2$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \lambda\phi^4 \Rightarrow (\partial_\mu \partial^\mu - m^2)\phi = 0$$

↑
Wechselwirkung

$$U(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2 + \lambda\phi^4$$



$$\phi(x) = v + H(x)$$

„spontane Symmetriebrechung“
Quantisiere $H(x)$

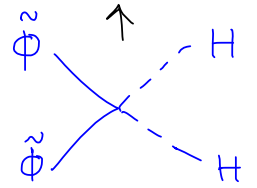
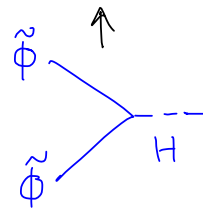
Betrachte nun $\mathcal{L}(\phi, \tilde{\phi})$ mit Kopplungsterm

$$\lambda \phi^2 \tilde{\phi}^2 = \lambda (v+H)^2 \tilde{\phi}^2 = \lambda v^2 \tilde{\phi}^2 + 2\lambda v H \tilde{\phi}^2 + \lambda H^2 \tilde{\phi}^2$$

Symmetrie:
 $\phi \rightarrow -\phi$
 $\tilde{\phi} \rightarrow -\tilde{\phi}$

„versteckt“
(hidden)

$$M_{\tilde{\phi}}^2 = 2\lambda v^2$$



Kopplung: $2\lambda v$

λ

\Rightarrow 3 Koeffizienten, 2 Parameter

\Rightarrow Vorhersage

Higgs-Mechanismus

Betrachte

$$\mathcal{L}(\Phi, A) = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \underbrace{m^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2}_{= -U(\Phi^\dagger \Phi)}$$

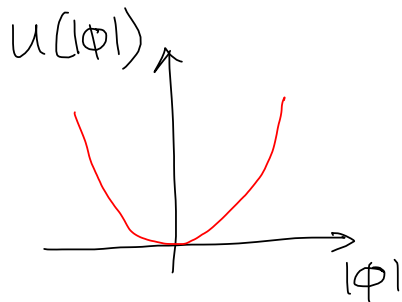
$$D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu$$

symmetrisch unter $\Phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \Phi(x)$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x)$$

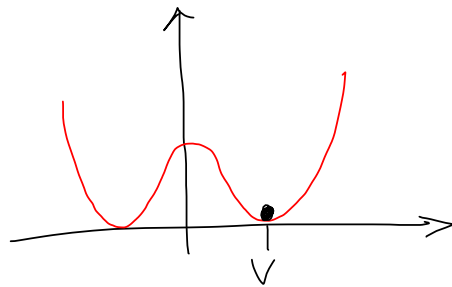
Erinnerung: quadratische Terme = Massenterme

$$\mathcal{L} \not\propto M_A^2 A_\mu A^\mu \quad \text{nicht symmetrisch}$$



Sei stattdessen

$$m^2 < 0$$



$$U(|\Phi|) = -|m^2| |\Phi|^2 + \lambda |\Phi|^4$$

Minimum bei

$$\frac{\partial U}{\partial |\Phi|} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow -2|m^2| |\Phi| + 4\lambda |\Phi|^3 = 0$$

$$\Rightarrow |\Phi| = \frac{|m|}{2\sqrt{\lambda}} \equiv v$$

Schreibe $\Phi(x) = v + H(x)$ Higgsfeld

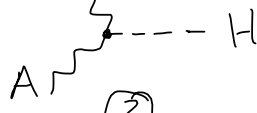
$$(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) \ni g^2 A_\mu A^\mu \Phi^\dagger \Phi = g^2 A_\mu A^\mu (v^2 + 2vH + H^2)$$

$$= g^2 v^2 A_\mu A^\mu + 2g^2 v A_\mu A^\mu H + g^2 A_\mu A^\mu H^2$$

$$\uparrow$$

$$M_A^2 = 2g^2 v^2$$

①



②



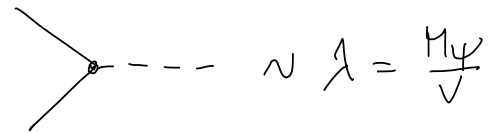
③

\Rightarrow 2 Parameter : g, v
 bestimmen 3 Größen
 \Rightarrow überprüfbare Relation

allgemein:

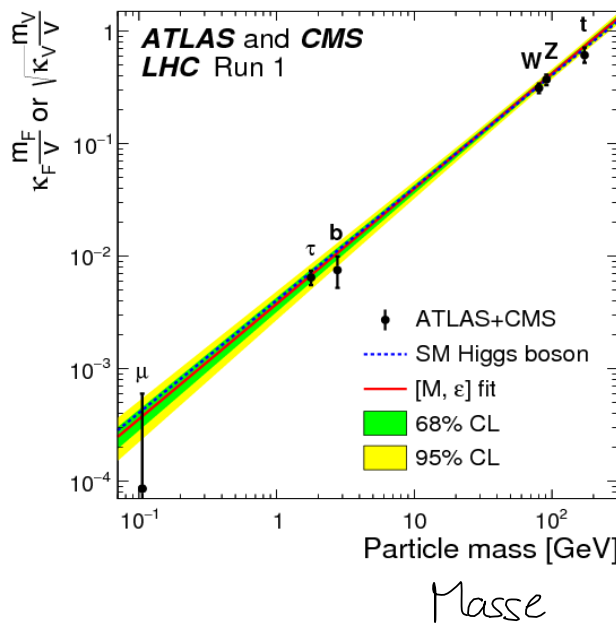
$$\begin{aligned}
 \lambda \bar{\psi}(x) \psi(x) \phi(x) &= \lambda \bar{\psi}(x) \psi(x) (v + H(x)) \\
 &= \lambda v \bar{\psi}(x) \psi(x) + \lambda \bar{\psi}(x) \psi(x) H(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
 \uparrow \\
 M_\psi = \lambda v
 \end{array}$$



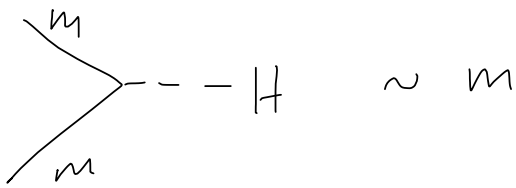
Im SM: $v = 246 \text{ GeV}$

Kopplung



Masse

Higgs-Produktion

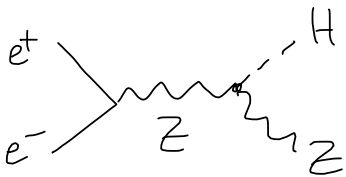


$$e^+e^- : m_e = 511 \frac{\text{keV}}{c^2}$$

$$\text{vgl. : } m_Z = 91 \frac{\text{GeV}}{c^2} \approx 180.000 m_e$$

$$\text{vgl. : } m_t = 173 \frac{\text{GeV}}{c^2} \approx 330.000 \cdot m_e !$$

⇒ „produziere“ zunächst ein massives Teilchen



LHC : Proton : (leichte) Quarks + Gluonen

