

Fachliche und didaktische Ausarbeitung der Vorlesung Mechanik und Wärmelehre

Schriftliche Hausarbeit
im Rahmen der Ersten Staatsprüfung
für das Lehramt für die Sekundarstufe I / II
dem
Staatlichen Prüfungsamt für Erste Staatsprüfungen
für Lehrämter an Schulen -Köln-
Außenstelle Aachen

vorgelegt von

Wipke Schulte

Aachen, den 10. Mai 1999

Gutachter: Prof. Dr. G. Flügge

Institut/ Lehrstuhl: III. Physikalisches Institut, Lehrstuhl B

Inhaltsverzeichnis des Skripts Experimentalphysik I

Mechanik und Wärmelehre

1. Teil: Mechanik des Massepunktes

I. Einleitung	S.1
I.1 Physikalische Größen und ihre Einheiten	S.2
II. Kinematik	S.5
II.1 Skalare und Vektoren	S.6
II.1.1 Addition von Vektoren	S.6
II.1.2 Addition von Vektoren in Koordinatendarstellung	S.7
II.1.3 Skalarprodukt und Kreuzprodukt	S.9
II.1.5 Differentiation und Integration von Vektoren	S.10
II.2 Ortsvektoren	S.11
II.3 Geschwindigkeit	S.12
II.4 Beschleunigung	S.16
II.5 Versuche und Berechnungen zur Kinematik	
S.18	
II.5.1 Gradlinige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit	S.19
Versuch II.1: Die Luftkissenbahn	
II.5.2 Gradlinige Bewegung mit konstanter Beschleunigung	S.20
Versuch II.2: Freier Fall	
II.5.3 Gradlinige Bewegung mit konstanter Beschleunigung	S.24
Versuch II.3: Schiefe Ebene	
II.5.4 Beispiel einer nichtlinearen Bewegung	S.25
Versuch III.4: Der horizontale Wurf	
II.6 Relativbewegung	S.28
Versuch II.5: Auffangtrichter einer Eisenbahn	
III. Dynamik	S.33
III.1 Trägheitsgesetz oder „1. Newtonsches Axiom“	S.33
III.2 Kräfte	S.34
Versuch III.1: Federwaage	
III.3 Die träge Masse	S.36
Versuch III.2: Kordel reißt	
III.4 Grundgesetz der Mechanik oder „2. Newtonsches Axiom“	S.37
Versuch III.3: Atwood'sche Fallmaschine	
III.5 Schwere und träge Masse	S.40
III.6 Bestimmung der Erdbeschleunigung g mit Hilfe des 2. Newtonschen Axioms	S.43
Versuch III.4: g - Bestimmung	

III.7	Gegenwirkungsprinzip oder „3. Newtonsches Axiom“	S.45
	Versuch III.5: Zwei Körper auf einem Rollwagen	
III.7.1	Theoretische Überlegungen	S.45
III.7.2	Beispiel Freier Fall	S.47
III.7.3	Beispiel schiefe Ebene	S.48
IV.	Erhaltungssätze und deren Anwendung	S.49
IV.1	Der Begriff der Arbeit	S.49
IV.I.1	Definition der Arbeit	S.49
	Versuch IV.1: Arbeit längs eines graden Weges	
IV.I.2	Erweiterung auf variable Kräfte und beliebige Wege	S.51
IV.I.3	Beschleunigungsarbeit	S.52
IV.I.4	Hubarbeit	S.53
IV.I.5	Spannarbeit	S.55
IV.2	Potentielle Energie	S.56
IV.3	Kinetische Energie	S.56
IV.4	Satz von der Erhaltung der Energie	S.57
	Versuch IV.2: Kugel rollt von verschiedenen Höhen eine Bahn herunter	
IV.5	Impulssatz	
	S.60	
IV.6	Stoßgesetze	S.61
IV.6.1	Elastischer Stoß	S.62
	Versuch IV.3: Grader, zentraler, elastischer Stoß auf der Luftkissenbahn	
	Versuch IV.4: ‘Astro - Blaster’	
IV.6.2	Dynamik von Stößen	S.64
	Versuch IV.5: Grader, zentraler, unelastischer Stoß auf der Luftkissenbahn	
	Versuch IV.6: Ballistisches Pendel	
IV.6.3	Schiefer Stoß	S.70
	Versuch IV.7: Schiefer Stoß zweier Kugeln	
IV.7	Rakete	S.72
IV.8	Schwingungen	S.74
IV.8.1	Federschwingung	S.74
	Versuch IV.8: Federschwingung	
IV.8.2	Pendelschwingungen	S.80
	Versuch IV.9: mathematisches Pendel	
IV.8.3	Zusammenfassung der Schwingungen	S.84
IV.9	Energie des harmonischen Oszillators	S.85
V.	Drehbewegungen	S.91
V.1	Kinematik der Kreisbewegung	S.91
V.1.1	Darstellung eines Vektors in verschiedenen Koordinatensystemen	S.91
V.1.2	Gleichförmige Kreisbewegung	S.92

Versuch V.1a: Überlagerung einer Kreisbewegung mit einer
 Pendelbewegung
 Versuch V.1b: tangentieller Funkenflug bei einem Schleifstein

V.2 Die Fliehkraft: Dynamik der Kreisbewegung	S.97
V.2.1 Untersuchung der Fliehkraft	S.97
V.2.2 Versuche zur Fliehkraft	S.98
Versuch V.2: Das „Säge“-Blatt	
Versuch V.3: Rollende Kette	
Versuch V.4: Gleichgewichtspunkt zweier Wagen an einer Feder	
Versuch V.5: Fliehkraftregler	
V.3 Drehmoment und Drehimpuls	S.101
V.3.1 Übertrag des Kraftbegriffes	S.101
V.3.2 Übertrag des Impulsbegriffes	S.103
V.3.3 Formulierung des 2.Newtonschen Axioms für die Rotation	S.103
V.3.4 Zusammenfassung der wichtigsten Vektorgrößen der Rotation	S.105
V.4 Planetenbewegung, Kepler'sche Gesetze und die Gravitation	S.106
V.4.1 Vom geozentrischen Weltbild zur Kopernikanischen Wende	S.106
V.4.2 Die Kepler'schen Gesetze	S.108
V.4.3 Herleitung des Gravitationsgesetzes aus den Kepler'schen Gesetzen	S.109
V.4.4 Das Gravitationsgesetz	S.112
Versuch V.6: Cavendish Drehwaage	
V.4.5 Gezeiten	S.117
V.4.6 Zusammenhang Schwerkraft - Gravitation	S.119
V.5 Wie funktioniert die Gravitation	S.120
V.6 Gravitationsfeld und Gravitationspotential	S.123
V.6.1 Energiebetrachtung	S.123
Versuch V.7: Bewegung einer Kugel in einer flachen Schale	
V.6.2 Zusammenhang potentielle Energie und Kraft	S.127
V.6.3 Gravitationsfeldstärke und Gravitationspotential	S.129
V.6.4 Zusammenfassung der neu eingeführten Begriffe	S.131
VII.3.4 Gezeitenkräfte	

2. Teil: Mechanik des starren Körpers

VI. Dynamik der Drehung eines starren Körpers	S.133
Versuch VI.1: Drehendes Rad	
VI.1 Schwerpunktsatz	S.141
Versuch VI.2: Schwerpunkt eines Dreiecks	
VI.2 Drehmoment eines starren Körpers	S.144
Versuch VI.3: Fadenrolle	

VI.3 Trägheitsmoment	S.148
VI.4 Drehimpulserhaltung	S.151
Versuch VI.4: Rotierender Ball	
Versuch VI.5: Drehschemel	
Versuch VI.6: Keltisches Wackelholz	
VI.5 Arbeit und Leistung	S.154
Versuch VI.6: Messung der Stärke eines Motors durch Bestimmung seines Drehmomentes	
VI.6 Konkrete Berechnung eines Drehmomentes	S.156
Versuch VI.7: Zwei „identische“ Zylinder	
Versuch VI.8: Maxwellsche Scheibe an einer Waage	
VI.7 Steinerscher Satz	S.161
VI.8 Zusammenfassender Vergleich Rotation - Translation	S.163
VI.9 Drehung um bewegliche Achsen	S.165
Versuch VI.9: Auf seiner Spitze gelagerter Kreisel	
Versuch VI.10: Überkopfkreisel	
Versuch VI.11: Kreiselkompass	
Versuch VI.12: Kardanisch aufgehängter Kreisel	
Versuch VI.13: Kugelkreisel auf Luftkissen	
Versuch VI.14: Präzession einer Fahrradfelge	
VI.10 Unsymmetrische Rotationskörper	S.170
Versuch VI.15: Rotierende Körper und deren Hauptträgheitsachsen	
Versuch VI.16: Hauptträgheitsachsen einer Zigarrenkiste	
VI.11 Erklärung der Kreiselversuche	S.176
Versuch VI.11: Kreiselkompass	
Versuch VI.12: Kardanisch aufgehängter Kreisel	
Versuch VI.13: Kugelkreisel auf Luftkissen	
VI.12 Zusammenfassung der Kreiselbewegungen	S.178
VI.13 Trägheitsmomente und Drehschwingung	S.181
VI.14 Rotierende Bezugssysteme und Trägheitskräfte	S.182
Versuch VI.17: Schuss auf rotierender Scheibe	
Versuch VI.18: Foucaultscher Pendelversuch	
VII. Mechanische Eigenschaften fester Körper	S.190
VII.1 Aggregatzustände	
S.190	
VII.2 Reibung	S.193
Versuch VII.1: Reibung eines Holzklotzes auf dem Tisch	
Versuch VII.2: Haft- und Gleitreibung	
Versuch VII.3: Kurvenfahrt im Auto	
VII.3 Dehnung und Kompression fester Körper	S.198

Versuch VII.4: Dehnung eines Stabes	
Versuch VII.5: Dehnung eines Kautschukbandes	
Versuch VII.6: Zerreißspannung	
VII.4 Schub und Torsion	S.204
IIIX. Ruhende Flüssigkeiten und Gase	S.206
IIIX.1 Kompressibilität	S.206
IIIX.2 Druckausbreitung in Flüssigkeiten	
S.208	
Versuch IIIX.1: Hydraulische Presse	
IIIX.3 Schweredruck	S.210
Versuch IIIX.2: Hydrostatisches Paradoxon	
Versuch IIIX.3: Kommunizierende Röhren	
Versuch IIIX.4: Weinheber	
Versuch IIIX.5: Schlauchwasserwaage	
IIIX.4 Auftrieb	S.214
Versuch IIIX.6: Nachweis des Archimedischen Prinzips	
Versuch IIIX.7: Wasserteufelchen	
IIIX.5 Druck in Gasen	S.218
Versuch IIIX.8: Magdeburger Halbkugeln	
Versuch IIIX.9: Messung des Drucks	
IIIX.6 Barometrische Höhenformel	S.220
IIIX.7 Oberflächenspannung	S.223
Versuch IIIX.10: Verkleinern der Oberfläche von Seifenhuten	
Versuch IIIX.11: Messung der Oberflächenspannungen	
Versuch IIIX.12: Überdruck einer Seifenblase	
IIIX.8 Grenzflächenspannung und Kapillarität	S.227
Versuch IIIX.13: Steighöhe in Kapillaren	
Versuch IIIX.14: Keilglas	
IX. Strömende Flüssigkeiten und Gase	S.232
IX.1 Ideale stationäre Strömungen	S.232
IX.1.1 Stationäre Strömungen	S.233
IX.1.2 laminare Strömungen	S.234
Versuch IX.1: Stromlinienapparat	
IX.1.3 Kontinuitätsgleichung	S.235
IX.2 Bernoullische Gleichung	S.236
Versuch IX.2: Statischer Druck	
Versuch IX.3: Druckmesssonden	
Versuch IX.4: Schwebender Styroporball	

IX.3 Laminare Strömungen realer Flüssigkeiten	S.243
IX.3.1 Das Newtonsche Reibungsgesetz	
S.244	
IX.3.2 Anwendung des Reibungsgesetzes: Strömung durch ein Rohr	S.246
IX.3.3 Stokes'sches Gesetz	S.249
Versuch IX.5: Stokes'sche Reibung	
IX.4 Turbulente Strömungen	S.250
IX.6 Gedämpfte Schwingungen	S.252
Versuch IX.6: gedämpfte Schwingung eines Fadenpendels	

3.Teil: Wärmelehre

X. Grundlagen der Wärmelehre	S.259
X.1 Temperatur	S.259
X.2 Wärme und Wärmemenge	S.263
X.3 Aggregatzustände	S.265
Versuch X.1: Kritischer Punkt	
XI. Kinetische Gastheorie	S.270
XI.1 Idealgasgesetze	S.270
XI.2 Kinetische Gastheorie	S.278
XI.3 Geschwindigkeitsverteilung	S.284
Versuch XI.1: Geschwindigkeitsverteilung	
XI.4 Theoretische Berechnung von $n(v)$	
S.288	
XI.4.1 Boltzmann-Verteilung	S.288
XI.4.2 Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung	S.290
XI.4.3 Brownsche Molekularbewegung	S.292
Versuch XI.2: Brownsche Molekularbewegung	
XI.4.4 Definition der mittleren Geschwindigkeit	
S.293	
XII. Reale Gase	S.296
XII.1 Van der Waals Gleichung	
S.296	
XII.2 Dampfdruckkurve	S.302
Versuch XII.1: Aufnahme einer Dampfdruckkurve	
Versuch XII.2: Verzug beim Erstarren	
Versuch XII.3: Süffi	
XII.3 Partialdruck	S.307
Versuch XII.4: Partialdruck	

XIII. Transportphänomene	S.309
XIII.1 Mittlere freie Weglänge	S.309
XIII.2 Diffusion	S.312
XIII.3 Wärmeleitung	S.313
Versuch XIII.1: Wärmeleitfähigkeit verschiedener Materialien	
XIII.4 Viskosität und Konvektionsstrom	S.315
XIII.5 Wärmestrahlung	S.317
Versuch XIII.2: Wunderkerzenanzünder	
Versuch XIII.3: Radiometer oder Lichtmühle	
XIV. Hauptsätze der Wärmelehre	S. 320
XIV.1 I. Hauptsatz der Thermodynamik	
S. 321	
XIV.1.1 Mechanisches Wärmeäquivalent	S.323
Versuch XIV.1: mechanisches Wärmeäquivalent	
XIV.1.2 Innere Energie	S.325
XIV.2 Innere Energie von Gasen	S.328
Versuch von Gay-Lussac	
XIV.3 Spezifische Wärme idealer Gase	S.331
XIV.3.1 spezifische Wärme bei konstantem Volumen	S.332
XIV.3.2 spezifische Wärme bei konstantem Druck	S.334
XIV.3.3 Theoretische Bestimmung der Molwärme	S.335
XIV.3.4 experimentelle Bestimmung der Molwärme	S.338
Versuch XIV.2 Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten	
XIV.3.5 Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme von Gasen	S.341
XIV.4 Enthalpie und Joule-Thomson-Effekt	S.342
XIV.4.1 Definition der Enthalpie	S.342
XIV.4.2 Joule-Thomson-Effekt	S.344
Versuch XIV.3 Schnee im Hörsaal	
XIV.5 Zustandsänderung idealer Gase	S.350
XIV.5.1 Isotherme Zustandsänderungen eines idealen Gases: $T = \text{const}$	S.352
XIV.5.2 Adiabatische Zustandsänderungen eines idealen Gases: $\delta Q = 0$	S.354
Versuch XIV.4 Adiabatische und isotherme Zustandsänderung	
XIV.6 Kreisprozesse und Wärmekraftmaschinen	S.356
XIV.6.1 Carnot-Prozeß	S.356
XIV.6.1.1 Prinzip des Carnot-Prozesses	S.356
XIV.6.1.2 Berechnung des Carnot-Prozesses	S.358
für n Mole eines idealen Gases	
XIV.6.1.3 Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses	S.361
XIV.6.2 Kraftwärmemaschinen und Wärmekraftmaschinen	S.362
XIV.6.2.1 Wärmepumpe	S.364
XIV.6.2.2 Kühltisch	S.365
XIV.6.3 Perpetuum mobile II. Art	S.365
XIV.6.4 Demonstration eines Heißluftmotors	S.367

XIV.6.4.1 Prinzip des Stirling-Prozesses	S.367
XIV.6.4.2 Berechnung des Stirling-Prozesses für n Mole eines idealen Gases	S.369
XIV.7 Thermodynamische Temperatur	S.373
XIV.8 II. Hauptsatz der Wärmelehre und Entropie	S.374
XIV.8.1 Formulierungen des II. Hauptsatzes und Definition der Entropie	S.375
XIV.8.2 Beweis der Äquivalenz der Formulierungen des II. Hauptsatzes	S.377
XIV.8.3 Beispiele der Berechnung von ΔS für irreversible Prozesse	S.383
XIV.8.4 Wärmeschaubild und thermodynamisches Gleichgewicht	S.386
XIV.8.5 Statistische Deutung der Entropie	S.389
XIV.9 Begriffe für die Energieversorgung	S.393
Anhang	S.396
Abbildung I.1	S.396
SI- Einheiten	S.397
Aus dem SI abgeleitete Größen	S.398
Verwendete Konstanten der Physik	S.398
Druckeinheiten	S.399
Arbeits- und Energieeinheiten	S.399
Mega, Giga, Tera - und was kommt danach?	S.400
Berechnung der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung	S.401
Empfohlene Literatur zur Vorlesung	S.403
Namen- und Sachregister	S.405
Abbildungsnachweis	S.411

I. Einleitung

Die Vorlesung Experimentalphysik ist in vier aufeinanderfolgende Teile gegliedert. Dabei deckt jedes Semester ein in sich abgeschlossenes, jedoch an Vorkenntnisse anknüpfendes Teilgebiet der Experimentalphysik ab. Die erste Vorlesung Experimentalphysik beginnt jeweils im Wintersemester und wird jährlich wiederholt. Die Aufteilung ist folgende:

Experimentalphysik I: Mechanik, Wärmelehre und Thermodynamik

Experimentalphysik II: Elektromagnetismus, Relativitätstheorie

Experimentalphysik III: Optik und Wellenlehre

Experimentalphysik IV: Atom- und Molekülphysik

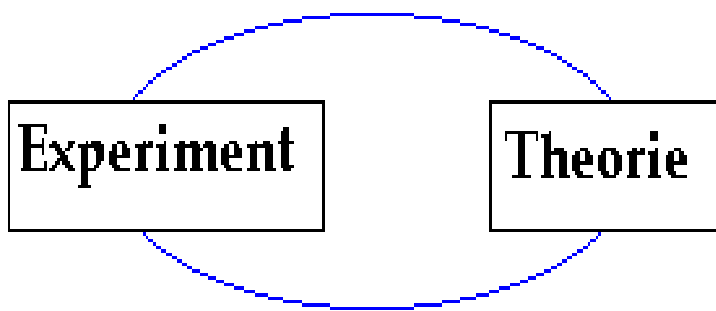
Voraussetzung zur Zulassung zum Vordiplom sind unter anderen mindestens zwei Übungsscheine, die beliebig in Experimentalphysik I - IV zu erlangen sind. Ferner werden in den Semesterferien zwei Anfängerpraktika durchgeführt, in denen das in den Vorlesungen erworbene Wissen praktisch umgesetzt werden soll.

Um einen Einstieg in die Physik zu finden, wollen wir zunächst einmal fragen, was genau Physik ist. Also:

Was ist Physik?

Ursprünglich bedeutet das Wort Physik *Lehre von der Natur*. Im Laufe der letzten Jahrhunderte haben sich von dieser Lehre der Natur verschiedenen Spezialgebiete abgekoppelt und sich zu eigenen Wissenschaften entwickelt. Dies sind z.B. die Biologie, die sich mit der belebten Natur befasst, die Astronomie, welche die physikalischen Vorgänge im Kosmos untersucht und die Chemie, welche die stofflichen Veränderungen in Körpern, d.h. die Reaktionen der Atome und Moleküle betrachtet.

Definieren wir Physik jetzt als den nicht durch Spezialwissenschaften abgedeckten Bereich, so bleibt für die Physik die Aufgabe, Grundgesetze der unbelebten Welt aufzustellen und für andere Wissenschaften zur Verfügung zu stellen. Um Grundgesetze aufzustellen bedient die Physik sich stets des gleichen Systems. Hierbei werden Beobachtungen gemacht, Grundlagen herausgearbeitet und Vorhersagen gemacht. Die so erstellte Theorie wird im Experiment



überprüft, es werden neue Experimente mit verbesserten Methoden und überarbeiteten Vorhersagen durchgeführt, bis die Theorie falsifiziert wird, oder neue Phänomene

beobachtet werden. Diese Ergebnisse führen dann zu einer Korrektur oder zu einer Erweiterung der Theorie.

In den letzten Jahrzehnten wurden dabei die Experimente immer aufwendiger und teurer. Ein wichtiges Forschungsgebiet ist heute die Teilchenphysik, deren Vertreter sich bemühen, mit immer mehr Energie immer kleinere Grundbausteine unserer Welt zu entdecken und zu studieren. Dabei steigt die benötigte Energie um Teilchen zu erzeugen nicht proportional zu den jeweils größeren Teilchen, was enormen experimentellen Aufwand zur Folge hat. Eine genaue Theorie über die Atom- und Molekularphysik wird im vierten Teil der Vorlesungen vermittelt. Im Anhang ist eine Tabelle (Abbildung I.1) abgedruckt, die eindrucksvoll zeigt, mit welchen Energien gearbeitet wird, und welche Ergebnisse damit in den letzten Jahrzehnten erzielt werden konnten.

I.1 Physikalische Größen und ihre Einheiten

Grundlage der Physik ist seit Galilei die Definition von physikalischen Größen. Eine physikalische Größe G ist definiert als Produkt aus Maßzahl $\{G\}$ und Maßeinheit $[G]$, wobei letztere gelegentlich auch Dimension genannt wird.

Definition I.1 physikalische Größe = { Maßzahl } • [Maßeinheit]

Bei jeder Messung oder physikalischen Aussage über Größen müssen Maßzahl und Dimension angegeben werden. Als Beispiel betrachten wir die Länge eines Stabes L . Sie betrage drei Meter. Die korrekte Angabe der physikalischen Größe lautet dann:

$$\{\text{Maßzahl der Länge}\} = 3$$

$$[\text{Maßeinheit der Länge}] = \text{m}$$

Also, Länge des Stabes $L = 3\text{m}$.

Eine Messung wird stets mit Messwert und Messfehler angegeben. Messfehler können z.B. abweichende Messungen oder unzureichende Auflösungen des Messinstrumentes sein. Allgemein teilt man die Fehler in statistische und systematische Fehler ein. Statistische Fehler, auch zufällige Fehler genannt, können durch Mittelwertbildung beliebig vieler Werte immer weiter verringert werden, systematische Fehler können ohne Veränderung des Versuchsaufbaus nicht verringert werden. Eine genauere Behandlung der Fehler wird im Praktikum durchgeführt. Zunächst definieren wir eine Messung

Definition I.2: { Maßzahl } = Messwert \pm Messfehler

Wie bei diesem Beispiel bereits genutzt, gibt es festgelegte Maßeinheiten. Diese gelten international und sollen Vergleiche von Messwerten gewährleisten. Die Einheiten sind mit Buchstaben abgekürzt, um sprachenunabhängig verständlich zu sein. Eine dieser Abkürzungen, m für Meter, haben wir oben bereits eingeführt.

In dem 1948 eingeführten *Systeme International d' Unites*, abgekürzt **SI - System** genannt, gibt es sieben Grundeinheiten. Auf diese sieben Einheiten lassen sich alle anderen Einheiten zurückführen. Diese Grundeinheiten lauten:

Physikal. Größe	Einheit	Zeichen	relative Vergleichs- Unsicherheit
Länge	Meter	m	10^{-4}
Masse	Kilogramm	kg	10^{-9}
Zeit	Sekunde	s	10^{-14}
elektrischer Strom	Ampere	A	10^{-6}
Temperatur	Kelvin	K	10^{-6}
Substanzmenge	Mol	mol	10^{-6}
Lichtstärke	Candela	cd	$5 \cdot 10^{-3}$

Tabelle I.1: Einheiten des SI

Für die Mechanik benötigt man nur die ersten drei Einheiten, also Länge, Masse und Zeit. Das bedeutet, dass alle anderen Größen auf diese elementaren Größen zurückzuführen sind. Analog sind die Einheiten der abgeleiteten Größen auch nur in Kombinationen von m, kg und s

anzugeben. Um häufig benutzte Größen nicht immer mit abgeleiteten Einheiten darstellen zu müssen, wurden zuzüglich zu diesen sieben Einheiten achtzehn weitere Einheiten definiert und mit einem eigenen Zeichen eingeführt. Alle anderen Größen werden mit zusammengesetzten Maßeinheiten angegeben. Um an dieser Stelle nichts vorweg zu nehmen, befindet sich die Tabelle mit allen in der Vorlesung erarbeiteten Einheiten im Anhang.

Die oben aufgeführten Basiseinheiten müssen fest definiert und reproduzierbar sein. Zu diesem Zweck bemühen Physiker sich stets, die Messfehler der zugrunde liegenden Definition zu verringern. Die Technik hat es in den letzten Jahrzehnten dabei ermöglicht, wichtige Basisgrößen und Naturkonstanten immer exakter zu messen. Als Beispiel für die fortschreitende Genauigkeit in der Definition betrachten wir die Einheit *Meter*:

Das Meter war bis zum Jahre 1799 als der 10 000 000ste Teil des Erdumfanges definiert worden. Der Erdumfang jedoch war nur sehr ungenau und sehr mühsam reproduzierbar zu messen. Aus diesem Grund definierte man dann 1799 einen Platin-Iridium-Stab zum Archimeter. Die Länge des Stabes wurde noch nach der Definition über den Erdumfang festgelegt, war dann aber das *Urmeter*. Seit 1960 hat dieses Urmeter nur noch geschichtlichen Wert. Dieser Stab genügt den Anforderungen der modernen Naturwissenschaften nicht mehr, so dass eine neue Definition eingeführt wurde. Seit 1960 wurde das Meter definiert über die Vakuum- Wellenlänge, die ein festgelegtes Nuklid bei einem bestimmten Übergang aussendet. Seit 1983 erst steht die heute gültige Definition des Meters über die Lichtgeschwindigkeit c .

**Definition I.3: 1 Meter ist der Weg, den Licht im Vakuum in
1 / 299 792 458 Sekunden zurücklegt.**

Das Kilogramm ist noch über ein Urkilogramm, welches in Paris liegt, definiert.

Die Sekunde ist definiert über die Schwingungsdauer bestimmter Lichtwellen, die von Cs - 133 ausgesandt werden.

Allgemein ersetzen sogenannte Quantennormale immer häufiger Prototype und klassische Normale wie das Urkilogramm. Eine Tabelle im Anhang zeigt die Definitionen der einzelnen SI-Basiseinheiten.

II. Kinematik gradliniger Bewegungen

Kinematik, von dem griechischen Verb *kineo* = *ich bewege*, nennt man den grundlegenden Zweig der Mechanik, der den zeitlichen Ablauf einer Bewegung im Raum durch mathematische Gleichungen, die sogenannten Bewegungsgleichungen, beschreibt. Die Grundlagen der Kinematik wurden zuerst von Galileo Galilei formuliert und experimentell nachgewiesen.



Abbildung II.1: Galileo Galilei.

Galileo Galilei, 1564 - 1642, war unter anderem Professor für Mathematik in Pisa und Padua. Heute sind jedoch hauptsächlich seine Verdienste in der experimentellen Physik bekannt. Galilei widerlegte die bis dahin geläufigen Irrtümer Aristoteles. Durch die Verknüpfung mit logischen Erwägungen konnte Galilei Gesetze der Physik aufstellen, die bis heute wegweisend sind. Die bekanntesten Beispiele sind der Freie Fall, Trägheit und das Fadenpendel. In der Astronomie konnte Galilei mit Hilfe eines von ihm verbesserten Fernrohrs Mondgebirge und vier Jupitermonde entdecken.

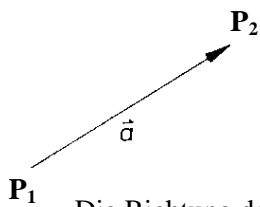
Nachdem wir in der Einleitung mit der Festlegung der Basiseinheiten Länge und Zeit die Voraussetzungen geschaffen haben, untersuchen wir nun die Bewegung von Körpern. Dabei wollen wir zwei Einschränkungen machen:

1. Wir lassen zunächst die Ursachen für die Bewegung unbeachtet. Das bedeutet, dass wir nur versuchen, die Bewegung wie wir sie sehen mit den beiden definierten Größen zu beschreiben. Die Ursachen für die Bewegung werden erst im nächsten Kapitel, *Dynamik*, betrachtet.
2. Wir beschränken uns auf die Beschreibung von Körpern, deren Abmessungen gegenüber den von ihnen zurückgelegten Strecken klein sind. Dafür definiert man den Massepunkt, einen gedachten Körper, der seine endliche Masse in einem Punkt konzentriert. Tatsächlich haben natürlich selbst die kleinsten Körper eine räumliche Ausdehnung, die man jedoch unter bestimmten Gesichtspunkten vernachlässigen kann, wenn man nur die Bewegung ihres

Schwerpunktes betrachtet. Diese Einschränkung führt zu erheblichen Erleichterungen und wird erst in einem späteren Kapitel aufgehoben.

II.1 Skalare und Vektoren

Physikalische Größen, z.B. die im ersten Kapitel eingeführte Länge $L = \{L\} \cdot [L]$ heißen Skalare, wenn sie durch nur eine Messgröße gekennzeichnet sind. Weitere Beispiele sind Temperatur, Masse oder Zeit. Es gibt jedoch noch viele andere Größen in der Physik, die zusätzlich durch eine Richtung im Raum beschrieben werden müssen. Diese Größen werden am besten durch Vektoren beschrieben. Bekannte Beispiele sind hier Geschwindigkeit, Kraft oder Verschiebungen.



Als einfachstes Beispiel sei eine Verschiebung dargestellt von Punkt P_1 nach Punkt P_2 :

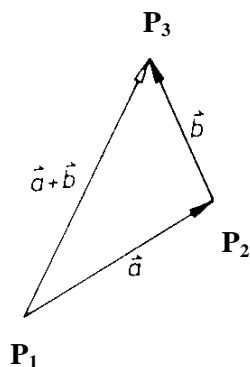
Dargestellt wird die Verschiebung durch einen Pfeil:

Die Richtung des Pfeils gibt die Richtung der Verschiebung an, die Länge des Pfeils den Betrag.

Notation II.1: Den Betrag eines Vektors \vec{a} schreibt man als $|\vec{a}|$ oder vereinfacht als.

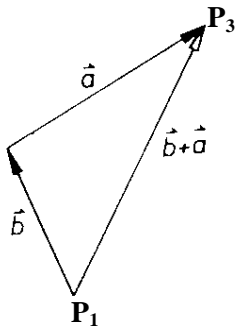
II.1.1 Addition von Vektoren

Führt man zwei Verschiebungen von Punkt P_1 über Punkt P_2 nach Punkt P_3 aus, so kann man die Vektoren addieren. Vektorgrößen in der Physik lassen sich nach den gleichen Regeln addieren wie eine Verschiebung.



Die Richtung der addierten Vektoren ergibt sich aus

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$



Für die Vektoraddition gilt das Kommutativgesetz, es gilt also:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} = \vec{c}$$

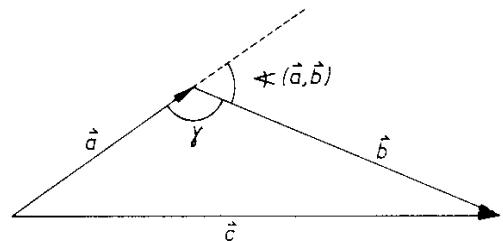
Der Betrag des resultierenden Vektors läßt sich mit Hilfe des Cosinussatzes berechnen:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$$

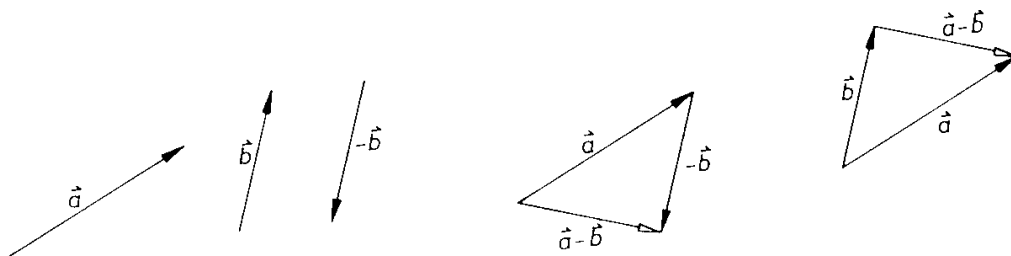
Als Spezialfall ergibt sich $\alpha = 90^\circ$ und damit

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos 90^\circ$$

$$\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$$



Die Vektorsubtraktion wird analog zur Vektoraddition durchgeführt, indem zuvor der zu subtrahierende Vektor mit negativem Vorzeichen versehen wird. Der Betrag ändert sich dann von a in $-a$, die Richtung dreht sich um 180° .



Drei oder mehr Vektoren werden addiert, indem man zunächst zwei Vektoren addiert und den resultierenden Vektor zu dem dritten Vektor erneut addiert, und so fort.

II.1.2 Addition von Vektoren in Koordinatendarstellung

In einem Bezugssystem, wir wollen uns hier zunächst auf rechtwinklige kartesische Koordinatensysteme beschränken, kann ein Vektor als Summe der einzelnen Komponenten längs der das System aufspannenden Achsen geschrieben werden.

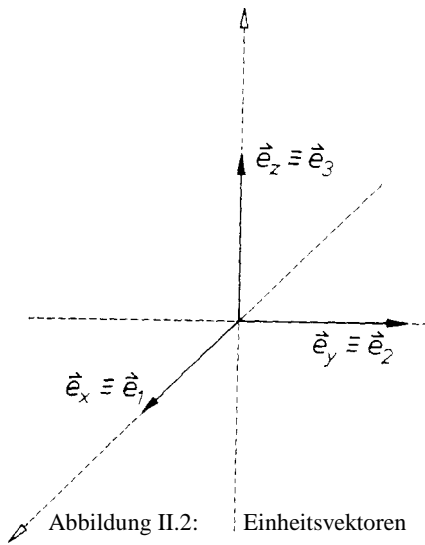


Abbildung II.2: Einheitsvektoren

Hierzu definiert man Einheitsvektoren längs der Achsen. Die Einheitsvektoren haben den Betrag 1 und stehen jeweils senkrecht aufeinander.

Definition II.1: Einheitsvektor $\vec{e} = \vec{a}/a$

Jeder dreidimensionale Vektor kann in diesem System dann dargestellt werden in der Form

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z =$$

Notation II.2: Ein Vektor wird mit $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ komponentenweise geschrieben.

Merke: Die Länge eines Vektors in Komponentenschreibweise läßt sich berechnen aus:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

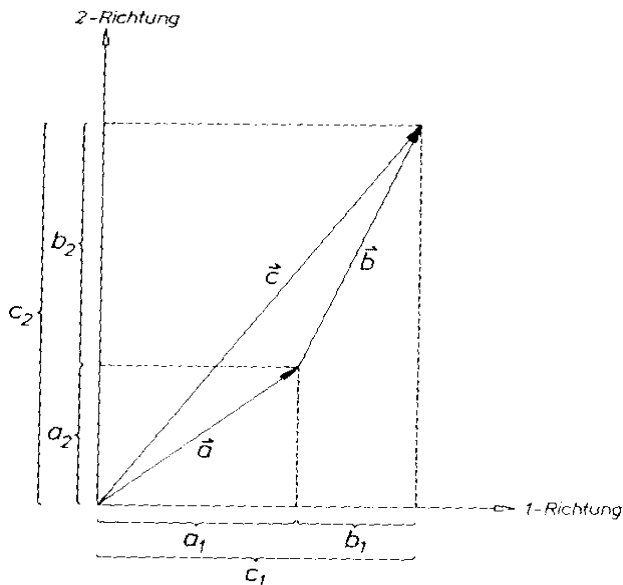


Abbildung II.3: komponentenweise Addition von Vektoren

In Koordinatenschreibweise werden Vektoren komponentenweise addiert oder subtrahiert.

Die Addition von zwei Vektoren ergibt dabei wieder einen Vektor.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \quad \text{mit}$$

$$c_x = a_x + b_x,$$

$$c_y = a_y + b_y$$

$$c_z = a_z + b_z$$

Beim Wechsel des Koordinatensystems ändern sich die Komponenten a_i, b_i, c_i , nicht aber die Lage der Vektoren, \vec{b} und \vec{c} im Raum.

II.1.3 Skalarprodukt und Kreuzprodukt

Das Punkt- oder Skalar-Produkt zweier Vektoren ist ein Skalar. Man kann es entweder aus den Komponenten oder aus den Beträgen der beiden Vektoren und dem eingeschlossenen Winkel berechnen.

Merke: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ ist ein Skalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Betrachten wir wieder den Sonderfall, dann folgt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot 0 = 0$$

oder mit $\vec{a} = (a, 0, 0)$ und $\vec{b} = (0, b, 0)$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot 0 + 0 \cdot b + 0 \cdot 0 = 0$$

Das Vektor- bzw. Kreuzprodukt zweier Vektoren ist ebenfalls ein Vektor. Dieser Vektor \vec{c} steht senkrecht auf Vektor \vec{a} und \vec{b} .

Notation II.3: Das Vektor- bzw. Kreuzprodukt schreibt man als $\vec{a} \times \vec{b} =$.

Der Betrag des Kreuzproduktes wird ebenfalls aus den Beträgen der einzelnen Vektoren und dem eingeschlossenen Winkel berechnet.

$$|\vec{c}| = c = a \cdot b \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$$

Um die Richtung des Vektors \vec{c} zu ermitteln, müssen die Vektoren komponentenweise wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{e}_x \\ &+ (a_z b_x - a_x b_z) \vec{e}_y \\ &+ (a_x b_y - a_y b_x) \vec{e}_z \end{aligned}$$

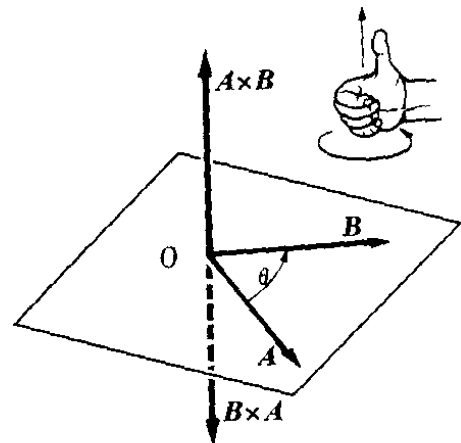


Abbildung II.4: Kreuzprodukt

Merke: $\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein Vektor, der auf den beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} senkrecht steht:

$$\vec{c} \perp \vec{a}.$$

Merke: Das Kreuzprodukt ist nicht kommutativ. Es gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

II.1.5 Differentiation und Integration von Vektoren

Wie aus der Analysis bekannt, wird bei der Differentiation der Grenzwert des Intervalls zwischen zwei Punkten, hier z.B. Ortsvektoren, gegen Null gebildet.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \\ \Leftrightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t} \\ \Leftrightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(x_2 \vec{e}_x + y_2 \vec{e}_y + z_2 \vec{e}_z) - (x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y + z_1 \vec{e}_z)}{\Delta t} \\ \Leftrightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{((x_2 - x_1) \vec{e}_x + (y_2 - y_1) \vec{e}_y + (z_2 - z_1) \vec{e}_z)}{\Delta t} \\ \Leftrightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{e}_x + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{e}_y + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{e}_z \\ \Leftrightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dz}{dt} \vec{e}_z \end{aligned}$$

Merke: Vektoren werden komponentenweise differenziert, das Ergebnis ist ein Vektor.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z$$

Die Umkehrung der Differentiation ist die Integration:

$$\vec{I} = \int \vec{v}(t) dt = \vec{e}_x \int v_x(t) dt + \vec{e}_y \int v_y(t) dt + \vec{e}_z \int v_z(t) dt$$

Auch hier gilt:

Merke: Vektoren werden komponentenweise integriert, das Ergebnis ist ein Vektor.

$$I_x = \int v_x(t) dt ; I_y = \int v_y(t) dt ; I_z = \int v_z(t) dt$$

II.2 Ortsvektoren

Um den von einem Massepunkt zurückgelegten Weg beschreiben zu können, muss man zunächst einen Bezugspunkt definieren. Relativ zu diesem Bezugspunkt ändert der Massepunkt seine Position im Raum. Der Bezugspunkt wird dabei zunächst als im Bezug zur Erdoberfläche ruhend angenommen und so gelegt, dass die Bewegung des Massepunktes möglichst einfach zu beschreiben ist. Meistens legt man dazu den Bezugspunkt in den Ursprung eines Koordinatensystems. Dieses System wird unbewegtes **Bezugssystem** genannt. In einem so gewählten System sind sowohl Nullpunkt als auch Basisvektoren zeitlich konstant. Im Folgenden liegen den Beschreibungen stets unbewegte Bezugssysteme zugrunde, bewegte Bezugssysteme erfordern eine gesonderte Behandlung in Kapitel II.6 *Relativbewegung*.

Die Lage des Körpers kann dann z.B. durch die kartesischen Koordinaten x, y, z für jeden Zeitpunkt angegeben werden. Der Zeitpunkt wird mit der reellen Variablen t bezeichnet.

Der Vektor, der zu einer festen Zeit t den Ort des Massepunktes beschreibt, heißt **Ortsvektor**. Dieser Vektor ist bei Bewegungen immer eine Funktion der Zeit und wird deshalb mit $\vec{r}(t)$ oder $\vec{x}(t)$ bezeichnet. Im 3-dimensionalen Fall besteht der Ortsvektor aus drei Komponenten:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Notation II.4: Wenn es nicht explizit gesagt wird, liegt im Folgenden immer ein kartesisches Koordinatensystem zugrunde, bei dem die x -Achse parallel zur Erdoberfläche und die y -Achse senkrecht dazu steht.

Im Gegensatz zu den bisher allgemein diskutierten Vektoren sind die Ortsvektoren an einen Punkt im Raum, den Ursprung gebunden. Der Differenzvektor zweier an den Ursprung gebundener Ortsvektoren ändert sich nicht, auch wenn die anderen beiden Vektoren in ein anderes Koordinatensystem transferiert werden.

Merke: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ändert sich bei einem Wechsel des Koordinatensystems nicht, wohl aber \vec{r}_1 und.

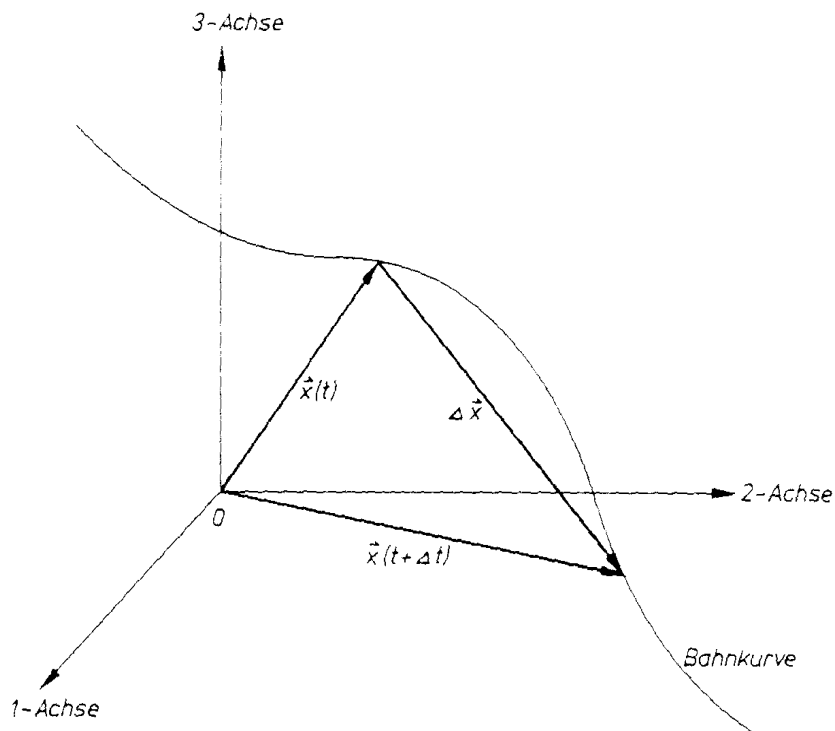


Abbildung II.5: Bahnkurve

Unter einer **Bahn** (auch **Bahnkurve** oder Trajektorie genannt) versteht man eine Funktion $\vec{r}(t)$ bzw. $\vec{x}(t)$, deren Endpunkt die gewünschte Bahnkurve beschreibt.

Zur Beschreibung einer Bewegung in einer Ebene genügen zwei Koordinaten, die Bewegung längs einer Geraden kann mit einem Skalar beschrieben werden.

II.3 Geschwindigkeit

Betrachten wir zunächst als Beispiel einer beliebigen Bewegung den eindimensionalen Fall: die gradlinige Bewegung längs der x-Achse.

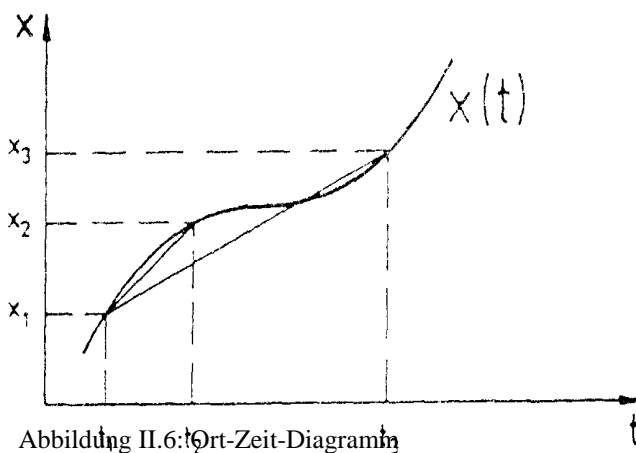


Abbildung II.6: Ort-Zeit-Diagramm

Der Ort des Massepunktes wird nur mit dem Skalar x beschrieben. Dargestellt werden soll die Bewegung des Massepunktes in seiner zeitlichen Abfolge. Dazu wählen wir ein **Ort-Zeit-Diagramm**. Aufgetragen wird an der Abszisse die Zeit und an der Ordinate der Ort.

Merke: Bei Erstellen von Zeit - Diagrammen wird, soweit nicht anders vereinbart, die Zeit stets auf der Abszisse abgetragen.

Der Weg wird vom Ausgangspunkt x_0 zur Zeit t_0 an gemessen. Dabei ermittelt man verschiedene Wertepaare $x_1(t_1)$, $x_2(t_2)$ und so fort.

Nun überlegen wir, wie schnell der Massepunkt sich bewegt hat. Dazu betrachten wir zunächst zwei Bahnpunkte. Die Differenz der zwei Wegstrecken x_1 und x_2 ist die Entfernung, die der Massepunkt zurückgelegt hat. Er hat dazu die Zeit $t_2 - t_1$ gebraucht.

Wir definieren seine Geschwindigkeit als zurückgelegte Strecke pro dafür gebrauchter Zeit. Diese Geschwindigkeit ist abhängig vom Zeitintervall und der Strecke. Berechne ich die Geschwindigkeit für ein anderes Intervall, so erhalte ich auch eine andere Geschwindigkeit. Diese Tatsache ist bereits bekannt: Auf der Autobahn kann ich kurzfristig 150 km/h fahren, und brauche dennoch inklusive Stadtverkehr über eine Stunde, um von Aachen nach Köln zu gelangen. Aus diesem Grunde sprechen wir von einer **mittleren Geschwindigkeit** und bezeichnen sie mit v_M .

Definition II.2: Die mittlere Geschwindigkeit ist der Quotient aus zurückgelegter Strecke und dafür benötigter Zeit:

$$v_M = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Bedenke:

- Die mittlere Geschwindigkeit ist vom Messintervall abhängig. Die mittlere Geschwindigkeit von Punkt x_0 nach x_3 ist im Allgemeinen verschieden.
- Die mittlere Geschwindigkeit entspricht der Steigung der Sekante.

Notation II.5: Die Differenz zweier physikalischer Größen bezeichnet man abgekürzt mit Δ .

Die Differenz zweier Strecken schreiben wir somit ab jetzt als Δx , die der dazugehörigen Zeiten als Δt . Mit dieser Konvention lautet die Gleichung.

Diese Form der Gleichung nennen wir **Größengleichung**. Sie gilt unabhängig von den benutzten Einheiten. Wenn die Einheiten sich ändern, ändern sich auch die Maßzahlen, die Gleichung bleibt aber erhalten

Bsp: $v_M = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1 \frac{\text{km}}{\text{min}} = 16.7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Will man die Geschwindigkeit in einem Punkt berechnen, so muss man zunächst die Streckenintervalle immer weiter verkürzen, bis man ein infinitesimales Intervall betrachten kann. Hierzu bildet man den Grenzwert der Intervalle für eine Zeitdifferenz, die gegen Null

strebt. $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$

Mit diesem Grenzwert berechnet man die **Momentangeschwindigkeit**. Sie entspricht der Steigung der Sekante durch zwei infinitesimal nebeneinander liegende Punkte, also der Steigung der Tangente.

Definition II.3: Die Momentangeschwindigkeit ist gleich der Steigung der Tangente an die Bahnkurve im ausgewählten Zeitpunkt $v = \frac{dx}{dt}$

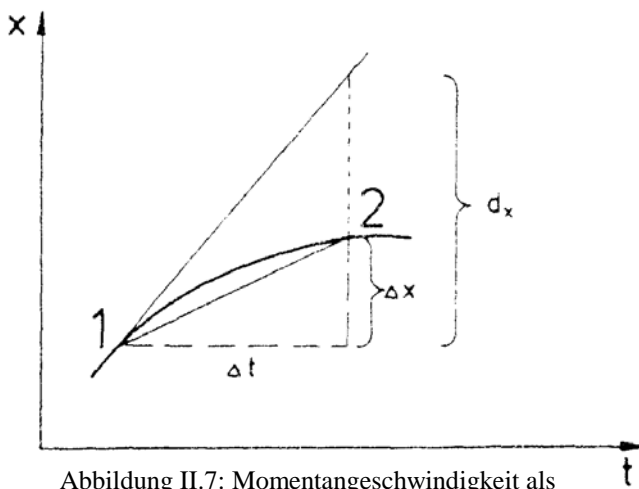


Abbildung II.7: Momentangeschwindigkeit als Tangente an die Bahnkurve

Achtung: Diese Definition der Momentangeschwindigkeit ist mathematisch problemlos, physikalisch jedoch etwas problematischer:
 1. Wie bereits in Kapitel I erläutert, lassen sich theoretisch zwar die statistischen Fehler minimieren, das setzt aber unendlich viele Messungen voraus.

- 2. Das Auflösungsvermögen der Messinstrumente ermöglicht nicht beliebig kleine Messintervalle.
- 3. Es gibt eine prinzipielle Genauigkeitsgrenze. Eine genauere Erläuterung dieses Sachverhalts folgt in der Atomphysik.

Betrachtet man diese Definition im allgemeinen, d.h. 3-dimensionalen Fall, muss die Strecke x wieder als Vektor behandelt werden: $v_M = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$. Für die Rechnung ergibt sich dann:

1. Richtung der Momentangeschwindigkeit: $\Delta \vec{r} \rightarrow d\vec{r}$. Die Tangente an die Bahnkurve gibt die Steigung und somit die Richtung in jedem Punkt an.

2. Betrag der Momentangeschwindigkeit:

$$|\vec{v}| = v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r}{\Delta t}$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}}{\Delta t}$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}}{dt}$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{|d\vec{r}|}{dt}$$

Richtung und Betrag der Momentangeschwindigkeit werden in einem Vektor zusammengefasst:

Definition II.4: Die Geschwindigkeit ist ein Vektor, nämlich die Ableitung des Ortes nach der Zeit. $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$

Notation II.6: Der Geschwindigkeitsvektor wird, soweit nicht anders vereinbart, \vec{v} genannt, sein Betrag v .

Die Geschwindigkeit kann also durch Differentiation des Ortsvektors ermittelt werden. Die erste Ableitung des Ortes nach der Zeit ist die Geschwindigkeit. In der Physik wird die Schreibweise

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \text{ oftmals abgekürzt:}$$

Notation II.7: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ wird oftmals als $\dot{\vec{r}}$ geschrieben, der Betrag v analog.

Analog kann man aus einer gegebenen Geschwindigkeit den Ort berechnen, indem man den Vektor \vec{v} integriert. Die Umkehroperation zu $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ lautet folglich: $\vec{r}(t) = \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt + \vec{r}_0$.

Um über die Integration des Geschwindigkeitsvektors den Ort zu berechnen, muss also ein konstanter Faktor \vec{r}_0 bekannt sein. Dieser Vektor kennzeichnet den Anfangsort der Bewegung, also die Verschiebung vom Nullpunkt des Bezugssystems. Durch geschicktes Definieren des Bezugssystems kann der Anfangsort in den Ursprung gelegt werden.

Merke: Die Geschwindigkeit eines Massepunktes läßt sich aus der Bahnkurve über

$$\text{Differentiation errechnen: } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Merke: Der Ort des Massepunktes läßt sich über Integration aus der Geschwindigkeitsgleichung und der Randbedingung \vec{r}_0 ermitteln:

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt + \vec{r}_0.$$

II.4 Beschleunigung:

Definition II.5: Die Beschleunigung ist ein Vektor, nämlich die Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right)$$

Der Beschleunigungsvektor zeigt in Richtung der Geschwindigkeitsänderung. Beschleunigung heißt also Änderungen des Betrags der Geschwindigkeit, z.B. gradlinig immer schneller fahren oder bremsen, oder die Richtung der Geschwindigkeit zu ändern, z.B. mit gleichbleibender Frequenz auf einem Kreis fahren. Der allgemeine Fall beinhaltet natürlich eine Änderung des Betrags und der Richtung.

Analog zur Betrachtung der Geschwindigkeit aus der Bahnkurve kann mit dieser Definition die Beschleunigung aus der Geschwindigkeit errechnet werden.

Notation II.8: Der Beschleunigungsvektor wird, soweit nicht anders vereinbart, \vec{a} genannt, sein Betrag a .

Die Beschleunigung kann also durch Differentiation des Geschwindigkeitsvektors ermittelt werden. Die erste Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit ist die Beschleunigung. Auch

diese Schreibweise $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right)$ kann oftmals abgekürzt werden:

Notation II.9: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ wird oftmals als $\dot{\vec{v}}$ geschrieben, der Betrag a analog.

Auch hier kann man aus einer gegebenen Beschleunigung die Geschwindigkeit berechnen, indem man den Vektor \vec{a} integriert. Die Umkehroperation zu $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ lautet folglich:

$$\vec{v}(t) = \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt + \vec{v}_0.$$

Um über die Integration des Beschleunigungsvektors die Geschwindigkeit zu berechnen, muss hier der konstante Faktor \vec{v}_0 bekannt sein. Dieser Vektor kennzeichnet die Anfangsgeschwindigkeit der Bewegung. Im Gegensatz zum Anfangsort, der ja in einem unbeweglichen Bezugssystem als ruhend und damit zeitlich konstant angesehen wird, kann die Anfangsgeschwindigkeit durchaus eine Funktion der Zeit sein.

Merke: Die Beschleunigung eines Massepunktes läßt sich aus der Geschwindigkeit über

$$\text{Differentiation errechnen: } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Merke: Die Geschwindigkeit des Massepunktes läßt sich über Integration aus der Beschleunigungsgleichung und der Randbedingung \vec{v}_0 ermitteln:

$$\vec{v}(t) = \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt + \vec{v}_0(t).$$

Betrachtet man nun die Folgerungen aus Definition II.3 und Definition II.4 nebeneinander, so folgt:

$$\text{Aus } \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \text{ und } \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \text{ folgt: } \vec{a}(t) = \frac{d\vec{r}^2}{dt^2}$$

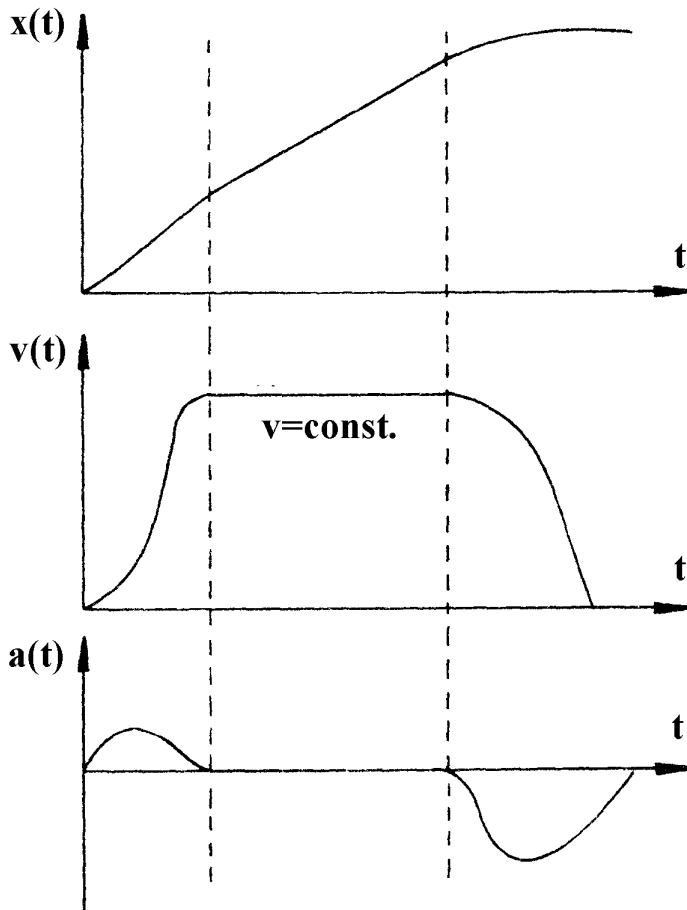
Notation II.10: Die zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit wird mit

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}(t) = \frac{d\vec{r}^2}{dt^2} \text{ bezeichnet.}$$

Merke: Die Beschleunigung ist die zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit.

II.5 Versuche und Berechnungen zur Kinematik

Betrachten wir im Folgenden eine eindimensionale Bewegung in x-Richtung. Diese Bewegung läßt sich, wie bereits gezeigt, in einem Weg-Zeit-Diagramm darstellen. Gegeben sei nicht die exakte Bewegungsgleichung, sondern das Weg-Zeit-Diagramm:



Über Differentiation der Funktion $x(t)$ kann jetzt die Funktion $v(t)$ errechnet werden.

Analog kann mit der ersten Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion nach der Zeit auch die Beschleunigungsfunktion errechnet werden.

Nimmt man die Funktion $a(t)$ als gegeben, so kann man über Integration $v(t)$ und $x(t)$ errechnen.

Als Beispiel:

$$a(t) \sim e$$

$$v(t) \sim \int e dt + v_0$$

$$v(t) \sim t$$

$$x(t) \sim \int t dt + x_0$$

$$x(t) \sim t^2$$

$$a(t) = 0$$

$$v(t) \sim v_0$$

$$v(t) \sim v_0$$

$$x(t) \sim \int v_0 dt + x_0$$

$$x(t) \sim t$$

$$a(t) \sim -e$$

$$v(t) \sim \int -e dt + v_0$$

$$\frac{dx}{dt} \sim -t$$

$$x(t) \sim \int -t dt + x_0$$

$$x(t) \sim -t^2$$

$$a(t) = 0$$

$$v(t) \sim v_0, \quad v_0 = 0$$

$$\frac{dx}{dt} \sim 0$$

$$x(t) \sim x_0$$

$$x(t) \sim x_0$$

II.5.1 Geradlinige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit:

Versuch II.1: Die Luftkissenbahn

Eine Bewegung längs einer Geraden wird gradlinige Bewegung genannt und kann mit dem Skalar $x(t)$ und t beschrieben werden.

Bei dem Versuch mit der Luftkissenbahn wird auf einer Schiene ein Wagen angeschoben. Bei einer festen Geschwindigkeit wird der Wagen losgelassen: Da der Wagen auf einer Schiene geführt wird, ändert er seine Richtung nicht. Die Reibung kann vernachlässigt werden; die Geschwindigkeit ist folglich nach Richtung und Betrag konstant. In gleichen Abständen montierte Lichtschranken messen nun die Zeit, die der Wagen benötigt, um die Strecke Δx zurückzulegen.

Die Messung ergibt immer gleiche Zeitspannen. Das bestätigt die folgende Rechnung:

Randbedingung:

$$v = \text{constant}$$

Aus

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \Delta x = \Delta t \cdot v$$

$$\Rightarrow x_2 - x_1 = (t_2 - t_1) \cdot v$$

$$\Rightarrow x_2 = (t_2 - t_1) \cdot v + x_1$$

Das gilt für die Strecke $x_i - x_0$ zwischen zwei beliebigen Schranken. Also gilt für alle t :

$$x = x_0 + (t - t_0) \cdot v$$

Merke: Das Weg-Zeit-Gesetz für die 1-dimensionale gradlinige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v lautet:

$$x = x_0 + (t - t_0) \cdot v$$

Verallgemeinerung für dreidimensionale Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit:

Die Geschwindigkeit bleibt auch hier in Richtung und Betrag gleich, wird aber als Vektor \vec{v} geschrieben. Der Anfangsort der Bewegung ist gekennzeichnet durch den Vektor

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

Es gilt

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = \text{constant}$$

und

$$\vec{r} = (x, y, z).$$

Aus

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$$

folgt dann

$$\Delta x = v_x \Delta t \quad \wedge \quad \Delta y = v_y \Delta t \quad \wedge \quad \Delta z = v_z \Delta t$$

Die Umformungen von oben für alle drei Komponenten ausgeführt ergibt die Bewegungsgleichung für den dreidimensionalen Fall:

$$x = x_0 + (t - t_0) \cdot v_x$$

$$y = y_0 + (t - t_0) \cdot v_y$$

$$z = z_0 + (t - t_0) \cdot v_z$$

Merke: Das Weg-Zeit-Gesetz für die 3-dimensionale Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v} lautet:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + (t - t_0) \cdot \vec{v}_0$$

Die eindimensionale Bewegung ist ein Sonderfall der dreidimensionalen Bewegung mit

$$\vec{v} = (v_x, 0, 0) \text{ und } \vec{r} = (x, 0, 0).$$

II.5.2 Geradlinige Bewegung mit konstanter Beschleunigung:

Versuch II.2: Freier Fall

Empirisch läßt sich bestätigen, dass auf der Erde alle Körper dieselbe Beschleunigung in Richtung der Erde erfahren, die Beschleunigung durch die Schwerkraft. Sie wird üblicherweise mit g bezeichnet und kann als Skalar beschreiben werden, da sie nur in Richtung der Erdoberfläche, also in y -Richtung wirkt. Als Vektor dargestellt gilt: $\vec{g} = (0, -g, 0)$. Der Betrag der Erdbeschleunigung ist $g = 9,81 \text{ m / s}^2$.

Gegeben sei also nur $a = g = \text{constant}$. Untersuchen wir nun die Geschwindigkeitsfunktion eines Körpers im freien Fall längs einer Achse:

$$v(t) = \int_{t_0}^t a(t) dt + v_0$$

$$\Leftrightarrow v(t) = a \cdot \int_{t_0}^t dt + v_0, \quad \text{da } a(t) = a \text{ konstant ist}$$

$$\Leftrightarrow v(t) = a (t - t_0) + v_0, \quad \text{mit } \int_{t_0}^t dt = (t - t_0)$$

Die Geschwindigkeit wächst also linear mit der Zeit. Die Konstante v_0 bezeichnet die Anfangsgeschwindigkeit, die der Körper hatte, bevor er losgelassen wurde. War der Körper zur Zeit t_0 in Ruhe, also $v_0 = 0 \text{ m/s}$, dann gilt:

$$v(t) = a (t - t_0).$$

Setzen wir die Zeit, in welcher der Körper losgelassen wird, als Anfangszeit der Messung, also

$t_0 = 0$ s, dann gilt:

$$v(t) = at + v_0.$$

Diese Funktionen sind jedoch nur Spezialfälle der allgemeinen Lösung und setzen bestimmte Randbedingungen voraus.

Aus der Funktion für die Geschwindigkeit läßt sich jetzt das Weg-Zeit-Gesetz berechnen:

$$x(t) = \int_{t_0}^t v(t) dt \quad , \text{ mit } v(t) = a(t - t_0) + v_0$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \int_{t_0}^t [a(t - t_0) + v_0] dt$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \int_{t_0}^t a(t - t_0) dt + \int_{t_0}^t v_0 dt$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \left[\frac{a}{2} (t - t_0)^2 \right]_{t_0}^t + v_0 (t - t_0) + x_0$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{a}{2} (t - t_0)^2 + v_0 (t - t_0) + x_0$$

Diese Funktion ist quadratisch, der Weg nimmt also quadratisch mit der Zeit zu. Die neu hinzugekommene Konstante bezeichnet die Verschiebung des Anfangsortes vom Ursprung des Bezugssystems. Durch geschicktes Setzen der Randparameter, $t_0 = 0$ s, $v_0 = 0$ m/s und $x_0 = 0$ m kann diese Gleichung in die stark vereinfachte Form

$$x(t) = \frac{a}{2} t^2 \quad \text{gebracht werden.}$$

Merke: Bei der gradlinigen Bewegung mit konstanter Beschleunigung gilt:

$$x(t) = \frac{a}{2} (t - t_0)^2 + v_0 (t - t_0) + x_0$$

$$v(t) = a(t - t_0) + v_0$$

$$a(t) = \text{constant}$$

Damit gilt insbesondere für den Freien Fall:

Beschleunigung: $a = -g$

Randbedingungen: $t_0 = 0$ s, $v_0 = 0$ m/s und $x_0 = 0$ m

$$x(t) = -\frac{g}{2} t^2$$

Differentiation ↓

$$v(t) = -gt$$

$$a(t) = -g.$$

↑ Integration mit Randbedingungen

Bei dem Laborversuch des Freien Falls werden Kugeln verschiedener Größe, Masse und verschiedenen Materials eine vorher gemessene Strecke x ohne Anfangsgeschwindigkeit fallen gelassen. Eine Uhr misst die Zeit, die der Körper braucht, um die Strecke zurückzulegen.

Aus $x = -\frac{g}{2}t^2$ können wir eine Gleichung für die Zeit umformen: $t = \sqrt{-\frac{2}{g}x}$

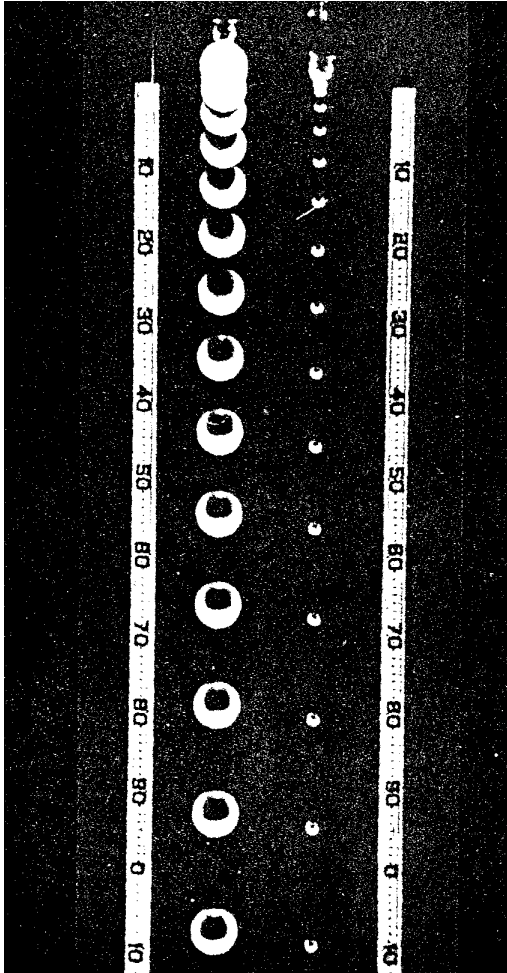


Abbildung II.8: Freier Fall

Diese Gleichung hängt nur von der Konstanten g und der Strecke ab. Der Versuch bestätigt: Die Fallzeit der Kugeln ist unabhängig von Größe, Masse und Material. Sie hängt nur von der Strecke ab.

Dieses Ergebnis ist keinesfalls selbstverständlich: Vor allem Kinder vermuten, dass schwere Körper schneller fallen müssten als leichte. Bis zu den Entdeckungen Galileis Ende des 16. Jh. galt die Vorstellung Aristoteles (384 - 322 v. Chr.) als richtig, schwere Körper würden schneller fallen als leichte.

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine stroboskopische Aufnahme zweier Kugeln unterschiedlicher Masse und Größe, die zur selben Zeit auf gleicher Höhe losgelassen wurden.

Merke: Alle Körper fallen mit derselben Beschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ unabhängig von Masse, Größe oder Material.

Verallgemeinerung für dreidimensionale Bewegungen mit konstanter Beschleunigung

Analog kann bei einer dreidimensionalen Bewegung das Weg-Zeit-Gesetz aus einer gegebenen Beschleunigung und den Randbedingungen errechnet werden. Wie bei der Rechnung für die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit gezeigt, können die Komponenten der Vektoren $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ und $\vec{r} = (x, y, z)$ getrennt integriert bzw. differenziert werden. Die Randbedingungen werden auch durch Vektoren, $\vec{v}_0 = (v_{01}, v_{02}, v_{03})$ und $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, beschrieben.

In Vektorschreibweise gilt somit:

$$\vec{v}(t) = \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt + \vec{v}_0$$

da $\vec{a}(t) = \vec{a}$ konstant $\Leftrightarrow \vec{v}(t) = \vec{a} \cdot \int_{t_0}^t dt + \vec{v}_0$

mit $\int_{t_0}^t dt = (t - t_0)$ $\Leftrightarrow \boxed{\vec{v}(t) = \vec{a} (t - t_0) + \vec{v}_0}$

mit $\vec{v}(t) = \vec{a} (t - t_0) + \vec{v}_0$ folgt $\vec{r}(t) = \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt$

$$\Leftrightarrow \vec{r}(t) = \int_{t_0}^t [\vec{a}(t - t_0) + \vec{v}_0] dt$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}(t) = \int_{t_0}^t \vec{a}(t - t_0) dt + \int_{t_0}^t \vec{v}_0 dt$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}(t) = \left[\frac{\vec{a}}{2} (t - t_0)^2 \right]_{t_0}^t + \vec{v}_0 (t - t_0) + \vec{r}_0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \frac{\vec{a}}{2} (t - t_0)^2 + \vec{v}_0 (t - t_0) + \vec{r}_0}$$

In **Komponentenschreibweise** werden die einzelnen Komponenten a_i , v_i , x_i und von den Randbedingungen v_{0i} und x_0 , y_0 bzw. z_0 betrachtet.

Notation II.11: x_i bezeichnet die i-te Komponente von.

$$v_i(t) = \int_{t_0}^t a_i(t) dt + v_{0i}$$

$$\text{mit } a_i(t) = a_i \text{ konstant} \quad \Leftrightarrow \quad v_i(t) = a_i \cdot \int_{t_0}^t dt + v_{0i}$$

$$\text{mit } \int_{t_0}^t dt = (t - t_0) \quad \Leftrightarrow \quad v_i(t) = a_i (t - t_0) + v_{0i}$$

$$\text{mit } v_i(t) = a_i (t - t_0) + v_{0i} \text{ folgt} \quad x_i(t) = \int_{t_0}^t v_i(t) dt$$

$$\Leftrightarrow \quad x_i(t) = \int_{t_0}^t [a_i(t - t_0) + v_{0i}] dt$$

$$\Leftrightarrow \quad x_i(t) = \int_{t_0}^t a_i(t - t_0) dt + \int_{t_0}^t v_{0i} dt$$

$$\Leftrightarrow \quad x_i(t) = \left[\frac{a_i}{2} (t - t_0)^2 \right]_{t_0}^t + v_{0i} (t - t_0) + x_0$$

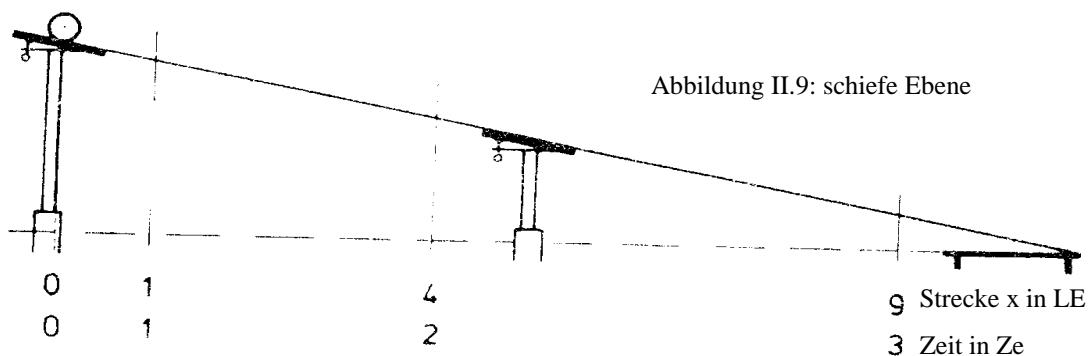
$$\Leftrightarrow \quad x_i(t) = \frac{a_i}{2} (t - t_0)^2 + v_{0i} (t - t_0) + x_0$$

Auch hier ist die gradlinige Bewegung ein Sonderfall der dreidimensionalen Bewegung mit $i = 1$, und den Vektoren $\vec{a} = (a_1, 0, 0)$, $\vec{v} = (v_1, 0, 0)$ und $\vec{r} = (x, 0, 0)$, $\vec{v}_0 = (v_{01}, 0, 0)$ und $\vec{r}_0 = (x_0, 0, 0)$.

II.5.3 Geradlinige Bewegung mit konstanter Beschleunigung: schiefe Ebene

Versuch II.3: Schiefe Ebene

Ein weiterer Versuch zur gradlinigen, eindimensionalen Bewegung mit konstanter Beschleunigung ist die schiefe Ebene. Bei diesem Versuch wird ein Wagen auf der um den Winkel α geneigten Luftkissenbahn bei einer festen Höhe losgelassen und durch die Gravitation beschleunigt.



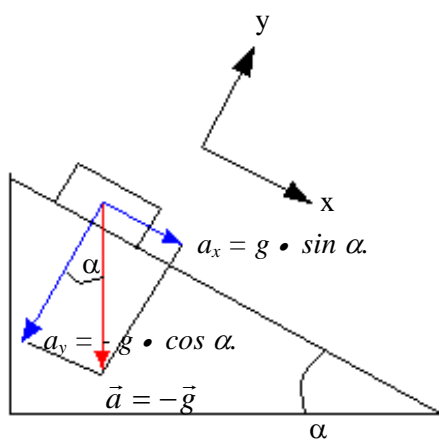
Diesmal können wir, nachdem wir schon berechnet haben, dass das Weg-Zeit-Gesetz quadratisch mit der Zeit verlaufen wird, die Lichtschranken entsprechen in den Abständen 1Längeneinheit (1LE), 4LE, 9LE usw. aufstellen. Jetzt müssten die Zeiten zum Durchlauf der einzelnen Wegstrecken je 1 Zeiteinheit (1 ZE) betragen, die Zeiten gemessen vom Loslaufen bei $t = 0$ entsprechen $t_1 = 1ZE$, $t_2 = 2ZE$,

$t_3 = 3ZE$, usw. Bestätigt sich diese Theorie, so ist demonstriert, dass

$$x_1 / x_2 = t_1^2 / t_2^2 \quad \text{gilt.}$$

Anhand der schiefen Ebene läßt sich auch die Zerlegung eines Vektors in seine Komponenten und die Wahl eines geeigneten Bezugssystems verdeutlichen.

Die Gravitation wirkt bei diesem Versuch nicht im rechten Winkel zur Bewegungsrichtung, deshalb dreht man zur Berechnung das Koordinatensystem, damit die x-Achse in Bewegungsrichtung zeigt. Der Vektor \vec{a} muss dann in diesem System dargestellt werden. Eine Skizze des Problems, in der die Vektoren, ihre Komponenten und die wesentlichen Winkel eingezeichnet sind, zeigt bereits die Lösung des Problems:



a_x ist die Komponente des Beschleunigungsvektors in x-Richtung und kann bereits abgelesen werden:

$$a_x = g \cdot \sin \alpha.$$

Analog:

$$a_y = -g \cdot \cos \alpha.$$

Da es sich bei der schiefen Bahn um ein zweidimensionales Modell handelt, gilt $a_z = 0$.

In Vektorschreibweise lautet der Vektor \vec{a} also:

$$\vec{a} = (g \cdot \sin \alpha., -g \cdot \cos \alpha., 0)$$

II.5.4 Beispiel einer nichtlinearen Bewegung

Versuch II.4: Der horizontale Wurf

Der horizontale Wurf ist eine Überlagerung zweier Bewegungen in der Ebene:

1. Der Körper wird von der Erde beschleunigt und führt somit einen freien Fall aus in Richtung der Erde.
2. Der Körper wird mit einer festen Geschwindigkeit horizontal zur Erde losgeworfen und führt eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit in dieser Richtung aus.

Beschleunigung und Geschwindigkeit sind also gegeben durch

$\vec{a} = \vec{g} = (0, -g, 0)$. Es existiert nur eine Beschleunigung in y-Richtung, in x-Richtung wird in diesem Versuch die Kugel mit konstanter Geschwindigkeit unbeschleunigt geworfen, die z-Komponente ist in der Ebene trivialerweise null.

$\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$ v_x ist die konstante Geschwindigkeit, mit welcher der Körper geworfen wird und sei für die Rechnung gegeben.

Als Randbedingung legen wir fest:

Anfangsort der Bewegung sei der Ort $x_0 = 0$, also der Ursprung des Bezugssystems.

Zeit des Abwurfs sei die Zeit $t_0 = 0$, die Uhren messen die Zeit erst ab Beginn der Bewegung.

Betrachten wir nun komponentenweise die Bewegung, die z-Komponente wird nicht berücksichtigt, bzw. gleich null gesetzt:

	<u>x-Komponente</u>		<u>y-Komponente</u>
$\vec{a}(t) = ($	0	,	- g)
$\vec{v}(t) = ($	$v_x(t) = v_0 (= \text{constant})$,	$v_y(t) = a_y \cdot \int_{t_0}^t dt$)
= (v_0	,	$-g \cdot \int_{t_0}^t dt$)
= (v_0	,	- g · t)
$\vec{r}(t) = ($	$x(t) = \int_{t_0}^t v_x(t) dt$,	$y(t) = \int_{t_0}^t v_y(t) dt$)
= ($v_0 t$,	$\int_{t_0}^t -gt \cdot dt$)
= ($v_0 t$,	$-\frac{1}{2}gt^2$)

Der Ortsvektor zur Zeit t lautet also: $\vec{r}(t) = (v_0 t, 0)$.

Durch Eliminieren von t aus den x- und y- Komponenten kann eine Funktion der x-Komponente in Abhängigkeit von der y-Komponente aufgestellt werden:

aus $x = v_0 t$ und $y = -\frac{1}{2}gt^2$ folgt $y(x) = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2} x^2$

Diese Funktion gibt die Bahnkurve des horizontalen Wurfs an, sie beschreibt die Wurfparabel.

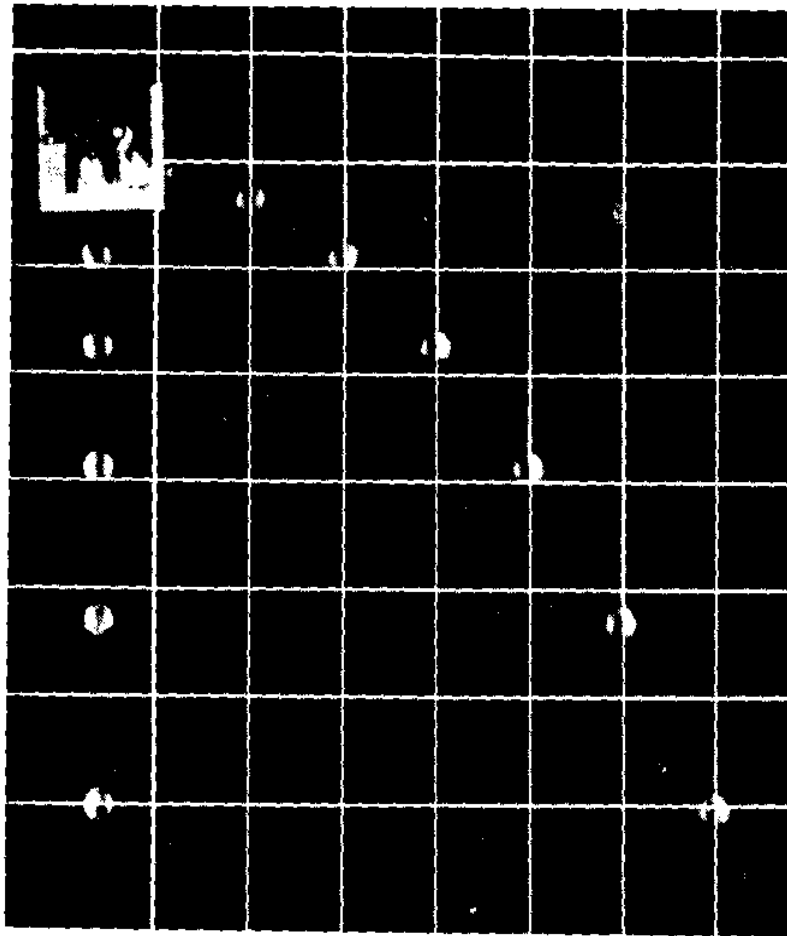


Abbildung II.9: Stroboskopische Aufnahme zweier Kugeln im freien Fall und horizontalem Wurf

Um die Unabhängigkeit der Bewegung in die verschiedenen senkrecht zueinander stehenden Richtungen zu demonstrieren, kann man eine Kugel im freien Fall und eine Kugel im horizontalen Wurf beobachten, die beide zur selben Zeit am selben Ort ihre Bewegung beginnen. Eine stroboskopische Aufnahme zeigt die Bewegung der Kugeln.

In der Vorlesung wurde eine andere Variante des Versuchs gezeigt: Man lässt die Kugeln zur selben Zeit auf derselben Höhe, also y -Komponente, ihre Bewegung starten, verschiebt die Kugel für den freien Fall jedoch einige Zentimeter in Wurfrichtung der zweiten Kugel. Auf diese Weise müssen die Kugeln sich treffen. Unser Demonstrationsversuch bestätigte die Annahme für Kugeln unterschiedlicher Materialien und Größen.

II.6 Relativbewegung

Bisher hatten wir die Einschränkung gemacht, dass die Berechnungen der Bewegungsgleichung nur mit der Beschreibung durch ein ruhendes Bezugssystem Gültigkeit besitzen. Es ist jedoch auch interessant zu fragen, wie man die Bewegung in einem bewegten System beschreiben kann. Als Beispiel stelle man sich einen Menschen vor, der in einem Zug entgegen der Fahrtrichtung geht. In welche Richtung bewegt er sich, und wie sieht diese Bewegung für einen Beobachter im Zug, für einen Beobachter draußen oder sogar für einen Beobachter in einem entgegenkommenden Zug aus?

Diese gradlinige Bewegung kann man sich noch aus verschiedenen Blickpositionen vorstellen, bei einer Kreisbewegung wird es schwieriger.

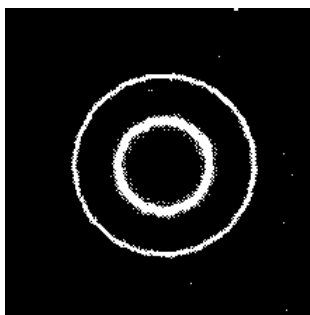


Abbildung II.11:
Kreisbewegung in einem
ruhenden System

In der Vorlesung wurde als Beispiel ein Punkt auf einem Kreis gezeigt, der sich um die Mitte des Kreises drehte, während der Wagen sich mit konstanter Geschwindigkeit geradeaus bewegte. In beiden Fällen beobachtete man eine Kreisbewegung. Die nebenstehende Graphik zeigt eine solche Kreisbewegung für zwei Punkte auf konzentrischen Kreisen, beobachtet in einem relativ zum Beobachter ruhenden Bezugssystem.

Die Projektion der Bewegung des Punktes auf eine Ebene aber zeigte, dass es sich dabei um eine Täuschung handelt. So sieht die Kreisbewegung auf einem mit konstanter Relativgeschwindigkeit zum Beobachter fahrenden System wirklich aus:



Abbildung II.12: Kreisbewegung von einem mit konstanter Geschwindigkeit fahrendem System aus.

Wie sieht eine Bewegung also allgemein für einen mitbewegten Beobachter aus?

Wie bereits zuvor eingeführt, erfordert auch hier eine analytische Beschreibung ein Koordinatensystem. Als Laborsystem wählt man zumeist das System, indem der Beobachter ruht.

Bezeichnen wir dieses Laborsystem S jetzt wie gewohnt mit den Koordinaten (x, y, z) . Dazu definieren wir ein bewegtes Bezugssystem S' , welches wir mit den Koordinaten (x', y', z') beschreiben. Als Vereinfachung setzen wir den Nullpunkt der beiden Koordinatensysteme auf den Ursprung, der zur Zeit t_0 übereinstimmen soll. Ferner gehen wir davon aus, dass die Zeit invariant gegenüber einem Systemwechsel ist. Die Uhr soll also in beiden Systemen stets

dieselbe Zeit anzeigen. Für große Geschwindigkeiten ist dies keinesfalls immer gegeben. Wird die Geschwindigkeit nahezu so groß wie die Lichtgeschwindigkeit, gilt die relativistische Mechanik; der Effekt der verschieden laufenden Uhren wird z.B. im sogenannten Zwillingsparadox behandelt.

Das System S' bewege sich jetzt mit konstanter Relativgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$ gegenüber S .

Wie in Kapitel II.2 gezeigt, kann der Ortsvektor \vec{r} bei Kenntnis der Geschwindigkeit

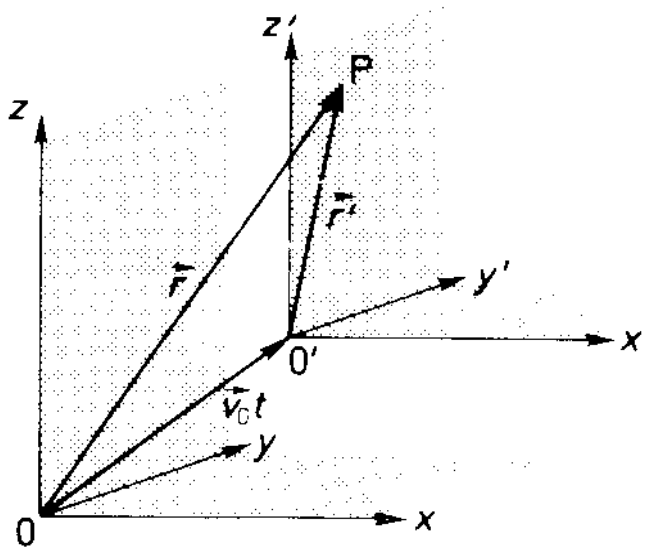


Abbildung II.13: Inertialsysteme

dargestellt werden als

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t.$$

Der Ortsvektor vom Ursprung des Systems S' ist hier der Vektor \vec{r}' .

In Vektorschreibweise gilt:

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{v}_0 \cdot t$$

Mit $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ folgt

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0.$$

Nochmaliges Differenzieren

liefert $\vec{a}' = \vec{a}$

wegen $v_0 = \text{constant}$.

In Komponentenschreibweise gilt dann:

$$\begin{array}{lll} x' = x - v_{x0} t & v_x' = v_x - v_{x0} & a_x' = a_x \\ y' = y - v_{y0} t & v_y' = v_y - v_{y0} & a_y' = a_y \\ z' = z - v_{z0} t & v_z' = v_z - v_{z0} & a_z' = a_z \end{array}$$

Die Beschleunigung ändert sich also nicht bei dem Wechsel in ein mit konstanter Relativgeschwindigkeit bewegtes Bezugssystem. Diese Art der Transformation von Ortsvektoren in ein anderes System heißt Galilei-Transformation. Wie der Film zeigte, ist keines der Systeme, die sich mit konstanter Relativgeschwindigkeit zueinander bewegen bevorzugt. Alle zueinander gradlinig gleichförmig bewegten Systeme sind äquivalent, man bezeichnet sie als Inertialsysteme.

Definition II.6: Inertialsysteme sind gradlinig gleichförmig gegeneinander bewegte Bezugssysteme.

Merke: Die Beschleunigung ist invariant gegenüber Galilei-Transformationen.

Versuch II.5: Auffangtrichter eines Wagens

Bei diesem Versuch soll gezeigt werden, wie zwei Körper in verschiedenen (Inertial-)systemen sich bei verschiedenen Bewegungsformen zueinander bewegen. Hierzu wird ein Wagen mit einer Abschussvorrichtung und mit Auffangtrichter senkrecht zur Bodenplatte eine Kugel mit v_y und a_y abschießen. Sobald die Kugel den Wagen verlassen hat, wirkt auf sie nur noch die Gravitation. Untersucht werden soll, wo die Kugel landet.

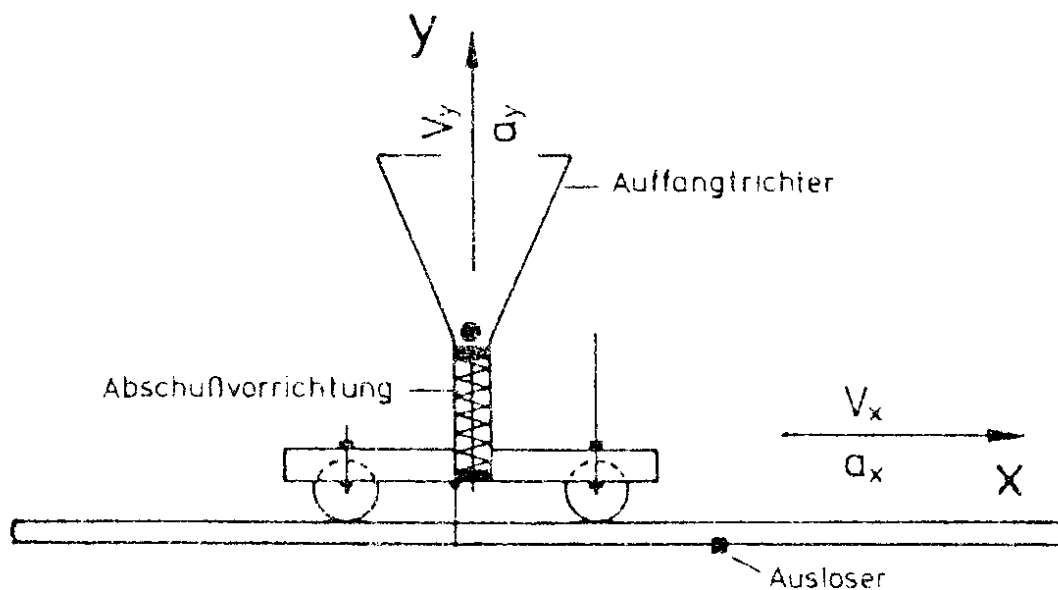


Abbildung II.14: Versuchsskizze zum Abschussversuch

1. Abschuss im Stand:

Für den ersten Versuchsteil verläuft die Schiene parallel zur Erde. Die Kugel wird im Stand abgeschossen, also mit $v_x = 0$ und $a_x = 0$. Wie nicht anders zu erwarten, fällt die Kugel in den Trichter zurück.

2. Der Wagen fährt mit konstanter Geschwindigkeit:

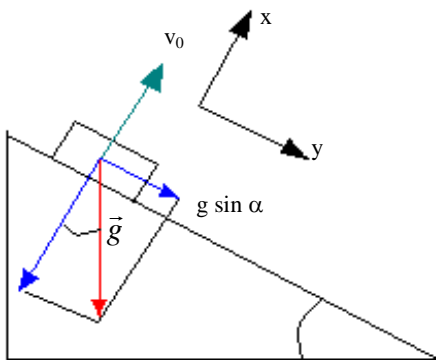
Die beiden Bezugssysteme, Laborsystem und mitbewegtes Wagensystem, sind Inertialsysteme, da mit $a_x = 0$ keine Beschleunigung längs der Bewegungsrichtung existiert. Keines der Systeme ist bevorzugt, im mitbewegten System läuft der Vorgang wie bei Versuchsteil 1. ab und die Kugel fällt folglich in den Trichter zurück.

3. Der Wagen wird beschleunigt in x-Richtung:

Das mitbewegte Bezugssystem ist kein Inertialsystem, da der Wagen mit $a_x \neq 0$ längs der Bewegungsrichtung beschleunigt wird. Die Bewegung der Kugel ist nicht invariant gegenüber einer Transformation in dieses System und die Kugel fällt hinter den Wagen.

4. Abschuss senkrecht zur schiefen Ebene:

Für diesen Versuch wird die Schiene um einige Grad geneigt. Der Wagen rollt jetzt von der Erdanziehung beschleunigt nicht mehr mit konstanter Geschwindigkeit die schiefe Ebene hinab. Die Kugel wird senkrecht zur Bodenplatte, also senkrecht zur schiefen Ebene abgeschossen, als der Wagen die Geschwindigkeit v_{0w} hat. Obwohl es sich um kein Inertialsystem mehr handelt (der Wagen wird beschleunigt), fällt die Kugel in den Trichter zurück. Das kann mittels komponentenweiser Betrachtung mathematisch verifiziert werden:



Der Wagen wird längs der schiefen Ebene beschleunigt mit

$$\frac{d^2 x_w}{dt^2} = g \cdot \sin \alpha .$$

Damit errechnet sich die Geschwindigkeit als

$$v_w(t) = g \sin \alpha t + v_{0w} .$$

Der Wagen legt damit die Strecke

$$x_w(t) = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2 + v_{0w} t$$

zurück.

Die Kugel wird längs der schiefen Ebene ebenfalls mit

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} = g \cdot \sin \alpha$$

beschleunigt.

Ihre Geschwindigkeit errechnet sich dann als

$$v_k(t) = g \sin \alpha t + v_0 .$$

Da die Geschwindigkeitskomponenten von Kugel und Wagen in Richtung der schiefen Ebene gleich

sind, folgt mit $v_{0w} = v_0$

$$x_k(t) = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2 + v_{0w} t .$$

Es gilt als $x_k(t) = x_w(t)$. Kugel und Wagen sind zur Zeit t an derselben Komponente des Ortes längs der schiefen Ebene. Da die Kugel zusätzlich noch eine Bewegung senkrecht zu dieser

Graden ausführt, trifft sich den Wagen genau an der Stelle, wo die Bewegungskomponente senkrecht zur Bewegungsrichtung des Wagens null wird.

5. Abschuss von der schiefen Ebene senkrecht zur Erde:

Bei diesem Versuchsteil wird die Kugel nicht mehr senkrecht zur Bewegungsrichtung des Wagens, sondern senkrecht zur Erde abgeschossen. Die Geschwindigkeitskomponenten längs der schiefen Ebene stimmen damit nicht mehr überein. Die Differentiation zweier verschiedener Geschwindigkeits-Zeit-Gleichungen führt zu zwei differierenden Orts-Zeit-Gleichungen. Die Kugel und der Wagen sind zur Zeit t nicht an derselben Ortskomponente längs der schiefen Ebene und treffen sich folglich nicht mehr. Die Kugel fällt hinter den Wagen.

Fazit aus den Versuchsteilen 3, 4 und 5.:

Falls das mitbewegte System kein Inertialsystem ist, kann man keine einfache Vorhersage über den Vorgang im mitbewegten System mehr machen.

III. Dynamik

Bis jetzt haben wir verschiedene Bewegungen kennengelernt und gezeigt, wie man über Integration und Differentiation aus gegebenen Randbedingungen Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung als Funktion der Zeit berechnet.

Bei der Betrachtung der gradlinigen Bewegung haben wir Versuche, z.B. mit der Luftkissenbahn, durchgeführt, bei denen wir einen Körper mit einer festen Geschwindigkeit losgelassen haben. Wir gingen davon aus, dass der Körper danach dieselbe Geschwindigkeit beibehält. Im Folgenden müssen wir aber untersuchen, ob und wodurch diese Annahme haltbar war. Dafür betrachten wir die Ursachen von Bewegungen im Allgemeinen.

Der Bereich der Physik, der sich mit den Ursachen der Bewegung beschäftigt, heißt *Dynamik*. Auch in diesem Bereich der Physik waren Aristoteles und Galilei zwei Naturwissenschaftler, deren Vorstellungen viele Jahrhunderte die gültige Lehrmeinung bestimmten.

Aristoteles ging davon aus, dass jedem Körper eine Bewegungskraft eingeprägt ist. Bis diese Kraft aufgebraucht ist, bewegt der Körper sich gradlinig gleichförmig. Mit dieser Theorie untersuchte man im 16. Jahrhundert den schiefen Wurf und errechnete richtig, dass die optimale Wurfweite bei einem Winkel von 45° erreicht wird. Dieses Ergebnis ist insofern beeindruckend, als die dahinterstehende Theorie grundlegend falsch war.

Den Beweis dafür lieferte Galilei, der beobachtete, dass die Bewegung von rollenden Kugeln auf unterschiedlichen Oberflächen beispielsweise nicht durch nur eine innewohnende, eingeprägte Kraft beeinflusst sein kann, da eine Kugel umso weiter rollt, je glatter die horizontale Oberfläche ist.

Sir Isaac Newton, Professor in Cambridge und London, heute als einer der Gründer der klassischen Physik bekannt, untersuchte den Ansatz Galileis weiter und entwickelte daraus drei Axiome. Diese sollen im Folgenden näher untersucht werden.

III.1 Trägheitsgesetz oder „1.Newtonsches Axiom“

Das erste Axiom, das Newton aufstellte, beschreibt den Bewegungszustand eines Körpers, auf den keine äußere Kraft einwirkt. Newton formulierte:

<p style="text-align: center;">1.Newtonsches Gesetz: Ein Körper verharrt solange in Ruhe oder gradlinig gleichförmiger Bewegung, solange keine äußere Kraft auf ihn einwirkt.</p>

Dieses Prinzip haben wir bereits bei den Versuchen mit der Luftkissenbahn beobachtet und bei der Deutung der Beobachtung angewandt.

Später wird das Gesetz exakter formuliert mit Einführung des Begriffs „resultierende äußere Kräfte“. Es ist bereits aus der Anschauung klar, dass ein Körper, auf den an beiden Seiten dieselbe Kraft entgegengesetzt angreift, in Ruhe bleibt. Als Beispiel sei das Tauziehen mit zwei gleich starken Gruppen erwähnt.

Das erste Newtonsche Gesetz lässt sich umformuliert auch schreiben als:

Merke: Die Ursache jeder Bewegung ist eine äußere Kraft.

Aufgabe der Dynamik, die sich wie erwähnt mit der Ursache von Bewegungen beschäftigt, ist es also, die verschiedenen Arten von Kräften und die daraus resultierenden Bewegungen zu untersuchen und zu beschreiben.

III.2 Kräfte

Zunächst sollen Kräfte phänomenologisch, also durch Beobachten der hervorrufenden Bewegungen, beschrieben werden. Einige Wirkungen, die Kräfte hervorrufen, sind schon aus dem Alltag bekannt: Verformungen, Auslenkungen von Federn oder Gummibändern.

Bei Federn ist leicht zu beobachten, dass gleiche Kräfte dieselbe Auslenkung hervorrufen. Allgemein kann man beobachten:

Definition III.1: Zwei Kräfte sind gleich, wenn sie die gleiche Wirkung hervorrufen.

Dieses Prinzip kann man sich zunutze machen, indem man Federn zum Vergleich von Kräften einsetzt. Federn besitzen nebenbei noch die Eigenschaft, dass sie in einem bestimmten Auslenkungsbereich, dem sogenannten elastischen Bereich, wieder in die Ausgangslage zurückkehren, wenn die Kraft nicht mehr wirkt. So kann man mit derselben Feder Kräfte quantitativ vergleichen. Dieses Prinzip nutzt die Federwaage.

Versuch III.1: Federwaage

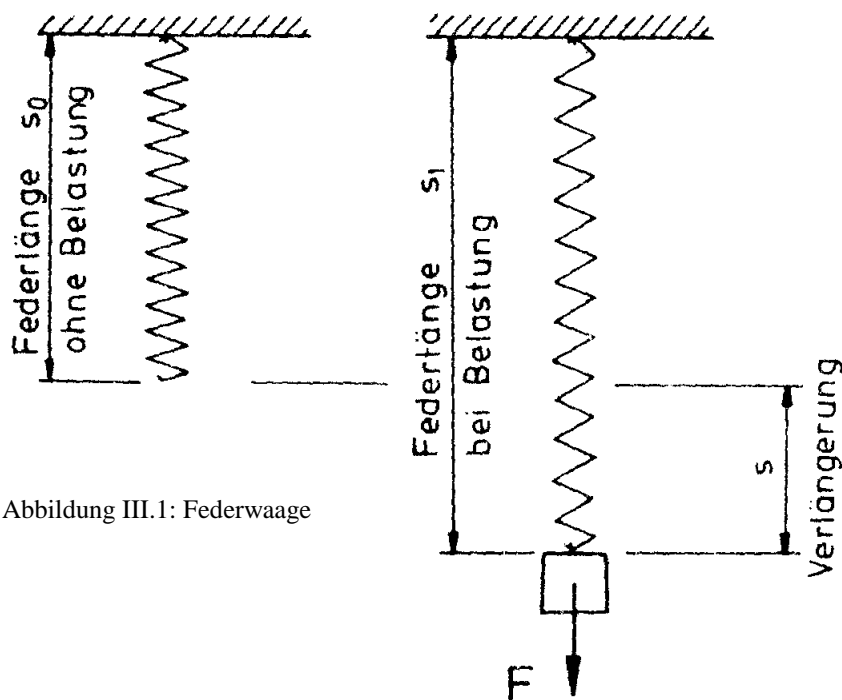


Abbildung III.1: Federwaage

Bei diesem Versuch sollen die Kräfte untersucht werden, die entstehen, wenn verschiedene Körper an eine senkrecht zur Erde hängend befestigte Feder angehängt werden. Die Körper werden durch die Gravitation der Erde angezogen.

Notation III.1: Die

Kraft F , mit der ein Körper von der Erde angezogen, wird nennen wir sein **Gewicht G** .

Beim Freien Fall haben wir bereits die Kraft kennengelernt, mit der die fallende Kugel angezogen wurde. Damals haben wir die Richtung des Falls, hier die y -Koordinate, durch einen Vektor ausgedrückt. Auch bei anderen Kräften muss die Richtung, in die sie wirken, beachtet werden, z.B. beim Tauziehen. Es macht eindeutig einen Unterschied, ob beide Mannschaften in dieselbe Richtung oder entgegengesetzt ziehen. Die Kraft muss als vektorielle Größe eingeführt werden. Aus der Notation III.1 folgt also:

Merke: Bei der Federwaage gilt: $\vec{F} =$

Der Versuch zeigt, dass verschiedene Körper verschiedene Auslenkungen hervorrufen. Die den Körpern offensichtlich innewohnende Eigenschaft, welche eine unterschiedliche Auslenkung der Feder bewirkt, nennen wir seine schwere Masse m_s :

Notation III.2: Die Eigenschaft eines Körpers, welche für sein Gewicht verantwortlich ist, nennt man die **schwere Masse m_s** .

Für den nächsten Versuchsteil nehmen wir mehrere identische Körper. Um zu prüfen, ob die Körper wirklich das gleiche Gewicht haben, hängen wir sie nacheinander an die Feder und überprüfen, ob sie dieselbe Auslenkung hervorrufen. Nach dem in Kapitel III.2 Erarbeiteten sind die Kräfte, also die Gewichte, dann gleich. Nachdem auf diese Weise Körper mit dem gleichen Gewicht gefunden wurden, beginnt die eigentliche Messung:

Zunächst wird ein Körper mit dem Gewicht G an die Feder gehängt. Wir beobachten die Verformung der Feder und erhalten damit ein Maß für das Gewicht und die schwere Masse des Körpers. Danach hängen wir ein weiteres Gewicht an und können die doppelte Kraft $2G$ messen. Offensichtlich ist also das Gewicht G proportional zu der schweren Masse m_s .

Folgerung I: Das Gewicht ist proportional zur schweren Masse

$$G \sim m_s$$

Jetzt kann man die Auslenkung der Feder messen mit einer verschiedenen Anzahl von angehängten Körpern desselben Gewichts. Der Versuch zeigt, dass die Auslenkung sich verdoppelt, hängt man zum ersten einen zweite Körper, und so fort.

Folgerung II: Die Auslenkung x ist proportional zum Gewicht der angehängten Körper

$$G \sim x$$

Aus Folgerung I und II erkennt man sofort:

Folgerung III: Aus $G \sim m_s$ und $G \sim x$ folgt:

$$G \sim x \sim m_s$$

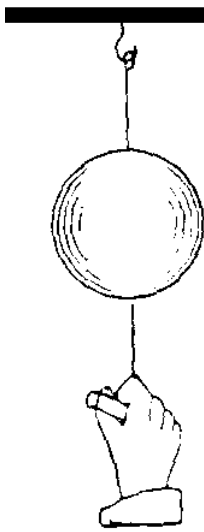
Mit diesen Proportionalitäten lassen sich nun Kräfte quantitativ messen, vergleichen und addieren.

III.3 Die träge Masse

Die Erfahrung zeigt uns, dass Körper mit einer schweren Masse sich einer Beschleunigung widersetzen. Ein bekanntes Beispiel ist ein Körper, der plötzlich losgelassen wird und einen freien Fall ausführt. In abgemilderter Version erlebt man diese Trägheit z.B. auf schnellen Achterbahnen oder in Fahrstühlen.

Auch bekannt ist die Tatsache, dass Körper mit größerer Masse schwerer zu beschleunigen sind als leichtere, hier sei als Beispiel nur die Erfahrung genannt, mit einem überladenen Auto anzufahren oder zu bremsen.

Versuch III.2: Kordel reißt



Diese Eigenschaft von Körpern wollen wir im nächsten Experiment zeigen. Hierzu wird eine Kugel mit großer Masse an einen dünnen Faden gehängt. Am unteren Ende der Kugel befestigen wir eine dickere Schnur mit Griff. Zunächst wird langsam am Griff gezogen. Über die Schnur wird die Kugel langsam beschleunigt. Der obere Faden wird gespannt, bis er schließlich reißt. Ein neuer Faden wird eingefügt und nun wird ruckartig, also möglichst schnell, am Griff gezogen. Die große Beschleunigung wird über die Schnur auf die Kugel übertragen. Aufgrund ihrer Trägheit, widersetzt die Kugel sich der Beschleunigung und folgt der Bewegung nicht. Jetzt muss die untere Schnur die Beschleunigung auffangen, sie reißt.

Abbildung III.2: Kordel reißt

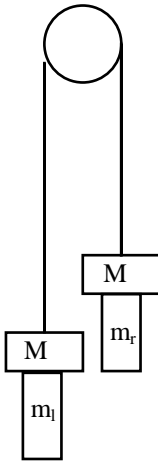
Notation III.3: Wir nennen die Eigenschaft eines Körpers, aufgrund deren er sich der Beschleunigung widersetzt, seine **träge Masse m_t** .

III.4 Grundgesetz der Mechanik oder „2. Newtonsches Axiom“

Bisher haben wir vier wichtige physikalische Größen der Dynamik kennengelernt:

1. Die **Beschleunigung**: Die Beschleunigung ist invariant gegenüber einem Wechsel des Inertialsystems, jeder Körper mit schwerer Masse widersetzt sich der Beschleunigung.
2. Die Ursache jeder Beschleunigung ist eine **Kraft**
3. Der Körper widersetzt sich einer Beschleunigung aufgrund seiner **trägen Masse**.
4. Eine Form der Kraft ist das Gewicht. Die Eigenschaft eines Körpers, welche für sein Gewicht verantwortlich ist, nennt man die **schwere Masse**.

Im Folgenden soll anhand einiger Versuche der Zusammenhang dieser vier Größen ermittelt werden.



Versuch III.3: Atwood'sche Fallmaschine

Bei diesem Versuch werden zwei gleiche Massen M mit einem Seil, welches über eine Umlenkrolle gehängt ist, miteinander verbunden.

Dadurch wird auf jeder Seite eine Kraft realisiert, das Gewicht der Massen. Beide Massen befinden sich im Gleichgewicht, die Resultierende der Kräfte ist null. An beiden Seiten kann eine weitere Masse m_l und m_r befestigt werden. Diese Massen werden so gewählt, dass kein Gleichgewicht mehr herrscht. Auf der Seite mit der größeren Masse wirkt nun eine größere Kraft als auf der anderen, und die Masse wird nach unten beschleunigt. In unserem Versuch wählen wir immer

$m_r > m_l$. Auf der rechten Seite können wir dann mittels einer Lichtschranke die Fallzeit errechnen, die $M + m_r$ brauchen, um von der Erde beschleunigt einen Meter zurückzulegen.

Über die bekannte Beziehung für den Freien Fall $x = \frac{1}{2}at^2$

kann bei gleichzeitiger Messung der Fallzeit t die Beschleunigung errechnet werden.

Betrachten wir die Kräfte, die bei diesem Versuch wirken:

Die beschleunigende Kraft ist $\vec{G} \sim \text{Masse}$, die in diese Richtung beschleunigt wird. Auf der linken Seite ist diese Masse $M + m_l$, sie wird in positiver y -Richtung beschleunigt. Die Summe der rechten Massen $M + m_r$ wird in negativer Richtung beschleunigt. Als resultierende Kraft folgt:

$$G = G_r - G_l \sim (M + m_r) - (M + m_l) = m_r - m_l.$$

Diese Kräfte beschleunigen alle Massen, die an dem Seil befestigt sind, also die Gesamtmasse

$$M' = M + m_r + M + m_l$$

Diese Masse widersetzt sich der Beschleunigung. Eigentlich müßte noch ein Korrekturfaktor angebracht werden wegen des Seils und der Umlenkrolle, um die Proportionalität zu zeigen soll diese Näherung jedoch genügen.

Gemessen wurde die Fallzeit für einen Meter Fallstrecke bei verschiedenen Gewichtskonstellationen.

Die Computerauswertung zeigt graphisch, dass die errechnete Beschleunigung umgekehrt proportional zu der Gesamtmasse M' , als zur gesamten trägen Masse ist. $a \sim 1/M'$.

Folgerung I: Die Beschleunigung ist umgekehrt proportional zu der Gesamtmasse M'

$$a \sim 1/M'.$$

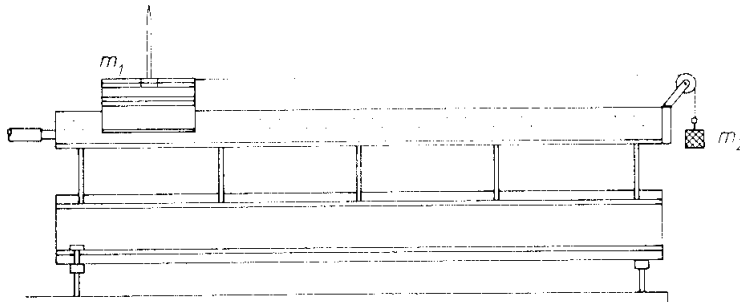


Abbildung III.3: Nachweis des 2.NG

In einem zweiten Versuchsteil mit der Luftkissenbahn konnte die Fallstrecke gemessen werden bei verschiedenen Massen m_1 und m_2 . Die größere Masse m_1 ist bei dieser Versuchsanordnung

als Reiter auf der Schiene befestigt, eine kleinere Masse m_2 erzeugt eine Gewichtskraft. Da die Massen mit einem Faden verbunden sind, ist auch hier die beschleunigte Masse gleich der Gesamtmasse. Gemessen wird die Zeit, die der Reiter braucht, um einen Meter zurückzulegen, nachdem die kleine Masse fallen gelassen wird. Über die Beziehung $x = \frac{1}{2} at^2$ kann a rechnerisch bestimmt werden.

Auf die Masse m_2 wirkt die Kraft $G = m_2g$, beschleunigt werden die Massen $(m_1 + m_2)$.

Umgeformt kann man diese Beziehung zur Bestimmung der Erdbeschleunigung g nutzen.

Die Messung mit verschiedenen Massen zeigte, dass

$$a \sim \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad \text{ist.}$$

Mit dem Ergebnis der Folgerung I: $a \sim (1/M')$ lässt sich daraus folgern, dass die Beschleunigung direkt proportional zur beschleunigenden Kraft G ist. $a \sim G$

Folgerung II: Die Beschleunigung ist direkt proportional zur beschleunigenden Kraft G
 $a \sim G.$

Aus beiden Ergebnissen folgert direkt:

Folgerung III: Aus $a \sim G$ und $a \sim 1/M'$ folgt: $G \sim M' a.$

Die Proportionalitätskonstante zwischen der Kraft, wir bezeichnen sie wieder allgemeiner mit F , und dem Produkt aus träger Masse und Beschleunigung ist frei, da wir bisher nur über die Einheit von Masse und Beschleunigung verfügt haben. Wir können sie daher gleich eins setzen.

Dann gilt:

2. Newtonsches Gesetz: Kraft ist das Produkt aus Masse und Beschleunigung
 $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

Einheitenbetrachtung:

Die Beschleunigung hat die Einheit $[a] = 1 \text{ m s}^{-2}$, die Masse ist eine Basiseinheit im SI mit $[m] = \text{kg}$. Es gilt $[a \cdot m] = [a] \cdot [m] = 1 \text{ kg m s}^{-2}$.

Notation III.5: Die Einheit der Kraft wird mit **1 Newton** bezeichnet.

$$[\vec{F}] = 1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$$

Definition III.1: 1 Newton ist die Kraft, die 1 Kilogramm auf 1 m s^{-2} beschleunigt.

III.5 Schwere und träge Masse

Versuche an verschiedenen Orten der Erde zeigen, dass die oben bestimmte Proportionalitätskonstante g in $G = mg$ zwar nicht überall denselben Wert hat, an einem festen Ort jedoch gilt strenge Proportionalität.

Letzteren Umstand machen wir uns zunutze, um mit dem Freien Fall das Verhältnis von schwerer und träger Masse zu bestimmen. Hierzu betrachten wir einen Körper, auf dessen schwere Masse die Kraft $G = m_s g$ wirkt. Nun lassen wir den Körper fallen und betrachten die träge Masse und deren Beschleunigung, die, wie oben gezeigt, durch Messung der Fallzeit bestimmt werden kann, $F = m_t a$. Da aber $G = F$ ist, gilt:

$$m_s g = m_t a \quad \text{und damit} \quad a = \frac{m_s}{m_t} g.$$

Versuche mit verschiedenen Körpern zeigen, dass a konstant ist. Aus der Tatsache, dass alle Körper dieselbe Fallbeschleunigung erfahren, kann also gefolgert werden, dass träge und schwere Masse einander proportional sind. Da wir bisher nur die Einheit der trägen Masse definiert haben, können wir die Proportionalitätskonstante ebenfalls gleich eins setzen.

Merke: Die schwere Masse eines Körpers ist gleich seiner trägen Masse:

$$m_s = m_t$$

Merke: Die Einheit der trägen und der schweren Masse ist das Kilogramm:

$$[m_s] = [m_t] = \text{kg}.$$

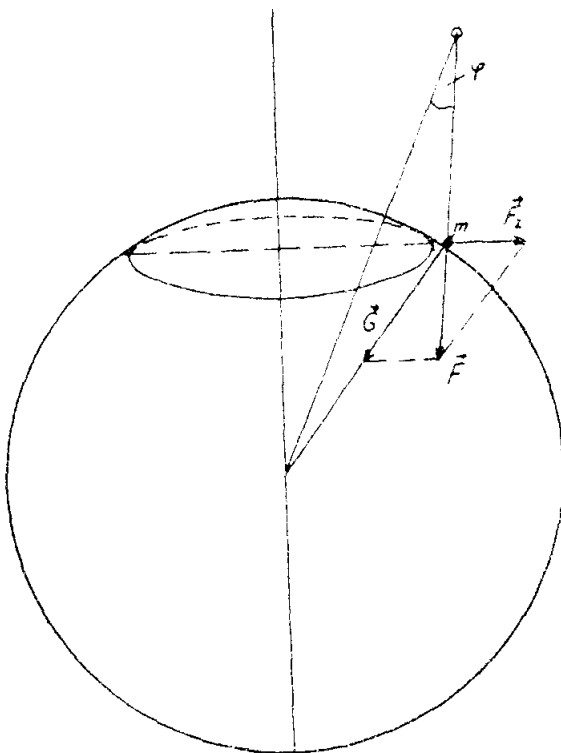


Abbildung III.4: Versuchsprinzip der Eötvös'schen Drehwaage

Um die Jahrhundertwende versuchten Forscher, mit Präzessionsexperimenten nachzuweisen, dass doch eine winzige Abweichung zwischen den beiden Massen eines Körpers besteht.

Eötvös, Pekar und Fekete untersuchten mit einer Drehwaage die Wirkung von Schwerkraft und Fliehkraft auf verschiedene Materialien. Hierzu wird ein Körper an einem Faden aufgehängt. Auf ihn wirkt so die Kraft $\vec{G} = m_s \vec{g}$ in Richtung des Erdmittelpunkts. Zugleich wirkt aber auch die Fliehkraft $\vec{F} = m_t \vec{a}_z$, die durch die Erddrehung

hervorgerufen wird. Da \vec{g} und \vec{a}_z nicht in dieselbe Richtung weisen, stellt sich ein Winkel ein. Sind die beiden Massen nicht gleich, müßte dieser Winkel sich ändern, wenn das Experiment mit verschiedenen Körpern ausgeführt wird. Messungen ergaben jedoch eine Abweichung des Winkels von weniger als 10^{-8} m.

Damit war also bewiesen, dass das Verhältnis von träger zu schwerer Masse bis auf einen Faktor von 10^{-8} genau gleich eins ist. Tabelle III.1 zeigt die Messung für verschiedene Materialien:

Material	Änderung des Winkels $m_s - m_t / \langle m \rangle$
Magnalium	$+ 0,004 \cdot 10^{-6} \pm 0,001 \cdot 10^{-6}$
Schlangenholz	$- 0,004 \cdot 10^{-6} \pm 0,002 \cdot 10^{-6}$
Kupfer	$+ 0,004 \cdot 10^{-6} \pm 0,002 \cdot 10^{-6}$
Wasser	$- 0,006 \cdot 10^{-6} \pm 0,003 \cdot 10^{-6}$
Kristall, Kupfersulfat	$- 0,001 \cdot 10^{-6} \pm 0,003 \cdot 10^{-6}$
Kupfersulfatlösung	$- 0,003 \cdot 10^{-6} \pm 0,003 \cdot 10^{-6}$
Asbest	$+ 0,001 \cdot 10^{-6} \pm 0,003 \cdot 10^{-6}$
Talg	$- 0,002 \cdot 10^{-6} \pm 0,003 \cdot 10^{-6}$

Tabelle III.1: Messungen mit der Drehwaage für verschiedene Materialien

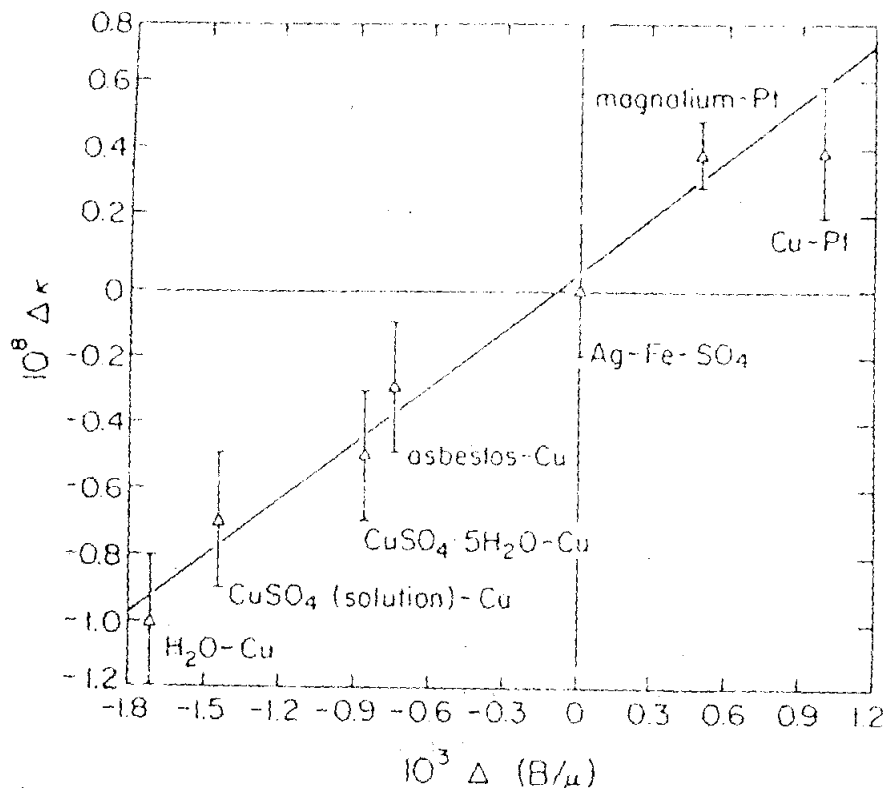


Abbildung III.5: Massenabweichung bei verschiedenen Materialien

Eine Reanalyse der Daten wurde 1985/86 von Fischbach und anderen Wissenschaftlern durchgeführt. Sie behaupteten, nachgewiesen zu haben, dass das Verhältnis von träger zu schwerer Masse von der Zahl der Neutronen und Protonen, den sogenannten Baryonen, zu der Atommasse abhängt. Diese Sensation währte jedoch nur wenige Wochen, bis man Fischbach einen Vorzeichenfehler in seiner Berechnung nachweisen konnte.

Seit dem ersten Experiment mit der Eötvös'schen Drehwaage wurde die Messung immer exakter wiederholt. Mithilfe von Bohrlöchern und Satelliten oder über den Freien Fall mit Präzisionszeitmessungen konnte die Proportionalität der beiden Massen und die Gravitationskonstante inzwischen auf $\pm 5 \cdot 10^{-10}$ genau bestimmt werden.

III.6 Bestimmung der Erdbeschleunigung g mit Hilfe des 2. Newtonschen Axioms.

Das zweite von Newton formulierte Axiom lässt sich nutzen, um die drei darin enthaltenen Grundgrößen näher zu untersuchen. Die Gleichung $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ lässt sich auf drei Weisen lesen:

1. Als Definitionsgleichung für m . Diese Interpretation haben wir bei der Bestimmung von träger Masse beim Freien Fall genutzt: Wenn bekannt ist, welche Kraft F auf einen Körper wirkt, und die daraus resultierende Bewegung gemessen werden kann, kann mit dem 2. Newtonschen Axiom die Masse m berechnet werden, die der Körper haben muss. In unserem Beispiel kannten wir die Gewichtskraft G und konnten mit Kenntnis der Fallstrecke und Messen der Fallzeit die Beschleunigung errechnen.

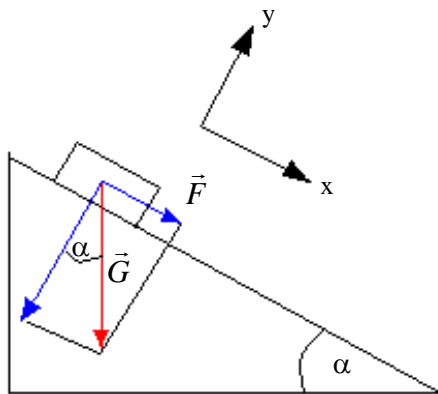
2. Als Definitionsgrundlage für F . Bei dieser Interpretation muss die Masse m des Körpers bekannt sein. Beobachtet und misst man dann eine Bewegung, und kann man die Beschleunigung des Körpers ermitteln, so lässt sich über das 2. Newtonsche Axiom die resultierende der äußeren Kräfte berechnen, die auf den Körper gewirkt haben müssen. Mit dieser Methode kann man z.B. die Anziehungskraft auf verschiedenen Planeten, oder die Reibung von Autoreifen bestimmen. Dieses Prinzip heißt *Kinematische Methode*.

3. Als Definitionsgrundlage für a . Bei dieser dritten Interpretation geht man davon aus, dass man die Masse eines Körpers und die auf ihn wirkenden Kräfte kennt. Dann kann man die Beschleunigung errechnen, die der Körper erfährt. Diese *Dynamische Methode* kann genutzt werden, um nach Messung der Bewegung die Beschleunigung zu bestimmen, in unserem Beispiel die Erdbeschleunigung, oder um eine Bewegung vorauszusagen. Hierfür kann über die Integration der errechneten Beschleunigung mit Kenntnis der Randparameter der Ort zu jeder Zeit berechnet werden.

Wir wollen im Folgenden über das 2. Newtonsche Axiom die Erdbeschleunigung g bestimmen:

Versuch III.4: g-Bestimmung

Für diesen Versuch verwenden wir wieder die Luftkissenbahn als schiefe Ebene. Zwei Lichtschranken messen die Zeitabstände, in denen die Reiter bekannte Strecken x durchlaufen. Wie bereits in Kapitel II.4.3 hergeleitet, gilt für die Beschleunigungskomponente längs der schiefe Ebene $a_x = g \sin \alpha$, wenn die schiefe Ebene einen Winkel α mit der Erdoberfläche bildet. Dies kann jetzt mit Hilfe des 2. Newtonschen Axioms auch über eine Betrachtung der wirkenden Kräfte bestätigt werden:



In Richtung des x-Achse wirkt die Kraft, nach Newton zu schreiben mit $\vec{F} = m\vec{a}$.
Für die x-Komponenten gilt dann $F_x = ma_x$.
Die Vektorzerlegung gibt den Teil des Vektors \vec{G} an, der in x-Richtung liegt $F_x = G \sin \alpha$.
Also gilt: $G \sin \alpha = ma_x$.
Mit $G = mg$ folgt $mg \sin \alpha = ma$,
und daraus direkt: $g \sin \alpha = a$.

Dieses Ergebnis können wir auf zwei Aspekte untersuchen:

1. Beschleunigung a und Erdbeschleunigung g sind unabhängig von der Masse des Körpers.

Um diese Aussage zu verifizieren, werden verschieden schwere Reiter auf die Luftkissenbahn gesetzt und deren Beschleunigung gemessen. Die Zeitabstände, in denen die verschiedenen Reiter die Lichtschranken passieren, sind gleich für alle unterschiedlich schweren Reiter. Die Tatsache, dass alle Körper unabhängig von ihrer Masse gleich schnell fallen, hatten wir schon beim Freien Fall verifiziert.

2. Die Erdbeschleunigung g lässt sich durch Messung der Beschleunigung bestimmen. Über die Zeit, in der die Körper die Strecke x zurücklegen lässt sich, wie bekannt, die Beschleunigung a errechnen. Wenn der Neigungswinkel bekannt ist, kann über $g \sin \alpha = a$ die Naturkonstante g errechnet werden.

Merke: Der Standardwert der Erdbeschleunigung beträgt

$$g = 9,80665 \text{ m / s}^2.$$

III.7 Gegenwirkungsprinzip oder „3. Newtonsches Axiom“

Versuch III.5: Zwei Körper auf einem Rollwagen

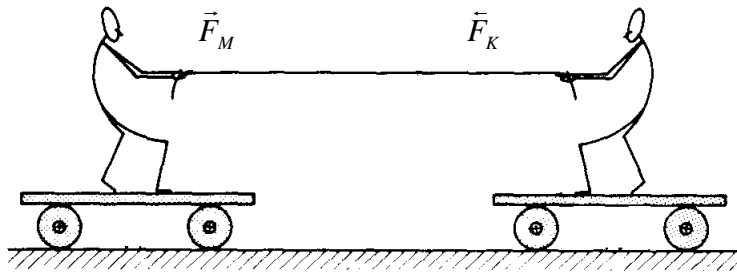


Abbildung III.6: actio und reactio im Versuch

Bei diesem Versuch stellen sich zwei Menschen mit gleichem Gewicht auf je ein Brett mit vier Rollen. Beide Personen halten das

Ende eines Seils fest und spannen es. Dann hält einer das Seil nur fest, während der andere langsam daran zieht.

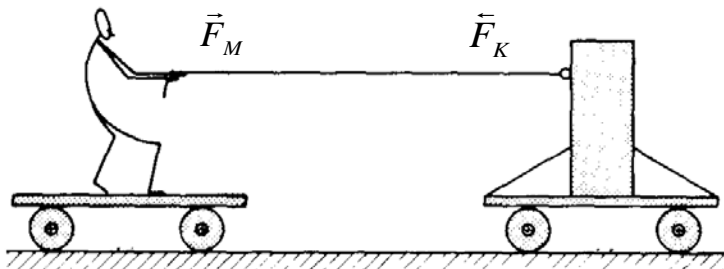


Abbildung III.7: Nachweis für beliebige Körper

Man kann beobachten, dass beide Wagen aufeinander zurollen. Markiert man zuvor die Mitte zwischen den beiden Rollwagen, so treffen die Wagen sich genau auf dieser

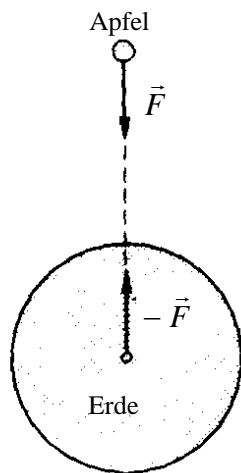
Markierung. Um auszuschließen, dass die zweite Person doch gezogen hat, kann jetzt der Versuch wiederholt werden mit einem unbelebten Körper gleicher Masse. Auch hier zieht die Person am Seil und wieder treffen sich beide Wagen in der Mitte.

III.7.1 Theoretische Überlegungen

Als Grundaussage der Dynamik hatten wir festgehalten, dass Grundlage jeder Bewegungsänderung eine Kraft ist, die auf den beschleunigten Körper ausgeübt wird. Mit diesem Versuch ist gezeigt worden, dass auch der Körper sich bewegt, der vom anderen Körper nicht aktiv herangezogen wurde. Es muss also auch auf diesen Körper eine Kraft wirken. Die beiden Massen wurden bewußt gleich groß gewählt, um zu zeigen, dass die hervorgerufene Bewegung bei zwei Körpern mit gleicher Masse entgegengesetzt gleich ist. Da Kraft nur von der Masse und der Beschleunigung abhängt, muss auch die Kraft entgegengesetzt gleich sein.

Newton formulierte in seinem 3. Axiom:

3. Newtonsches Gesetz: Die von zwei Körpern aufeinander ausgeübten Kräfte sind entgegengesetzt gleich.



Kurz wird dieses Gesetz auch **actio = reactio** genannt. Die Gleichung $\vec{F} = m\vec{a}$ lässt sofort erkennen, dass dieselbe Kraft bei einem Körper größerer Masse eine kleinere Beschleunigung hervorruft.

Das vielleicht populärste Beispiel hierfür ist ein Ereignis, welches Newton angeblich auf die Idee brachte, dieses Prinzip zu formulieren: Eines schönen Herbsttages schlief Newton unter einem Apfelbaum, als ein Apfel sich vom Ast löste und auf seinen Kopf fiel. Newton sei damals auf die Idee gekommen, sich zu fragen, warum eigentlich die Erde den Apfel anzieht und nicht auch vielleicht umgekehrt. In der Tat hatte er mit dieser

Vermutung recht, die Bewegung der Erde durch den Apfel hervorgerufen ist nur wegen der Mengenrelation Apfel-Erde nicht registrierbar. Dennoch gilt das 3. NG auch hier: die Erde beschleunigt den Apfel betragsmäßig mit derselben Kraft wie der Apfel die Erde.

Die Gegenkraft greift dabei beim Verursacher der eigentlichen Kraft an. In unserem Beispiel heißt das, dass die erzeugte Gegenkraft im Schwerpunkt der ziehenden Person angreift, und nicht im Schwerpunkt der gezogenen. Das ist schon daraus ersichtlich, dass die resultierende von Kraft und Gegenkraft, falls sie in einem Punkt angreifen, null ist. Nach den ersten Newtonschen Axiom ist nur die resultierende der äußeren Kräfte Ursache einer Bewegung.

Merke: Die Gegenkraft greift im Schwerpunkt des Verursacher der Kraft an und ist der verursachenden Kraft entgegengesetzt.

Kräftegleichgewicht herrscht im Verbindungsseil. Hier herrschen die Kräfte \vec{F} und $-\vec{F}$. Um die Bewegung eines Massepunktes zu berechnen, müssen die daran wirkenden Kräfte vektoriell addiert werden, also wirkt im Seil die Kraft: $\vec{F}_S = \vec{F} + (-\vec{F}) = 0$.

Das Seil bewegt sich nicht. Auch diese Berechnung kann mit Hilfe einer farbigen Markierung im Seil experimentell bestätigt werden.

Wie bereits stillschweigend vorausgesetzt, gilt das 3. Newtonsche Axiom sowohl für Fernwirkungskräfte, also für Kräfte, die ohne materielle Verbindung zwischen den Körpern wirken, z. B. Erdanziehung oder elektrische und magnetische Kräfte, als auch für Nahwirkungskräfte, Kräfte also, die durch materielle Verbindungen, z.B. Seile oder Federn, wirken.

Häufig wird aus praktischen Gründen nicht das statische, sondern das dynamische Gleichgewicht betrachtet. Mit dem 2. Newtonschen Axiom, $\vec{F} = m\vec{a}$ gilt dann: $\vec{F} - m\vec{a} = 0$.

Man nennt $\vec{F} = -m\vec{a}$ beim dynamischen Kräftegleichgewicht die Trägheitskraft und bezeichnet sie mit dem Index T : $\vec{F}_T = -m\vec{a}$.

Merke: Die **Trägheitskraft** $\vec{F}_T = -m\vec{a}$ ist der beschleunigenden Kraft entgegen gerichtet und hat denselben Betrag F .

An einen Körper im mitbeschleunigten System wirken im Schwerpunkt sowohl die beschleunigende Kraft, als auch die Trägheitskraft. Die Resultierende der auf ihn wirkenden Kräfte ist also gleich null. Diese Feststellung ist nur eine allgemeinere Formulierung des 3. Newtonschen Axioms. Sie ist bekannt als d'Alembertsches Prinzip:

d'Alembertsches Prinzip: Für einen mitbeschleunigten Beobachter ist im mitbewegten System die vektorielle Summe aus äußeren und Trägheitskräften gleich null:

$$\sum \vec{F}_i = 0$$

Diesen Effekt kennen wir aus einer schnellen Bremsung beim Auto oder einer schnellen Kreisbewegung. Hier erfährt der Körper eine Kraft, die entgegen der beschleunigenden Kraft wirkt: Man wird im Auto beim Bremsen nach vorne geschleudert oder im Karussell nach außen gedrückt. Da, wie gezeigt, in Wirklichkeit keine resultierende Kraft auf den Körper wirkt, heißen die Kräfte auch Scheinkräfte.

Notation III.6: Trägheitskräfte werden auch **Scheinkräfte** genannt.

III.7.2 Beispiel Freier Fall

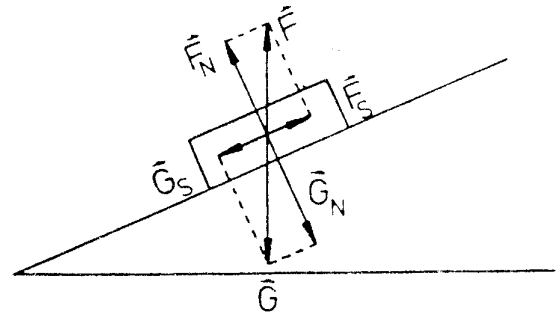
Ein Beispiel, an dem man das d'Alembertsche Prinzip verifizieren kann, ist die Trägheitskraft beim Freien Fall. Wir hatten festgestellt, dass beim Freien Fall auf den Körper nur seine Gewichtskraft, also $G = mg$ wirkt. Dies gilt nur für die Betrachtung der Kräfte von einem (unbeschleunigten) Inertialsystem aus. Im System, in dem der Körper ruht, wirkt zudem die Kraft $-G = -mg$. Entsprechend dem d'Alembertschen Prinzip wirkt also keine Kraft auf den Körper, er ist schwerelos.

Um dies zu verifizieren, kann man eine Waage mit einem Körper der Masse m betrachten. Hält man die Waage fest, so zeigt sie aufgrund der Gewichtskraft ein Gewicht an. Lässt man die Waage mit Körper fallen, zeigt sie während des Falls kein Gewicht mehr an, es wirken keine Kräfte. Leichter zu realisieren ist ein Versuch mit der Federwaage. In einem Aufzug, der sich

nach unten bewegt, zeigt die Federwaage weniger Gewicht an, als in einem stehenden Aufzug. Die angezeigte Kraft ist natürlich nie null, da der Aufzug sich hoffentlich nicht im Freien Fall befindet.

III.7.3 Beispiel schiefe Ebene

Ein weiteres, schon diskutiertes Beispiel einer Bewegung, an der man das Kräftegleichgewicht untersuchen kann, ist die schiefe Ebene. Auf einen Körper der Masse m wirkt die Gewichtskraft $\vec{G}_N = m\vec{g}$.



Längs der schiefen Ebene wird er nur mit der Komponente der Kraft beschleunigt, die in Richtung des schiefen Ebene liegt, also mit

Abbildung III.8: Kräftegleichgewicht bei der schiefen Ebene

$$\vec{G}_S = m\vec{g} \sin \alpha .$$

Betrachten wir jetzt einen Wagen der steht, bei dem also die Haftreibung die Erdbeschleunigung kompensiert. Im Schwerpunkt des Körpers muss also eine zusätzliche Reibungskraft \vec{F}_N angreifen, die genau entgegengesetzt der Gewichtskraft ist:

$$\vec{F}_N = .$$

Im statischen Gleichgewicht kompensiert eine zusätzliche äußere Kraft \vec{F}_S die Hangabtriebskraft. Es existiert also eine Scheinkraft

$$\vec{F}_S = -\vec{G}_S = -m\vec{g} \sin \alpha ,$$

die im mitbewegten System die Hangabtriebskraft kompensiert. So ist der Körper im mitbewegten System in Ruhe.

Die wie in diesem Fall durch die Ebene in erzwungenen Bewegungen auftretenden Kräfte, die ein Körper auf der Bahn halten, nennt man Zwangskräfte. Andere Beispiele für diese Kräfte sind Schienen, die sich elastisch verformen, wenn ein Zug Kräfte auf sie ausübt, oder eine Person, die sich im Bus festhalten muss, wenn der Fahrer bremst. Anders als im oben diskutierten Fall stehen die Zwangskräfte immer senkrecht auf der Bahn, falls die Reibung vernachlässigt werden kann.

Merke: **Zwangskräfte** stehen bei vernachlässigbarer Reibung immer senkrecht auf der Bahn.

IV. Erhaltungssätze und deren Anwendung

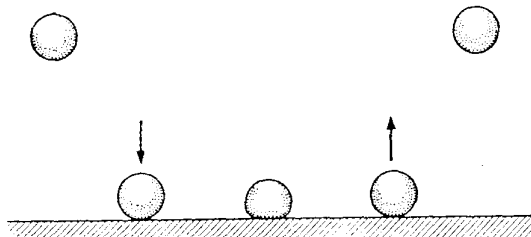


Abbildung IV.1: Verformung bei einem springenden Ball

Mit den bisher kennengelernten Definitionen können wir im Prinzip durch Ermittlung der wirkenden Kräfte alle Bewegungen berechnen. Bei den diskutierten Bewegungen ließen sich die Kräfte leicht aufstellen. In der Regel ist das aber nur mit Kenntnis vieler Faktoren z.B. aus der Festkörperphysik möglich. Zudem kann dieses

Verfahren sehr kompliziert sein. Betrachten wir als Beispiel einen Ball, der auf der Erde hüpfet. Der Ball berührt die Erde, wird an der Auftreffstelle verformt und wird dann durch die Rückstellkraft wieder nach oben beschleunigt. Wenn die Verformung und die Rückstellkraft bekannt sind, kann die Bewegung berechnet werden. Hierfür muss aber die Beschaffenheit des Balls von der Festkörperphysik berechnet werden; für jeden anderen Ball erneut. Dieses Vorgehen ist theoretisch möglich, für wichtige Aussagen über den springenden Ball allerdings unnötig. Einfacher ist es, zunächst einmal zu fragen, was bei dieser Art der Bewegung vielleicht konstant bleibt. Diese Überlegung führte in der Experimentalphysik zu zwei fundamentalen Erhaltungssätzen, die in der klassischen Mechanik immer Gültigkeit besitzen.

Betrachten wir also, was bei einer beliebigen Bewegung konstant bleibt, ausgehend von den bisher bekannten Größen Kraft, Masse, Beschleunigung, Geschwindigkeit, Ort und Zeit.

IV.1 Der Begriff der Arbeit

IV.1.1 Definition der Arbeit

Der Begriff der Arbeit ist schon aus dem täglichen Sprachgebrauch bekannt. Will man Massen bewegen, so muss man dafür Arbeit verrichten. Genauer ausgedrückt heißt das in der Physik, dass bei der Bewegung von Massen die Kräfte Arbeit verrichten müssen.. Betrachten wir einen einfachen Fall der Bewegung von Massen:

Versuch IV.1: Arbeit längs eines graden Weges:

Ein schwerer Körper wird an einem Seil befestigt und längs eines graden Weges längs gezogen. Um ein Maß für die Kraft zu haben, kann man z.B. eine Federwaage an einem Ende

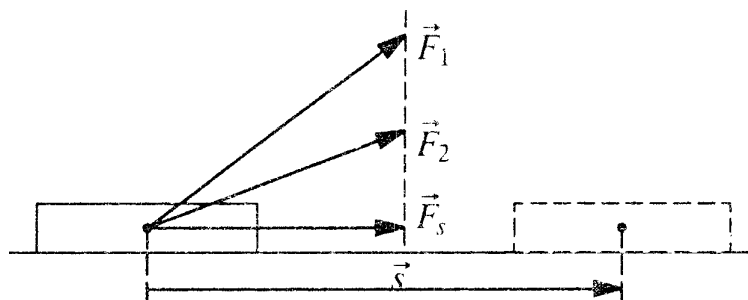


Abbildung IV.2: Arbeit längs eines graden Weges

des Seils befestigen. Jetzt kann man mit verschiedenen Winkeln zur Erdoberfläche an dem Seil ziehen, um den Körper zu bewegen. Als Grenzfälle soll dabei einmal parallel zum Boden und senkrecht dazu gezogen werden. Das Seil gibt in diesen zweidimensionalen Fall die Richtung der wirkenden Kraft an.

Nun soll der Körper mit konstanter Kraft einen festen Weg s gezogen werden. Der Versuch zeigt, dass man bei einem Winkel von 0° , also parallel zur Erde gezogen, am wenigsten Kraft braucht. Je größer der Winkel wird, desto mehr ausgeübte Kraft zeigt die Federwaage an. Bei einem Winkel von 90° hebt man den Körper nur hoch und bewegt ihn gar nicht in s -Richtung. Es zeigt sich, dass nur die Kraftkomponente entlang des Weges für die Fortbewegung des Körpers wirksam ist.

Das Produkt aus wirksamer Kraft und Weg nennt man Arbeit.

Definition IV.1: Arbeit ist das Produkt aus der Kraft längs eines Weges und dem zurückgelegten Weg.

$$W = F \cdot s \cdot \cos \alpha$$

Einheitenbetrachtung:

$[F \cdot s] = [F] \cdot [s] = 1\text{N} \cdot 1\text{m} = \text{Nm}$. Die zusammengesetzte Einheit Nm wird mit Joule, als Einheitszeichen J bezeichnet. Aus der Definition von Newton folgt auch: $1\text{J} = 1\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$. Im früher üblichen csg-System wird die Einheit der Arbeit mit erg bezeichnet, wobei $1\text{erg} = 10^{-7}\text{J}$ ist.

Notation VI.1: Die Arbeit wird mit **W** bezeichnet. Die Einheit der Arbeit ist das **Joule**:

$$[W] = \text{J}.$$

IV.1.2. Erweiterung auf variable Kräfte und beliebige Wege

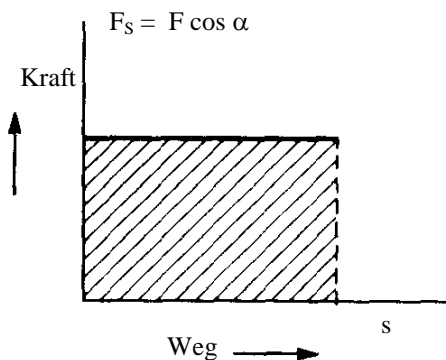


Abbildung IV.3: Kraft-Weg-Diagramm für konstante Kraft F_s längs des Weges

des Weges gemeint.)

Betrachten wir dieses Arbeitsdiagramm mit einer veränderlichen Kraft längs eines geraden Weges. Da mit Kraft hier nur die Kraftkomponente längs des Weges gemeint ist, kann jetzt sowohl der Betrag der Kraft variieren, als auch seine Richtung. In diesem Fall kann die Arbeit als Fläche unter der Kurve der Kraft verstanden werden. Eine solche Fläche berechnet man mit einem Integral.

Es gilt dann $W = \int_0^s F ds$ oder für eine beliebige gerade

Strecke, die nicht im Nullpunkt beginnen muss:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F ds .$$

Nehmen wir jetzt noch an, dass die Strecke nicht längs einer Geraden, sondern beliebig im Raum verlaufen kann. Dann gilt die Definition IV.1 nur für unendlich kleine Wegelemente, in denen die Strecke als gradlinig angenommen werden kann. Die Arbeit muss über diese kleinen Wegelemente summiert werden. Für kleine Wegelemente gilt also $\Delta W = F \Delta r \cos \alpha$, mit der Definition des Vektors aus Kapitel I folgt. Summiert über alle Teilstücke folgt:

Definition IV.2: Arbeit mit variabler Kraft längs eines beliebigen Weges:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$$

Die in Definition IV.1 gegebene Formel für die Arbeit ist ein skalares Produkt. Aus der Geometrie ist bekannt, dass das Produkt zweier Skalare gleich dem Inhalt des Rechtecks ist, das mit den Seitenlängen der beiden Skalare aufgespannt werden kann. Im Koordinatensystem eingezeichnet bedeutet das, dass die Fläche unter den Kraft - Weg

- Diagramm ein Maß für die verrichtete Arbeit ist. (Mit Kraft ist hier natürlich die Kraft längs

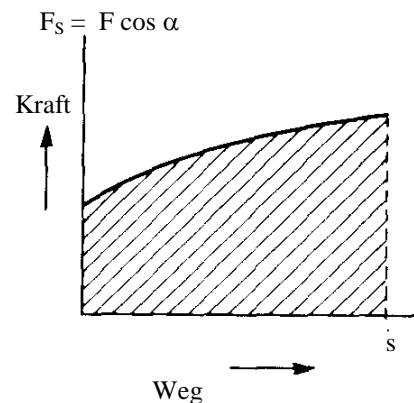


Abbildung IV.4: Kraft-Weg-Diagramm für variable Kraft F_s längs des Weges

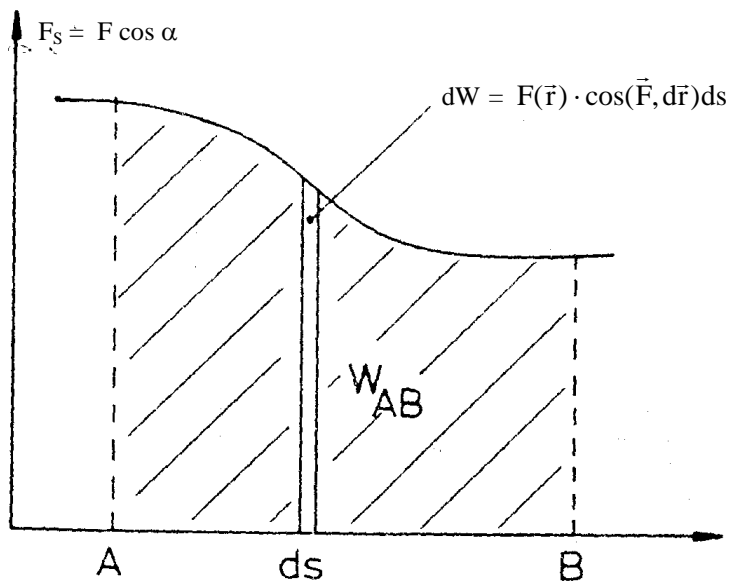


Abbildung IV.5: Wegintegral der Arbeit

Die Arbeit W_{AB} längs eines Teilstückes von Punkt A nach Punkt B entspricht also dem Teil unter der Kurve der Kraftkomponente F_S , das durch die Senkrechten auf die beiden Begrenzungspunkte konstruiert wird.

IV.1.3 Beschleunigungsarbeit

Bei der Herleitung des Arbeitsbegriffs hatten wir die Geschwindigkeit der Bewegung vernachlässigt, wir haben also eine quasistationäre Bewegung betrachtet. Die Definition der Kraft als Ursprung jeder Beschleunigung legt uns aber nahe, diese Vernachlässigung genauer zu untersuchen. Ich kann eine Kiste auch so ziehen, dass sie möglichst schnell wird. Was folgt dann aus der Definition der Bewegung?

Die Kraft, die eine Bewegung verursacht, dient in diesem Fall der Beschleunigung des Körpers der Masse m . Eine solche Kraft lässt sich mit dem 2. Newtonschen Axiom immer schreiben als. Setzen wir diese Definition der Kraft in die Formel

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad \text{ein,}$$

Dann folgt:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m \vec{a}(t) \cdot d\vec{r}(t) \quad \text{mit } \vec{a}(t) = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2}$$

Folgt

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} \cdot d\vec{r}(t).$$

Nun schreiben wir

$$W = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt \quad \text{mit } d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

$$\Leftrightarrow W = \int_{t_1}^{t_2} d \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right)^2 \right)$$

mit $\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t)$ folgt

$$W = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} d\left(\frac{1}{2}m\vec{v}(t)^2\right)$$

mit $\vec{v}^2 = v^2$ gilt

$$W = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2)$$

Die Beschleunigungsarbeit hängt also nur von der Masse m des beschleunigten Körpers und von Anfangs- und Endgeschwindigkeit ab. Auch die Richtung und der Weg, auf dem die Beschleunigungsarbeit erfolgt, ist irrelevant für den Wert der geleisteten Beschleunigungsarbeit.

Aus \vec{v} und \vec{r} folgt:

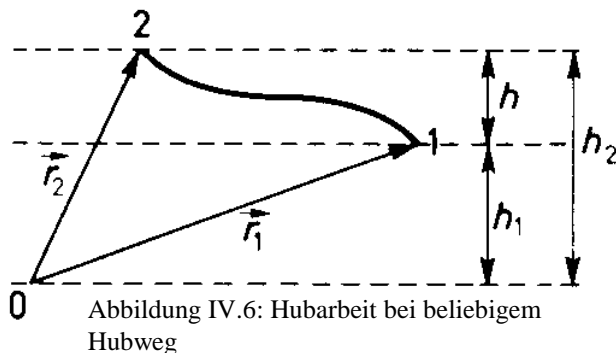
$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2)$$

Merke: Die **Beschleunigungsarbeit**, die eine Kraft \vec{F} verrichtet, wenn sie einen Körper der Masse m von v_1 auf v_2 beschleunigt ist

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2)$$

Eine genauere Interpretation der Beschleunigungsarbeit wird in Kapitel IV.3 vorgenommen.

IV.1.4 Hubarbeit



Eine andere Form der Arbeit, die geleistet werden kann, ist das Heben von Körpern gegen die Gewichtskraft. In einem Gedankenexperiment werde ein Körper der Masse m auf einem beliebigen Weg von einer Höhe h_1 auf eine größere Höhe h_2 gehoben.

Dabei sei h positiv definiert bei einer Aufwärtsbewegung. Dieser Vorgang soll jetzt möglichst langsam, also ohne Beschleunigung durchgeführt werden.

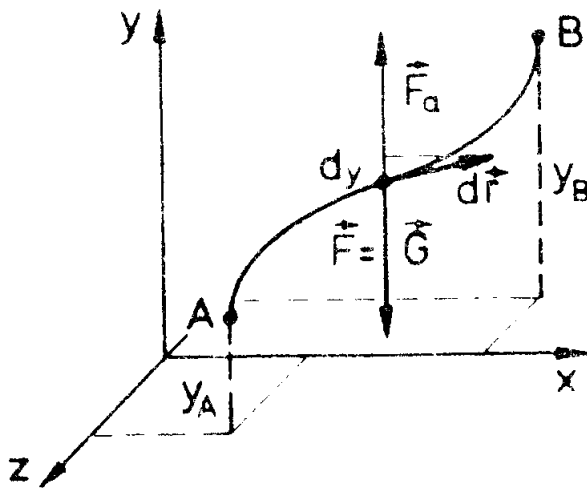


Abbildung Iv.6b: Hubarbeit bei beliebigem Hubweg

Die äußere Kraft, die aufzuwenden ist, ist die Gegenkraft zur am Körper nach unten wirkenden Gewichtskraft:

$$\vec{F}_a = -\vec{G}.$$

Für die Arbeit gilt

Mit Definition IV.2

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_a(\vec{r}) d\vec{r}$$

$$W = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{G} d\vec{r}.$$

Die Arbeit wird nur mit dem Teil der Kraft \vec{F}_a geleistet, die in Richtung der Bewegung zeigt, also nur mit der Komponente $F_a \cos \alpha$.

Es folgt
$$W = - \int_{r_1}^{r_2} G \cos \alpha \cdot dr.$$

Mit $\cos \alpha \cdot dr = dh$ gilt

$$W = - \int_{h_1}^{h_2} G \cdot dh$$

$$\Leftrightarrow W = -G(h_2 - h_1)$$

mit $G = -mg$
$$W = mg(h_2 - h_1)$$

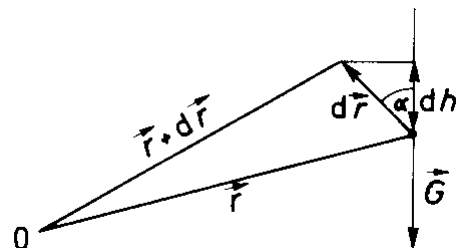


Abbildung IV.7: geometrische Betrachtung zur Hubarbeit

Die Hubarbeit ist also ebenfalls unabhängig vom Weg, auf dem die Höhe erreicht wird. Sie ist nur abhängig von der Masse des gehobenen Körpers und der absoluten Höhendifferenz Δh .

Merke: Die **Hubarbeit** ist unabhängig vom Weg gleich dem Produkt aus Masse, Erdbeschleunigung und Höhendifferenz:

$$W = mg\Delta h.$$

Die Arbeit, die gegen die Gewichtskraft geleistet werden muss, ist nur von den Endpunkten abhängig. Dies ist eine Eigenschaft der Gewichtskraft und einiger anderer Kräfte. Diese Kräfte werden zusammengenommen und mit dem Begriff *konservative Kräfte* bezeichnet. Aus der Überlegung, dass die Arbeit von Punkt A nach Punkt B nur von der Höhendifferenz Δh , und

ebenfalls vom Punkt B nach A nur von der Höhendifferenz $-\Delta h$ abhängt, folgt direkt, dass die Arbeit von einem beliebigen Punkt A über einen beliebigen Weg zurück nach Punkt A null sein muss. Man bezeichnet die Integration über einen geschlossenen Weg als Ringintegral.

Notation IV.2: Integrale über geschlossene Wege werden

Ringintegrale genannt: \oint .

Definition IV.3: Kräfte, bei denen die dazugelegte Arbeit nur von Anfang- und Endpunkt der Bewegung abhängt, heißen konservative Kräfte:

$$\oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = 0.$$

IV.1.5 Spannarbeit

Aus der Erfahrung ist bekannt, dass die Kraft, die man benötigt, um eine Feder auszulenken, mit wachsender Auslenkung konstant steigt. Also ist, bzw. $F \sim x$. Die Proportionalitätskonstante ist z.B. abhängig vom Material der Feder oder der Anzahl der Windungen. Sie ist also eine Materialkonstante und wird mit unterschiedlich mit k oder D bezeichnet.

Notation IV.3: Die **Federkonstante** wird mit **D** bezeichnet.

Dieses empirische Ergebnis wird im Hook'schen Gesetz formuliert:

Hook'sches Gesetz: Die Kraft zur Auslenkung einer Feder um die Strecke x aus der Ruhelage beträgt: $\vec{F} = D \cdot \vec{x}$.

Die Hook'sche Kraft ist ebenfalls eine konservative Kraft.

Die Arbeit lässt sich dann mit $W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$

berechnen als $W = \int_{x_1}^{x_2} Dx \cdot dx$

$$\Leftrightarrow W = D \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} \right) + \text{const.} \quad \text{mit const} = 0$$

$$\Leftrightarrow W = \frac{D}{2} (x_2^2 - x_1^2)$$

Insbesondere gilt für die Auslenkung x aus der Ruhelage

$$W = \frac{D}{2} x^2.$$

Merke: Die **Spannarbeit** einer Feder beträgt:

$$W = \frac{D}{2} (x_2^2 - x_1^2)$$

IV.2 Potentielle Energie

Betrachten wir noch einmal die in Kapitel IV.1.4 berechnete Hubarbeit: Aus der Formel $W = mg\Delta h$ folgt direkt, dass man beim Aufwärtsheben Arbeit leisten muß, sie beim Hinunterheben hingegen gewinnt. Ein Körper, der sich über seinem Ausgangsniveau befindet, hat offensichtlich die Fähigkeit, Arbeit zu leisten. Diese Fähigkeit nennt man Energie der Lage oder auch potentielle Energie¹. Er kann z.B. einen Körper gleicher Masse, der mit einem Seil an ihm befestigt ist, über eine Umlenkrolle auf die Höhe heben, auf der er war. Man definiert daher den Zuwachs an potentieller Energie ΔW

$$\Delta W = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{G}(\vec{r}) d\vec{r} = mgh_2 - mgh_1$$

oder allgemein für ein beliebiges Kraftfeld:

Definition IV.4: Potentielle Energie im Kraftfeld:

$$W_p = W_p(2) - W_p(1) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$$

Diese potentielle Energie ist bis auf eine Integrationskonstante bestimmt, die willkürlich vereinbart werden muß. Zumeist legt man das Bezugssystem so, dass der Ursprung des Systems auf der Ausgangsebene der Bewegung liegt. Dann gilt z.B. für die Schwerkraft die einfache Formel:

$$W_p = mgh.$$

Auch eine gespannte Feder besitzt potentielle Energie. Man berechnet sie analog zur Arbeit, die zum Spannen gebraucht wurde mit

$$W_p = \frac{1}{2} Dx^2$$

IV.3 Kinetische Energie

¹ von potentia (lat.) = Macht

Betrachten wir nun die Ergebnisse aus der Berechnung der Beschleunigungsarbeit. Wir hatten die Beschleunigungsarbeit errechnet als

$$W = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_2^2).$$

Ein Körper, der sich mit einer Geschwindigkeit v bewegt, hat ebenfalls das Potential, andere Körper zu beschleunigen, zu bewegen oder zu deformieren. Diese Fähigkeit nennen wir, wie oben eingeführt, Energie. Diese Form der Energie unterscheidet sich allerdings von der potentiellen Energie: es handelt sich nicht um eine Lage-Energie, sondern um eine Bewegungs-Energie. Wir nennen sie folglich kinetische Energie². Auch hier definieren wir zur Betrachtung einzelner Bewegungen ein Inertialsystem, in dem die Integrationskonstante null ist, in dem also gilt:

Definition IV.5: Kinetische Energie:

$$W_K = \frac{1}{2} m v^2$$

IV.4 Satz von der Erhaltung der Energie

Wenn man die Ergebnisse aus den Kapiteln IV.1.3

Beschleunigungsarbeit $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_2^2) \quad \neg$

und die Definition IV.4 aus Kapitel IV.2

potentielle Energie $W_P = W_P(2) - W_P(1) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} \quad -$

mit der Definition IV.5 aus Kapitel IV.3

kinetische Energie $W_K = \frac{1}{2} m v^2 \quad \textcircled{R}$

$W_K(2) - W_K(1) = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) \quad \textcircled{R}'$

zusammenfasst, ergibt sich

aus \neg und $-$ $W_P = W_P(2) - W_P(1) = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_2^2)$

mit \textcircled{R}' $W_K(2) - W_K(1) = -[W_P(2) - W_P(1)]$

$\Leftrightarrow W_K(2) - W_K(1) = W_P(1) - W_P(2)$

$\Leftrightarrow W_K(2) + W_P(2) = W_P(1) + W_K(1)$

² von kineo = ich bewege

Die Rechnung zeigt und die Erfahrung bestätigt, dass zu jeder Zeit, in der ich ein abgeschlossenes System betrachte, die Summe der Gesamtenergie $W = W_K + W_P$ konstant ist. Das gilt jedoch nur für konservative Kräfte.

Satz von der Erhaltung der Energie: Die Summe aus potentieller und kinetischer Energie ist für konservative Kräfte immer konstant:

$$W = W_K + W_P = \text{constant}$$

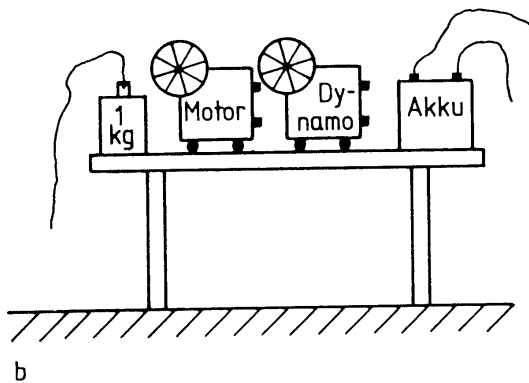
Diese Formulierung ist die einfachste Form des Satzes von der Energieerhaltung; er umfasst nur die beiden uns bekannten mechanischen Energieformen. Später werden wir die Erweiterung kennenlernen, dass die Summe aller Energien in einem abgeschlossenen System konstant sind.

Die Energieerhaltung beruht auf der Invarianz der Naturgesetze gegen die Zeit:

Als Beispiel betrachten wir das Naturgesetz der Gravitation: Nehmen wir an, die Gravitation sei nicht invariant gegen eine Zeitverschiebung.

Das hieße, dass das Gewicht eines Körpers zu einer Zeit, z.B. morgens, geringer wäre als zu einer zweiten Zeit, vielleicht abends. Diesen Umstand könnte ich mir zunutze machen:

Indem ich einen Akku über einen Generator mit



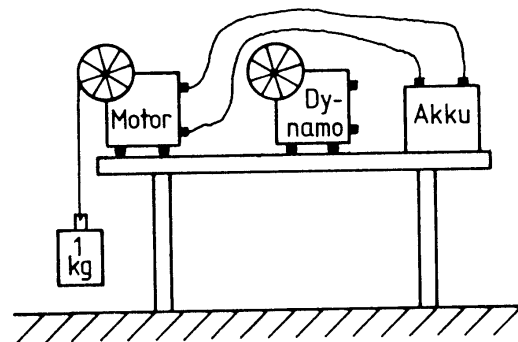
um den Körper auf Tischhöhe zurückzuziehen. Da die Erdbeschleunigung morgens aber niedriger ist als abends, kann ich morgens vom Akku die Arbeit $W_{\text{morgens}} = - m g_{\text{morgens}} h$ verrichten lassen, um abends beim Fallenlassen die Energie

$W_{\text{abends}} = m g_{\text{abends}} h$ zu speichern.

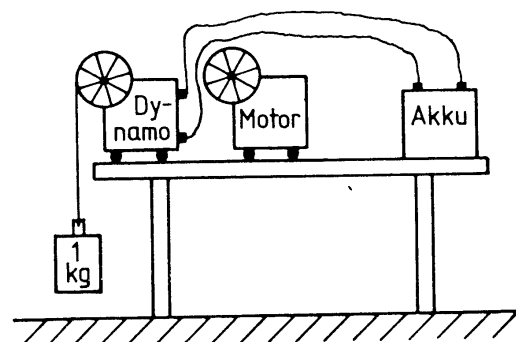
Mit $g_{\text{morgens}} < g_{\text{abends}}$, gilt aber

$W_{\text{morgens}} + W_{\text{abends}} > 0$, ich hätte ein Kraftwerk gebaut.

Die Invarianz der Naturgesetze gegen die Zeit und



a
einem Gewicht verbinde, welches ich über die Tischkante hängen lasse, kann ich den Akku aufladen bei Fallenlassen des Gewichts, brauche aber wieder Energie,



c
Abbildung IV.8: Dieses Kraftwerk würde auf der zeitlichen Varianz der Energie basieren.

der daraus resultierende Energiesatz bewahren mich jedoch vor einem solchen Versuch.

Versuch VI.2: Kugel rollt von verschiedenen Höhen eine Bahn hinunter

In diesem Versuch soll rein qualitativ der Satz von der Erhaltung der Energie gezeigt werden.

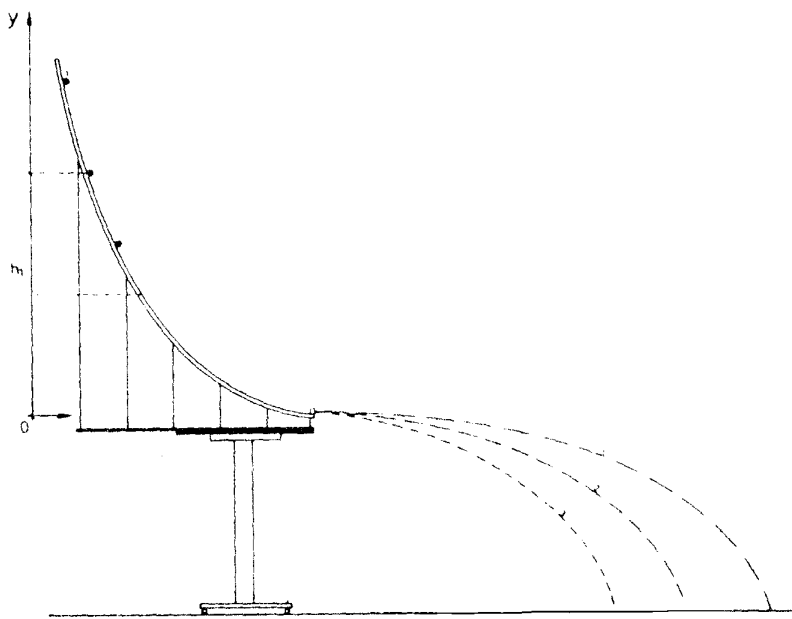


Abbildung IV.9: Energieerhaltung

Hierfür wird eine Kugel auf einen markierten Punkt einer steil abfallenden Bahn gelegt, die Höhendifferenz zum Endpunkt der Bahn sei h . Das Ende der Bahn ist parallel zur Erde ausgerichtet, die Kugel vollführt die Bewegung eines horizontalen Wurfs. Auf der Höhe h hat die Kugel nur potentielle Energie:

$$W_p = mgh.$$

Beim Verlassen der Bahn

$$W_k = \frac{1}{2} mv^2.$$

hat sie auf der Höhe $h = 0$ nur noch potentielle Energie:

$$\begin{aligned} \text{Wegen der Energieerhaltung folgt: } W_p &= W_k \\ \Leftrightarrow mgh &= \frac{1}{2} mv^2 \\ \Rightarrow v &= \sqrt{2gh} \end{aligned}$$

Mit dem Ergebnis der horizontalen Wurfs aus Kapitel II.4.4

$$y(x) = -\frac{g}{2 \cdot v^2} x^2$$

kann man sehen, dass die Wurfweite nur von der Höhe abhängt, auf welcher die Kugel abrollt. Um dieses Ergebnis zu verifizieren, wird in dem Versuch noch von zwei anderen Höhen die Kugel losgelassen. Je kleiner die Höhe ist, desto weniger weit fliegt die Kugel.

Abschließend betrachten wir noch die Dimension der Energie und führen eine weitere nützliche Größe ein:

Einheitenbetrachtung:

Nach der Definition der Energie gilt: $[Energie] = [Arbeit]$

$$\Rightarrow [W_K] = [W_P] = Nm = J$$

Merke: Die Einheit der Energie ist analog zur Einheit der Arbeit das **Joule**:

$$[W] = J.$$

Oftmals ist es nicht nur interessant, welche Arbeit verrichtet wurde, sondern auch in welcher Zeit dies geschah. Des halb definiert man die Leistung:

Definition IV.6: Leistung ist der Quotient aus geleisteter Arbeit und der dafür benötigten Zeit:

$$P = \frac{dW}{dt}.$$

Einheitenbetrachtung:

$$[Leistung] = [Arbeit] / [Zeit] = J s^{-1}.$$

Die zusammengesetzte Einheit $J s^{-1}$ wird mit Watt bezeichnet und als W abgekürzt.

$$1 W = 1 J s^{-1} = 1 kg m^2 s^{-3}$$

Notation IV.4: Die **Leistung** wird mit **P** bezeichnet. Sie hat die Einheit **Watt**

IV.5 Impulssatz

Das zweite Newtonsche Axiom

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

lässt sich mit der

Definition der Beschleunigung

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

auch schreiben als

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Man definiert den Term

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

als **Impuls**

und schreibt nun

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Diese Formulierung des Zweiten Newtonschen Axioms ist umfassender als die erste, weil sie auch den Fall variabler Masse berücksichtigt:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

mit partieller Integration $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$

Bei den bisher berechneten Fällen war die Masse zeitlich konstant, also

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

und damit $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$.

Merke: Das zweite Newtonsche Axiom wird umfassender geschrieben als

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}.$$

Definition IV.7: Der Impuls ist das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit:

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Einheitenbetrachtung:

$$[\text{Impuls}] = [\text{Masse}] [\text{Geschwindigkeit}] = \text{kg m s}^{-1}.$$

In einem abgeschlossenen System gilt $\sum \vec{F}_i = 0$ für alle äußeren Kräfte.

$$\Rightarrow \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt} = 0$$

mit $\vec{p} = \sum \vec{p}_i \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$

$$\Leftrightarrow \vec{p} = \text{const.}$$

Satz von der Erhaltung des Impulses:

In einem abgeschlossenen System ist die Summe der Einzelimpulse konstant:

$$\sum \vec{p}_i = \text{const.}$$

IV.6: Stoßgesetze

Mit den beiden erarbeiteten Erhaltungssätzen

Energieerhaltung: $W = W_K + W_P = \text{constant}$

Impulserhaltung: $\sum \vec{p}_i = \text{constant}$

kann man mit Kenntnis der Anfangszustände die Bewegungsgleichungen von Körpern berechnen, die gegeneinander stoßen. Dieses Verfahren ist z.B. in der Kernphysik unerlässlich.

Hier erstellte man durch eine scheinbare Verletzung des Energie- und Impulssatzes die Hypothese, dass bei $e^+ e^-$ -Stößen ein weiteres Teilchen, das sogenannte Lepton τ erzeugt wird. Wir wollen in dieser Vorlesung jedoch nur einfache Modelle betrachten: den zentralen elastischen und unelastischen Stoß, den schiefen Stoß und die Dynamik von Stößen.

IV.6.1 Elastischer Stoß

Bei elastischen Stößen werden die stoßenden Körper weder unelastisch verformt noch erwärmt, die Reibung sei vernachlässigbar. Das bedeutet, dass nur mechanische Energie umgesetzt wird, es gilt folglich der Energieerhaltungssatz und der Impulserhaltungssatz.

Versuch IV.3: grader, zentraler, elastischer Stoß auf der Luftkissenbahn

Dieser Versuch wird auf der Luftkissenbahn durchgeführt. Zwei Reiter der Massen m_1 und m_2 werden mit den Geschwindigkeiten \vec{v}_1 und \vec{v}_2 aufeinander zu bewegt. Nach dem Stoß werden die Geschwindigkeiten \vec{v}_1' und \vec{v}_2' der Reiter gemessen.

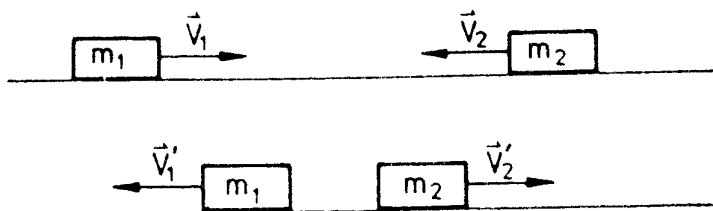


Abbildung IV.10: elastischer Stoß auf der Luftkissenbahn

Betrachten wir die beiden Erhaltungssätze:

Energieerhaltung :

Die potentielle Energie ist konstant, wir definieren sie

als $W_p = 0$.

Energie vor dem Stoß:

$$W = W_{K1} + W_{K2}$$

$$\Leftrightarrow W = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Energie nach dem Stoß:

$$W' = W_{K1}' + W_{K2}'$$

$$\Leftrightarrow W' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

Energieerhaltung :

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$\Leftrightarrow m_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}_1') (\vec{v}_1 + \vec{v}_1') = m_2 (\vec{v}_2 - \vec{v}_2') (\vec{v}_2 + \vec{v}_2') \quad \neg$$

Impuls vor dem Stoß: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$

$\Leftrightarrow \vec{p} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$

Impuls nach dem Stoß: $\vec{p}' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$

$\Leftrightarrow \vec{p}' = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$

Impulserhaltung: $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$

$\Leftrightarrow m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_1') = m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}_2')$

Aus \neg und $-$ folgt: $\vec{v}_1 + \vec{v}_1' = \vec{v}_2 + \vec{v}_2'$

Dieses Ergebnis in den Impulssatz eingesetzt ergibt die

Bewegungsgleichungen für den **graden, zentralen, elastischen Stoß:**

$$\vec{v}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1$$

Betrachten wir fünf Spezialfälle:

1) Der zweite Reiter ruht vor dem Stoß: $\vec{v}_2 = 0$

$\Rightarrow \vec{v}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_1, \vec{v}_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1$

2) Der zweite Reiter ruht vor dem Stoß: $\vec{v}_2 = 0$

und die Massen der Reiter sind gleich: $m_1 = m_2$

$\Rightarrow \vec{v}_1' = 0, \vec{v}_2' = \vec{v}_1$

3) Reflexion am festen Ende: $m_2 = \infty, \vec{v}_2 = 0$

$\Rightarrow \vec{v}_1' = -\vec{v}_1, \vec{v}_2' = 0$

4) Der zweite Reiter ruht vor dem Stoß: $\vec{v}_2 = 0$

und die Massen der Reiter sind: $m_2 = \frac{1}{2} m_1$

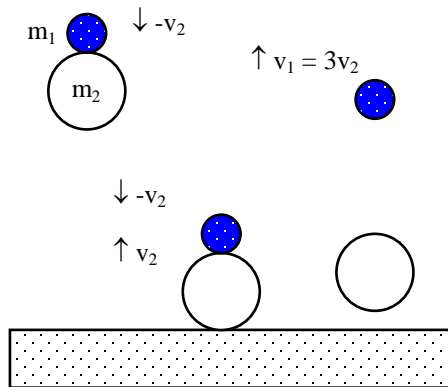
$$\Rightarrow \quad \vec{v}_1' = \frac{1}{3} \vec{v}_1 \quad , \quad \vec{v}_2' = \frac{4}{3} \vec{v}_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_2'}{v_1'} = 4 \quad , \quad \vec{v}_2' = \vec{v}_1 + \vec{v}_1'$$

5) Der zweite Reiter ruht vor dem Stoß: $\vec{v}_2 = 0$

und die Massen der Reiter sind: $m_2 = 2 m_1$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_1' = -\frac{1}{3} \vec{v}_1 \quad , \quad \vec{v}_2' = \frac{2}{3} \vec{v}_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_2'}{v_1'} = 2 \quad , \quad \vec{v}_2' = \vec{v}_1 + \vec{v}_1'$$

Versuch IV.4: 'Astro-Blaster'



Bei diesem Versuch werden zwei Gummibälle verschiedener Massen auf den Boden fallen gelassen. Zunächst springen beide Bälle auf die Ausgangshöhe zurück. Ein geringer Energieverlust durch Reibung und Wärme ist nicht ganz auszuschließen, kann in der Rechnung aber vernachlässigt werden. Nun werden die beiden Bälle lose auf eine Stange gesteckt und gemeinsam fallen gelassen, der kleinere Ball ist dabei oben. Das Ergebnis ist verblüffend: Der kleinere Ball springt bis an die Decke des Raumes zurück. Die

Rechnung liefert die Steighöhe genau:

Die Bälle deren Masse m_1 und m_2 mit $m_1 < m_2$ fallen mit derselben Geschwindigkeit \vec{v} zu Boden. Dabei setzen wir die Geschwindigkeit beim Fall negativ, also \vec{v} (rauf) = $-\vec{v}$ (runter). Wenn der Ball 2 bereits umgekehrt ist und mit \vec{v} rauf fliegt, fällt der Ball 1 noch mit $-\vec{v}$ hinab. Es ergibt sich eine elastische Reflexion des Balls 1 an Ball 2 mit entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeit. In die Formeln

$$\vec{v}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1$$

eingesetzt, folgt für den Betrag der Geschwindigkeit des Balls 1:

$$v_1' = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

Setzen wir als Näherung $m_1 \ll m_2$ folgt $v_1' = 3v_1$.

Der Ball fliegt also mit dreifacher Geschwindigkeit rauf. Da die Strecke quadratisch mit der Geschwindigkeit verläuft, fliegt er folglich neun mal so hoch.

IV.6.2 Dynamik von Stößen

Bisher haben wir nur die Bewegung vor und nach dem Stoß berechnet, die Dynamik des Stoßes selbst haben wir unbeachtet gelassen. In der Einleitung des Kapitels haben wir als Beispiel einen Ball betrachtet, der auf der Erde verformt wird und dadurch zurückprallt. Wir wissen jetzt, wie schnell er zurückprallt und könnten daraus auch die Höhe berechnen, jetzt wollen wir die Kraft zu jeder Zeit der Bewegung betrachten:

Da die Erde oder eine Wand bereits einen Spezialfall mit $m_2 = \infty$, $\vec{v}_2 = 0$ darstellen, betrachten

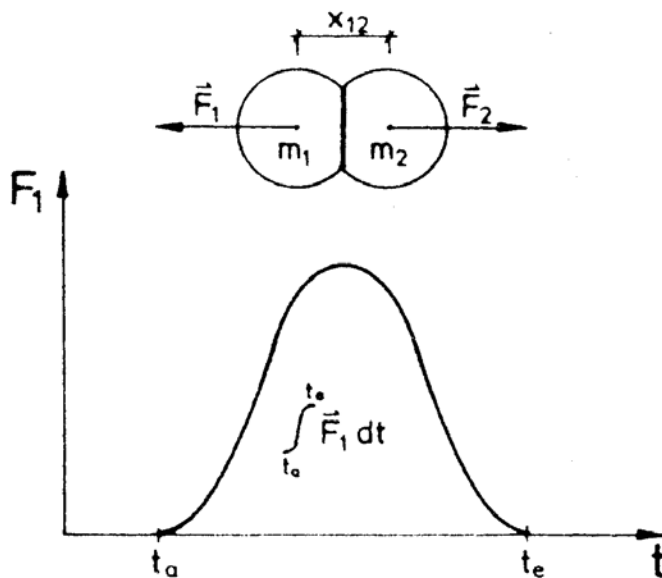


Abbildung IV.11: Kraftstoß

wir wieder den Stoß zweier Kugeln.

Die Verformung bewirkt eine Rückstellkraft, die nach dem 2. Newtonsche Axiom wechselseitig ist:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Mit dem 2. Newtonschen Axiom

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

gilt
$$\vec{F}_1 = \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \frac{d(m_1\vec{v}_1)}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \vec{F}_1 dt = d\vec{p}_1$$

Die Änderung des Impulses über eine Zeitspanne von t_a nach t_e kann also durch Integration errechnet werden. Man nennt dieses Integral über die Kraft Kraftstoß:

Definition IV.8: Der Kraftstoß ist die Änderung des Impulses:

$$\text{Kraftstoß} = \int_{t_a}^{t_e} \vec{F}_1 dt = \int_{p_a}^{p_e} d\vec{p} = \vec{p}_e - \vec{p}_a = \Delta\vec{p}$$

Diese Definition verletzt die Impulserhaltung nicht, denn wegen des 3. Newtonschen Axioms

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad \text{gilt:} \quad \Delta\vec{p}_1 &= -\Delta\vec{p}_2 \\ \Leftrightarrow \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Merke: Während des Stoßes ändern sich die Einzelimpulse in komplizierter Weise, der Gesamtimpuls bleibt jedoch zu jedem Zeitpunkt erhalten.

Generell unterscheidet man auch bei der Dynamik von Stößen zwischen zwei verschiedenen Arten:

Beim **elastischen Stoß** ist die wirkende Rückstellkraft elastisch und hängt analog zur Feder nur vom Relativabstand der beiden Kugelmittelpunkte ab. Wie in Versuch VI.3 bereits angewandt gilt die Energieerhaltung:

Merke: Bei **elastischen Stößen** ist die Rückstellkraft konservativ, es gilt die Energieerhaltung der Mechanik

Beim **unelastischen Stoß** ist die Rückstellkraft nicht konservativ; sie hängt z.B. bei Reibung von der Geschwindigkeit oder bei unelastischer Verformung von der Vorgeschichte ab. Der Energiesatz gilt folglich nur unter Einbeziehen anderer, nichtmechanischer Energieformen wie Wärme oder Gitterverformung. Im Allgemeinen ist $\Delta W > 0$, bei exothermen Reaktionen ist jedoch auch $\Delta W < 0$ möglich.

Auch für nichtkonservative Kräfte gilt immer die Impulserhaltung:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum \vec{p}_i = \text{const.}$$

Merke: Bei **unelastischen Stößen** ist die Rückstellkraft nicht konservativ, die Energieerhaltung der Mechanik gilt nicht:
 $W_K (\text{vorher}) = W_K (\text{nachher}) + \Delta W,$
 es gilt die Impulserhaltung: $\sum \vec{p}_i = \text{const.}$

Versuch IV.5: grader, zentraler, unelastischer Stoß auf der Luftkissenbahn

Für diesen Versuch wird derselbe Aufbau wie in Versuch IV.3 genutzt. Diesmal wird jedoch an beiden Reitern ein Knetgummi befestigt, so dass beide Reiter nach einem Zusammenstoß fest zusammen bleiben. Quantitativ untersucht werden wieder Stöße mit verschiedenen Massen und Geschwindigkeiten. Berechnen wollen wir den Fall, dass der zweite Reiter der Masse m_2 ruht, wenn der erste Reiter der Masse m_1 mit einer konstanten Geschwindigkeit \vec{v}_1 auftrifft.

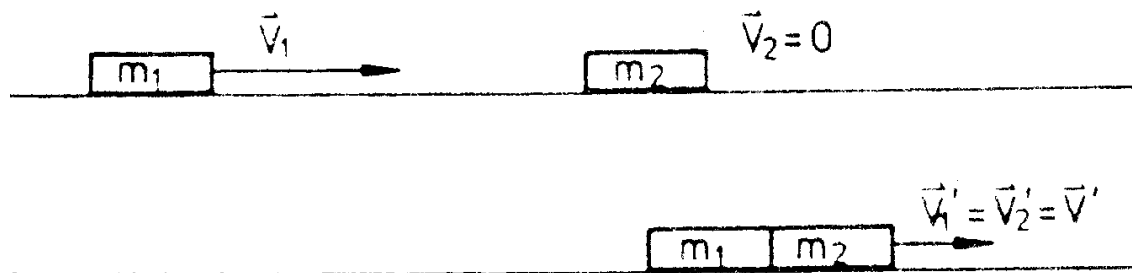


Abbildung IV.12: unelastischer Stoß

Als Randbedingung ist also gegeben: $\vec{v}_2 = 0$. Beim unelastischen Stoß gilt die Energieerhaltung nicht, wohl aber die Impulserhaltung:

$$\begin{aligned} \text{Impuls vor dem Stoß:} \quad & \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\ & \Leftrightarrow \vec{p} = m_1 \vec{v}_1 \\ \text{Impuls nach dem Stoß:} \quad & \vec{p}' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \\ & \Leftrightarrow \vec{p}' = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \\ \text{Impulserhaltung:} \quad & m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \end{aligned}$$

Nach dem Stoß müssen die beiden vereinten Massen mit derselben Geschwindigkeit weiterfahren, also gilt $\vec{v}_1' = \vec{v}_2' = \vec{v}'$.

Die Gesamtmasse der vereinten Reiter beträgt $m_1 + m_2$.

$$\begin{aligned} \text{Aus der Impulserhaltung} \quad & m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \\ \text{folgt:} \quad & m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}' + m_2 \vec{v}' \\ & \Rightarrow v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1. \end{aligned}$$

Für den Sonderfall zweier Reiter mit derselben Masse $m_1 = m_2$ gilt dann: $v' = \frac{v_1}{2}$.

Betrachten wir jetzt den Verlust an mechanischer Energie ΔW :

$$\begin{aligned} & W \text{ (vorher)} = W' \text{ (nachher)} + \Delta W \\ \text{Energie vor dem Stoß:} \quad & W = W_1 + W_2 \quad \text{mit } \vec{v}_2 = 0 \\ & \Leftrightarrow W = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \\ \text{Energie nach dem Stoß:} \quad & W' = \frac{m_1 + m_2}{2} v'^2 \\ & \Leftrightarrow W' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} W \\ \text{Energieverlust:} \quad & \Delta W = W - W' \\ & \Leftrightarrow \Delta W = W - \frac{m_1}{m_1 + m_2} W \\ & \Leftrightarrow \Delta W = \frac{m_2}{m_1 + m_2} W \end{aligned}$$

Merke: Nach einem **unelastischen, zentralen Stoß** eines gradlinig gleichförmig bewegten Körpers mit einem ruhenden, haben beide die **Geschwindigkeit**

$$v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

Der **Verlust an mechanischer Energie** beträgt

$$\Delta W =.$$

Betrachtet man den Stoß der Reiter der Masse m_1 an einer festen Wand, also $m_2 \rightarrow \infty$, dann

kann in der Formel $\Delta W = \frac{m_2}{m_1 + m_2} W$ die Masse m_1 gegenüber m_2 vernachlässigt werden, und

es gilt:

$$\Delta W = W.$$

Ein Beispiel hierfür ist ein PKW der Masse $m = 1000 \text{ kg}$, der mit einer Geschwindigkeit von $v_1 = 120 \text{ km/h}$ frontal gegen eine feste Wand fährt. Die kinetische Energie des Wagens beträgt

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} m v_1^2 \\ \Rightarrow W &= \frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot \left(\frac{120 \text{ km}}{3600 \text{ s}} \right)^2 \\ \Leftrightarrow W &= \frac{1}{2} 10^6 \text{ J} \end{aligned}$$

Diese Energie wird komplett in nichtmechanische Energie umgewandelt. Die Leistung dieses Aufpralls, der $\Delta t = 1/10 \text{ s}$ dauern soll, berechnet sich nach Definition IV.6 als Quotient aus geleisteter Arbeit und der dafür benötigten Zeit:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\Delta W}{\Delta t} \\ \Rightarrow P &\approx \frac{1}{2} 10^7 \text{ W} \approx 5 \text{ MW} \end{aligned}$$

Versuch IV.6: Ballistisches Pendel

Bei diesem Versuch soll die Geschwindigkeit eines Geschosses aus einem Gewehr berechnet werden. Hierzu schießt man eine Gewehrkugel der Masse m aus einigen Metern Entfernung auf eine Kiste der Masse M . Diese Kiste ist an einem Seil frei schwingend aufgehängt und befindet sich vor dem Einschuss in Ruhe. Trifft das Geschoss die Kiste, so wird diese beschleunigt und schwingt aus. Dabei verschiebt sie einen Markierungsstift, der nach Rückschwingen der Kiste stehen bleibt und so die maximale Auslenkung a der Kiste anzeigt.

Zur Berechnung muß dieser Vorgang in zwei Teile unterteilt werden: Die Zeit vom Abschuss bis zum Einschlagen des Geschosses in die Kiste, und die Zeit vom Einschuss bis zur maximalen Auslenkung des Kistenpendels.

1) Die Zeit vom Abschuss bis zum Einschlagen des Geschosses in die Kiste:

Dieser Teil der Bewegung entspricht einem unelastischen Stoß der Massen m und M , wobei m sich mit \vec{v}_G bewegt, während M ruht. Es gilt also die Impulserhaltung, nicht aber die Energieerhaltung. Nach dem Stoß bewegen sich die vereinten Massen mit:

Impulserhaltung :

$$\begin{aligned} \text{Impuls vor dem Stoß:} \quad & \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\ & \Leftrightarrow \vec{p} = m\vec{v}_G \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Impuls nach dem Stoß:} \quad & \vec{p}' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \\ & \Leftrightarrow \vec{p}' = m\vec{v} + M\vec{v} \end{aligned}$$

$$\text{Mit dem Ergebnis von Versuch IV. :} \quad v = \frac{m}{m+M} v_G \quad \neg$$

2) Die Zeit vom Einschuss bis zur maximalen Auslenkung des Kistenpendels:

Die Kiste mit dem Geschoss (Masse $m + M$) hat zur Zeit des Einschusses die maximale Geschwindigkeit v , also maximale kinetische Energie W_K . Er hängt auf der Höhe $h = 0$, hat also keine potentielle Energie $W_P = 0$. Wenn die schwingende Kiste auf dem höchsten Punkt angekommen ist, also die Höhe h hat, dreht sie um, ihre Geschwindigkeit ist in diesem Punkt null. Sie hat maximale potentielle Energie, aber ihre kinetische Energie ist null. Die Energieerhaltung sagt uns, dass die Summe der Energie in jedem Punkt gleich ist.

$$\text{Energie zur Zeit des Einschusses:} \quad W_P = 0, W_K = \frac{1}{2}(m+M)v^2$$

$$\text{mit } W_1 = W_P + W_K \quad \Rightarrow \quad W_1 = \frac{1}{2}(m+M)v^2$$

$$\text{mit } \neg : v = \frac{m}{m+M} v_G \quad \Rightarrow \quad W_1 = \frac{1}{2}(m+M) \left(\frac{m}{m+M} v_G \right)^2$$

$$\text{Energie auf höchstem Punkt} \quad W_P = (m+M)gh, W_K = 0$$

$$\text{mit } W_2 = W_P + W_K \quad \Rightarrow \quad W_2 = (m+M)gh$$

Energieerhaltung

$$W_1 = W_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(m+M) \left(\frac{m}{m+M} v_G \right)^2 = (m+M)gh$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{m}{m+M} v_G \right)^2 = gh$$

Diese Gleichung beschreibt die Abhängigkeit der Höhe h , auf die die Kiste schwingt, und der Geschwindigkeit v_G des Geschosses. In unserem Versuch wurde statt der Höhe h die Strecke a gemessen. Über die geometrische Beziehung $h = l - \sqrt{l^2 - a^2}$ kann bei Kenntnis der Pendellänge l die Höhe berechnet werden.

IV.6.3 Schiefer Stoß

Der elastische schiefe Stoß ist der allgemeine Fall des elastischen Stoßes. In der Regel kann man nicht exakt festlegen, ob die Schwerpunkte der stoßenden Körper auf einer Geraden liegen. Deshalb muß man beim schiefen Stoß den Abstand der Geraden, auf denen die Schwerpunkte verlaufen, betrachten. Dieser Abstand wird **Stoßparameter** b genannt. Beim elastischen Stoß gelten, wie besprochen, Energie- und Impulserhaltungssatz.

Versuch IV.7: schiefer Stoß zweier Kugeln

Bei diesem Versuch wird analog zu Versuch IV.2 eine Kugel von einer Höhe h einer Bahn rollen gelassen. Diesmal liegt am horizontalen Ende der Bahn eine zusätzliche Kugel. Diese ruht auf einer Mikrometerschraube und kann so in der Höhe $\Delta h'$ variiert werden. Dadurch trifft die rollende Kugel die ruhende nicht zentral, sondern um einige Mikrometer versetzt.

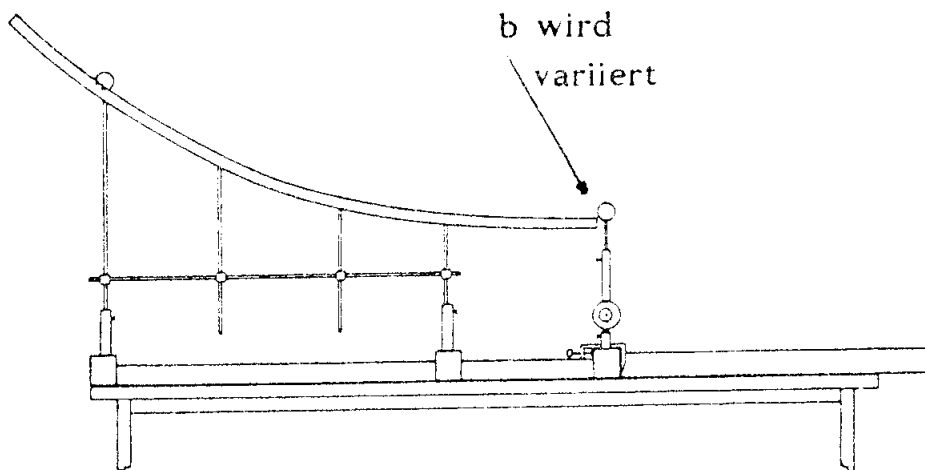


Abbildung IV.13: Schematischer Versuchsaufbau

Die Höhe $\Delta h'$ entspricht dem oben eingeführten Stoßparameter b .

Analog zum elastischen Stoß gilt die Energieerhaltung:

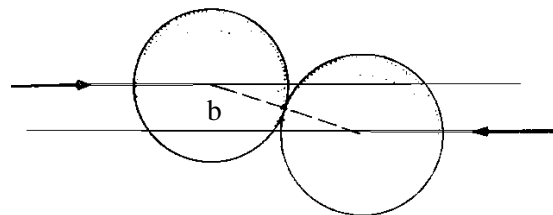


Abbildung IV.14: Stoßparameter

Energie vor dem Stoß:

$$W = W_{K1} + W_{K2} \quad \text{mit } v_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow W = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

Energie nach dem Stoß:

$$W' = W_{K1}' + W_{K2}'$$

$$\Leftrightarrow W' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

Energieerhaltung :

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

mit $m_1 = m_2 = m$

$$\Rightarrow v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \quad \square$$

Impuls vor dem Stoß:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad \text{mit } \vec{v}_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{p} = m_1 \vec{v}_1$$

Impuls nach dem Stoß:

$$\vec{p}' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

$$\Leftrightarrow \vec{p}' = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$$

Impulserhaltung:

$$m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$$

mit $m_1 = m_2 = m$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2' \quad -$$

Aus \vec{v}_1 und \vec{v}_2 folgt wegen des Kosinussatzes, dass der eingeschlossene Winkel der Geschwindigkeitsvektoren ein rechter Winkel sein muß.

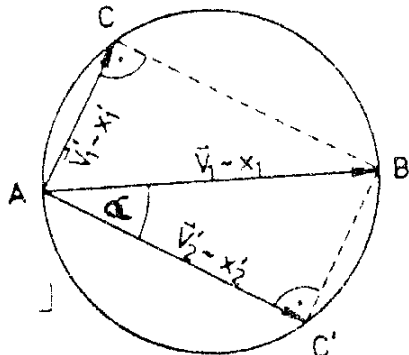


Abbildung IV.15: Thaleskreis

Es entsteht beim Auftragen der Geschwindigkeitsvektoren also immer ein rechtwinkliges Dreieck. Die Ecken dieses Dreiecks liegen nach dem Satz des Thales immer auf einem Kreis. Dieser Kreis hat den Durchmesser des ursprünglichen Geschwindigkeitsvektors.

Der Versuch zeigt, dass die Kugeln immer auf demselben Kreis landen, solange die Geschwindigkeit der Kugel, also ihre Abrollhöhe, nicht variiert wird.

Wo genau auf dem Kreis sie landen, hängt vom Stoßparameter b ab. Die Untersuchung der Streuwahrscheinlichkeit ließe auf das Kraftgesetz schließen. Dies wird in der Kernphysik oft genutzt, um Rückschlüsse über Kernkräfte zu erhalten.

IV.7 Rakete

Mithilfe der gewonnenen Erkenntnisse über die Impulserhaltung soll nun die Bewegung einer Rakete berechnet werden. Dabei sollen jedoch äußere Kräfte, z.B. Reibung und Gravitation, vernachlässigt werden.

Gegeben sei eine Rakete der Masse m , die zu einer beliebigen Zeit t_1 mit der Geschwindigkeit \vec{v} fliegt. Die Masse m der Rakete beinhaltet Treibstoff.

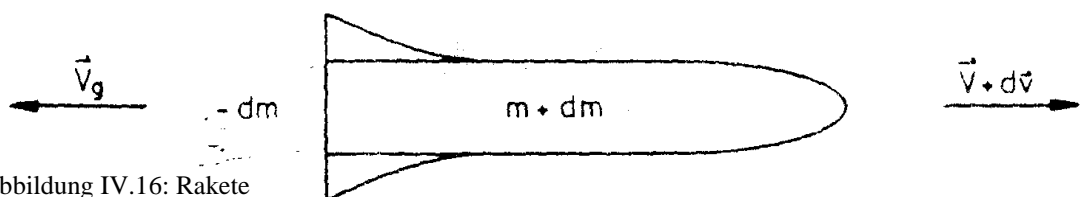


Abbildung IV.16: Rakete

Die Rakete stößt Gase mit der Geschwindigkeit \vec{v}_G relativ zur Rakete aus und wird damit beschleunigt auf die Geschwindigkeit. Bekannt sind also folgende Bedingungen:

Zeit t_1 : Masse der Rakete m
 Geschwindigkeit der Rakete \vec{v}

Zeit t_2 : Masse der Rakete $m + dm$
 Masse der Gase $- dm$

Geschwindigkeit der Rakete	$\vec{v} + d\vec{v}$
Geschwindigkeit der Gase	$\vec{v} + \vec{v}_G$

Für die differentielle Änderung von $t_1 \rightarrow t_2$ gilt wegen der Impulserhaltung:

Impuls vor der Zündung: $\vec{p} = \vec{p}_R + \vec{p}_G$ mit $\vec{p}_G = 0$

$$\Leftrightarrow \vec{p} = m\vec{v}$$

Impuls nach der Zündung:

$$\vec{p}' = \vec{p}_R' + \vec{p}_G'$$

$$\Leftrightarrow \vec{p}' = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - dm(\vec{v} + \vec{v}_G)$$

Impulserhaltung:

$$\vec{p} = \vec{p}'$$

$$\Leftrightarrow m\vec{v} = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - dm(\vec{v} + \vec{v}_G)$$

$$\Leftrightarrow m\vec{v} = m\vec{v} + md\vec{v} + dm\vec{v} + dmd\vec{v} - dm\vec{v} - dm\vec{v}_G$$

$$\Leftrightarrow (m + dm)d\vec{v} = dm\vec{v}_G$$

Die Masse der Gase soll gegenüber der Masse der Rakete vernachlässigbar klein sein, es gilt also mit $dm \ll m$

$$\Rightarrow md\vec{v} = dm\vec{v}_G$$

$$\Leftrightarrow d\vec{v} = \frac{dm}{m} \vec{v}_G \quad \neg$$

Diese Gleichung gibt die Geschwindigkeitsänderung der Rakete an, die Gase der Masse $-dm$ mit \vec{v}_G ausstößt.

Merke: Die Bewegungsgleichung der Rakete lautet

$$d\vec{v} = \frac{dm}{m} \vec{v}_G.$$

Die Endgeschwindigkeit kann man mittels Integration der Bewegungsgleichung von der Zeit der Zündung t_0 bis zum Ende der Beschleunigung t_e errechnen.

$$\vec{v}_0 - \vec{v}_e = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_e} d\vec{v}$$

mit \neg

$$= \int_{m_0}^{m_e} \frac{dm}{m} \vec{v}_G$$

$$= \vec{v}_G \int_{m_0}^{m_e} \frac{dm}{m}$$

$$= \vec{v}_G \left[\ln m \right]_{m_0}^{m_e}$$

Merke: Die Endgeschwindigkeit der Rakete beträgt

$$\vec{v}_e = \vec{v}_0 - \vec{v}_G \ln \left(\frac{m_0}{m_e} \right).$$

Die Beschleunigung der Rakete kann über die Beziehung $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ berechnet werden.

Merke: Die Beschleunigung der Rakete beträgt

$$\vec{a} = \frac{dm}{dt} \frac{\vec{v}_G}{m}.$$

Über das dritte Newtonsche Axiom $\vec{F} = m\vec{a}$ lässt sich die Schubkraft \vec{F}_T berechnen.

Merke: Die Schubkraft der Rakete beträgt

$$\vec{F}_T = \frac{dm}{dt} \vec{v}_G.$$

Da wir die Masse der Gase negativ als $-dm$ definiert hatten, ist die Schubkraft der Geschwindigkeit der Gase entgegengesetzt.

IV.8 Schwingungen

IV.8.1 Federschwingung

Im Folgenden wollen wir die Bewegung einer Masse untersuchen, die an einer Feder ausgelenkt wurde. Um die Dynamik der Bewegung beschreiben zu können, müssen wir hierfür alle wirkenden Kräfte aufstellen und die resultierende äußere Kraft errechnen. Mithilfe der Newtonschen Axiome kann man dann die Beschleunigung und daraus die Geschwindigkeit und den Ort zu jeder Zeit t berechnen.

Anders als in Kapitel III. soll die Feder diesmal nicht horizontal zur Erde liegen, sondern senkrecht hinab hängen. Das Problem ist eindimensional, die Auslenkung der Feder geben wir mit dem Skalar x an, und definieren sie positiv, wenn die Feder ausgelenkt ist.

Als Ausgangslage betrachten wir eine Feder mit einer angehängten Masse m , die sich im Gleichgewicht befindet. So wirkt auf die Masse m in Richtung der Erde, also in positiver

x -Richtung die Gewichtskraft $\vec{G} = m\vec{g}$. Zugleich

wirkt die Rückstellkraft der ausgelenkten Feder, die wir mit dem Hook'schen Gesetz als $\vec{F} = -D\vec{x}$ angeben können. Da die Feder sich im Gleichgewicht befindet, gilt offensichtlich. Die beiden Kräfte heben sich auf, sie brauchen uns für die weitere Untersuchung nicht zu interessieren. Wir definieren deshalb die Auslenkung in der Gleichgewichtslage als $x = 0$.

Nun wird die Feder um eine beliebige Strecke x ausgelenkt. Auf die Masse wirkt jetzt eine weitere Rückstellkraft $\vec{F} = -D\vec{x}$. Solange ich die Feder festhalte befindet sie sich in Ruhe, also im Gleichgewicht der Rückstellkraft und der auslenkenden Kraft, die ich ausübe.

Nun soll die Masse losgelassen werden. Es wirkt nur noch die Rückstellkraft. Nach dem 2. Newtonschen Axiom ruft diese Kraft eine Beschleunigung \vec{a} hervor. Die Vektoren können unter Berücksichtigung der Richtungen durch Skalare ersetzt werden. Dann wirkt auf die Massen die Kraft $F = -Dx$ als beschleunigende Kraft. $F_N = ma$ wirkt der Beschleunigung entgegen. Es gilt

$$F = F_N$$

$$\text{mit } F = -Dx \text{ und } F_N = ma \quad \Leftrightarrow \quad -Dx = ma$$

$$\text{mit } a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{-Dx = m \frac{d^2x}{dt^2}} \quad \neg$$

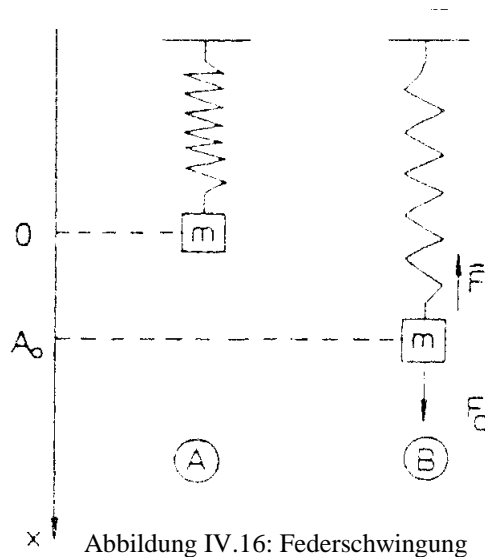


Abbildung IV.16: Federschwingung

Diese Gleichung ist eine lineare (die Ableitungen sind nur linear), homogene (der absolute Term ist null) Differentialgleichung zweiter Ordnung (die Gleichung beinhaltet maximal die zweite Ableitung).

Merke: Eine **lineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung** ist eine Gleichung der Form

$$x = -A \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Notation IV.5: **Differentialgleichungen** werden kurz als **DGL** bezeichnet.

Diese Form der Gleichungen hat genau zwei linear unabhängige Lösungen. Alle anderen Lösungen sind Linearkombinationen dieser Lösungen. Die Mathematik gibt Lösungsschemata an, wir begnügen uns in diesem Fall damit, die Lösungen durch Überlegungen und Erraten zu finden:

Gesucht wird eine Funktion, die zweimal abgeleitet bis auf einen konstanten, negativen Vorfaktor wieder die Ausgangsfunktion ergibt, also $f''(t) = \ddot{f}(t) \sim -f(t)$. Aus der Mathematik wissen wir noch, dass diese Bedingung die beiden Winkelfunktionen Sinus und Kosinus erfüllen. Da wir zwei linear unabhängige Lösungen suchen, wählen wir diese beiden mit einer beliebigen Konstanten ω als Ansatz:

1. Ansatz:

$$x(t) = A \cdot \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -A\omega \cdot \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega^2 \cdot \cos \omega t$$

Diesen Ansatz setzen wir in die Gleichung \neg , um zu überprüfen, ob er die Bedingungen erfüllt:

$$-DA \cdot \cos \omega t = -mA\omega^2 \cdot \cos \omega t$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{D}{m}\right)A \cdot \cos \omega t = \left(\omega^2\right)A \cdot \cos \omega t$$

Diese Gleichung zeigt, dass die gestellte Bedingung $-Dx = m \frac{d^2x}{dt^2}$ erfüllt ist, und die zunächst als beliebig angenommene Konstante ω sich aus den bekannten Konstanten m und D zusammensetzt:

$$\omega^2 = \frac{D}{m}.$$

Analog lässt sich zeigen, dass der

2. Ansatz

$$x(t) = B \cdot \sin \omega t$$

eine Lösung der Gleichung \neg ist. Die Winkelfunktionen Sinus und Kosinus sind linear unabhängig, die allgemeine Lösung lautet also:

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Betrachten wir nun die Bewegung im Experiment: Die losgelassene Feder wird durch die Rückstellkraft wieder zusammen gezogen bis zu einem Umkehrpunkt, dann fällt die Masse wieder bis zum Ausgangspunkt x nach unten. Dieser Vorgang wiederholt sich **periodisch**: die Masse schwingt. Die berechnete Gleichung beschreibt also eine Federschwingung, sie wird deshalb Schwingungsgleichung genannt.

Notation IV.6: Die Auslenkung x der Feder ist eine Funktion der Zeit, sie wird **Elongation** genannt.

Das Argument ω in der Winkelfunktion gibt stets die Periode an, mit der die Schwingung ausgeführt wird. Setzen wir für die oben ermittelten Konstanten ω in die Gleichung ein, so lautet

Gleichung \neg
$$-Dx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

mit $\omega^2 = \frac{D}{m}$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

oder anders geschrieben
$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

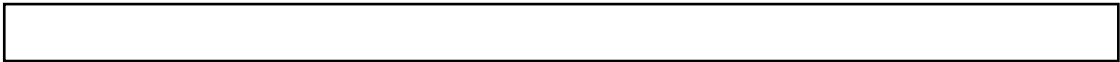
Versuchen wir nun zu ermitteln, nach welcher Zeit die Feder wieder in die Ausgangslage zurückkehrt, wie lange eine Schwingung also dauert. Hierfür muß gelten:

$$x(t + T) = x(t)$$

$$\Leftrightarrow A \cos \omega t + B \sin \omega t =$$

Da die Cosinus und Sinusfunktionen die Periode 2π haben, muß $\omega \cdot T = 2\pi$ gelten, und damit

beträgt die **Schwingungsdauer**
$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$



Notation IV.7: Man nennt das Inverse der Schwingungsdauer **Frequenz** ν der Schwingung.

Fassen wir also zusammen:

Merke: Die **Schwingungsgleichung** der Federschwingung lautet

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Merke: Die **allgemeine Lösung** der Schwingungsgleichung lautet

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

Merke: Die **Kreisfrequenz** der Schwingung ist gegeben durch

$$\omega \text{ mit } \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Merke: Die **Schwingungsdauer** ist gegeben durch

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$$

Merke: Die **Schwingungsfrequenz** ist gegeben durch

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{D}{m}} \frac{1}{2\pi}$$

Die Konstanten A und B in der allgemeinen Lösung ergeben sich aus den Anfangsbedingungen: Die Schwingung werde zur Zeit $t = 0$ bei $x = A_0$ gestartet. Die Geschwindigkeit in diesem Punkt war null $v_0 = 0$.

Mit

$$v = \dot{x} = -A\omega \sin t + B\omega \cos \omega t$$

gilt also

$$-A\omega \sin t + B\omega \cos \omega t = 0$$

mit $t = 0$

$$\Rightarrow B\omega = 0.$$

Also muss die Konstante B null sein in der Ausgangslage der Schwingung. Zu dieser Zeit gilt also

$$x(t = 0) = A_0 \cos \omega t.$$

Also gibt A_0 die Amplitude der Schwingung an.

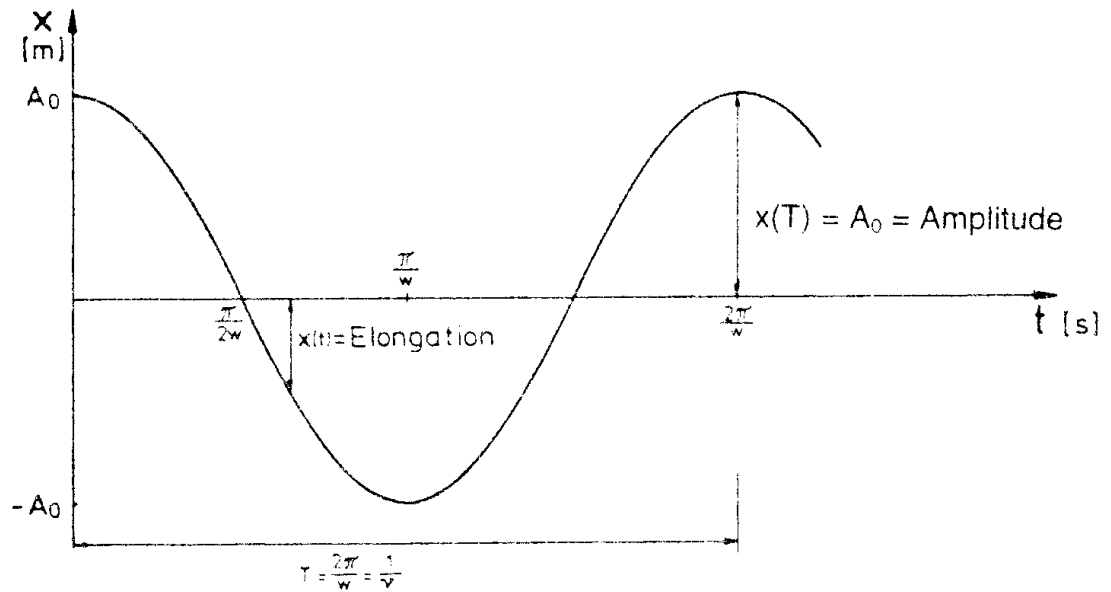


Abbildung IV.18: Schwingung

Versuch IV.8: Federschwingung

In diesem Versuch sollen einige der oben gewonnenen Ergebnisse experimentell nachgewiesen werden.

1) Im ersten Versuchsteil wird ein Federpendel an einem Stab befestigt, zwischen Masse und Feder wird ein Konstantendraht gespannt. Die Masse m kann an der Feder frei schwingen; Draht und Feder sind von Strom durchflossen. Über eine Schaltung kann die Teilspannung

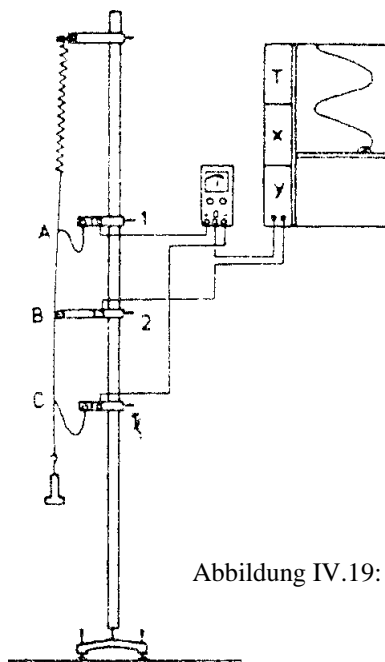


Abbildung IV.19: Versuchsaufbau zur Federschwingung

abgegriffen werden, die abfällt, wenn der Draht mit einer Teillänge einen Teilwiderstand bildet. Abhängig von der Länge des Drahtes zwischen den Messpunkten, die proportional zur Auslenkung der Feder ist, wird die Spannung ermittelt. Die Spannung als Maß für die Auslenkung x wird auf einem Monitor zeitlich aufgetragen. Die Auswertung zeigt eine Schwingung, an der Schwingungsdauer und Periodizität gut zu erkennen sind.

2) In einem zweiten

Versuchsteil wird eine Feder mit der Federkonstanten k mit einer Masse m beschwert. Die Feder wird ausgelenkt. Jetzt wird gleichzeitig die Feder losgelassen und eine Stoppuhr betätigt. Nach 20 Schwingungen wird die Uhr gestoppt. Dieser Versuch wird nun mit derselben Feder und der Masse $2m$ wiederholt.

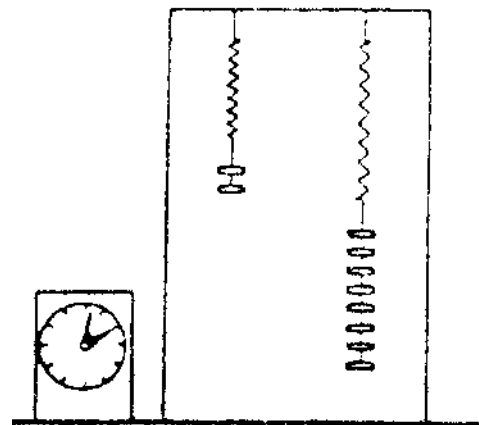


Abbildung IV.20a: Versuchsaufbau zum Nachweis der Massenabhängigkeit

Aus den Beziehungen

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

und

$$\omega^2 = \frac{D}{m}$$

ergibt sich die Gleichung für T :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{D}{m}}$$

Mit der unveränderten Federkonstanten D gilt $T \sim \sqrt{m}$.

In unserem Versuch musste die Schwingungsdauer mit $2m$ also um den Faktor $\sqrt{2}$ größer sein als mit der Masse m . Diese Berechnung konnte verifiziert werden.

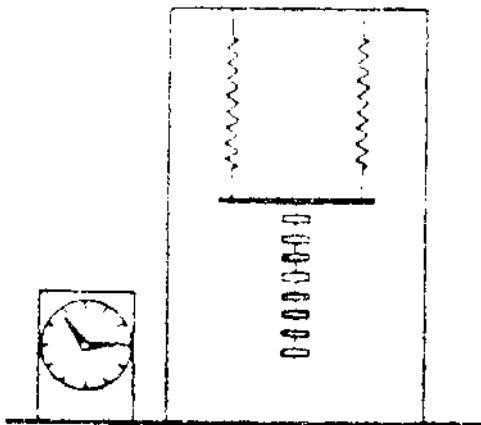


Abbildung IV.20b: Versuchsaufbau zum Nachweis der Abhängigkeit von der Federkonstanten

3) Dieser Versuchsteil hatte denselben Aufbau wie 2), nur mit dem Unterschied, dass diesmal die Masse konstant gehalten und die Federkonstante durch Parallelhängen zweier gleicher Federn verdoppelt wurde. Hier musste über die Beziehung $T \sim \frac{1}{\sqrt{D}}$ ein Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ gemessen werden. Auch diese Relation konnte experimentell bestätigt werden.

IV.8.2 Pendelschwingungen

In diesem Kapitel soll die Bewegung einer anderen Schwingung untersucht werden. Das einfachste Beispiel einer Pendelschwingung liefert das mathematische Pendel. Das mathematische Pendel stellt dabei einer Idealisierung dar; man betrachtet einen Massepunkt ohne räumliche Ausdehnung, der an einem masselosen Faden ohne Einwirkung von Reibung oder anderer Formen mechanischen Energieverlustes schwingt. Auch für die Berechnung dieser Bewegung müssen wir zunächst die wirkenden Kräfte betrachten. Im Gegensatz zur Federschwingung stellt dieses Pendel kein lineares Problem dar, denn das Pendel bewegt sich in einer Ebene:

Das Pendel sei um den Winkel φ ausgelenkt, wenn es losgelassen wird. Auf die Masse m wirkt nun wie bei der Federschwingung nur noch die Gewichtskraft. Diesen Kraftvektor wollen wir zur genaueren Untersuchung zerlegen. Dafür betrachten wir die Bewegung des

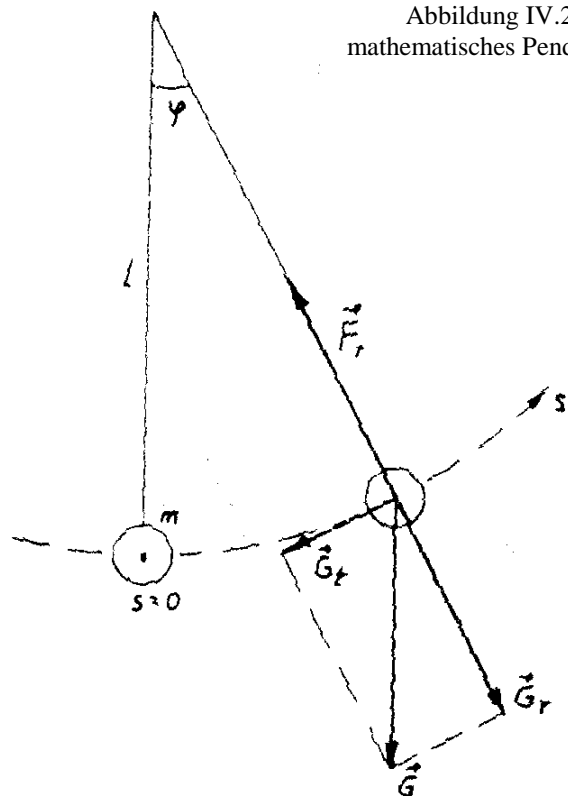


Abbildung IV.21: mathematisches Pendel

Pendels als eine Bewegung auf einem Kreisbogen. Dann kann ein Vektor zerlegt werden in eine Komponente längs des Kreisbogens, die Tangentialkomponente G_t , und in eine Komponente in Richtung des Mittelpunktes, die Radialkomponente. Im Mittelpunkt des durch Schließen des Kreisbogens gedachten Kreises liegt der Aufhängepunkt des Fadens. Der Faden übt eine Zwangskraft, die Fadenspannkraft, auf die Masse aus; er verhindert eine Bewegung vom Mittelpunkt weg. Die Radialkomponente von der Gewichtskraft \vec{G} wird durch die Fadenspannkraft kompensiert. Die Tangentialkomponente G_t verursacht nach dem 2. Newtonschen Axiom nun eine Beschleunigung längs des Kreisbogens in Richtung der Ruhelage, $\varphi = 0^\circ$.

Die Tangentialkomponente $\vec{G}_t = m \vec{g} \sin\varphi$

wirkt als beschleunigende Kraft $F =$

$$\Rightarrow m \vec{g} \sin\varphi = m \vec{a}$$

mit $\vec{a} = \ddot{\vec{x}} = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$

$$\Rightarrow \boxed{m \vec{g} \sin\varphi = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}} \quad \neg$$

Diese Differentialgleichung hängt nicht nur von einer Variablen ab, sondern von den beiden Variablen \vec{x} und φ . Um die Gleichung dennoch lösen zu können, müssen wir sie in die Form von Notation VI.5 überführen. Dazu definiert man ein neues Koordinatensystem so, dass eine Koordinate die Bogenlänge ist. Ein Punkt wird in diesem Koordinatensystem bestimmt durch den Radius des Kreises und die Länge des Bogens. Die Bogenlänge s wird dabei geschickt im Ruhepunkt definiert, also in unserem Fall sei $s = 0$, wenn die Auslenkung $\varphi = 0$ ist. Die Bogenlänge s sei positiv bei einer Auslenkung nach rechts. Diese Form der Koordinaten wird allgemein mit dem Begriff **krummlinige Koordinaten** bezeichnet, da die Achsen nicht linear verlaufen. Dennoch ist jeder Punkt einer Ebene mit diesen beiden Koordinaten darstellbar.

Mit dieser Darstellung gehen die Vektoren über in Skalare, insbesondere

$$\vec{G}_t \rightarrow -G_t$$

$$d\vec{x} \rightarrow ds$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{x}}{dt} \rightarrow \frac{ds}{dt}, \quad \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Mit dieser Transformation folgt aus Gleichung \neg :

$$mg \sin\varphi = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2 s}{dt^2} + g \sin\varphi = 0} \quad -$$

Aus der Geometrie ist die Bogenlänge bekannt als Produkt aus Winkel und Radius, hier die Länge des Fadens l . Der Winkel berechnet sich dann als

$$\varphi = \frac{s}{l}$$

Die Einheit dieser Winkelangabe ist $[\varphi] = \text{rad}$.

Umgerechnet beträgt ein Winkel von 180° in dieser Angabe π , ein Winkel von 360° beträgt 2π , usw. Ein Grad entspricht ungefähr 17 mrad .

Merke: Der **Kreisbogen** ist das Produkt aus Winkel und Radius.

Der Winkel wird in **rad** gemessen.

Also gilt mit

$$s = \varphi l$$

eingesetzt in -

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} l + g \sin\varphi = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin\varphi = 0} \quad \textcircled{R}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist immer kompliziert. Die Lösung erfolgt über die Reihenentwicklung für $\sin\varphi$:

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$$

Wenn man nach dem ersten Term alle weiteren vernachlässigt, gilt

(*Kleinwinkelnäherung*)

$$\sin\varphi \approx \varphi$$

Für Winkel unter 10° ist diese Näherung gut: $\sin 10^\circ = 0.173$ und $10^\circ \rightarrow 0,174 \text{ rad}$.

Damit lautet die Schwingungsgleichung \textcircled{R} :

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

Diese Gleichung entspricht der DGL, die wir bereits bei der Federschwingung gelöst haben.

Man kann die Kreisfrequenz ω direkt ablesen als $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Damit können wir auch für die Pendelschwingung zusammenfassen:

Merke: Die **Schwingungsgleichung** des Fadenpendels lautet

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

Merke: Die **allgemeine Lösung** der Schwingungsgleichung lautet

$$\varphi(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t .$$

Merke: Die **Kreisfrequenz** der Schwingung ist gegeben durch

$$\omega \text{ mit } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} .$$

Merke: Die **Schwingungsdauer** ist gegeben durch

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = .$$

Merke: Die **Schwingungsfrequenz** ist gegeben durch

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = .$$

Versuch IV.9: mathematisches Pendel

1) Die Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Länge des Pendels kann experimentell überprüft werden, indem man bei zwei Pendeln unterschiedlicher Länge die Schwingungsdauer für eine feste Anzahl von Schwingungen misst. Bei unserem Versuchsaufbau konnte zudem über Hallsonden die Auslenkung der Pendel in Spannungen umgesetzt und gegen die Zeit mittels Computer simultan graphisch umgesetzt werden. Wir wählten zwei Pendel der Länge l und $\frac{1}{4} l$. Über die Proportionalitätsbeziehung $T \sim \sqrt{l}$ errechnet man eine Schwingungszeit, die bei dem Pendel der Länge l um den Faktor 2 größer ist als bei dem kurzen Pendel. Dieses Ergebnis konnte sowohl an der Computerauswertung, als auch mittels Stoppuhr verifiziert werden.

2) In einem zweiten Versuchsteil kann gezeigt werden, dass die Pendel mit gleicher Länge aber unterschiedlichen Massen gleich schwingen. Dazu werden zwei Fadenpendel synchron losgelassen und beobachtet. Der Versuch über Hallsonde zwei identische Schwingungen aufzunehmen klappt nur bedingt, da die steife Stange, an der die Kugeln messtechnisch bedingt schwingen müssen, nicht annähernd masselos sind. Je leichter die Kugel ist, desto ungenauer wird die Berechnung, da der Schwerpunkt nicht mehr in der Kugel sondern oberhalb liegt. Dieser Versuch erfordert eine Berechnung ohne die Annahme, der Faden sei masselos. Dieses Pendel wird dann physikalisches Pendel genannt und bei der Mechanik starrer Körper betrachtet.

3) Der dritte Versuchsteil soll dazu dienen, die Erdbeschleunigung g mit dem Pendel zu bestimmen. Hierfür macht man sich den Umstand zu nutze, dass die Schwingungsdauer T des Pendels nur von der Länge und der Konstanten g abhängt. Formt man die Beziehung

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{nach } g \text{ um, so folgt} \quad g = l \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

Mit dieser Formel kann die Konstante g direkt errechnet werden, wenn die Länge l des Pendels und die Schwingungsdauer T bekannt sind. Die Schwingungsdauer kann auf zwei Arten ermittelt werden: Entweder man nimmt wie in Versuchsteil 2) mittels einer Hallsonde die Schwingung auf und liest dann aus dem Graphen eine Periode ab, oder man misst direkt die Schwingungsdauer über eine Photozelle. Dabei wird die Photozelle z.B. so montiert, dass sie beim Nulldurchgang der Kugel einen Impuls bekommt. Der zeitliche Abstand dreier Impulse ist dann eine Schwingungsdauer. Der im Versuch ermittelte Wert lag wegen der in 2) bereits diskutierten Gründe ca. 1% über dem Literaturwert (vgl. Versuch III.4).

IV.8.3 Zusammenfassung der Schwingungen

Die bisher diskutierten Schwingungen stellen nur zwei mögliche Beispiele von Schwingungen dar. Andere, bereits am Rande erwähnte Schwingungen führen z.B. das Ballistische Pendel und das physikalische Pendel aus. Die beiden berechneten Schwingungen hatten eine ähnliche Schwingungsgleichung und eine ähnliche Lösung. Allgemein kann man für harmonische Oszillatoren die Schwingungsgleichung, deren Lösung und die betrachteten Größen angeben in der Form:

Schwingungsgleichung des harmonischen Oszillators:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung:

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

mit der **Kreisfrequenz** der Schwingung ω

der **Schwingungsdauer** $T = \frac{2\pi}{\omega}$ und

der **Schwingungsfrequenz** $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$

Die Kreisfrequenz ω wird je nach zu untersuchender Bewegung durch die wirkenden Kräfte bestimmt.

Eine abschließende **Bemerkung zur Schreibweise:**

In einigen Lehrbüchern findet man statt der von uns benutzten allgemeinen Form der Lösung der Schwingungsgleichung $x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$

auch die Form $x(t) = A_0 \cos(\omega t + \alpha)$.

Diese Form ist nur eine äquivalente Schreibweise für dieselbe Gleichung. Statt der von uns definierten Amplituden A und B werden in dieser Gleichung eine andere Amplitude A_0 und die Phase α definiert:

$$x(t) = A_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

Additionstheorem: $\Leftrightarrow x(t) = A_0 (\cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha)$

$$\Leftrightarrow x(t) = \underbrace{A_0 \cos \alpha}_{A} \cos \omega t - \underbrace{A_0 \sin \alpha}_{B} \sin \omega t$$

$$\Leftrightarrow x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

Diese Darstellung mit einer Amplitude und einer Phase (auch Phasenverschiebung genannt), hat den Vorteil, dass sowohl Amplitude als auch Phase direkt aus der Lösung abgelesen werden können.

Eine andere Möglichkeit der Darstellung bietet die Rechnung mit komplexen Zahlen. Mit deren Hilfe kann man die Lösung in eine Linearkombination von $e^{\pm i\omega t}$ umformen. Diese Form der Lösung werden wir aber erst in Experimentalphysik II benötigen und dann einführen.

IV.9 Energie des harmonischen Oszillators

Bei der Berechnung des Ballistischen Pendels haben wir bereits eine Energiebetrachtung vorgenommen. Dies wollen wir nun mit Kenntnis der Schwingungsgleichung für harmonische Oszillatoren verallgemeinern. Reibung und andere nichtmechanische Energieverluste seien also vernachlässigbar. Als Beispiel eines harmonischen Oszillators betrachten wir wieder die Federschwingung:

Die Bewegungsgleichung des Massepunktes m, der an einer Feder schwingt, kann, wie in IV.8.3 dargestellt, angegeben werden mit. Um die Berechnung zu erleichtern, setzen wir in unserem Beispiel die Phase α gleich null. Die Schwingungsgleichung lautet dann:

$$x(t) = A_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

mit $\alpha = 0$ $\Leftrightarrow x(t) = A_0 \cos \omega t$ \neg

Betrachten wir nun die kinetische Energie zu einem beliebigen Zeitpunkt. Mit Definition IV.5

gilt
$$W_K = \frac{1}{2}mv^2$$

mit $v = \frac{dx}{dt}$
$$\Leftrightarrow W_K = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Die Gleichung für $x(t)$ ist gegeben durch \neg , $\frac{dx}{dt}$ kann über Differentiation errechnet werden:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(A_0 \cos \omega t)}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = -A_0\omega \sin \omega t \quad -$$

Dieser Ausdruck - für die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit eingesetzt in die Formel für die kinetische Energie ergibt

$$W_K = \frac{1}{2}m(-A_0\omega \sin \omega t)^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{W_K = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2 \sin^2 \omega t.}$$

Jetzt untersuchen wir die potentielle Energie zu jedem Zeitpunkt. Nach Kapitel IV.1.5 gilt für die potentielle Energie der Feder

$$W_P = \frac{1}{2}Dx^2$$

mit \neg
$$\Leftrightarrow W_P = \frac{1}{2}D(A_0 \cos \omega t)^2$$

$$\Leftrightarrow W_P = \frac{1}{2}DA_0^2 \cos^2 \omega t$$

mit $\omega^2 = \frac{D}{m}$
$$\Leftrightarrow \boxed{W_P = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2 \cos^2 \omega t.}$$

Da wir nicht-mechanische Energien vernachlässigen wollten, gilt für die Gesamtenergie:

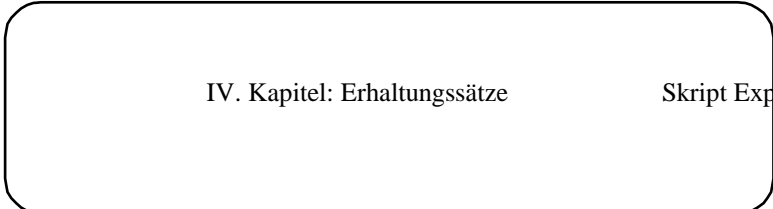
$$W = W_K + W_P$$

$$\Leftrightarrow W = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2 \sin^2 \omega t$$

$$\Leftrightarrow W = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)$$

mit $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$
$$\Leftrightarrow W = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2$$

Wegen der Energieerhaltung gilt:



Merke: Die **Gesamtenergie des harmonischen Oszillators**

$$W = \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2$$

ist zeitlich konstant.

An den Umkehrpunkten ist die Auslenkung x gleich der maximalen Amplitude A_0 und ωt ein ganzzahlig Vielfaches von π . Also gilt mit $x = \pm A_0$ und $\omega t = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$W_K = \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2 \sin^2 \omega t$$

$$\Leftrightarrow W_K = \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2 \sin^2 n\pi$$

mit $\sin n\pi = 0$

$$\Leftrightarrow W_K = 0$$

Das Einsetzen der Bedingung in

$$W_P = \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2 \cos^2 \omega t$$

ergibt

$$W_P = \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2.$$

In den Umkehrpunkten hat das Pendel nur potentielle Energie, die Geschwindigkeit ist null.

Eine analoge Rechnung für die Nulldurchgänge mit der Auslenkung $x = 0$ und

$\omega t = \frac{\pi}{2} + n\pi$ liefert

$$W_P = 0$$

und

$$W_K = \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2.$$

In den Nulldurchgängen ist also die Geschwindigkeit maximal, die potentielle Energie hingegen null.

Zusammengefasst bedeutet das:

Merke: Die potentielle Energie und die kinetische Energie werden periodisch vollständig ausgetauscht, die Gesamtenergie ist jedoch konstant.

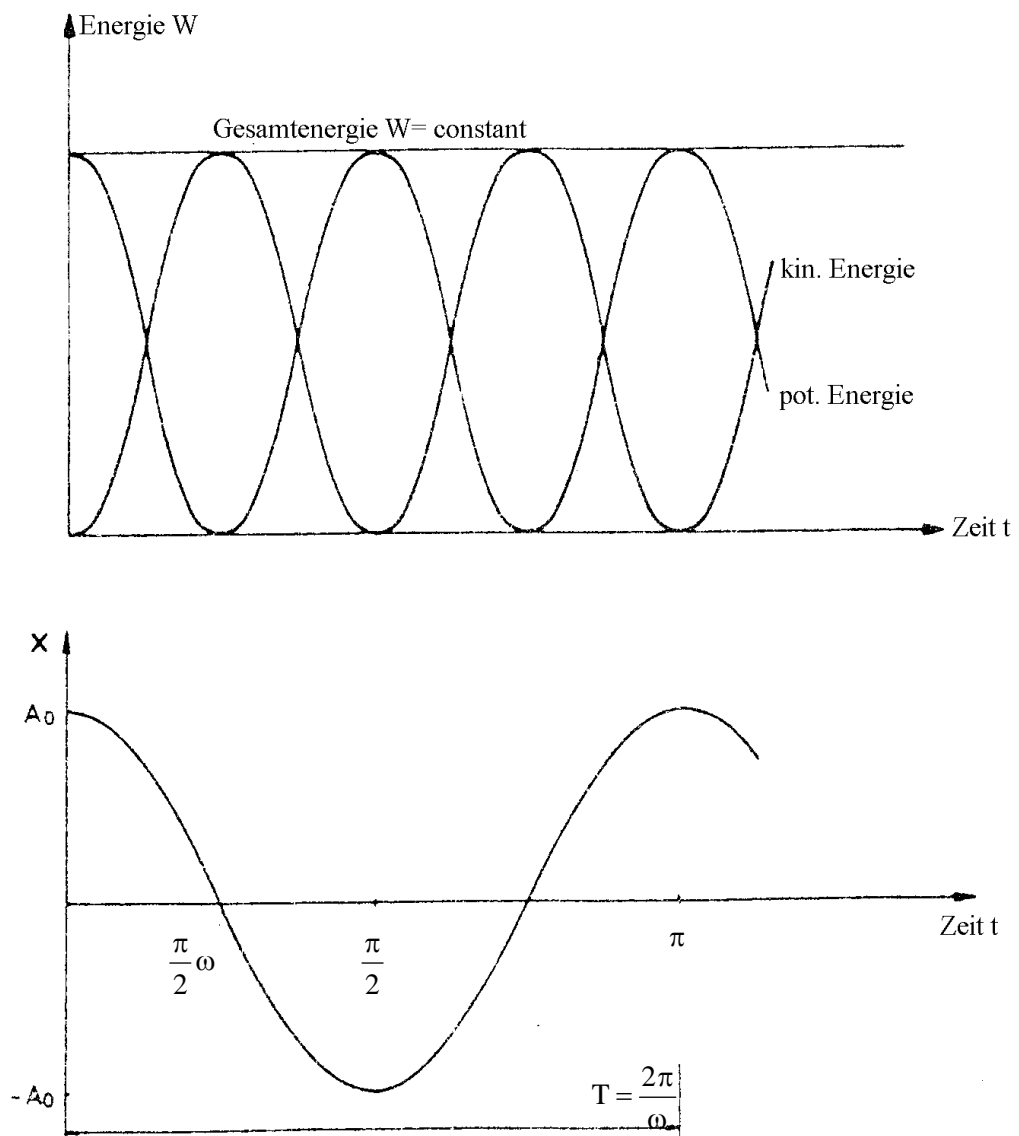


Abbildung IV.22: Energie und Auslenkung des harmonischen Oszillators

Abschließend betrachten wir noch die **mittlere kinetische und potentielle Energie**:

Notation IV.8: Der (zeitliche) **Mittelwert** einer Größe W wird mit \overline{W} bezeichnet.

Merke: Der **zeitliche Mittelwert** (in der Zeitspanne von $t = 0$ und $t = T$) einer Größe W wird berechnet als

$$\overline{W} = \frac{\int_0^T W(t) dt}{\int_0^T dt} .$$

Der Nenner stellt dabei den Normierungsfaktor dar.

Für die kinetische Energie folgt mit damit:

$$\overline{W_K} = \frac{\int_0^T W_K(t) dt}{\int_0^T dt}$$

$$\Leftrightarrow \overline{W_K} = \frac{\int_0^T \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2 \sin^2 \omega t \cdot dt}{T}$$

$$\Leftrightarrow \overline{W_K} = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2 \int_0^T \sin^2 \omega t \cdot dt .$$

mit $W = \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2$

$$\Leftrightarrow \overline{W_K} = \frac{1}{T} \cdot W \int_0^T \sin^2 \omega t \cdot dt .$$

Für die potentielle Energie folgt analog:

$$\overline{W_P} = \frac{1}{T} W \int_0^T \cos^2 \omega t \cdot dt .$$

Mit

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t \cdot dt = \frac{1}{2}$$

folgt:

$$\overline{W_P} = \overline{W_K} = \frac{1}{2} W$$

Merke: Im zeitlichen Mittel steckt jeweils die Hälfte der Gesamtenergie in der kinetischen und der potentiellen Energie: $\overline{W_P} = \overline{W_K} = \frac{1}{2} W$.

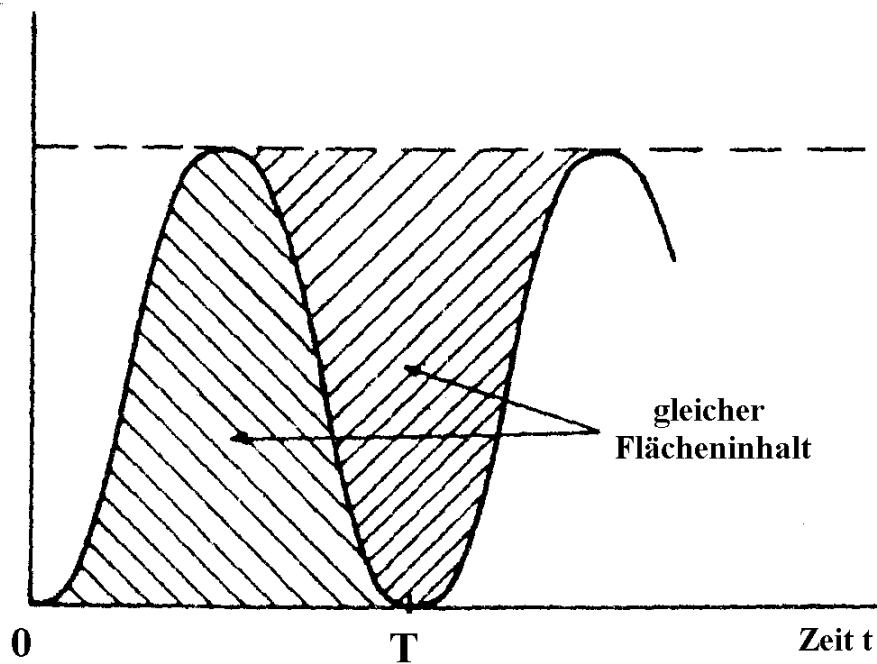


Abbildung IV.23: Gesamtenergie

Die Gültigkeit der Gleichung $\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t \cdot dt = \frac{1}{2}$ kann man ohne Berechnung aus der Betrachtung des Graphen der Funktion ablesen.

V. Drehbewegungen

In Kapitel II und III haben wir die Grundlagen kennengelernt, die wir brauchten, um gradlinige oder die Überlagerung von gradlinigen Bewegungen zu berechnen. Bei der Betrachtung des Pendels hingegen haben wir bereits gemerkt, daß man mit diesem Werkzeug nicht alle beobachtbaren Bewegungen beschreiben kann. Insbesondere Kreisbewegungen, z.B. die Bewegung des Fadenpendels auf einem Kreisbogen, brauchen eine andere Beschreibungsform. Eine dieser Formen haben wir mit der Einführung der Koordinaten φ und r kennengelernt. Dies wollen wir im Folgenden systematischer für jede Kreisbewegung betrachten.

V.1 Kinematik der Kreisbewegung

V.1.1 Darstellung eines Vektors in verschiedenen Koordinatensystemen

Betrachten wir noch einmal die Darstellung eines Vektors \vec{r} , der vom Kreismittelpunkt zu einem beliebigen Punkt auf dem Kreisbogen zeigt, in einem karthesischen Koordinatensystem. Zur einfacheren Berechnung liege der Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Die Betrachtung des Kreises beinhaltet die Annahme, die

Bewegung verlaufe in einer Ebene (wir setzen also $z = 0$) und die Länge des Radiusvektors sei konstant. Der Vektor läßt sich darstellen durch seine Komponenten in x - und y - Richtung. Die Graphik zeigt, daß die

x -Komponente $x = r_0 \cos \varphi$

y -Komponente $y = r_0 \sin \varphi$

betragen.

Die Länge des Vektors \vec{r} kann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras errechnet werden:

$$r^2 = x^2 + y^2 = r_0^2$$

In Kapitel IV.8.2 hatten wir bereits die Polarkoordinaten r und φ kennengelernt. Wir hatten festgestellt, daß jeder Punkt in einer Ebene sich darstellen läßt durch die Angabe des Radius des gedachten Kreises um den Mittelpunkt, auf dem der Punkt liegt, und den Winkel, den der Vektor mit einer definierten Achse einschließt. Insbesondere gilt für einen Punkt auf einem Kreis mit konstanten Radius, daß er bei Kenntnis des Radius nur durch den Winkel beschrieben

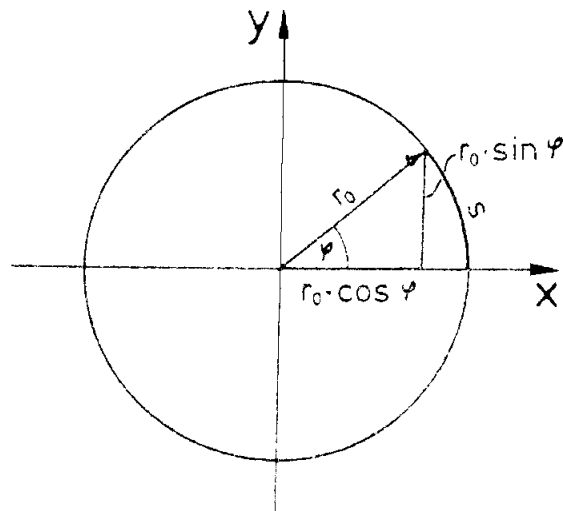
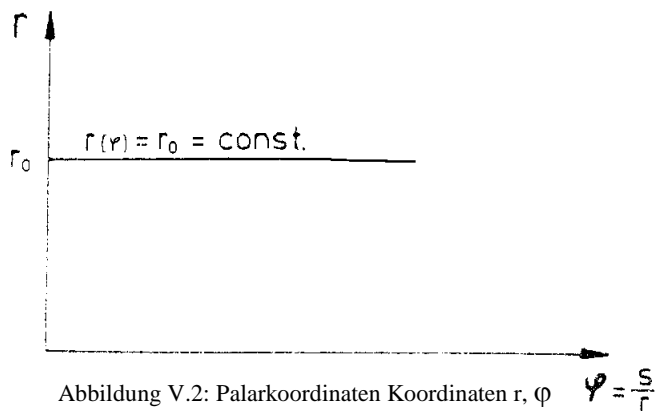


Abbildung V.1: Rechtwinklige Koordinaten x, y



werden kann. Diese Koordinaten spannen also eine Ebene auf und lassen sich folglich auch in einem ebenen Koordinatensystem einzeichnen. Die Achsen werden von den beiden Polarkoordinaten bestimmt.

Der Vektor \vec{r} wird in den beiden Systemen folglich dargestellt als:

Kartesischen Koordinaten:

$$\vec{r} = (r_0 \cos \varphi, r_0 \sin \varphi, 0)$$

Polarkoordinaten

$$r(\varphi) = r_0 = \text{const.}$$

Mittels der oben ermittelten Beziehungen umrechnen.

$$x = r \cos \varphi$$

lassen sich die Koordinaten

$$y = r \sin \varphi$$

↖

V.1.2 Gleichförmige Kreisbewegung

Als erstes Beispiel einer Bewegung betrachten wir die gleichförmige Bewegung auf einem Kreis. Analog zur geradlinigen gleichförmigen Bewegung definiert man diese Bewegung über die konstante Geschwindigkeit. Die zu betrachtende Geschwindigkeit ist hierbei jedoch nicht der Vektor, sondern die Winkelgeschwindigkeit ω , also die Änderung des Winkels mit der Zeit.

Definition V.1: Die Winkelgeschwindigkeit ω ist die Änderung

des Winkels φ mit der Zeit:
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Damit definieren wir die gleichförmige Kreisbewegung als die Bewegung auf einem Kreis mit konstantem Radius r und konstanter Winkelgeschwindigkeit ω .

Definition V.2: Eine Bewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf einem Kreis mit konstantem Radius wird gleichförmige Kreisbewegung genannt.

Die Abhängigkeit des überstrichenen Winkels mit der Zeit kann analog zur geradlinigen Bewegung durch Integration des Winkelgeschwindigkeits - Zeit - Gesetzes berechnet werden:

Aus $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

folgt $\varphi(t) = \int \omega dt$

und mit $\omega = \text{konstant}$ $\varphi(t) = \omega \int dt$.

Mittels Integration folgt $\varphi(t) = \omega t + \alpha$.

Die Integrationskonstante α kann durch die Definition des Winkels φ zur Zeit $t = 0$ als $\varphi(t = 0) = 0$ gleich null gesetzt werden. Dann gilt die

Bewegungsgleichung $\varphi(t) = \omega t$.

Die Komponenten in Schreibweise der kartesischen Koordinaten können ermittelt werden durch Einsetzen der Bewegungsgleichung - in die Transformationsgleichungen \rightarrow .

Aus $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$ folgt mit $\varphi = \omega t$ $\begin{cases} x = r \cos \omega t \\ y = r \sin \omega t \end{cases}$.

Der Vektor \vec{r} hat also den Betrag

$$r = r_0 \cos \omega t + r_0 \sin \omega t$$

Diese Gleichung ist der allgemeinen Lösung der Schwingungsgleichung des Pendels sehr ähnlich. Hier hatten wir die Lösung der Schwingungsgleichung ermittelt als:

$$r(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

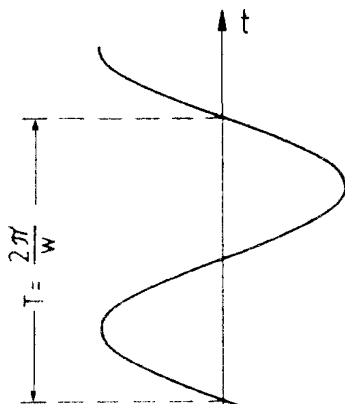
mit der Kreisfrequenz der Schwingung,

der Schwingungsdauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$

und der Schwingungsfrequenz $\nu =$.

Versuch V.1: Überlagerung einer Kreisbewegung und einer Pendelbewegung

Mit diesem Versuch soll untersucht werden, was die Pendel- und die gleichförmige Kreisbewegung gemeinsam haben. Dazu wird ein Fadenpendel in Schwingung versetzt. Unter dem Pendel befindet sich eine Scheibe mit darauf befestigtem Zeiger. Die Scheibe rotiert mit fester Winkelgeschwindigkeit um den Mittelpunkt, der auf einer Gradlin mit der Ruhelage des darüber schwingenden Pendels liegt. Durch Synchronisation, d.h. durch Loslassen des Pendels, wenn der Zeiger sich grade darunter befindet, kann man die Bewegungen so starten, daß in der ebenen Projektion Zeiger und Kugel senkrecht übereinander stehen.



Mit diesem Versuch wurde gezeigt, daß die Pendelschwingung durch Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung in die beiden Richtungen der Pendelebene synchronisiert werden kann. Die Kreisbewegung entspricht einer Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen gleicher Frequenz in x und y.

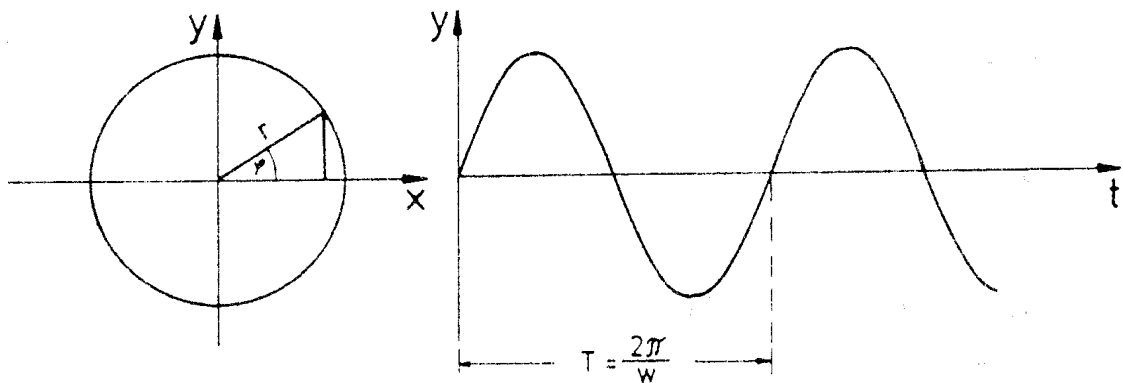


Abbildung V.3: Überlagerung von Pendel- und gleichförmiger Kreisbewegung

Nun wollen wir über die Berechnung der Geschwindigkeit \vec{v} und anschließend der Beschleunigung \vec{a} versuchen, auf die wirkende Kraft zu schließen. Hierfür betrachten wir die kartesischen Koordinaten x und y, die z-Komponente sei null:

$$\vec{r}(t) = (x = r \cos \omega t, \quad y = r \sin \omega t)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = (v_x = -r\omega \sin \omega t, \quad v_y = r\omega \cos \omega t)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = (a_x = -r\omega^2 \cos \omega t, \quad a_y = -r\omega^2 \sin \omega t)$$

Zusammengefaßt lauten die Vektoren:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (r \cos \omega t, r \sin \omega t) \\ \vec{v}(t) &= (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t) \\ \vec{a}(t) &= (-r\omega^2 \cos \omega t, -r\omega^2 \sin \omega t). \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Vektoren $\vec{r}(t)$ und $\vec{a}(t)$ zeigt, daß eine einfache Beziehung zwischen der Beschleunigung und dem Ortsvektor einer gleichförmigen Kreisbewegung existiert:

Merke: Die **Beschleunigung** ist bei einer gleichförmigen Kreisbewegung radial nach innen zum Mittelpunkt gerichtet. Sie hat keine Tangentialkomponente:

$$\vec{a} = \vec{a}_r = -\omega^2 \vec{r} .$$

Notation V.1: Die **Tangentialkomponente** des Beschleunigungsvektors wird mit \vec{a}_t bezeichnet, die dazu senkrecht stehende **Radialkomponente** entlang des Radiusvektors mit.

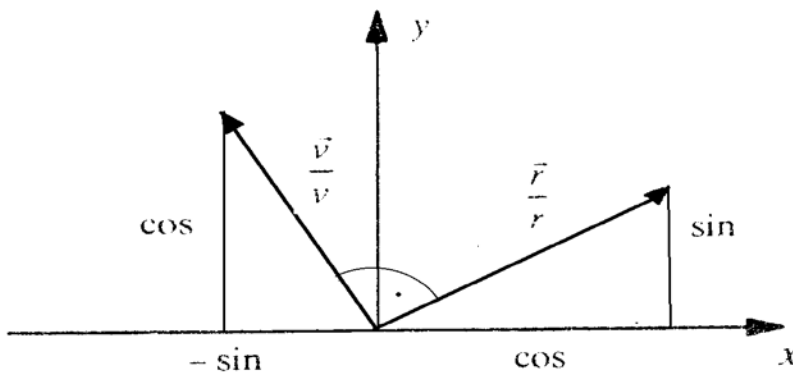


Abbildung V.4: geometrische Überlegung zu $\vec{v} \perp \vec{r}$

Ein (graphischer) Vergleich des Geschwindigkeitsvektors \vec{v} und des Radiusvektors \vec{r} zeigt zudem, daß diese beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

Dieses Ergebnis folgt auch direkt aus

der Bedingung, r sei konstant. Das bedeutet, daß $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ keine Komponente in Richtung des Kreisradius haben kann.

Die so ermittelten Ergebnisse gelten für beliebige Winkelgeschwindigkeiten ω :

Merke: Bei einer Kreisbewegung steht der **Geschwindigkeitsvektor** immer senkrecht auf dem Radiusvektor: $\vec{v} \perp \vec{r}$.

Für beliebige, nicht notwendigerweise konstante Winkelgeschwindigkeiten ω gilt damit in Polarkoordinaten:

Geschwindigkeit entlang der Kreisbahn $v_s = \frac{ds}{dt}$

mit $s = r\varphi \Rightarrow v_s = r \frac{d\varphi}{dt} + \varphi \frac{dr}{dt}$,

Mit, da $r = \text{const.} \Rightarrow v_s = r \frac{d\varphi}{dt}$

und mit $\omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \boxed{v_s = r\omega}$

Mit dem oben errechneten Ergebnis $\vec{v} \perp \vec{r}, v_r = 0$

folgt $\Rightarrow \boxed{v_s = v_t = r\omega}$

Merke: Die Tangentialgeschwindigkeit einer Kreisbewegung berechnet sich als

$$v_s = v_t = r\omega, \text{ die Radialgeschwindigkeit ist null: } v_r = 0.$$

Für die Beschleunigung entlang der Kreisbahn gilt

$$a_s = \frac{dv_s}{dt}$$

$$\text{mit } v_s = r\omega \quad \Rightarrow \quad a_s = \frac{dr}{dt}\omega + \frac{d\omega}{dt}r,$$

$$\text{mit } \omega \frac{dr}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_s = \frac{d\omega}{dt}r.$$

Definition V.3: Die Winkelbeschleunigung α ist die Änderung

$$\text{der Winkelgeschwindigkeit } \omega \text{ mit der Zeit: } \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Versuch V.2: tangentieller Funkenflug bei einem Schleifstein

Mit diesem Versuch soll die Flugbahn eines Punktes gezeigt werden, der mit dem Geschwindigkeitsvektor \vec{v} von einer Kreisbahn flieht, weil keine Kräfte auf ihn wirken. Der Beschleunigungsvektor steht senkrecht auf den Geschwindigkeitsvektor und zum Mittelpunkt hingerrichtet. Der Körper müßte also tangentiell von der Kreisbahn wegfliegen. Diesen Vorgang kann man eindrucksvoll am Funkenflug eines Schleifsteins beobachten. Hierfür treibt man einen runden Schleifstein an und hält einen Stab

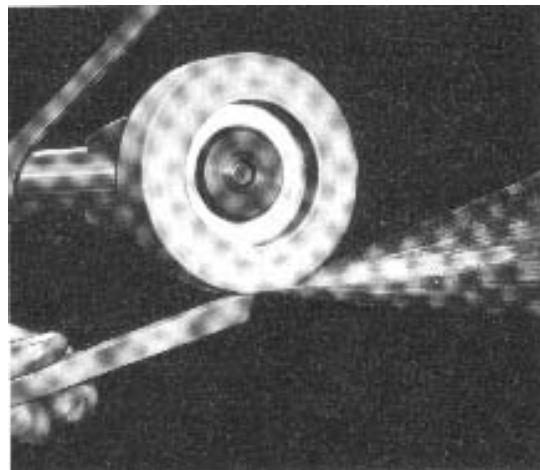


Abbildung V.5: tangentieller Funkenflug an einem Schleifstein

an den Schleifring. Die Funken fliegen tangentiell weg.

V.2 Die Fliehkraft: Dynamik der Kreisbewegung

V.2.1 Untersuchung der Fliehkraft

Im Folgenden wollen wir untersuchen, welche Kraft die Masse auf der Kreisbahn hält. Die oben errechnete Radialbeschleunigung

$$\vec{a}_r = -\omega^2 \vec{r}$$

wird durch eine Zwangskraft

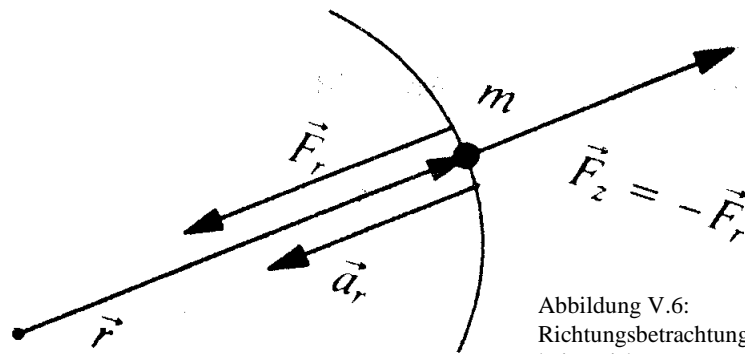


Abbildung V.6:
Richtungsbetrachtung
bei Kreisbewegungen

\vec{F}_r hervorgerufen. Diese Zwangskraft kann z.B. die Fadenspannung oder

die Schienenführung bei einem Zug sein. Nach Newton kann man diese Kraft schreiben als.

Definition V.4: Die zum Kreismittelpunkt hin gerichtete Kraft, die durch die Radialbeschleunigung hervorgerufen wird, nennt man **Zentripetalkraft.**

Merke: Dieses ist die einzige wirklich existierende Kraft im Sinne des 2. Newtonschen Axioms, d.h. in einem Inertialsystem.

Im Sinne des d'Alembertschen Prinzips spürt man im mitbewegten System, das kein Inertialsystem ist, eine Scheinkraft, die der realen Kraft, der Zentripetalkraft, entgegengerichtet gleich groß ist. Diese Kraft \vec{F}_Z erzeugt im mitbewegten System ein scheinbares dynamisches Gleichgewicht, der mitbewegte Massepunkt bewegt sich nicht. Wirkt jedoch auf den mitbewegten Massepunkt die Zwangskraft \vec{F}_r nicht, so spürt er nur die Scheinkraft \vec{F}_Z .

Definition V.5: Die der Zentripetalkraft \vec{F}_r entgegengerichtete Scheinkraft \vec{F}_Z ist die

einzige Kraft, die ein mitbewegter Beobachter spürt, auf den die Zwangskraft \vec{F}_r nicht wirkt: Zentrifugalkraft.

V.2.2 Versuche zur Fliehkraft

Die bekanntere der beiden oben eingeführten Kräfte ist wohl die Scheinkraft: die Zentrifugalkraft. Das liegt mitunter daran, daß oft bei Kreisbewegungen, z.B. in Fahrzeugen, die Zwangskraft nicht direkt auf den eigenen Körper wirkt, wohl aber die Zentrifugalkraft. Ein Beispiel hierfür ist die Kurvenfahrt eines Autos, bei der man aus der Kurve raus, also vom

Mittelpunkt des Kreises weg, eine Kraft verspürt. Berechnen wir die wirkende Kraft auf den Fahrer, der mit 120 km/h in eine Kurve mit dem Radius $r = 10$ m fährt und dabei auf die Hälfte der Geschwindigkeit, also auf 60 km/h abbremst.

Die Winkelgeschwindigkeit beträgt $\omega = \frac{v}{r}$,

die Radialbeschleunigung $\vec{a}_r = -\omega^2 \vec{r}$ $a_r = \frac{v^2}{r}$.

Mit den oben genannten Werten erfährt der Fahrer eine Beschleunigung von $27,8 \text{ m/s}^2$, das entspricht ungefähr $3g$, also der dreifachen Erdbeschleunigung.

Versuch V.3: Das „Säge“-Blatt:

Bei diesem Versuch wird ein rundes Blatt Papier über eine in der Mitte befestigte Achse einer Bohrmaschine schnell in eine Kreisbewegung versetzt. Somit bewegt sich jeder einzelne Punkt des Papiers mit einer Winkelgeschwindigkeit. Quadratisch mit dieser Winkelgeschwindigkeit steigt die Beschleunigung an, welche die Punkte des Papiers erfahren. Diese Beschleunigung hat eine stabilisierende Kraft zur Folge. Diese Kraft ist bei entsprechender Wahl der Antriebsgeschwindigkeit so groß, daß das Blatt ausreichend stabilisiert wird, um Holz zu zersägen.

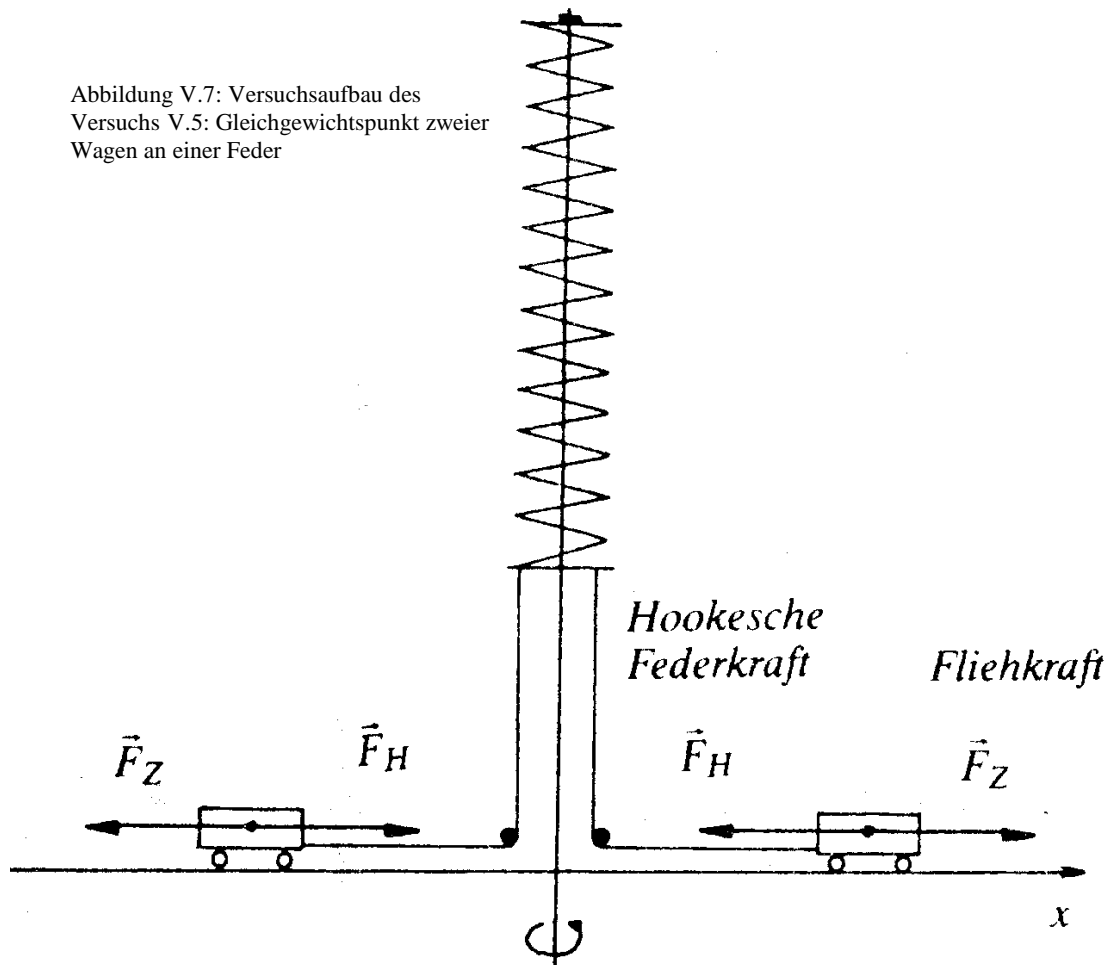
Versuch V.4: Rollende Kette

Dasselbe Prinzip kann man nutzen, um eine Metallkette in eine Kreisform zu bringen und zu stabilisieren. Hierfür wird eine Scheibe über eine Bohrmaschine angetrieben. Auf die Scheibe ist eine Metallkette gespannt. Nachdem die Kette schnell genug angetrieben wurde, kann sie von der Scheibe gelöst werden. Sie rollt nun durch die Radialkraft stabilisiert tangentiell los. Die Energie der Kette reicht, um bei Anstoßen an ein Hindernis einige Meter weit und hoch zu fliegen.

Versuch V.5: Gleichgewichtspunkt zweier Wagen an einer Feder

Bei dieser Versuchsanordnung stehen sich zwei Wagen gegenüber auf einer Schiene, auf deren Mitte senkrecht ein Stab befestigt ist, an dessen Ende eine Feder über den Stab herab hängt.

Abbildung V.7: Versuchsaufbau des Versuchs V.5: Gleichgewichtspunkt zweier Wagen an einer Feder



Über Umlenkrollen sind die Wagen an die Feder angehängt, sie erfahren also die Federrückstellkraft (Hook'sche Kraft \vec{F}_H), die sie zum Mittelpunkt der Schiene hin beschleunigt. Die Schiene kann über eine vertikale Achse in gleichmäßige Rotation mit verstellbarer Winkelgeschwindigkeit versetzt werden. Auf die Wagen wirkt nun zusätzlich die Fliehkraft, welche die Wagen von der Achse weg beschleunigen. Bei einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit stellt sich ein Gleichgewicht ein, das unabhängig von der Entfernung x der Wagen von Mittelpunkt der Schienen ist. Diese Winkelgeschwindigkeit läßt sich leicht berechnen:

Die entgegengesetzt wirkenden Kräfte $\vec{F}_H = \vec{F}_r$ müssen betragsmäßig gleich groß sein, damit die resultierende Kraft null ist und der Körper sich in Ruhe befindet. Mit den bekannten Formeln für die Hook'sche Kraft $F_H = Dx$ und die Fliehkraft $F_Z = m\omega^2 r$

und dem Radius r der Kreisbahn
 Feder über die Umlenkrolle folgt

$r = x$ gleich der Auslenkung der
 Dr.

Diese Gleichung ist unabhängig von der Auslenkung r , was der Versuch auch zeigte.
 Umformulieren nach ω liefert den Ausdruck für die Winkelgeschwindigkeit, bei der das

Gleichgewicht eintritt:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Versuch V.6: Fliehkraftregler

Der Fliehkraftregler besteht aus zwei schweren Kugeln, die über eine Achse in Rotation versetzt werden können. Die Kugeln hängen an Stangen der Länge l , die an der angetriebenen Achse fest montiert sind. Zwei weitere Stangen der Länge s sind so mit der Achse verbunden, daß sie sich auf und ab bewegen lassen, wobei sie an den Kugeln festsitzen. In Rotation versetzt heben sich die Kugeln und damit das untere Gestänge bis zu einer bestimmten Höhe, bei der ein mit den Kugeln verbundener Leiter sich so weit nach oben bewegt, daß er den Kontakt zu seinem Stromkreis verliert und ihn somit durchtrennt. In diesem

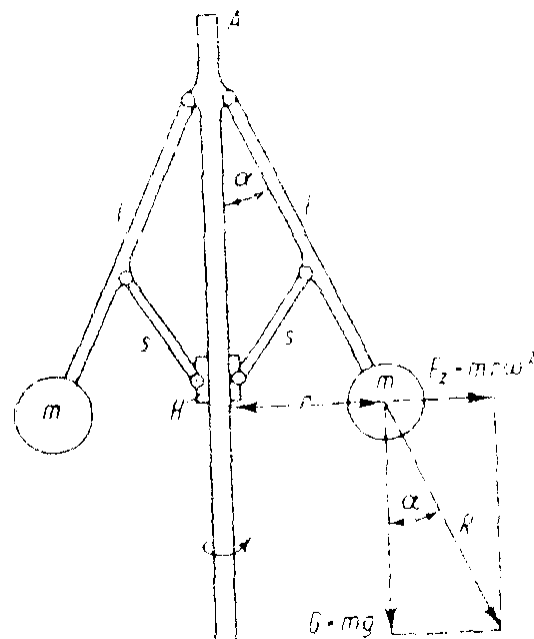


Abbildung V.8: Fliehkraftregler

Stromkreis hängt auch der Antrieb der Achse, so daß die Kugeln nicht mehr rotieren und sinken. Der Kontakt ist wieder hergestellt und die Kugeln heben sich wieder. Die ausgestellten Stangen bilden mit der Achse den Winkel α , die Kugeln seien den Abstand r von der Achse entfernt..

Im Gleichgewicht übt die Stange auf die Kugel eine Zwangskraft \vec{F} aus, die betragsmäßig der vertikalen Komponente des resultierenden Kraftvektors \vec{R} aus der Gewichtskraft \vec{G} und der Fliehkraft \vec{F}_Z entsprechen muß. Die geometrische Betrachtung der wirkenden Kraftkomponenten zeigt, daß für den Ausstellwinkel α die Beziehung gilt:

$$\tan \alpha = \frac{\omega^2 r}{g}$$

V.3 Drehmoment und Drehimpuls

Für gradlinige Bewegungen hatten wir das zweite Newtonsche Axiom kennengelernt als

2. Newtonsches Axiom.

Daraus hatten wir abgeleitet, daß in einem abgeschlossenen System, in dem der Impuls konstant ist, die resultierende der äußeren Kräfte null sein muß.

Dieses Gesetz soll im Folgenden auf Rotationen übertragen werden. Dazu betrachten wir zunächst die Definition der Kraft und des Impulses.

V.3.1 Übertragung des Kraftbegriffes

Als erstes Beispiel einer nicht-linearen Bewegung hatten wir das Pendel kennengelernt. Auf das Pendel wirken Fadenspannkraft und Gravitationskraft. Die Komponente der Gravitationskraft, die entlang des Fadens wirkt, wird durch die Fadenspannkraft kompensiert; für die Bewegung wichtig ist also allein die Komponente senkrecht zum Faden. Wir hatten diese Komponente als

$$\vec{G}_\perp = \vec{G} \sin \alpha$$

errechnet.

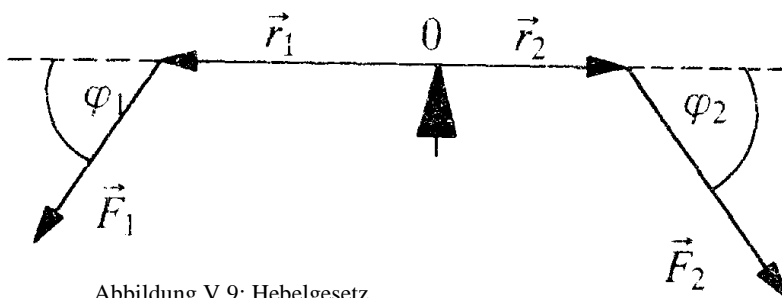


Abbildung V.9: Hebelgesetz

Ein anderes Beispiel sind die Hebelgesetze. Hier wissen wir, daß nur das Produkt aus Hebelarm und der Kraftkomponente

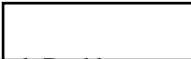
senkrecht zum Hebelarm für eine Drehung wirksam sind. Zieht man mit einer Kraft \vec{F}_1 unter einem beliebigen Winkel φ_1 zum Hebel ein Ende des Hebels nach unten, so bewirkt nur die Kraftkomponente senkrecht zum Hebel eine Drehung, die andere Komponente wird analog zum Pendel durch die Zwangskraft des Hebels kompensiert. Diese Komponente kann direkt abgelesen werden als

$$\vec{F}_{1\perp} = \sin \varphi_1 \vec{F}_1$$

Analog wirke auf der zweiten Seite $\vec{F}_{2\perp} = \sin \varphi_2 \vec{F}_2$ des Hebels die Kraft \vec{F}_2 unter einem Winkel φ_2 . Gleichgewicht herrscht, wenn das Produkt aus wirksamer Kraft und Hebelarm gleich ist, also

$$r_1 \sin \varphi_1 \vec{F}_1 = r_2 \sin \varphi_2 \vec{F}_2 .$$

Allgemein kann man schließen, daß die eine Rotation bewirkende Kraftkomponente einer unter dem Winkel φ angreifenden Kraft \vec{F} die Form hat



$$\tau = r \sin \varphi F.$$

Wie die Kraft selbst, ist auch diese Größe eine Vektorgröße. Ändert man die Richtung der angreifenden Kraft, also den Winkel, oder die Richtung des Vektors, so ändert sich auch die Richtung von M. Wie in Kapitel II gezeigt, nutzt man zur Beschreibung eines Vektors, der seinerseits Produkt zweier Vektoren ist, das Vektor-, bzw. Kreuzprodukt. Damit können wir die Größe M vektoriell definieren als

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Dieses Übertragung des Kraftbegriffes auf die Rotation nennen wir Drehmoment.¹

Definition V.6: Das Drehmoment ist eine Vektorgröße, es steht senkrecht auf der Ebene, die durch \vec{r} und \vec{F} aufgespannt wird:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}. \text{ Sein Betrag ist.}$$

Die Definition des Kreuzproduktes besagt, daß das Drehmoment immer senkrecht aus Kraftvektor und Radius der Kreisbewegung stehen muß.

Wird z.B. eine Masse an einem Faden befestigt, der Faden im Ursprung eines Koordinatensystems festgehalten wird, so zeigt $\vec{\tau}$ in Richtung der Drehachse. Dies gilt aber nur für dieses spezielle Beispiel, die allgemeine Richtung von $\vec{\tau}$ muss für jede Bewegung neu untersucht werden.

Einheitenbetrachtung:

$$[\tau] = [r] [F] = 1 \text{ Newton-Meter} = 1 \text{ Nm}$$

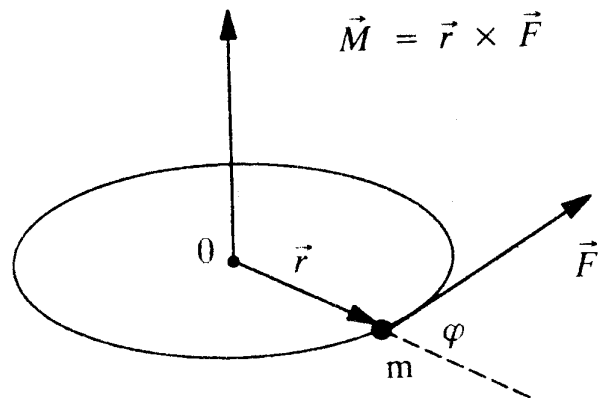


Abbildung V.10: Drehmoment, \vec{M} entspricht $\vec{\tau}$

¹ Das Drehmoment wird mit $\vec{\tau}$ bezeichnet, vom englischen Ausdruck *torque*. In einigen Büchern und Abbildungen hingegen ist auch die Bezeichnung M für das Drehmoment üblich.

V.3.2 Übertragung des Impulsbegriffes

Wir wollen nun eine Erhaltungsgröße analog zum Impuls für die Rotation definieren. Hierfür setzen wir versuchsweise analog zu der Übertragung des Drehmomentes $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Diese Größe nennt man Drehimpuls, sie steht senkrecht auf dem Radiusvektor und dem Impuls und damit auf der Geschwindigkeit des Massepunktes.

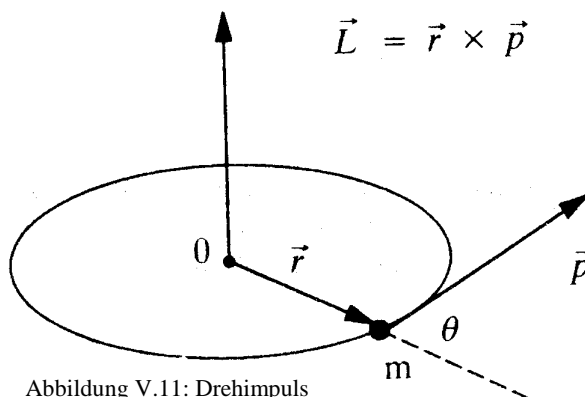


Abbildung V.11: Drehimpuls

Wir definieren diese Größe unter Vorbehalt und überprüfen danach, ob mit ihr das zweite Newtonsche Axiom erfüllt ist.

Definition V.7: Der Drehimpuls ist eine Vektorgröße, er steht senkrecht auf der Ebene, die durch \vec{r} und \vec{p} aufgespannt wird:

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Sein Betrag ist.

Einheitenbetrachtung:

$$[L] = [r] [p] = 1 \text{ m} \cdot \text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}. \text{ Mit } 1 \text{ N} = \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ folgt } [L] = 1 \text{ Nms}.$$

Bei der oben diskutierten Drehbewegung eines Massepunktes an einem Faden steht der Impuls senkrecht auf dem Radius und der Drehimpuls zeigt in Richtung der Drehachse.

V.3.3 Formulierung des 2. Newtonschen Axioms für die Rotation

Wir versuchen jetzt, das zweite Newtonsche Axiom mit den neu definierten Größen zu formulieren.

$$\begin{aligned} \text{Aus} \quad & \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \\ \text{folgt mit } \vec{p} = m\vec{v} \quad & \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \\ \Leftrightarrow \quad & \vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v}). \end{aligned}$$

Die Änderung des Drehimpulses mit der Zeit läßt sich über Differentiation berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \\ \Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} &= m(\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a}). \end{aligned}$$

Wegen $\vec{v} \times \vec{v} = 0$ ² $\Leftrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a})$.

Mit $\vec{F} = m\vec{a}$ $\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Merke: Die zeitliche Änderung des Drehimpulses mit der Zeit entspricht dem wirkenden Drehmoment:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}.$$

Diesen Sachverhalt kann man nun analog zur gradlinige Bewegung interpretieren als die Tatsache, daß ein Drehmoment, das auf einen Körper angewandt wird, eine Änderung des Drehimpulses bewirkt. Wirkt in einem abgeschlossenen System kein resultierendes Drehmoment, so ist der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße.

Satz von der Drehimpulserhaltung:

Wirkt in einem abgeschlossenen System kein resultierendes Drehmoment, so ist der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.}$$

Diese Erhaltungsgröße hat seinen Grund in der Invarianz der Naturgesetze gegen Drehungen im Raum. Er spielt eine sehr wichtige Rolle in der Physik, besonders in der Atom- und in der Kernphysik.

Greift z.b. eine Kraft im Schwerpunkt eines rotierenden Teilchens an, so ist der Drehimpuls erhalten, obwohl eine Kraft einwirkt. Dies kann man so erklären, daß die Kraft parallel zum Radiusvektor der Kreisbewegung steht und das aus der Kraft resultierende Drehmoment deshalb null ist.

$$\vec{F} \parallel \vec{r} \Rightarrow \vec{F} \times \vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{\tau} = 0.$$

² Diese Beziehung ist leicht aus der Definition des Kreuzproduktes zu beweisen: Der Betrag des Kreuzproduktes ist. Da ein Vektor mit sich selber einen Winkel von 0° einschließt gilt mit $\sin 0^\circ = 0$ $|\vec{v} \times \vec{v}| = |\vec{v}||\vec{v}|0$. Das ist gleich null: $|\vec{v} \times \vec{v}| = 0$. Damit ist auch der resultierende Vektor der Nullvektor.

V.3.4 Zusammenfassung der wichtigsten Vektorgrößen der Rotation

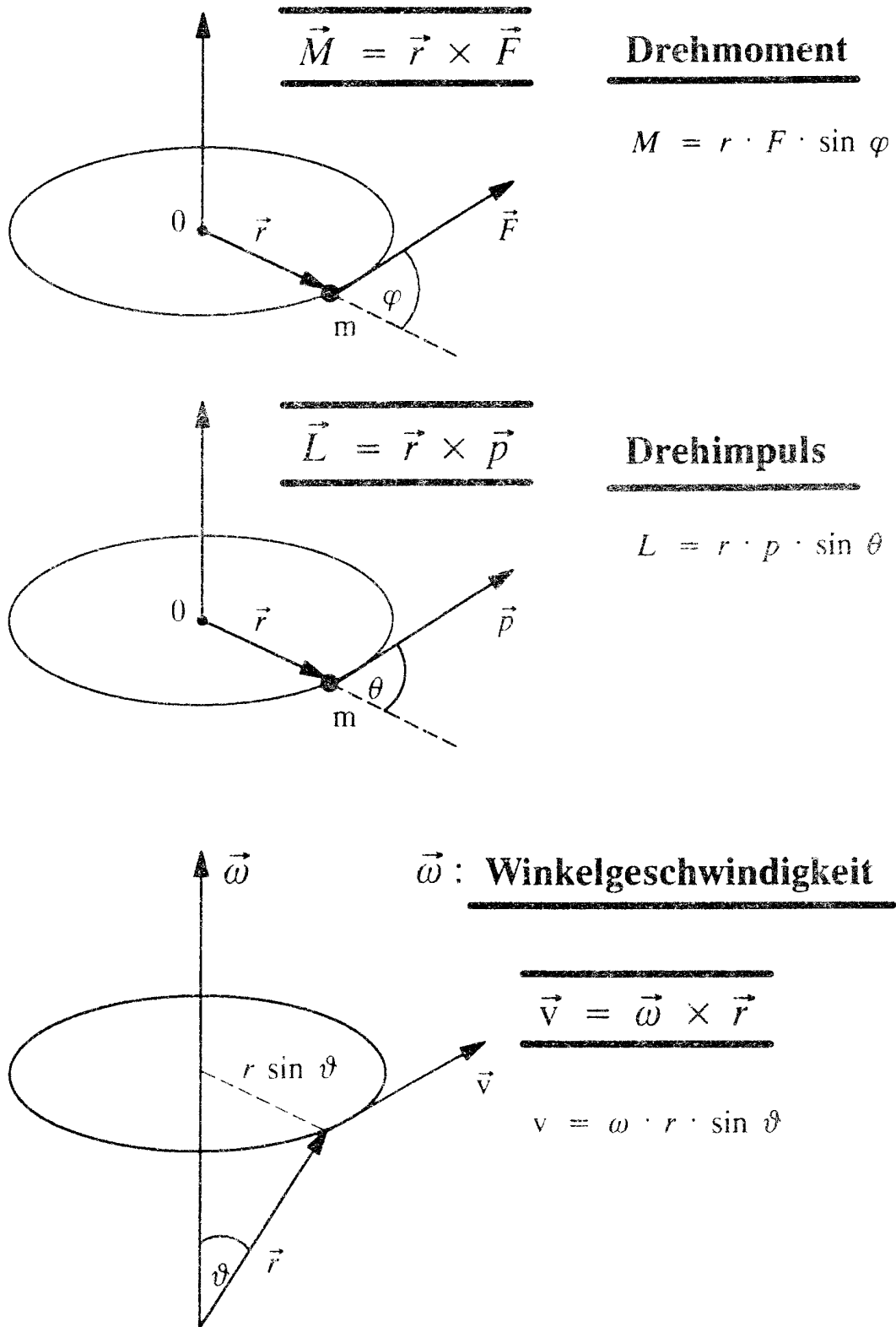


Abbildung V.12: Zusammenfassende Darstellung von Drehmoment (hier mit M bezeichnet), Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit

V.4 Planetenbewegung, Kepler'sche Gesetze und die Gravitation

V.4.1 Vom geozentrischen Weltbild zur Kopernikanischen Wende



Abbildung V.13: Rückläufige Bahn des Mars

Betrachtet man viele Nächte hindurch den Mars und zeichnet seine Position im Himmel in regelmäßigen Abständen ein, so kann man die Laufbahn des Mars relativ zur Erde ermitteln. Dieser Versuch führt jedoch zu einer Bahn, die keine einfache geometrische Gestalt aufweist. Der Mars scheint eine rückläufige Bewegung auszuführen.

Bereits vor 5000 Jahren begannen die Ägypter, Babylonier, Chinesen und Inder die Erscheinungen am Himmel systematisch zu beobachten. Je nach Weltbild wurde versucht, die Bewegung der Planeten um die Erde zu beschreiben.³

Die beiden griechischen Philosophen **Aristoteles** (384 - 322 v.

Chr.) und **Plato** (427 - 347 v. Chr.) behaupteten, die Sterne bewegten sich auf der vollkommensten aller Bahnen, dem Kreis, einmal am Tag um die Erde. Dabei, so postulierten sie, hätten die Sterne eine dem Betrag nach konstante Geschwindigkeit.

Beobachtete Abweichungen von der Kreisbahn, wie die des Mars, versuchte **Ptolomäus** um 150 n. Chr. durch Zusatzannahmen zu deuten. Er behauptete, durch Überlagerung einer kleineren Kreisbahn des Planeten mit der großen Kreisbahn um die Erde entstünden die zu

beobachteten Epizyklen. Dieses System, das bis in die Neuzeit Gültigkeit besaß, wird heute **geozentrisches, ptolemäisches Weltbild** genannt.

LIBRI COSMO. Fo.V.
Schemu huius praeiustae diuisionis
Sphaera:um.

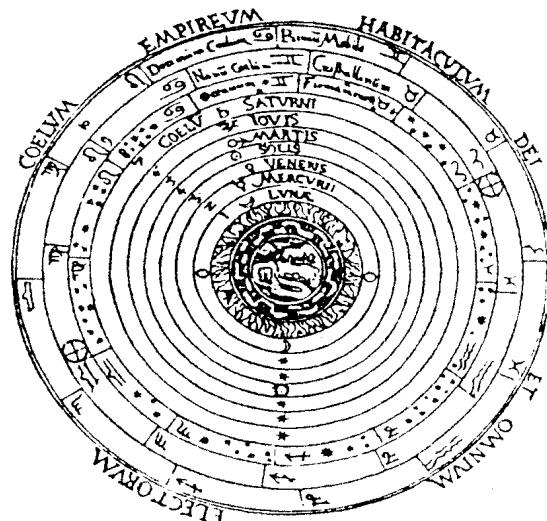


Abbildung V.14: Aristotelischer Kosmos

³ Erstaunlicherweise behauptete Astriarch um 270 v. Chr. bereits, die Fixsterne seien in Ruhe und deren scheinbare Bewegung werde nur durch die Rotation der Erde um die eigene Achse vorgetäuscht. Diese Lehre konnte sich jedoch nicht durchsetzen: Nach Revision der Vorstellung, die Erde sei eine Scheibe, ging man seit ca. 380 v. Chr. vom geozentrischen Weltbild aus.

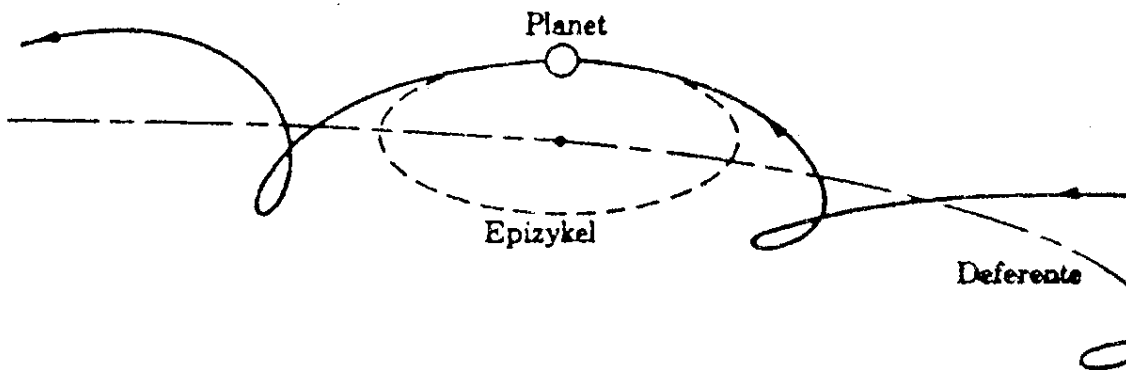
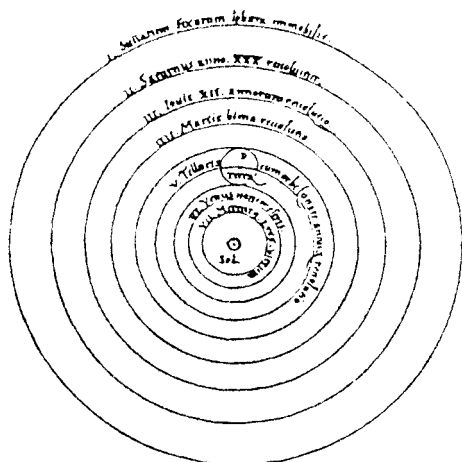


Abbildung V.15: Ptolemäische Vorstellung komplizierter Kreisbewegungen: Kreise auf Kreisen verursachen Epizyklen

Noch im 16. Jh argumentierte man, die Erde könne sich nicht um sich selbst drehen, da sonst eine Kanonenkugel bei einer angenommenen Drehung von West nach Ost in Richtung Westen viel weiter fliegen müsse als nach Osten.

NICOLAI COPERNICI
 ner, in quo terram cum orbe lunari tanquam epicyclo contineri
 diximus. Quinto loco Venus nono mense reducitur, Sextum
 deniq; locum Mercurius tenet, octuaginta dierum spacio circū
 currens, in medio uero omnium refidet Sol. Quis enim in hoc



pulcherimo templo lampadem hanc in alio uel meliori loco po-
 neret, quam unde totum simul possit illuminare. Siquidem non
 inepte quidam iuccernam mundi, alij mentem, alij rectorem uo-

Abbildung V.16: Heliozentrischer Kosmos

komplizierten Hilfsbewegungen.

Dieser Theorie widersprachen erst **Kopernikus** (1473 - 1543 n. Chr.) und **Galilei**, dennoch gingen beide von Planetenbewegungen auf Kreisbahnen aus. Dem geozentrischen Weltbild widersprach Kopernikus als erster, als er in seinem Werk „De revolutionibus orbium coelestium“⁴ 1542 die Hypothesen aufstellte, die Erde drehe sich täglich einmal um die eigene Achse und dadurch erscheinen die Bewegungen der Planeten und die Erde bewege sich um die Sonne. Dieses Weltbild wird **heliozentrisches Weltbild** genannt. Durch das Beharren auf die Kreisbahnen der Planeten erforderte die Beschreibung der Beobachtungen auch nach der Kopernikanischen Wende noch die

V.4.2 Die Kepler'schen Gesetze

Den endgültigen Bruch mit dieser Vorstellung schaffte der Däne **Tycho Brahe** (1546 - 1601), der die Marsbahn mit einer Präzession von ungefähr einer Bogenminute ausmaß.⁵ Brahe selbst fand jedoch die Fixsternparallaxe noch nicht und nahm so die Erde als ruhend an.

Johannes Kepler (1571 - 1630) wertete nach dem Tod seines Lehrers dessen Messungen aus und fand, daß die Marsbahn keinen Kreis, sondern eine Ellipse beschreibt. Er stellt anhand dieser Entdeckung drei Gesetze über die Planetenbewegung auf. Mit diesen drei Gesetzen kann die gesamte Kinematik der Planetenbewegung zusammengefaßt werden:

1. Kepler'sches Gesetz: Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Insbesondere umkreist die Erde die Sonne auf einer Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. Der zweite Brennpunkt der Ellipse hat in Keplers Theorie keine physikalische Bedeutung. Dieser Satz bedeutet, daß die zwischen den Planeten wirkende Kraft eine anziehende Kraft sein muß, weil sich bei einer abstoßenden Kraft die Planeten voneinander entfernen müßten

2. Kepler'sches Gesetz: Der von der Sonne zum Planeten gezogene Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Mit diesem Gesetz wich Kepler auch von der Theorie der Griechen ab, die Geschwindigkeit der Planeten auf ihrer Bahn sei dem Betrag nach konstant. Er erkannte, daß die Planeten sich in Sonnennähe (Perihel) schneller bewegen müssen als in Sonnenferne (Aphel).

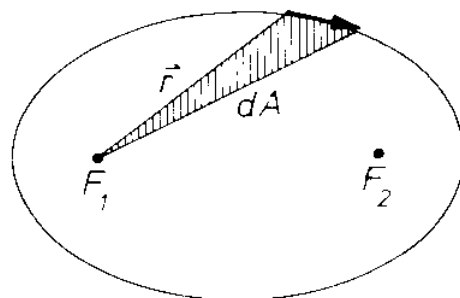


Abbildung V.17: 2.KG: Flächensatz

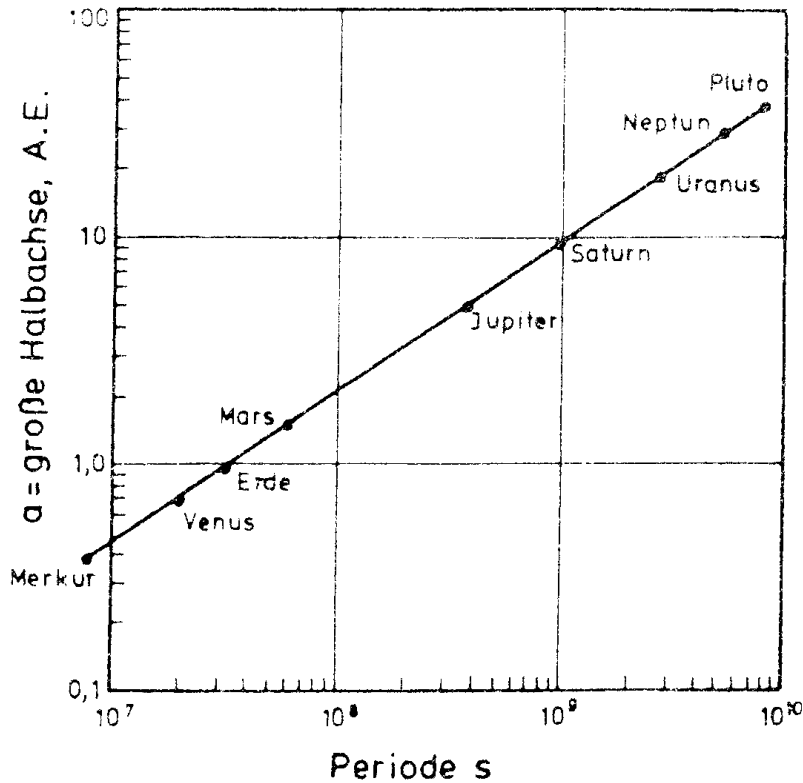
⁴ aus dem Lateinischen übersetzt: „Über die Umdrehung der Himmelssphären“

⁵ Diese genaue Messung ist deshalb so erstaunlich, weil Tycho Brahe diese mit bloßem Auge vornehmen mußte. Das Fernrohr existierte noch nicht.

3. Kepler'sches Gesetz: Die Quadrate der Umlaufzeiten T_1 und T_2 zweier beliebiger Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen a_1 und a_2 der

Bahnellipsen:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$



Erst Newton versuchte aus dieser Beschreibung der Kinematik der Planetenbewegung auf die Art der wirkenden Kräfte rückzuschließen. Er begründete damit die dynamische Beschreibung der Planetenbewegung.

Abbildung V.18: Planeten liegen auf einer Geraden, die das dritte Kepler'sche Gesetz benennt.

V.4.3 Herleitung des Gravitationsgesetzes aus den Kepler'schen Gesetzen

Fassen wir die wichtigsten Aussagen der Kepler'schen Gesetze einmal anders formuliert zusammen:

1. Kepler'sches Gesetz: Die wirkende Kraft ist anziehend, da sonst keine geschlossenen Bahnen existieren könnten.
2. Kepler'sches Gesetz: Die wirkende Kraft ist eine Zentralkraft. Eine Zentralkraft ist dabei eine Kraft, die stets in Richtung des Mittelpunktes der Kreisbewegung zeigt und deren Funktion vom Radius der Kreisbahn abhängt. Allgemein kann man eine Zentralkraft schreiben als:

Definition V.8: Eine Zentralkraft hat stets die Form

$$\vec{F}_R = \frac{\vec{r}}{r} \cdot f(r) .$$

Um diese Formulierung zu beweisen wählen wir den Rückkehrschluss:

Wir beweisen, daß aus der Annahme, die wirkende Kraft sei eine Zentralkraft der von Kepler formulierte Flächensatz folgt:

Angenommen, eine Masse m bewege sich unter

Einfluß einer Zentralkraft

$$\vec{F}_R = -\frac{f(r)}{r^2} \cdot \vec{r}.$$

↪

Dann wirkt das Drehmoment

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = \frac{f(r)}{r} \vec{r} \times \vec{r}$$

mit $\vec{r} \times \vec{r} = 0$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = 0$$

Mit

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \text{const.} -$$

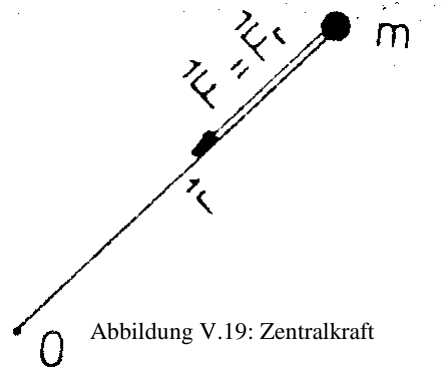


Abbildung V.19: Zentralkraft

Das heißt, für Zentralkräfte ist allgemein der Drehimpuls erhalten.

Untersuchen wir nun den Zusammenhang mit dem Flächensatz. Qualitativ hatten wir bereits gesagt, daß die Geschwindigkeit größer sein muß, je näher der Planet der Sonne ist. Oben

haben wir errechnet, daß $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$ konstant ist.

Zur quantitativen Berechnung zeichnen wir einmal die Fläche auf, die der Fahrstrahl überstreicht:

Die schraffierte Dreiecksfläche berechnet sich als die Hälfte des Produktes der Höhe h und der Strecke r :

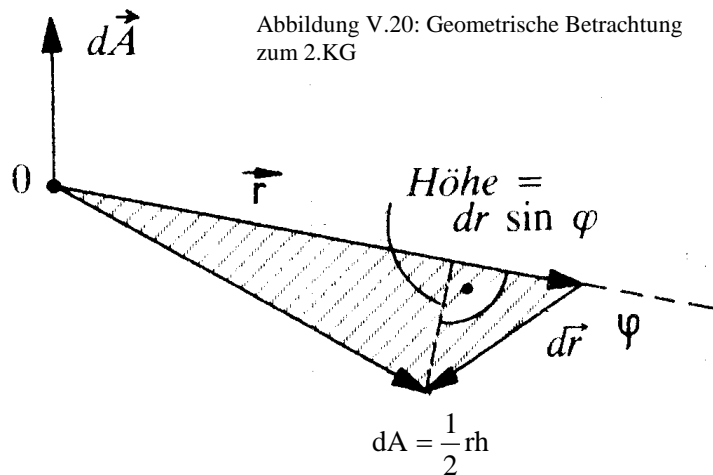


Abbildung V.20: Geometrische Betrachtung zum 2.KG

$$dA = \frac{1}{2} rh$$

$$\text{mit } h = dr \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad dA = \frac{1}{2} r dr \sin \varphi.$$

Wir definieren einen Flächenvektor, der senkrecht auf der Fläche steht und dessen Betrag der

$$\text{Maßzahl der Fläche entspricht} \quad d\vec{A} = \frac{1}{2} (\vec{r} \times d\vec{r}).$$

Die zeitliche Ableitung dieses Vektors, also die Änderung der Fläche, die der Radiusvektor pro Zeit überstreicht ist

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{r} \right)$$

Mit $d\vec{r} \times d\vec{r} = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right)} \quad \parallel$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit dem Drehimpuls:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

mit $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$$\Leftrightarrow \vec{L} = m\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\vec{L}dt}{dt} = m \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{r} \right)$$

mit $d\vec{r} \times d\vec{r} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\vec{L}dt}{dt} = m \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L}dt = m(\vec{r} \times d\vec{r})} \quad \cdot$$

Der Vergleich von \parallel und \cdot zeigt, daß gilt:

$$d\vec{A} = \frac{1}{2m} \vec{L}dt$$

Mit $\vec{L} = \text{constant}$ folgt:

$$\boxed{dA \sim dt.} \quad \textcircled{R}$$

Das bedeutet: In gleichen Zeit dt überstreicht der Vektor \vec{r} gleiche Flächen dA .

Umgekehrt folgt aus \textcircled{R} auch \neg , denn wenn \neg nicht gilt, gelten auch - und damit auch \textcircled{R} nicht, also gilt in beide Richtungen:

2. Kepler'sches Gesetz: Flächensatz ÖZentralkraft

Die r -Abhängigkeit $f(r)$ kann am einfachsten aus dem 3. Kepler'schen Gesetz geschlossen werden:

Hierzu gehen wir zur Vereinfachung von Kreisbahnen aus, die Halbachsen a aus der Formulierung des Kepler'schen Gesetzes seien also die Radien r eines Kreises.

Mit dieser Notation lautet das 3. Kepler'sche Gesetz :

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

umformuliert folgt für alle T_i und a_i

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} = \frac{T}{r} = k$$

Die Radialbeschleunigung berechnet sich aus

$$a_r = \omega^2 r$$

$$\text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad a_r = \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

$$\text{mit } \frac{r^3}{T^2} = k \quad \Rightarrow \quad a_r = \frac{4\pi^2}{k} \frac{1}{r^2}$$

Die Kraft auf den Planeten der Masse m kann man dann angeben mit

$$F_p = ma_r$$

$$\Rightarrow \quad F_p = m \frac{4\pi^2}{k} \frac{1}{r^2}$$

Da k eine planetenunabhängige Konstante ist folgt direkt:

$$F_p \sim \frac{m}{r^2}.$$

Durch das 3. Newtonsche Axiom wissen wir, daß dieselbe Kraft entgegen gerichtet auf die

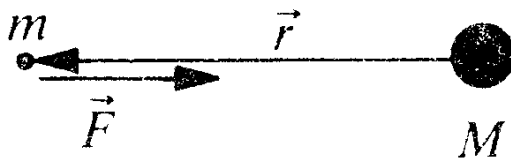
$$\text{Sonne der Masse } M \text{ wirkt:} \quad F_s = F_p \sim \frac{m}{r^2}.$$

Zusammengefaßt gilt dann

$$F_s = F_p = .$$

V.4.4 Das Gravitationsgesetz

Diese Gleichung gibt den Betrag der Kraft an, die von einer beliebigen Masse M auf eine andere Masse m ausgeübt wird. Die Richtung der Kraft wird festgelegt durch den Vektor, der



die beiden Massen verbindet. Hierbei definiert man den Vektor \vec{r} von der größeren zur kleineren Masse. Die Richtung der Kraft wird mit dieser Konvention angegeben durch den Einheitsvektor in

Richtung der Verbindung. Somit ist die Kraft negativ, sie wirkt entgegen des Vektors, denn die kleine Masse wird angezogen und bewegt sich damit entgegengesetzt zum so definierten Einheitsvektor.

Vektoriell kann man die Gleichung der Kraft einer Masse M auf eine andere Masse m

schreiben: $\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$. Dieses Gesetz wird nach seinem Entdecker *Newtonsches*

Gravitationsgesetz genannt.

Newtonsches Gravitationsgesetz:
Eine Masse M übt auf eine andere Masse m, die sich im
Abstand r befindet, eine Kraft \vec{F} aus, für die gilt:

$$\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Um diese Kraft zu berechnen, müssen die Massen der Körper bekannt sein, ihr Abstand voneinander und die Konstante γ . Die Konstante gilt für beliebige Körper, sie muß jedoch einmal bestimmt werden können. Um diese universelle Konstante ermitteln zu können, muß man eine Kraft kennen, die zwischen zwei Massen wirkt, ebenfalls die Massen und den Abstand.

Diese Überlegung macht sich der Engländer Cavendish (1731 - 1810) zunutze. Er erfand 1798 einen Versuch, bei dem die wirkende Gravitationskraft auf eine zweite Weise, über die daraus resultierende Bewegung der Massen, berechnet werden kann. Die so ermittelte Kraft kann dann in das Newtonsche Gravitationsgesetz eingesetzt werden und die Konstante γ kann mit Kenntnis der anderen Faktoren berechnet werden.

Versuch V.7: Cavendish Drehwaage

Ein waagerechter Stab trägt an den Enden zwei kleine Bleikugeln der Masse m. Dieser Stab ist in der Mitte an einem dünnen Faden, dem Torsionsfaden, aufgehängt und kann deshalb in dem Querschlitz der Gravitationsdrehwaage frei schwingen. Am Stab ist ebenfalls mittig ein Spiegel befestigt, so dass die horizontalen Bewegungen durch einen reflektierten Laserstrahl

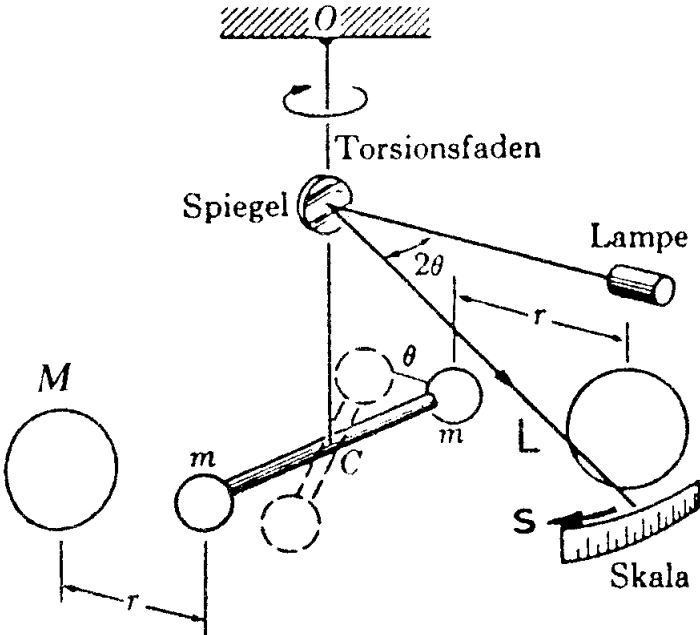


Abbildung V.21: Schema der Cavendish-Drehwaage

vergrößert an der gegenüberliegenden Wand sichtbar gemacht werden können. Zunächst sind zwei große Kugeln der Masse M ($M \gg m$) symmetrisch zu den kleinen Kugeln in geringem Abstand angebracht.

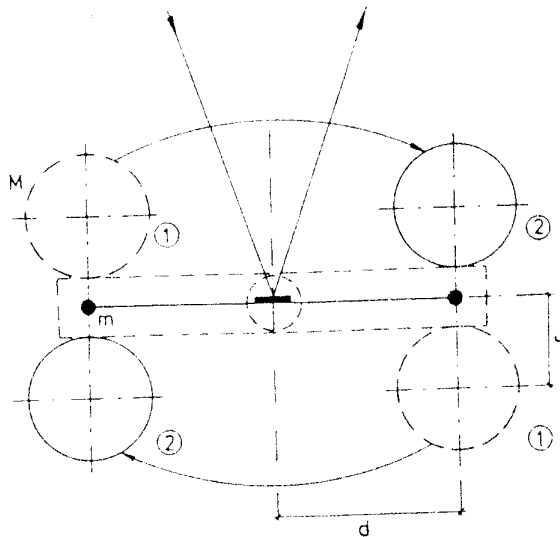


Abbildung V.22: Aufsicht

In dieser Stellung \neg wird im Gleichgewicht die Anziehungskraft \vec{F} von M auf m durch die Verdrillungsspannung des Aufhängefadens kompensiert $\vec{F} = -\vec{F}_R$. Wenn sich der Zeiger auf das Gleichgewicht eingestellt hat werden die großen Kugeln in die Lage \neg geschwenkt. Jede der großen Kugeln übt nun auf die kleine eine Gravitationskraft \vec{F} aus. Dadurch wirkt jetzt die Anziehungskraft von M auf m in die entgegengesetzte Richtung und \vec{F} und \vec{F}_R addieren sich. Die nun wirkende

Kraft des Betrags $F_N = 2F$ erzeugt nach Newton eine Beschleunigung a .

Mit $F_N = ma$ und $F_N = 2F$ wirkt die Beschleunigung

$$a = \frac{2F}{m}.$$

Die wirkende Kraft läßt sich mit dem Gravitationsgesetz schreiben als

$$F = \gamma \frac{Mm}{r^2}$$

Für die Beschleunigung folgt:

$$a = \frac{2}{m} \gamma \frac{Mm}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow a = 2\gamma \frac{M}{r^2}. \quad \neg$$

Die Bewegung mit dieser Beschleunigung wird über den Lichtstrahl vergrößert an die Wand projiziert. Die geometrische Betrachtung des Strahls zeigt die Abhängigkeit des Winkels, um den der Spiegel gedreht wird, von der Bewegung der Kugeln. Für den Drehwinkel des Spiegels gilt:

$$\theta = \frac{x}{d},$$

wenn der Weg der kleinen Kugeln mit x und ihr Abstand von der Achse d genannt wird. Der Reflexionswinkel des Strahls wird um 2θ geändert. Mit L als Abstand des Spiegels von der Projektionsfläche und s als Weg des Lichtzeigers auf der Wand gilt

$$\frac{s}{L} = 2\theta.$$

$$\text{Mit } \theta = \frac{x}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{L} = \frac{2x}{d}$$

$$\text{für den Weg gilt dann} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{sd}{2L}.$$

Der Zusammenhang des Weges mit der Beschleunigung für konstante Beschleunigungen ist gegeben durch

$$a = \frac{2x}{t^2}.$$

$$\text{Mit } x = \frac{sd}{2L} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{sd}{Lt^2} \quad -$$

Ein Vergleich der beiden Ausdrücke \neg und $-$ zeigt, daß für die Beschleunigung gilt:

$$2\gamma \frac{M}{r^2} = \frac{sd}{Lt^2}.$$

Der Ausdruck für die zu bestimmende Konstante γ lautet dann:

$$\gamma = \frac{s}{t^2} \frac{dr^2}{2ML}.$$

Die Größen M , L , r und d sind durch den Aufbau gegeben, der Weg s und die dafür benötigte Zeit wird gemessen.

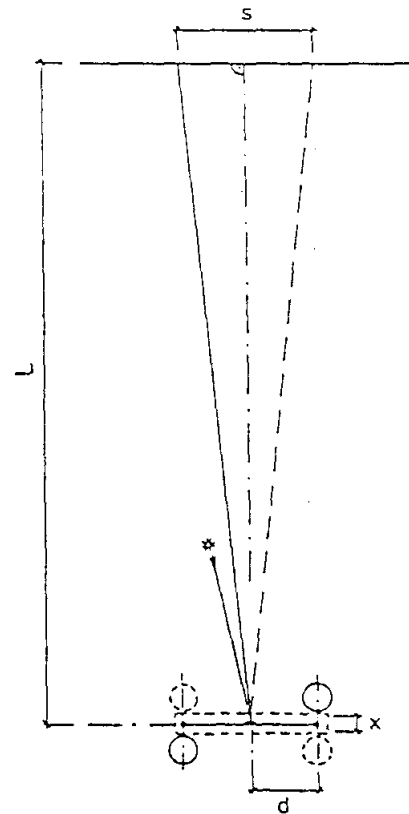


Abbildung V.23: Geometrische Betrachtungen

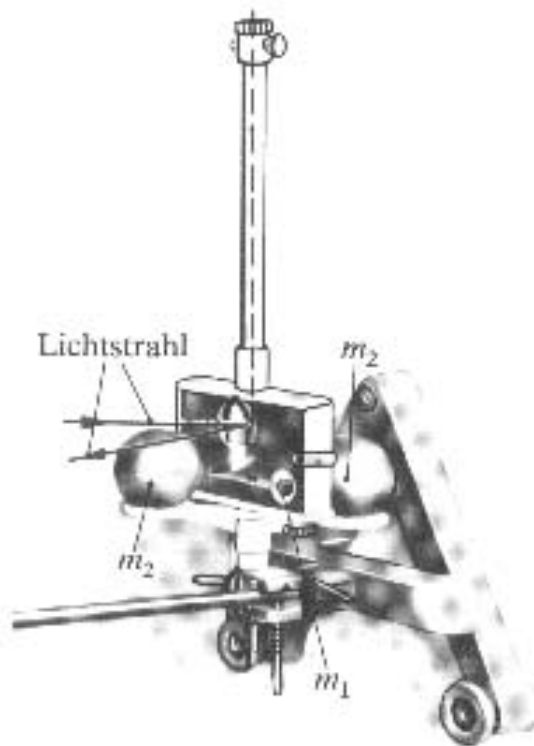


Abbildung V.24: Im Film gezeigte Drehwaage von Leybold

Da die Gravitationskräfte zwischen zwei Körpern mit kleiner Masse sehr klein sind, wir spüren sie im täglichen Leben nicht, ist es nötig, mit dieser Drehwaage Kräfte von 10^{-8} cN messen zu können. Die Präzision erfordert eine von Erschütterungen frei Umgebung. Deshalb ist dieser Versuch nur nachts durchzuführen, wenn kein Straßenverkehr herrscht. Leider kann der Versuch deshalb nur als Film vorgeführt werden.

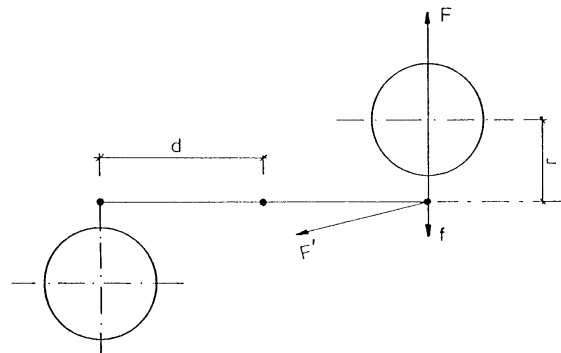
Die Messung in dem vorgeführten Film ergab den Wert.

Der Literaturwert der **Gravitationskonstanten** lautet

$$\gamma = 6,670 \pm 0,007 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} .$$

Bei solchen Drehwaagen liegt noch ein systematischer Fehler vor, der bei der Ermittlung des Wertes der Gravitationskonstanten mit berücksichtigt werden muß:

Die kleine Kugel wird ebenfalls von der anderen, weiter entfernten großen Kugel angezogen. Diese Kraft \vec{F}' ist zwar eine sehr kleine Kraft, führt aber dennoch zu der beobachteten Abweichung. Auch diese Kraft läßt sich über das Gravitationsgesetz berechnen:



$$F' = \gamma \frac{mM}{r^2 + 4d^2} .$$

Diese Kraft hat eine entgegengesetzte Komponente \vec{f} zur messenden Kraft:

$$f = \frac{r^3}{r^2 + 4d^2 \sqrt{r^2 + 4d^2}} \cdot \gamma \frac{mM}{r^2} .$$

Mit $F = \gamma \frac{Mm}{r^2} \Leftrightarrow f = \frac{r^3}{r^2 + 4d^2 \sqrt{r^2 + 4d^2}} \cdot F.$

Um den Faktor $1+\beta$, mit $\beta = \frac{r^3}{r^2 + 4d^2 \sqrt{r^2 + 4d^2}}$

muss unser Messergebnis also korrigiert werden. Mit unseren Werten folgt daraus

$\beta = 7,7 \cdot 10^{-2}$ und damit.

V.4.5 Gezeiten

Die Gravitationskräfte von Mond und Sonne sind Ursache für Ebbe und Flut, da sich das Wasser, das die Erde bedeckt, nahezu frei bewegen kann. Um die Gezeitenkräfte zu verstehen, betrachte man die Drehung des Mondes und der Erde um einen gemeinsamen Schwerpunkt. Dieser Schwerpunkt befindet sich 0,7 Erdradien vom Mittelpunkt der Erde entfernt, also noch innerhalb des Erdkörpers. Hierbei darf man sich die Verbindung Mond - Erde nicht wie ein Hantelmodell vorstellen, also mit starrer

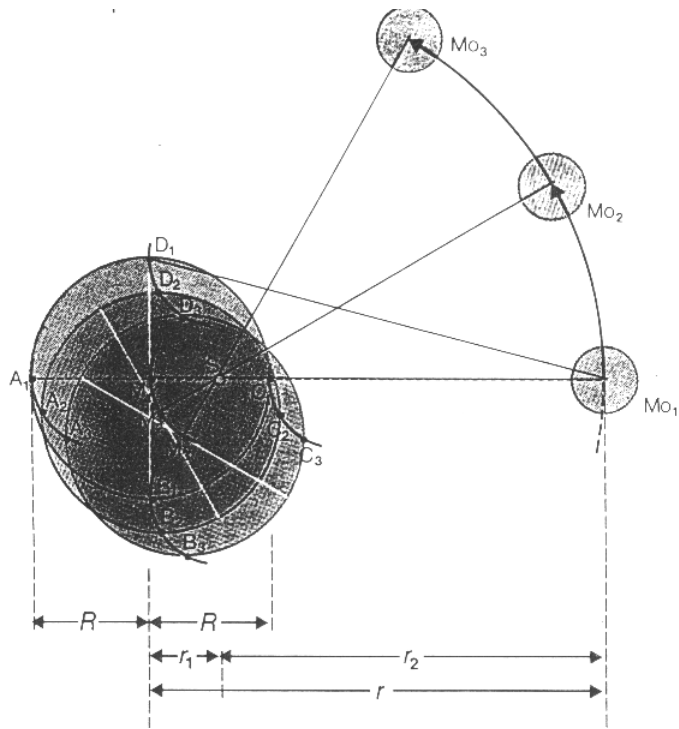
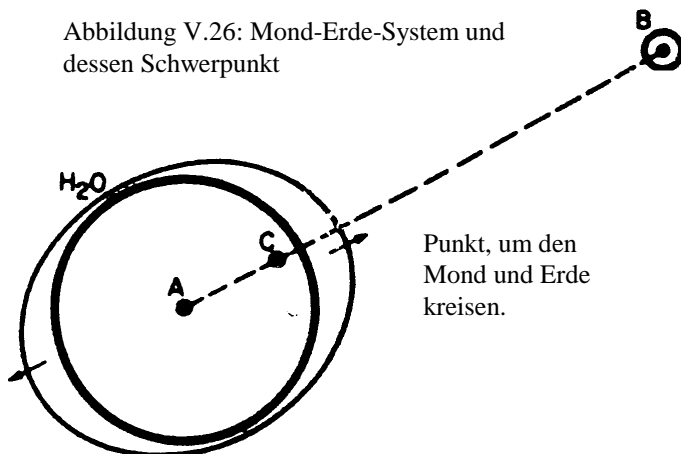


Abbildung V.25: Mond und Erde dürfen nicht als starre Hantel verstanden werden, die sich um den gemeinsamen Schwerpunkt dreht.

Abbildung V.26: Mond-Erde-System und dessen Schwerpunkt



Punkt, um den Mond und Erde kreisen.

Verbindungsachse. Die Kopplung über die Gravitation ist nur eine Fernkraftkopplung. In Wirklichkeit beschreibt jeder Punkt der Erde einen eigenen Kreis. Infolge der Drehung um den gemeinsamen Schwerpunkt von Mond und Sonne wirkt auf das Wasser an ihrer mondzugewandeten Seite

zusätzlich zur Gravitationskraft des Mondes eine größere Zentrifugalkraft in gleicher Richtung, während auf der mondabgewandten Seite beide Kräfte gegeneinander wirken. Dabei sind alle Fliehkräfte auf der Erde gleich zum Mond gerichtet, die Anziehungskräfte hängen jedoch vom variablen Abstand der beiden Planeten ab.

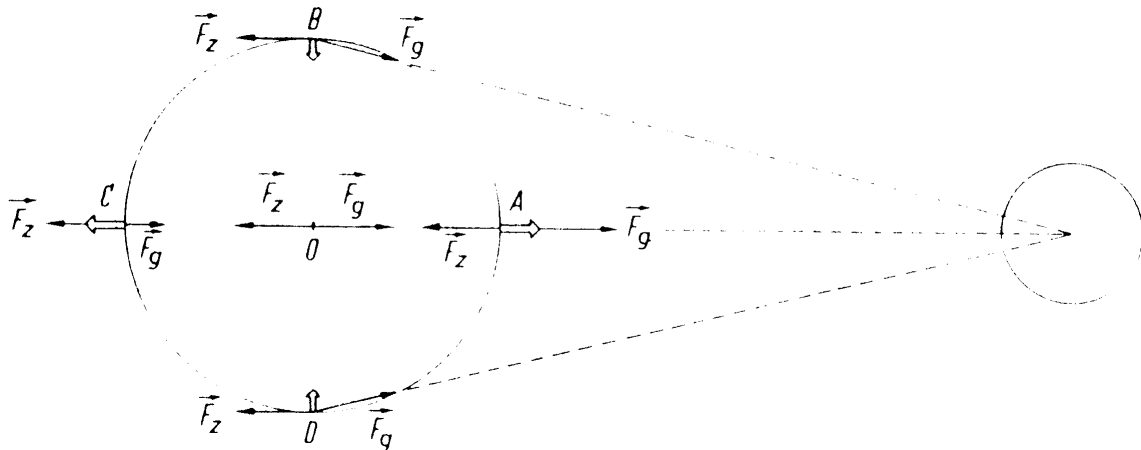


Abbildung V.27: Kräfte, die auf Wasserteilchen wirken

Aus der Mondmasse und dem Abstand vom Mond zur Erdmitte, $r = 60$ Erdradien, berechnet sich die Fliehkraft. Nun ist der mond nächste Punkt vom Mondmittelpunkt einen Erdradius weniger entfernt, also nur 59 Erdradien. Ein in diesem Punkt frei bewegliches Wasserteilchen erfährt nach dem Gravitationsgesetz durch die Mondanziehung die um den Faktor $(60/59)^2$ größere Gravitationskraft. Das Wasserteilchen wird also durch den Differenzbetrag der beiden Kräfte stärker zum Mond hin beschleunigt als der starre Erdkörper. In diesem Punkt bildet sich ein dem Mond zugewandter Flutberg. Ein auf der Erdoberfläche genau gegenüberliegendes Teilchen ist 61 Erdradien vom Mond entfernt und erfährt deshalb die kleinere Beschleunigung. Es bleibt hinter der Erde zurück, da es vom Mond weniger stark beschleunigt wird. So bildet sich in diesem Punkt ein vom Mond angewandter Flutberg aus. Unter beiden Flutbergen dreht sich die Erde im Laufe von 24 Stunden und 50 Minuten einmal durch (der Mond bleibt täglich etwa 50 Minuten hinter der Sonne zurück).

Die Rechnung für die Beschleunigungen ergibt ein Verhältnis zur Gravitationsbeschleunigung g

von

$$\frac{\Delta a}{g} = \frac{M_{\text{Mond}}}{M_{\text{Erde}}} \frac{r_{\text{Erde}}^3}{r_{\text{Mond}}^3} \approx 10^{-7}.$$

Die Sonne übt auf der Erde eine fluterzeugende Wirkung aus, die etwa 40% von der des Mondes beträgt. Steht die Sonne in gleicher Richtung wie der Mond, Neumond, oder dem Mond entgegen, Vollmond, dann addieren sich die Wirkungen der beiden Himmelskörper und es gibt eine Springflut. Steht die Sonne bei Halbmond unter 90° , so schwächen sich die

Wirkungen zu einer Nippflut. Im freien Ozean beträgt der Tidenhub nur etwa 79 cm. Im Innern von Buchten staut sich das Wasser und es entstehen Höhenunterschiede zwischen Ebbe und Flut von bis zu 12 Metern (Mont-Sant-Michel) oder sogar bis zu 21 Metern (Fundy-Bay in Kanada). Auch in kleineren „Meeren“ wirken die Gezeiten: Der Baikalsee hat einen Tidenhub von 6 - 8 cm, im Genfer See sind es noch 2 mm, im Chiemsee 1 mm.

V.4.6 Zusammenhang Schwerkraft - Gravitation

Eine der wesentlichen Leistungen Newtons war es, zu erkennen, dass diejenige Kraft, die die Planeten auf ihren Umlaufbahnen hält, dieselbe Kraft ist, die den Apfel auf seinen Kopf fallen ließ. Er erkannte damit, was keineswegs eindeutig war: Gravitationskraft und Schwerkraft sind ein und dasselbe. Damit schaffte Newton zum ersten mal die Vereinigung zweier bis dahin als unabhängig von einander geltender Kräfte bzw. Phänomene.

Der mathematische Beweis, daß diese Kräfte identisch sind und die uns bekannte Formel für die Hubarbeit aus der Gravitation abgeleitet werden kann, wird in der theoretischen Physik betrachtet. Hier wollen wir nur aus dieser Tatsache die Erdmasse berechnen:

Das Gesetz der Schwerkraft hatten wir hergeleitet als

$$F_S = mg.$$

Das Gravitationsgesetz lautet

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2}.$$

Diese beiden Kräfte sind laut Newton identisch, also gilt für beliebige m und M

$$\gamma \frac{mM}{r^2} = mg$$

$$\Leftrightarrow \gamma \frac{M}{r^2} = g.$$

Sind die beiden universellen Konstanten g und γ bekannt, kann eine Masse M, die sich im bekannten Abstand r von der Probemasse m befindet, berechnet werden. So kann z.B. die Erdmasse M_E berechnet werden mit

$$M_E = \frac{r_E^2}{\gamma} g$$

$$\Leftrightarrow M_E = \frac{(6,37 \cdot 10^6)^2 \cdot 9,8}{6,6 \cdot 10^{-11}} \text{ kg}.$$

Damit errechnet sich die Erdmasse als:

Erdmasse $M_E \approx 6 \cdot 10^{24}$ kg

V.5 Wie funktioniert Gravitation?

Bisher haben wir außer der Schwerkraft nur Nahwirkungskräfte untersucht; Kräfte also, die durch direktes Angreifen auf einen Körper wirken. Wie die Betrachtung der Gezeiten schon zeigte, ist dieses Modell nicht so einfach auf die Gravitation zu übertragen. Seit der Formulierung des Gravitationsgesetzes durch Newton ist die Wirkung, auf der diese Kraft beruht, Gegenstand zahlreicher Überlegungen.

Newton formulierte seine Aussagen über Fernkräfte noch sehr vorsichtig „als ob“ eine Fernkraft wirkt.

Maxwell postulierte Nahwirkungskräfte, analog zu den bekannten Kräften. Die Übertragung der Kräfte, er konzentrierte sich insbesondere auf die elektromagnetische Kraft, stellte er sich mittels eines allgegenwärtigen Äthers vor.

Einstein machte die Gravitation zu einer Eigenschaft des Raumes. Die allgemeine Relativitätstheorie beinhaltet eine „Raumkrümmung“ durch Massen.

Moderne Quantenfeldtheorien versuchen, die Gravitation ähnlich wie die anderen Wechselwirkungen durch Austausch von Feldquanten zu erklären. Dieser Mechanismus ist für die anderen Wechselwirkungen, also schwache, starke und elektromagnetische Wechselwirkungen, bereits nachgewiesen, für die Gravitation jedoch noch nicht. Die in dieser Theorie vorhergesagten Austauscheteilchen werden Gravitonen genannt.

Die Entstehung einer Gravitationswelle stellt man sich vor durch die schnelle Bewegung von großen Massen. Diese Massen, die sich zudem schnell bewegen, gibt es im All. Mögliche Quellen sind in dieser Tabelle aufgeführt. Daneben stehen jeweils Signaltyp und Frequenz der Welle und die Auswirkungen. Beispielsweise würden Gravitationswellen von einem Doppelstern ausgesendet den Abstand zwischen Massen, die einen Meter voneinander entfernt sind, um nur 10^{-21} Meter verändern.




Quelle	Signaltyp	Frequenz	Stärke
 Typ II Supernovae	impulsartig	<1 Mhz	10^{-21}
 schwingendes Doppelpulsar	gedämpfte Sinusschwingung	10 khz für 1 Sonnen- masse	10^{-22}
 Galaxienhaufen durch kosmische Strings	Rauschen	2000 bis 800- quenzband	10^{-14} 10^{-23}
Urknall	Rauschen	?	?

Abbildung V.28: mögliche Quellen von Gravitationswellen

Nach der allgemeinen Relativitätstheorie sollten Gravitationswellen sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten und tensorielle (elliptische) Raumverzerrungen hervorrufen, also die Gestalt des Raumes verändern, den sie durchlaufen. In dieser Darstellung ist die Auswirkung der Gravitationswelle auf eine frei im Raum längs der Welle aufgehängte Gummiröhre simuliert. Links ist die Gummiröhre abgebildet, rechts ein Satz von Massen, die auf einer Ebene liegen. Weber führte 1970 einen solchen Versuch zum Nachweis der Gravitationswellen mit einem

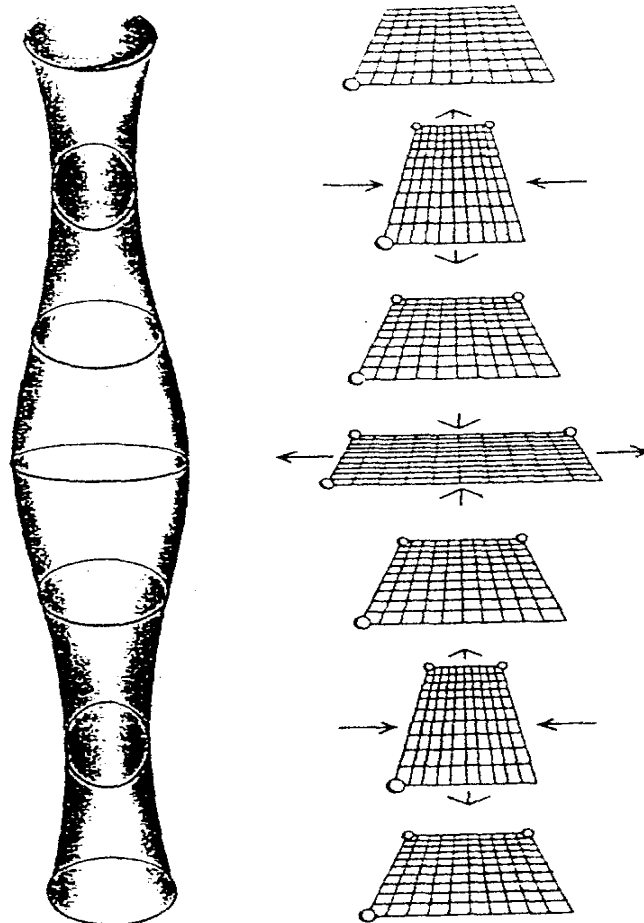


Abbildung V.29: Raumverformungen zum Nachweis von Gravitationswellen

schwingungsfrei aufgehängten Zylinder durch.

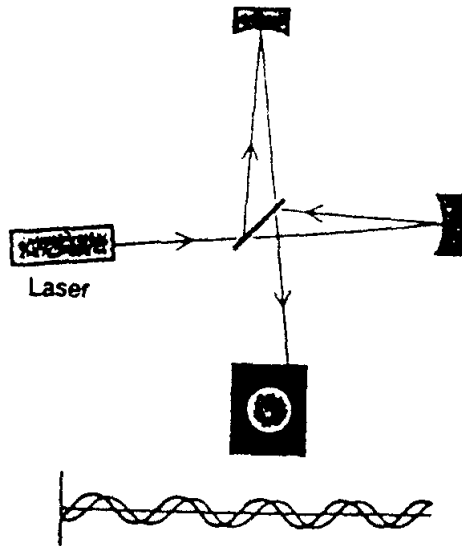


Abbildung V.30 a: Interferenzexperimente

Zum Nachweis von Gravitationswellen werden Interferometer eingesetzt. Ein einfaches Interferometer besteht aus einem Laser, einem Strahlenteiler, je einem Spiegel, welche die beiden senkrecht zueinander stehenden Arme zueinander begrenzen, und einer Photodiode. Unterhalb der Diode ist jeweils der Verlauf des elektrischen Feldes in jedem zurückkehrenden Lichtstrahl als Funktion der Zeit aufgetragen. In der Ausgangsposition unterscheiden sich die Armlängen um ein Achtel. Bei der Überlagerung sind die beiden Lichtstrahlen um einen Viertel-Zyklus außer Phase, und die Hälfte des Lichtes erscheint am Ausgang. Das

Interferenzmuster ist stabil. (Abbildung V.30

a)

Wenn eine Gravitationswelle die Ärmellängendifferenz verändert, nimmt die Helligkeit des Ausgangsstrahls je nach Vorzeichen des Wegunterschiedes entweder ab oder zu, das Interferenzmuster ändert sich gegenüber der Ausgangsposition und ist nicht stabil (Abbildung V.30 b und c).

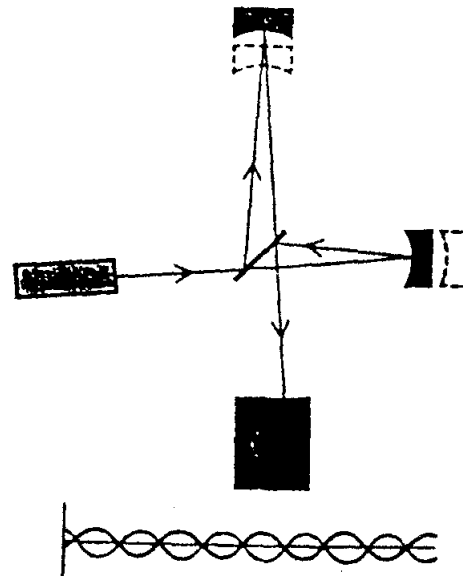


Abbildung V.30 b: Interferenzexperimente

Die Realisation solcher Versuche ist sehr

schwierig, da die erwarteten Längenunterschiede der Arme bei 10^{-16} m liegen, also ungefähr in der Größenordnung eines Protons liegen. Am 23 Februar 1987 gab es in nur 160000 Lichtjahren Entfernung in der Magellanstraße eine Supernova

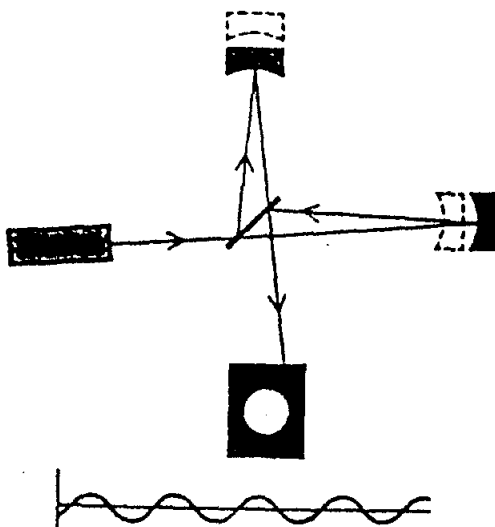


Abbildung V.30 b: Interferenzexperimente

(SN 1987 A, ungefähr 20 Sonnenmassen), von der möglicherweise Gravitationswellen ausgingen. Leider waren alle Detektoren zu diesem Zeitpunkt ausgeschaltet.

V.6 Gravitationsfeld und Gravitationspotential

Nachdem wir nun die Gravitationskraft zweier Körper aufeinander berechnen können, wollen wir versuchen, dem Körper eine Art Eigenschaft zuzuordnen, die seine Gravitationskraft auf jeden beliebigen anderen Körper beschreibt.

V.6.1 Energiebetrachtung

Dazu betrachten wir zunächst wieder eine Masse M , die auf eine andere Masse m eine Gravitationskraft ausübt. Gegen diese Kraft soll eine beliebige äußere Kraft \vec{F}_a geleistet werden, z.B. durch Ziehen an einem an der Masse befestigten Seil. Zunächst befinden sich die beiden

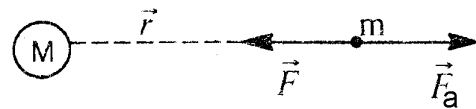


Abbildung V.31: Kompensationskraft

Kräfte im Gleichgewicht, die Masse m ruhe also (Abbildung V.31).

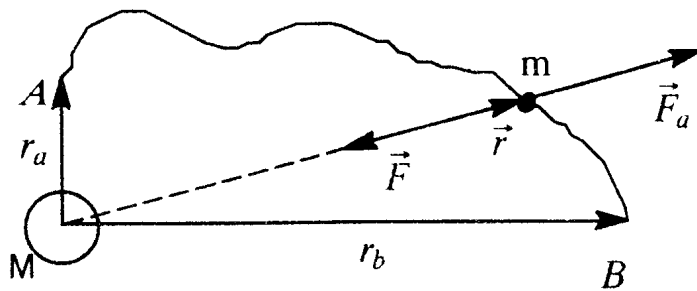


Abbildung V.32: äußere Kraft gegen das Gravitationsfeld

Vergrößern wir jetzt die äußere Kraft, oder ändern wir deren Richtung, dann bewegt sich die Masse m im Gravitationsfeld von M (Abbildung V.32). Dabei leistet die Kraft Arbeit. Nach der allgemeinen Definition für Arbeit IV.2 kann man diese Arbeit

angeben mit:

$$dW = \vec{F}_a d\vec{r}.$$

Wo bleibt nun diese in das System gesteckte Energie?

In Kapitel IV, Definition IV.3, hatten wir gesehen, daß dW ganz in potentielle Energie umgewandelt wird, wenn die wirkenden Kräfte konservativ sind. Konservative Kräfte waren Kräfte, bei denen die dagegen zu leistende Arbeit nur von Anfangs- und Endpunkt der Bewegung abhängt, für die also gilt:

$$\oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = 0.$$

Wenn es sich bei der Gravitationskraft also um eine konservative Kraft handelt, so ließe sich die Frage beantworten. Untersuchen wir also die Gravitationskraft auf dieses Kriterium:

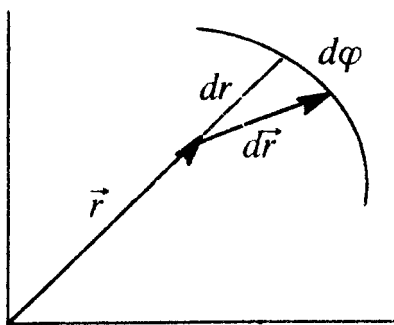
Die Formel $\oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = 0$ bedeutete für die Arbeit

zwischen zwei Punkten A und B $\int_A^B \vec{F} d\vec{r}$ ist wegunabhängig.

Mit $\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$ $\Rightarrow \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = -\gamma \cdot mM \int_A^B \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{r}$

Mit * $\Leftrightarrow \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = -\gamma \cdot mM \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr$

$\Leftrightarrow \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \left[-\gamma \cdot mM \frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B}$



* Die Betrachtung der Polarkoordinaten

r und ρ zeigt:

$\vec{r} \cdot d\vec{r} = r \cdot (\text{Änderung } d\vec{r} \text{ von } \vec{r} \text{ entlang } \vec{r}) = r \cdot dr$

Abbildung V.33: Geometrische Überlegungen

Dieser Ausdruck für die Arbeit ist nur abhängig von den Abständen der Punkte A und B, nicht vom durchlaufenen Weg und auch nicht vom absoluten Abstand zur Masse M.

Für konservative Kräfte können wir nun eine potentielle Energie definieren. Die potentielle Energie ist dabei definiert als die Energiedifferenz, welche die Probemasse in den Punkten A

und B hat. $\Rightarrow \Delta W_P = -\gamma \cdot \frac{mM}{r_B} - \left(-\gamma \cdot \frac{mM}{r_A} \right)$

$\Leftrightarrow \Delta W_P = W_P(B) - W_P(A)$.

Da nur Potentialdifferenzen meßbar sind, muß auch in diesem Fall eine Konvention getroffen werden, die den Nullpunkt festlegt. Bei die Gravitation legt man den Nullpunkt unendlich weit von der Masse M entfernt fest:

$W_P(r_A \rightarrow \infty) = 0$.

Die Konvention hat den Vorteil, daß die Formel

$$\Delta W_P = -\gamma \cdot \frac{mM}{r_B} - \left(-\gamma \cdot \frac{mM}{r_A} \right)$$

wesentlich vereinfacht wird: $\Rightarrow \Delta W_P = -\gamma \cdot \frac{mM}{r_B}$.

Für beliebige r_B $\Rightarrow \Delta W_P = -\gamma \cdot \frac{mM}{r}$.

Merke: Die **potentielle Energie**, die die Gravitationskraft zwischen zwei Körpern der Massen M und m erzeugt, beträgt:

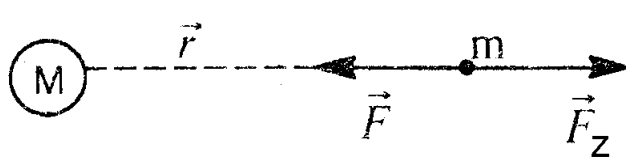
$$\Delta W_P = -\gamma \cdot \frac{mM}{r}$$

Vernachlässigen wir jetzt wieder die nichtmechanischen Energieformen, dann läßt sich die Gesamtenergie berechnen aus

$$W = W_P + W_K$$

$$\Leftrightarrow W = -\gamma \cdot mM \frac{1}{r} + \frac{1}{2} mv^2.$$

Zur Vereinfachung berechnen wir diese Energien für eine Kreisbahn, die m um M beschreibt. Annähernd kann diese Bahn z.B. als Planetenbahn um die Sonne angesehen werden. Die Masse



m bewegt sich nicht von M weg, ihr Abstand r sei konstant. Dann müssen Fliehkraft \vec{F}_Z und

Gravitationskraft \vec{F} entgegengesetzt gleich groß sein.

Im Gleichgewicht gilt also $\vec{F}_Z + \vec{F} = 0$. Unter Berücksichtigung der Vorzeichen gilt auch $F_Z + F = 0$.

Mit $F = -\gamma \cdot mM \frac{1}{r^2}$ und $F_Z = \frac{mv^2}{r}$

$$\Rightarrow -\gamma \cdot mM \frac{1}{r^2} + \frac{mv^2}{r} = 0.$$

Für $r \neq 0$ $\Rightarrow -\gamma \cdot mM \frac{1}{r} + mv^2 = 0$.

Ein Vergleich mit den Energieformen $W_P = -\gamma \cdot mM \frac{1}{r}$ und $W_K = \frac{1}{2} mv^2$

Zeigt, dass gilt:

$$\boxed{W_P + 2W_K = 0,}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{W_P = -2W_K.}$$

$$\Rightarrow 2W_K = \gamma \cdot mM \frac{1}{r}$$

Damit lässt sich die Gesamtenergie berechnen als:

Merke: Die **Gesamtenergie** einer Kreisbewegung durch Gravitationskraft beträgt:

$$W = \frac{1}{2} W_P = -\frac{1}{2} \gamma \cdot mM \frac{1}{r} < 0.$$

Die Gesamtenergie ist negativ.

Wie aus Kapitel IV bekannt gilt die Energieerhaltung, d.h., daß diese Energie zu jeder Zeit konstant ist, während die einzelnen Energien W_P und W_K ausgetauscht werden.

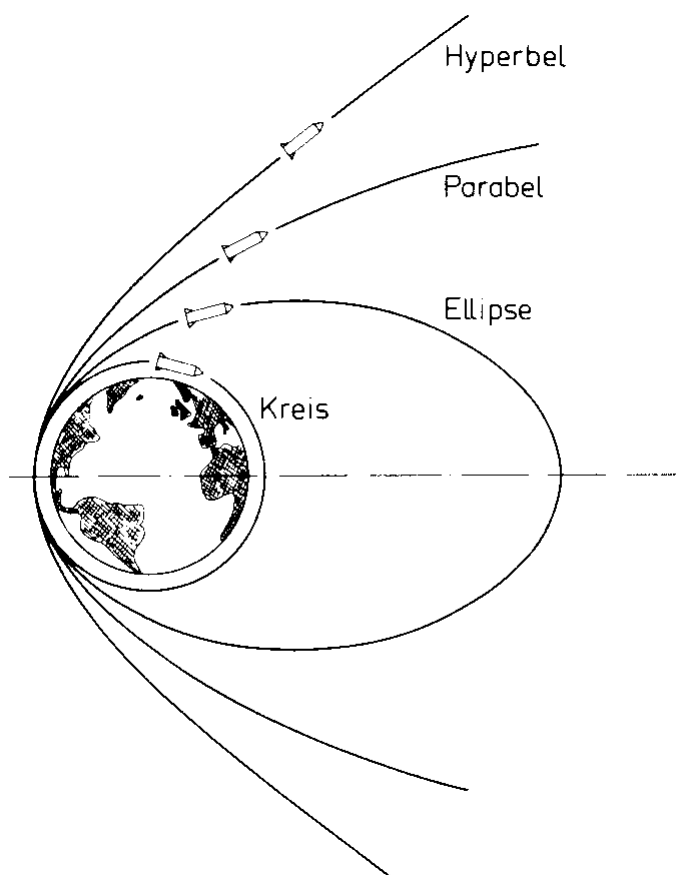


Abbildung V.34: Raketenbahnen

Qualitativ ist dieses Ergebnis einsichtig: Ist die Gesamtenergie negativ, so bewegt die Masse m sich auf einer geschlossenen Bahn, ist die Gesamtenergie jedoch positiv, sind die Bahnen offen.

$W < 0 \rightarrow$ geschlossene Bahnen:
Ellipsen oder Kreise

$W = 0 \rightarrow$ Grenzfall: Parabel

$W > 0 \rightarrow$ offene Bahnen:
Hyperbeln.

Die genaue Berechnung dieses Sachverhaltes wird in der Theorie vorgenommen, hier soll die Vorführung einer Computersimulation als Anschauung ausreichen.

Versuch V.8: Bewegung einer Kugel in einer flachen Schale

Die verschiedenen Bewegungsmöglichkeiten können simuliert werden, indem man eine flache Schale wählt, in der eine Kugel möglichst reibungsfrei rollen kann. Je nach 'Einwurf' kann man



kreisende oder elliptische Bewegungen erwirken. Ist die Energie groß genug, so rollt

die Kugel geradeaus aus der Schale heraus. Ist die Energie jedoch nur grade groß genug, verläßt die Kugel die Schale unter Beschreibung einer Parabelbahn.

V.6.2 Zusammenhang potentielle Energie und Kraft

Im letzten Kapitel haben wir die beiden Formeln

$$\Delta W_P = - \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} d\vec{r}$$

und

$$\Delta W_P = \int_A^B dW_P \quad \text{benutzt.}$$

Faßt man diese Formeln zusammen, so gilt die Beziehung

$$- \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B dW_P .$$

$$\Rightarrow \quad dW_P = -\vec{F} d\vec{r}$$

Kann man nun mit Hilfe dieser Beziehung von der potentiellen Energie auf die wirkende Kraft zurückrechnen? Das Problem ist nicht so trivial, da die potentielle Energie ein Skalar, die Kraft hingegen ein Vektor ist. Man steht also vor der Aufgabe, von einer nicht gerichteten Größe auf eine gerichtete zurück schließen zu müssen.

Rein formal kann man zunächst versuchen, durch Dividieren mit $d\vec{r}$ einen Ausdruck für die

Kraft zu erlangen:
$$\frac{dW_P}{d\vec{r}} = -\vec{F} .$$

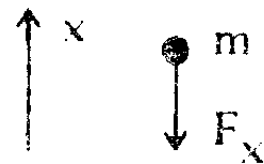
Untersuchen wir nun anhand zweier uns bekannter Kraftgesetze, diese Gleichung zu verifizieren. Dazu wählen wir zunächst Kräfte, die in einer Dimension berechnet werden können:

1. Schwerkraft:

Die potentielle Energie ist gegeben durch $W_P = mgx .$

$$\Rightarrow \quad \frac{dW_P}{dx} = mg$$

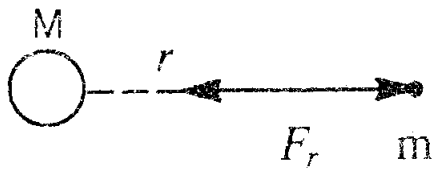
Das so ermittelte Kraftgesetz lautet $F = -mg .$



Dieses Gesetz entspricht dem uns bekannten Gesetz der Schwerkraft.

2. Gravitation:

Die potentielle Energie ist gegeben durch



$$W_P = -\gamma \cdot mM \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{dW_P}{dr} = \gamma \cdot \frac{mM}{r^2}$$

Das so ermittelte Kraftgesetz lautet

$$F = -\gamma \cdot \frac{mM}{r^2}$$

Auch dieses Gesetz entspricht dem uns bekannten Gesetz der Gravitation.

Untersuchen wir jetzt die Verallgemeinerung für drei Dimensionen:

Gesucht wird ein Ausdruck für die Kraft, der die Gleichung

$$dW_P = -\vec{F}d\vec{r} \quad \text{erfüllt.}$$

Diese Gleichung wird erfüllt durch

$$\vec{F} = -\left(\frac{d}{dx} W_P, \frac{d}{dy} W_P, \frac{d}{dz} W_P\right)$$

Diesen Vektor nennt man partielle Ableitung von W_P . Partielle Ableitung heißt dabei nichts anderes, als daß der zu differenzierende Ausdruck $f(x,y,z)$ nach der angegebenen Variablen abgeleitet wird, während die anderen beiden als Konstante behandelt werden. Beispielsweise heißt, dass die Funktion f abgeleitet wird, als sei sie eine Funktion $f(x)$ und y und z seien Konstante. Die Schreibweise ∂ statt d wird verwandt, um die partielle Differentiation zu verdeutlichen.

Definition V.9: Die Operation $\vec{F} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)W_P$ wird partielle Differentiation genannt.

Den Operator $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ schreibt man 'grad' oder ' $\vec{\nabla}$ ' (Nabla).

Nun muß noch bewiesen werden, daß die so definierte Gleichung

$$F = - \text{grad } W_P$$

die Ausgangsgleichung

$$dW_P = -\vec{F}d\vec{r} \quad \text{erfüllt.}$$

Es muß also gelten

$$\begin{aligned} & -\vec{F}d\vec{r} \\ = & \text{grad}W_P d\vec{r} \\ = & \left(\frac{\partial}{\partial x} W_P, \frac{\partial}{\partial y} W_P, \frac{\partial}{\partial z} W_P\right)(dx, dy, dz) \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} W_P dx + \frac{\partial}{\partial y} W_P dy + \frac{\partial}{\partial z} W_P dz$$

$$= \text{Dwp.}$$

Notation V.2: Die Ableitung $\frac{\partial}{\partial x} W_P dx + \frac{\partial}{\partial y} W_P dy + \frac{\partial}{\partial z} W_P dz$ wird **totales Differential** genannt.

Anschaulich kann man sich die Vektoren anhand der Höhenlinien auf einer Landkarte vorstellen:

Ein Berg wird mit den sogenannten Höhenlinien eingezeichnet, also mit Linien, die alle Punkte derselben Höhe verbinden. Diese Linien sind Äquipotentiallinien. Der Gradient zeigt jetzt in Richtung der Falllinie, also in Richtung der wirkenden Kraft.

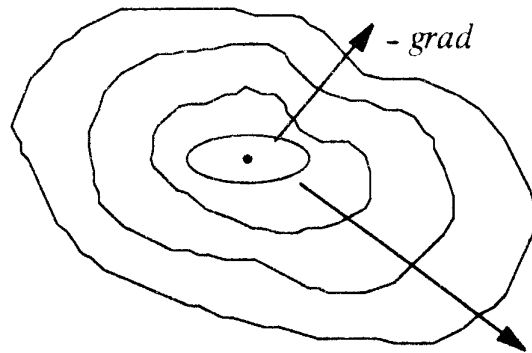
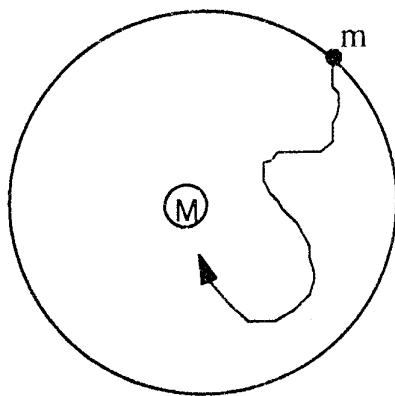


Abbildung V.35: Höhenlinien als Äquipotentiallinien

Merke: Der negative Gradient beschreibt anschaulich die Richtung und Stärke des größten Gefälles in einem Potentialgebirge.

V.6.3 Gravitationsfeldstärke und Gravitationspotential



Eine Probemasse m werde in der Umgebung der Masse M verschoben. In den letzten beiden Kapiteln haben wir eine Formel für die potentielle Energie in jedem Punkt berechnet. Damit können wir nun die potentielle Energie bestimmen, die der Körper der Masse m im Gravitationsfeld der Masse M besitzt. Greifen wir nun die Anfangsfrage auf: Wie kann man unabhängig von der Probemasse m eine 'Eigenschaft' der Masse M , bzw. des Raumes um die Masse M bestimmen, welche die Wirkung

auf eine beliebige (gedachte) Probemasse beschreibt?

Die Antwort ergibt sich aus der Formel
$$\Delta W_P = -\gamma \cdot \frac{mM}{r}.$$

Wenn eine Größe gesucht wird, die von m unabhängig ist, muß dieser Ausdruck nur durch m geteilt werden. Diese Formel gibt dann eine Eigenschaft an, die nur von M und dem Abstand von M abhängt.

$$\frac{\Delta W_P}{m} = -\gamma \cdot \frac{M}{r}.$$

Dieser Ausdruck wird Gravitationspotential genannt.

Definition V.10: Das Gravitationspotential einer Masse M ist definiert als Quotient der potentielle Energie einer Probemasse im Abstand r und der Probemasse selbst.

Gravitationspotential $V(\vec{r}) = \frac{\Delta W_P}{m} = -\gamma \cdot \frac{M}{r}.$

Analog zu dieser Definition soll jetzt noch der Kraftbegriff übertragen werden:

In Anlehnung an die Formel

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad}W_P(\vec{r})$$

definiert man die Formel

$$\vec{G}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m}.$$

$$\Leftrightarrow \vec{G}(\vec{r}) = -\text{grad} \frac{W_P(\vec{r})}{m}$$

$$\Leftrightarrow \vec{G}(\vec{r}) = -\text{grad}V(\vec{r})$$

Dieser Ausdruck wird Gravitationsfeldstärke genannt.

Definition V.11: Die Gravitationsfeldstärke gibt die Kraft auf einen Probekörper an geteilt durch seine Masse.

$$\vec{G}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m} = -\text{grad} \frac{W_P(\vec{r})}{m} = -\text{grad}V(\vec{r}).$$

Die Größen $\vec{G}(\vec{r})$ und $V(\vec{r})$ sind vom Probekörper unabhängig.

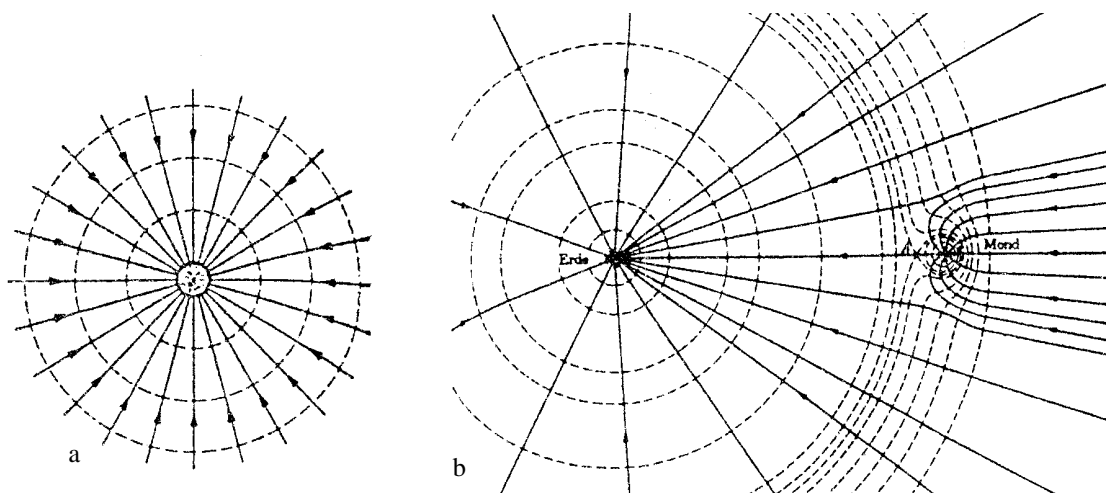


Abbildung V.36: Gravitationsfeldlinien einer Punktladung (a) und des Erde-Mond-Systems (b)

Diese Abbildung zeigt Äquipotentiallinien, hier als gestrichelte Linien gezeichnet, und Kraftfeldlinien, als Pfeile gekennzeichnet, des Gravitationsfeldes einer Masse (Abbildung V.36a) und des Erde-Mond-Systems (Abbildung V.36b). Die Kraftfeldlinien zeigen in Richtung des Potentialgefälles. Die Dichte der Kraftlinien ist proportional zur Feldstärke. Die Abbildungen sind dreidimensional vorzustellen.

V.6.4 Zusammenfassung der neu eingeführten Begriffe

Kraft \vec{F}

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad}W_p(\vec{r})$$

potentielle Energie W_p

$$\vec{F} = m\vec{G}$$

$$\bullet m \uparrow \downarrow \bullet \frac{1}{m}$$

$$W_p = mV$$

Feldstärke \vec{G}

$$\vec{G}(\vec{r}) = -\text{grad}V(\vec{r})$$

Potential V

Abschließend wollen wir noch anschaulich die Feldstärke einer Vollkugel, z.B. der Erde betrachten.⁶ In einer

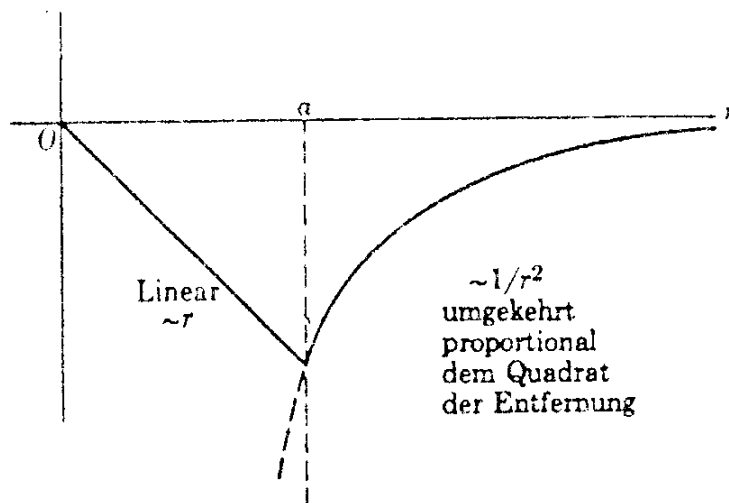


Abbildung V.37: Feldstärke einer Vollkugel

Entfernung vom Mittelpunkt der Kugel, die größer ist als deren Radius, also außerhalb der Kugel, verhält sich das Feld wie das einer Punktmasse im Mittelpunkt der Kugel. In der Kugel selbst fällt die Feldstärke jedoch linear mit der zunehmenden

Nähe zum Mittelpunkt ab. Im Mittelpunkt selbst wirkt schließlich keine Kraft auf einen Probekörper.

⁶ Die Berechnung der Feldstärke kann in fast jedem Buch zur Experimentalphysik nachgelesen werden. Empfehlenswert sind die Darstellung im Alonso-Finn und im Berkley-Kurs.

Nun noch ein **Nachtrag zur Gravitation** aus der Allgemeinen **Relativitätstheorie**:

Einstein erhob in seinen Theorien Naturphänomene zum Prinzip und versuchte damit, die Natur zu berechnen.

In der Speziellen Relativitätstheorie erhob er die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit zum Prinzip und schloß daraus weitgehende Folgerungen.

In der Allgemeinen Relativitätstheorie betrachtete Einstein die Gleichheit von träger und schwerer Masse als Prinzip. Für einen Beobachter folgt laut Einstein aus dieser Tatsache, daß er nicht unterscheiden kann, ob er sich in einem konstanten Schwerfeld oder in einem Bezugssystem mit konstanter Beschleunigung befindet.

Diese Überlegung kann an einem Gedankenexperiment verdeutlicht werden:

Zwei Astronauten, die nicht aus ihrem Raumschiff schauen können, führen je ein Experiment durch: Der erste Astronaut läßt eine Kugel fallen, der andere steht auf einer Waage. Die beiden beobachten dieselbe Bewegung ob sie auf einem Planeten stehen oder im gravitationsfreien Raum beschleunigt fliegen.

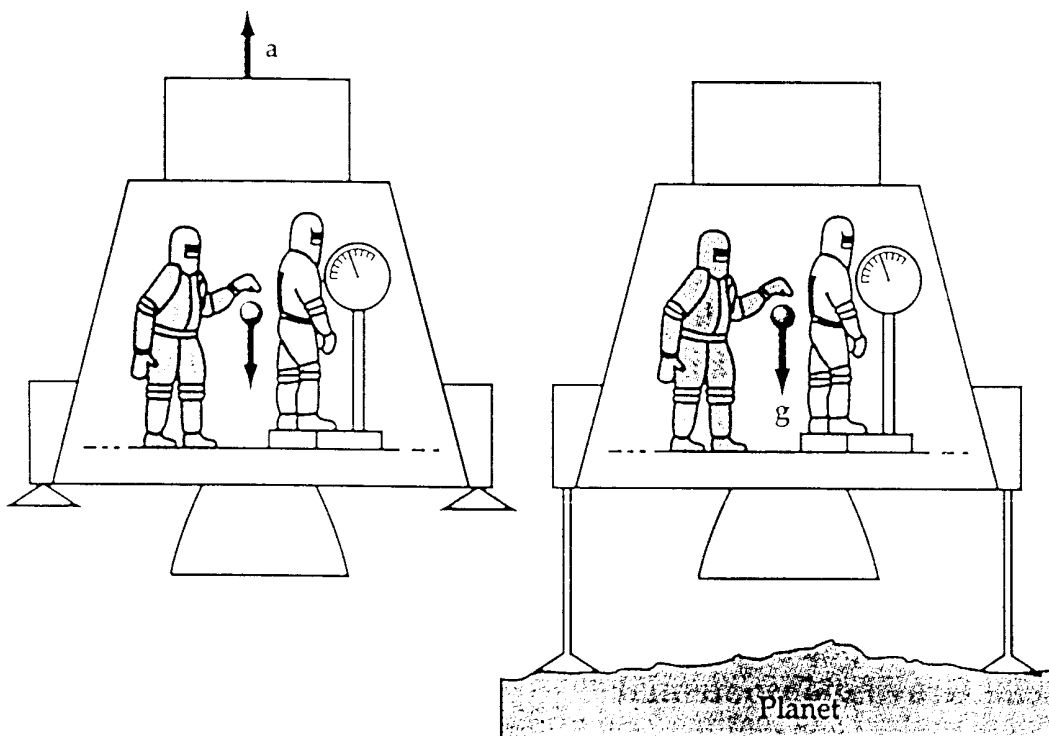


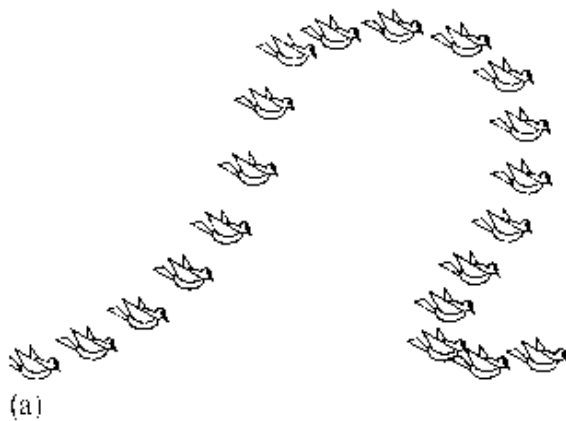
Abbildung V.38: Die Astronauten können anhand der Versuche nicht unterscheiden, ob sie sich in einem konstanten Schwerfeld oder in einem Bezugssystem mit konstanter Beschleunigung befinden.

VI. Dynamik des starren Körpers

Wenn man von der Ausdehnung eines Körpers absehen kann, d.h. ihn als Massenpunkt betrachtet, wie wir das bisher getan haben, läßt sich seine Lage durch einen einzigen Ortsvektor \vec{r} darstellen, seine Bewegung durch die Zeitabhängigkeit $\vec{r}(t)$ dieses Ortsvektors.

Für einen ausgedehnten Körper braucht man eigentlich unendlich viele Ortsvektoren- einen für jeden seiner Punkte.

Zum Glück können sich diese Vektoren nicht alle unabhängig voneinander ändern, selbst dann nicht, wenn der Körper deformierbar ist. Diesen Fall behandeln wir in Kapitel VII. Wenn der Körper nicht deformierbar ist, sondern starr, kann man jede seiner Bewegungen in eine Translation und eine Rotation zerlegen.



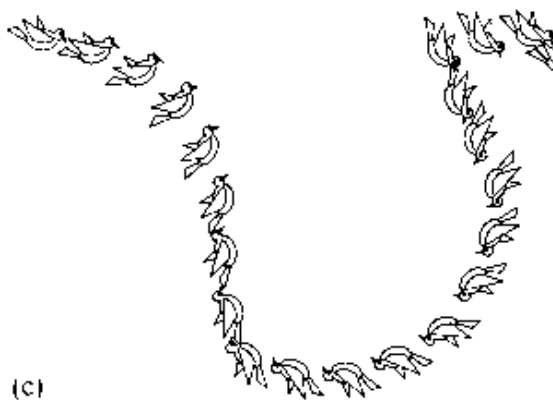
Eine **Translation** ist eine Bewegung, bei der alle Punkte des Körpers kongruente Bahnen beschreiben. Diese Bahnen dürfen durchaus gekrümmt sein.

Die Richtung der Körperachsen dieser Tauben, die eine reine Translation ausführen, bleibt erhalten.

Abbildung VI.1 (a)

Bei einer **Rotation** beschreiben alle Punkte konzentrische Kreise um eine bestimmte Gerade, die Drehachse.

Abbildung VI.1 (b)



Diese Tauben führen eine Translation kombiniert mit einer Rotation aus.

Die Körperachsen ändern ihre Richtung.

Abbildung VI.1 (c)

Die Gesetze der Translation eines starren Körpers unterscheiden sich nicht von denen, die wir vom Massenpunkt her kennen. Für die Rotation müssen wir einen neuen Satz von Begriffen entwickeln.

Wie wichtig gerade die Rotation starrer Körper ist, haben wir bereits an einigen Beispielen zur Gravitation gesehen:

Besonders die Eigenrotation von Körpern ist in der Natur besonders wichtig. Als Beispiel betrachte man die Erde und die bereits diskutierten Auswirkungen der Rotation

Rotation der Erde → Wechsel von Tag und Nacht.

Auch andere Himmelskörper drehen sich um eine eigene Achse. Das liegt an in der Entstehung der Planeten und der Erhaltung der Drehimpulse begründet. Das wohl populärste Beispiel ist die Sonne

Himmelskörper: Die Sonne dreht sich in 25 Tagen einmal um sich selbst.

Extreme Beispiele sind die sogenannten Pulsare. Sie emittieren - wie Leuchtfeuer - gerichtete, gepulste Strahlung. Junge Pulsare haben eine Frequenz von 30 Hz, d.h., sie drehen sich 30 mal pro Sekunde um die eigene Achse. Alte Pulsare haben 'nur' noch 1 Hz. Die Masse entspricht der Masse von Sterne, Pulsare sind aber sehr klein; sie haben einen Durchmesser von nur 1 - 10 km. Sie entstehen nach Supernova-Explosionen (Neutronensterne). Große Sterne würden bei dieser Eigenrotationsfrequenz auseinanderfliegen.¹

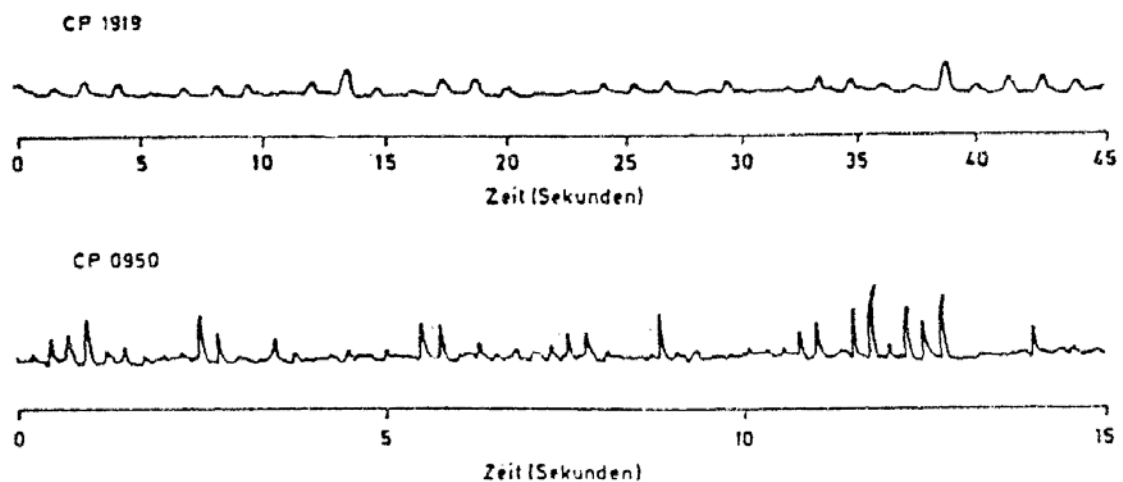


Abbildung VI.2: Erste Meßprotokolle von Radiosignalen der Pulsare CP 1919 und CP 0950 (1967). Die sehr schwachen Signale schwanken durch den Einfluß interstellarer Wolken geladener Teilchen in ihrer Intensität. Trotzdem ist der konstante Pulsabstand der Signale deutlich zu erkennen, der für CP 1919 etwa 1,3 sec, für CP 0950 etwa 0,25 sec beträgt. (Aus Scientific American 219, 1968)

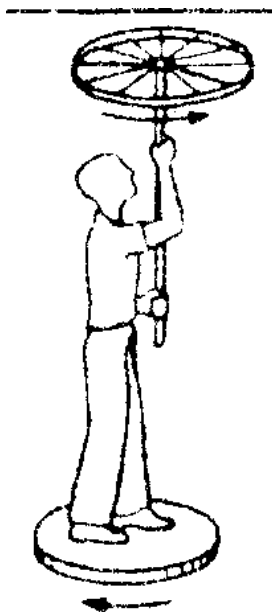
¹ Anschauliche Literatur zu diesem Thema findet man im Piper Verlag: Rudolf Kippenhahn, 100 Milliarden Sonnen.

Winkelgeschwindigkeit als axialer Vektor

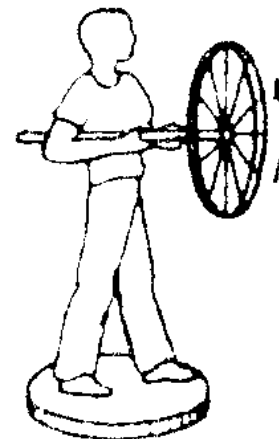
Uns ist bereits bekannt, daß sowohl der Ort, als auch die Geschwindigkeit von einer Richtung abhängen, also Vektoren sind. Nun muß man sich fragen, ob auch die Winkelgeschwindigkeit als Vektor behandelt werden muß. Um diese Frage zu klären, soll ein einfacher Versuch durchgeführt werden:

Versuch VI.1: Drehendes Rad

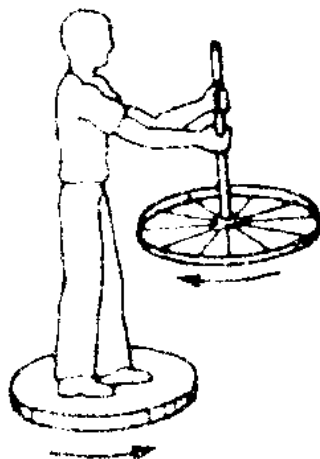
Bei diesem Versuch wird eine Testperson auf einen frei drehbaren Schemel gesetzt. In der Hand hält sie eine Achse, an deren Ende ein Rad mit Speichen montiert ist. Mit einer Bohrmaschine wird nun das Rad zu einer Rotation angetrieben, während die Achse parallel zum Boden ausgerichtet ist..



Zunächst hält die Person das Rad senkrecht nach oben, d.h. mit der Achse parallel zum Oberkörper. Das Rad dreht sich weiter, die Person beginnt jedoch, sich auf dem Schemel entgegen der Drehrichtung des Rades zu drehen.



Danach wird das Rad gesenkt, bis die Achse parallel zum Boden steht. Der Schemel hält an und dreht sich nicht weiter.



Wird das Rad nach unten gehalten, dreht der Schemel sich wieder, nun entgegengesetzt zum ersten mal. Rad und Schemel drehen sich also wieder entgegengesetzt.

Offensichtlich ist die Richtung eine wichtige Größe bei der Betrachtung der Rotation: Die Winkelgeschwindigkeit muß also ebenfalls als Vektor eingeführt werden.

Abbildung VI.3: Versuch VI.1

Dabei muß einmal eine Konvention gefunden werden, in welche Richtung die Winkelgeschwindigkeit positiv definiert wird. Man einigte sich hier darauf, daß die Drehrichtung und der Vektor der Winkelgeschwindigkeit eine Rechtsschraube bilden:

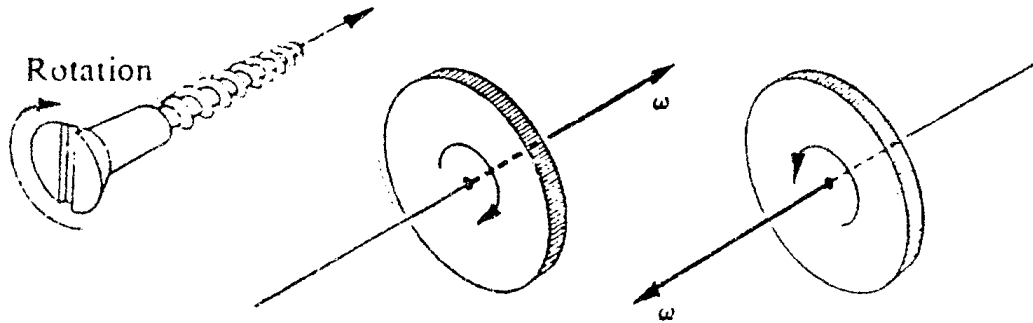


Abbildung VI.4: Der Zusammenhang der Drehrichtung und der Richtung des Vektors $\vec{\omega}$ wird durch eine Rechtsschraube gegeben.

Um den Zusammenhang zwischen, \vec{v} und \vec{r} zu bestimmen, betrachten wir noch einmal die bereits in Kapitel V gewonnenen Erkenntnisse über Kreisbewegungen:

Beschreibt ein Massenpunkt bei einer Drehung einen Kreis mit dem Radius, so hat der Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ die

Richtung der Normalen zur Kreisbahnebene mit der Pfeilspitze so, daß sich eine Rechtsschraube ergibt. Ist \vec{r} der Ortsvektor des Massenpunktes von 0 aus, so gilt:

$$v = \omega r = \omega r \sin \alpha$$

Damit kann das Vektorprodukt in vektorieller Form angegeben werden:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} .$$

Der Betrag ist, wie oben errechnet

$$v = \omega r = \omega r \sin \alpha$$

Der Geschwindigkeitsvektor \vec{v} steht senkrecht auf der durch $\vec{\omega}$ und \vec{r} gebildeten Ebene.

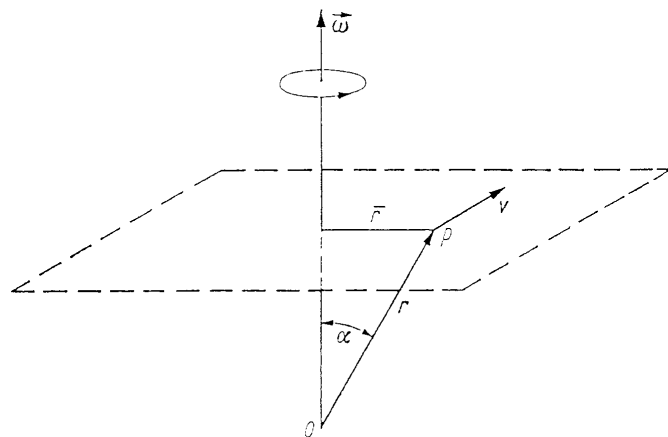


Abbildung VI.5: Betrachtung der Winkelgeschwindigkeit

Man beachte, daß beim Vektorprodukt die Faktoren nicht vertauscht werden dürfen; denn es ist:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = -\vec{r} \times \vec{\omega}$$

Es ist natürlich nur dann sinnvoll, eine Größe als Vektor einzuführen, wenn für sie die Gesetze der Vektorrechnung gelten. Insbesondere muß man zwei derartige Größen vektoriell addieren können. Das ist bei der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ der Fall, wie folgende Überlegung zeigt:

Erfährt ein Massenpunkt, der die Masse m und den Ortsvektor \vec{r} hat, gleichzeitig zwei Winkelgeschwindigkeiten $\vec{\omega}_1$ und, so ist:

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}$$

und

$$\vec{v}_2 = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}$$

Da

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

ist, folgt:

$$\vec{v} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}$$

und daraus

$$\vec{v} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}$$

und aus

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

schließlich:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 .$$

Ähnlich kann man auch die Richtigkeit der andern Rechenregeln für Vektoren nachweisen. Daß solche Überlegungen notwendig sind, zeigt folgender Sachverhalt:

Man könnte daran denken, auch den Drehwinkel $\vec{\varphi}$ als axialen Vektor einzuführen. Das ist aber nicht sinnvoll, da sich zwei Drehungen um die Winkel φ_1 und φ_2 um beliebige Achsen nicht vektoriell addieren. Die Zusammensetzung zweier solcher Drehungen um endliche Winkel ist komplizierter. Nur bei Drehungen um die gleiche feste Achse kann man die Drehwinkel addieren.

Merke: Zwei Drehungen um beliebige Achsen addieren sich nur dann vektoriell, wenn die Winkel unendlich klein sind.

Beweis:

Dies ergibt sich aus

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 .$$

Wenn man schreibt

$$\frac{d\vec{\varphi}_1}{dt} + \frac{d\vec{\varphi}_2}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

und

$$d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2 = d\vec{\varphi}$$

Die Verhältnisse liegen ähnlich wie beim Weg. Nur der geradlinige Weg \vec{s} ist ein Vektor, entsprechend gilt dies für den Drehwinkel $\vec{\varphi}$ um eine feste Achse. Im Fall eines beliebigen krummen Wegs kann man nur unendlich kleine Wegelemente addieren:

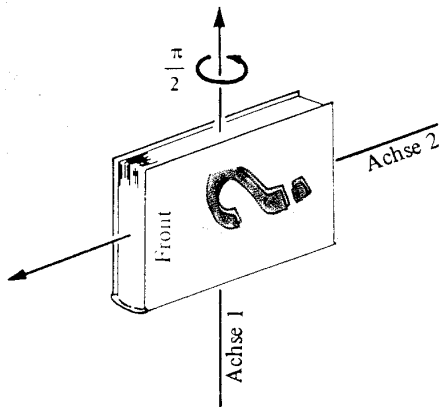
$$d\vec{s}_1 + d\vec{s}_2 = d\vec{s}$$

ebenso wie bei beliebigen Drehachsen nur unendlich kleine Drehwinkel.

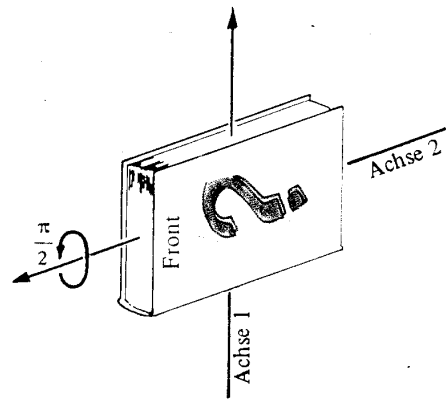
Anschaulich ist einleuchtend, warum nur sehr kleine Drehwinkel sich einfach addieren lassen, größere hingegen nicht, wenn die Achsen nicht parallel sind:

Das Ergebnis der Drehungen hängt von der Reihenfolge der Drehungen ab, diese sind nicht kommutativ. Das liegt daran, daß wir von körpereigenen Drehachsen sprechen. Die erste Drehung ändert selbst die Lage der zweiten Drehachse.

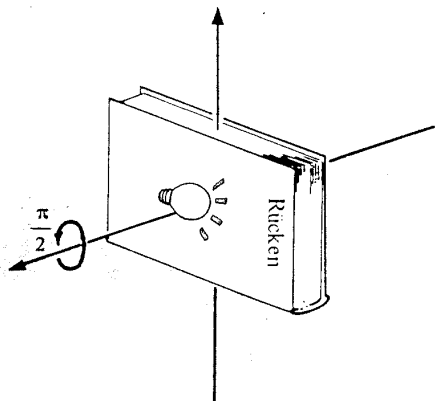
Anschaulich kann man die Änderung der Drehachsen mit der Drehung und das unterschiedliche Ergebnis nach einander ausgeführter Drehungen um 90° an einem Buch betrachten:



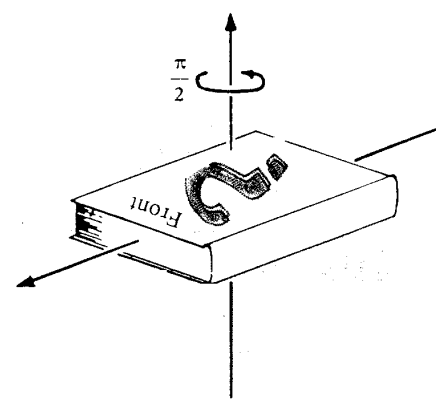
Ursprüngliche Lage des Buches, es wird jetzt um 90° um Achse 1 gedreht:



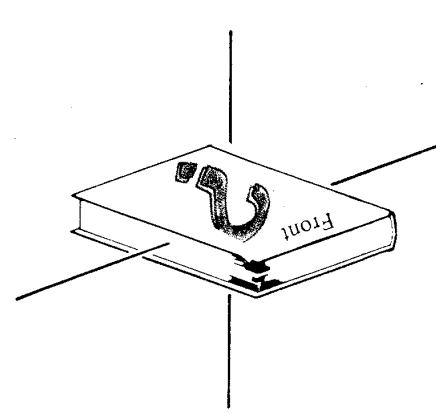
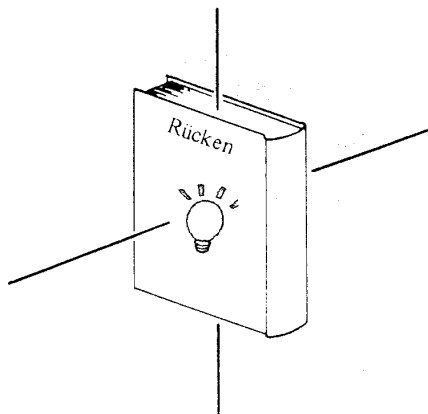
Ursprüngliche Lage des Buches, es wird jetzt um 90° um Achse 2 gedreht:



Lage nach der ersten Drehung um Achse 1. Es wird jetzt um 90° um Achse 2 gedreht:



Lage nach der ersten Drehung um Achse 2. Es wird jetzt um 90° um Achse 1 gedreht:



Die beiden Endlagen sind unterschiedlich, obwohl bei beiden Büchern um je 90° in Richtung der 1. und der 2. Achse gedreht wurde, in unterschiedlicher Reihenfolge!

Abbildung VI.6: Nicht-Kommutativität bei Raumdrehungen

Unentbehrlich für das Verständnis dieses Kapitels ist die Sicherheit im Umgang mit dem Kreuz- bzw. Vektorprodukt. Deshalb werden noch einmal seine wichtigsten Eigenschaften und Rechenregeln zusammengestellt.

Die Definition des Vektorproduktes hatten wir so angegeben:

$$\text{Vektorprodukt: } \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} .$$

Mit der Konvention über die Richtung ist gilt diese Gleichung, wenn

\vec{a} auf dem kürzesten Weg in \vec{b} überführt wird

und \vec{c} für den dadurch gegebenen Drehsinn die Richtung einer Rechtsschraube bekommt.

Da bei Vertauschung von \vec{a} und \vec{b} im Sinne dieser Definition der Drehsinn umgekehrt wird, muß gelten:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Das Kommutativ-Gesetz gilt nicht!

Stellt man die Vektorgrößen als Pfeile dar, dann entspricht der Betrag des Vektorproduktes dem Flächeninhalt des von beiden Pfeilen aufgespannten Parallelogramms.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} = & (a_y b_z - a_z b_y) \vec{u}_x \\ & + (a_z b_x - b_z a_x) \vec{u}_y \\ & + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{u}_z \end{aligned}$$

Diese komponentenweise Darstellung kann auch in kompakter Form als Determinante geschrieben werden, wobei

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

denn es gilt die Regel

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Alles weitere (z.B. Differentiation von Vektoren) in Standardbüchern über die mathematischen Hilfsmittel des Physikers.²

VI.1 Schwerpunktsatz

Wie bereits eingehend erläutert, kann die Bewegung eines Körpers sehr kompliziert sein. Sie läßt sich jedoch immer als Überlagerung von Translation des Schwerpunktes und Rotation um den Schwerpunkt beschreiben. Die Translation eines Massepunktes, hier des Schwerpunktes, ist uns schon bekannt; sie ist einfach zu beschreiben, vorausgesetzt, man kennt den Schwerpunkt eines Körpers.

Die einfachste Figur, deren Schwerpunkt schon in der Mittelstufe berechnet wurde, ist ein Dreieck.

Versuch VI.2: Schwerpunkt eines Dreiecks

Um den Schwerpunkt einer dreieckigen Platte zu ermitteln, kann man sie nacheinander frei beweglich an den drei Ecken aufhängen und jeweils einen Faden vom Eckpunkt aus senkrecht hinunter hängen lassen. Der Verlauf des Fadens wird markiert. Diese drei Geraden schneiden sich in einem Punkt, dem Schwerpunkt.



Aus der Geometrie ist bekannt, daß die aufgezeichneten Geraden die Seitenhalbierenden, auch Schwerlinien genannt, des Dreiecks sind.³ Unterstützt man

diese Schwerlinien, so balanciert der Körper auf einem Stab. Unterstützt man die Scheibe im Schwerpunkt, so balanciert sie auf einem Punkt. Analog kann man für beliebige (flache) Körper verfahren.

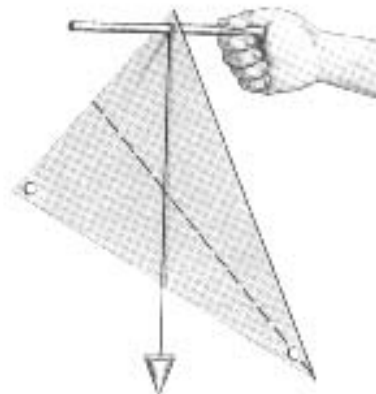


Abbildung VI.7: Ermittlung des Schwerpunktes



² Einige Standarddarstellungen sind:

S. Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik.- Teubner-Verlag, Stud. Bücher

Berendt-Weime: Mathematik für Physiker.- Physikverlag, Weinheim

Karl Rottmann: Mathematische Formelsammlung.- BI Hochschultaschenbücher

Bronstein [et. al.]: Taschenbuch der Mathematik.- Verlag Harry Deutsch

³ Zudem teilt der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden so, daß die Teilstrecken zu der Ecke doppelt so lang wie zur gegenüberliegenden Seite ist.

Wie berechnet man nun den Schwerpunkt eines beliebigen, ausgedehnten Körpers?

Bei zwei Massepunkten A und B gleicher Masse ist sofort einsichtig, daß der Schwerpunkt auf der Verbindungsgraden genau in der Mitte der Strecke von A nach B liegt. Bei zwei Massepunkten A und B verschiedener Massen liegt der Schwerpunkt ebenfalls auf der Verbindungslinie, jedoch näher an der schwereren Masse. Diese Überlegung haben wir schon bei der Betrachtung des Erde- Mond- Systems genutzt. Man kann leicht nachvollziehen, daß der Schwerpunkt die Verbindungslinie im umgekehrten Verhältnis der

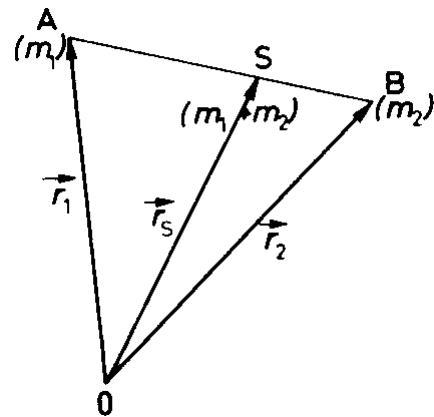


Abbildung VI.8: Schwerpunkt eines Zweikörpersystems

Massen teilt.

$$\overline{AS} = \frac{m_2}{m_1} \overline{SB}.$$

Betrachtet man noch die Ortsvektoren von einem beliebigen Nullpunkt zu den Massen, dann kann man aus der Abbildung die Beziehung ablesen:

$$\begin{aligned} \vec{r}_s - \vec{r}_1 &= \frac{m_2}{m_1} (\vec{r}_2 - \vec{r}_s) \\ \Leftrightarrow \vec{r}_s &= \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Nimmt man nun mit derselben Überlegung einen dritten, vierten ... bis n-ten Körper hinzu, erhält man als Formel für den Schwerpunkt:

$$\begin{aligned} \vec{r}_s &= \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \\ \Leftrightarrow \vec{r}_s &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \end{aligned}$$

Im karthesischen Koordinatensystem hat der Schwerpunkt die Koordinaten

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad z_s = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Für kontinuierliche Masseverteilungen muß über infinitesimal kleine Massen integriert werden. Mit der Gesamtmasse M berechnet sich der Schwerpunkt

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm.$$

Mit der Dichte $\rho = \frac{M}{V}$ $\Rightarrow \vec{r}_s = \frac{1}{M} \int \vec{r} \rho(\vec{r}) dV.$

Mit diesem Ergebnis können wir den Schwerpunktsatz formulieren:

Schwerpunktsatz: Der Massenschwerpunkt eines Systems von Massen m_i bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse M im Schwerpunkt S vereinigt wäre und dort die Summe aller äußeren Kräfte \vec{F}_i^{ex} angreifen würde.

Der Spezialfall $\vec{F}^{ex} = 0$ kam schon beim Impulssatz vor: Wirken nur innere Kräfte, so bewegt sich der Schwerpunkt (Massenmittelpunkt) mit konstanter Geschwindigkeit auf gerader Linie, für ihn gilt also das Trägheitsgesetz.

Im Folgenden wollen wir den Schwerpunktsatz anhand eines Beispiels verifizieren:

Eine Hantel mit masseloser Stange fliege durch die Luft.

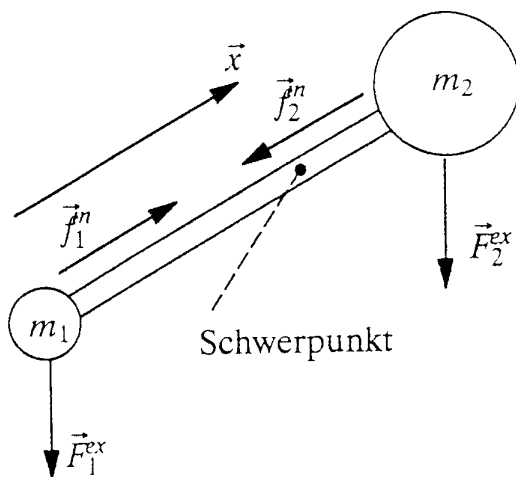


Abbildung VI.9: Schwerpunkt eines Hantelmodells

Zunächst wirken auf die beiden Massen der Hantel, m_1 und m_2 , die Gewichtskräfte \vec{F}_i^{ex} .

Dabei seien die Kugeln idealisiert als Massepunkte in den einzelnen Schwerpunkten. Die Richtung der Verbindungstange sei \vec{x} . Durch die Stange gehalten, wirken auf die Massen die Zwangskräfte der Stange f_i^{in} .

Aus der Formel für den Schwerpunkt des Hantelsystems:

$$x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

mit $M = m_1 + m_2$

$\Leftrightarrow M x_s = m_1 x_1 + m_2 x_2$

Durch Differentiation nach der Zeit erhalten wir den Ausdruck für die Gesamtkraft, denn

aus $a = \frac{d^2 x}{dt^2}$ folgt

$M \ddot{x}_s = m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 \quad \neg$

Für jede einzelne Kugel gilt das Grundgesetz der Mechanik: Die Summe der wirkenden Kräfte

$$\vec{F}_i^{\text{ex}} \text{ und } f_i^{\text{in}} \text{ ist gleich der Kraft } \vec{F}_i = m_i \ddot{x}_i$$

$$\Rightarrow m_1 \ddot{x}_1 = (F_1^{\text{ex}})_x + f_1^{\text{in}}$$

und

$$m_2 \ddot{x}_2 = (F_2^{\text{ex}})_x + f_2^{\text{in}}.$$

eingesetzt in \neg

$$\Rightarrow M \ddot{x}_s = (F_1^{\text{ex}})_x + f_1^{\text{in}} + (F_2^{\text{ex}})_x + f_2^{\text{in}}$$

Das Reaktionsprinzip besagt

$$f_1^{\text{in}} = - f_2^{\text{in}} \quad -$$

$$\Rightarrow M \ddot{x}_s = (F_1^{\text{ex}})_x + (F_2^{\text{ex}})_x$$

$$\Leftrightarrow M \ddot{x}_s = \sum_{i=1}^2 (F_i^{\text{ex}})_x$$

Die Verallgemeinerung für 3 Dimensionen lautet dann

$$M \vec{a}_s = \sum_{i=1}^2 (\vec{F}_i^{\text{ex}})$$

Das Reaktionsprinzip gilt auch, wenn keine starre Verbindung vorliegt. Als Verbindung könnte z.B. eine Feder fungieren. x_1 und x_2 wären dann zeitabhängig.

Schlußfolgerung: Bei der Abwesenheit von äußeren Kräften bewegt sich der Massenschwerpunkt gradlinig und gleichförmig. Ein Massensystem oder ein Körper kann sich dann nur um Achsen drehen, die durch seinen Schwerpunkt gehen. Das gilt auch noch, wenn der Körper sich in einem homogenen Kraftfeld befindet. Es gilt nicht mehr, wenn der Körper an beliebiger Stelle fest gelagert wird und damit die Drehachse im Raum festgehalten wird. Es gilt nur für freie Achsen.

VI.2 Drehmoment eines starren Körpers

Auf Seite 103 hatten wir das Drehmoment definiert als

Definition V.6:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Das Drehmoment war die Übertragung des Kraftbegriffes auf die Rotation. Nun wollen wir dieses Drehmoment für starre Körper genauer untersuchen. Dazu zunächst ein Versuch:

Versuch VI.3: Fadenrolle:

Bei diesem Versuch wird eine überdimensionale Garnrolle an einem Fadenende gezogen. Die Beobachtung zeigt: Je nach Winkel, unter dem an der Rolle gezogen wird, rollt die Rolle nach vorne, nach hinten oder sie bleibt in Ruhe.

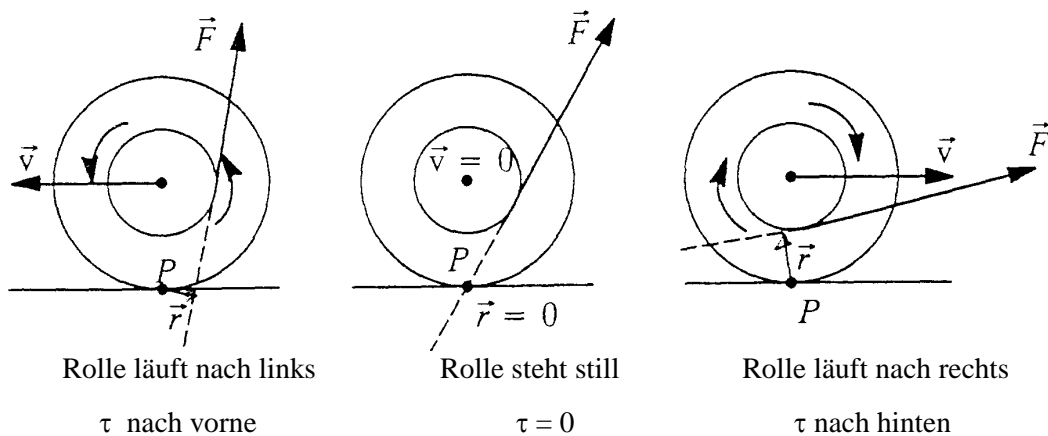


Abbildung VI.10: Versuch VI.3 Fadenrolle

Dieses Phänomen kann man sich so erklären, daß das Drehmoment am Auflagepunkt P angreift, nicht am Schwerpunkt. Die Rolle dreht sich also um den Auflagepunkt. Nach dieser Beobachtung müssen wir uns fragen, wie man eine solche Bewegung mathematisch günstig beschreiben kann. Anders ausgedrückt: Es geht um die Festlegung der momentanen Drehachse.

Die erste Möglichkeit besteht darin, einen Punkt auszuwählen, z.B. den Auflagepunkt P am Anfang des Versuches, und dessen Verlauf zu beschreiben. Markiert man diesen Punkt und zeichnet dessen räumlichen Verlauf auf, so erhält man eine komplizierte Bahn, eine Zykloide. Der Punkt P steht bei der Berührung mit dem Boden momentan still.

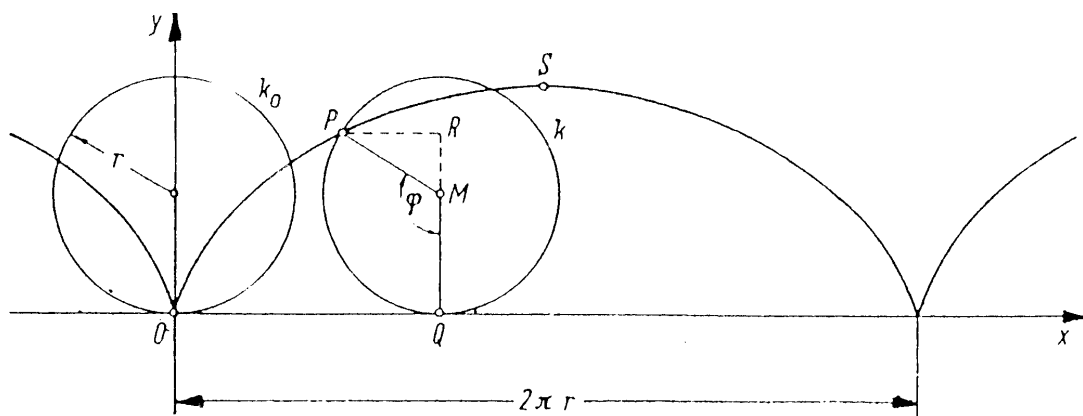


Abbildung VI.11: Ein auf dem Rad markierter Punkt beschreibt im Raum eine Zykloide

Um diese Bewegung zu beschreiben müßte das Kräftegesetz für diesen Punkt gefunden werden. Das ist nicht so ohne weiteres aufzustellen, wir wollen deshalb versuchen, eine günstigere Beschreibung zu finden:

Um die zweite Möglichkeit zu finden, betrachten wir den Versuch in etwas abgewandelter Form noch einmal. Statt selbst an der Rolle zu ziehen, legen wir sie auf eine schiefe Ebene.

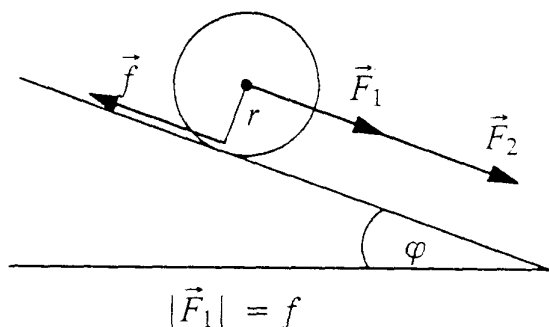


Abbildung VI.12: Zylinder rollt eine schiefe Ebene hinab

Jetzt kennen wir ein genaues Kraftgesetz für die äußere Kraft. Die Kräfte, die wirken, können wir aufschreiben:

Für die Bewegung längs einer schiefen Ebene wirkt die Komponente der Gewichtskraft

$$F = Mg \sin \varphi.$$

Die zweite wirkende Kraft erhält man aus folgender Überlegung: Der Zylinder rollt nur deswegen die Ebene hinunter statt zu

rutschen, weil eine Haftreibung wirkt. Ohne die Haftreibung würde er abrutschen. Wir nennen die Reibungskraft, sie wirkt entgegengesetzt der Komponente der Gewichtskraft.

Jetzt zerlegen wir die Kraft F in zwei Komponenten. Die erste Komponente längs des Vektors, die denselben Betrag hat wie die Reibungskraft, dieser aber entgegen gerichtet ist, bezeichnen wir mit. Betragsmäßig gilt dann

$$f = F_1 .$$

Der Rest des Vektors \vec{F} wird nicht kompensiert, bewirkt also nach Newton eine Beschleunigung. Wir bezeichnen diesen Rest mit, sein Betrag errechnet sich aus

$$F_2 = F - F_1 .$$

Nach Newton gilt

$$\vec{F}_2 = M\vec{a} .$$

\vec{F} setzt sich somit zusammen aus einer Beschleunigungskraft \vec{F}_2 und einer Gegenkraft \vec{F}_1 zur Reibung, die zusammen mit \vec{f} ein Kräftepaar bildet.

Insgesamt haben wir die Kräfte zerlegt in ein Kräftepaar und eine resultierende Kraft am Schwerpunkt!

Dabei ist ein Kräftepaar definiert als:

Definition VI.1: Ein Kräftepaar ist ein System aus zwei parallelen, gleich großen, aber entgegengesetzt gerichteten Kräften, deren

Angriffslinien nicht auf derselben Gerade liegen.

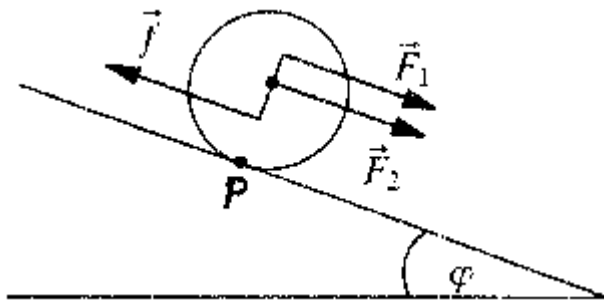


Abbildung VI.13: Kräftepaar bei rollendem Zylinder

Dabei haben wir von der Verschiebung der einzelnen Kräfte Gebrauch gemacht: Zunächst verschiebt man die 'Restkraft', die eine Beschleunigung des Körpers im Newton'schen Sinn hervorruft, in den Schwerpunkt. Das ist aufgrund des Schwerpunktsatz erlaubt. Dann verschieben wir das Kräftepaar \vec{f}, \vec{F}_1 so,

dass die Mitte der Verbindungsgeraden auf dem Schwerpunkt liegt.

Das Kräftepaar \vec{f}, \vec{F}_1 greift jetzt symmetrisch zum Schwerpunkt an. Die Bewegung des Zylinders wird in dieser Darstellung beschrieben, ohne daß formal am Auflagepunkt eine Kraft angesetzt wird.

Das Kräftepaar \vec{f}, \vec{F}_1 bewirkt eine Rotation, also ein Drehmoment, während die 'Restkraft' \vec{F}_2 eine Translation des Schwerpunkts bewirkt.

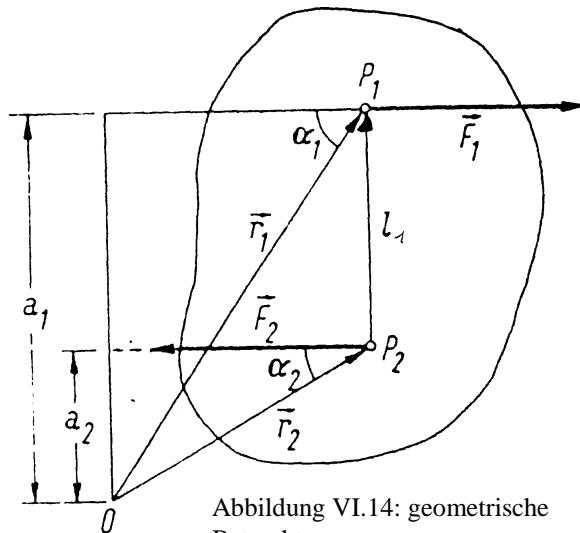


Abbildung VI.14: geometrische Betrachtung

Nun wollen wir das Drehmoment für einen beliebigen Bezugspunkt 0 eines beliebigen Körpers berechnen. Dazu sollen zwei Punkte P_1 und P_2 betrachtet werden, an denen die Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 angreifen. Die beiden Kräfte erfüllen die Bedingungen für ein Kräftepaar. Das Drehmoment um Punkt P_1 beträgt nach der allgemeinen Definition

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$$

analog für P_2

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2)$$

Für die Beträge gilt dann

$$\tau = (r_1 F_1 \sin(\alpha_1)) + (r_2 F_2 \sin(\alpha_2))$$

Die geometrische Betrachtung zeigt, daß die Beziehung $a_i = r_i \cdot \sin(r_i, F_i)$ gilt. Damit folgt

$$\Leftrightarrow \tau = a_1 F_1 + a_2 F_2$$

mit $F_1 = -F_2$

$$\Leftrightarrow \tau = (a_1 - a_2) F_1$$

mit $a_1 - a_2 = \ell$

$$\Leftrightarrow \tau = \ell F_1$$

Der Betrag des Drehmoments hängt also nur vom senkrechten Abstand der Punkte und vom Kräftepaar ab.

Als allgemeine Formulierung kann festgehalten werden:

Zu jedem Kräftepaar \vec{F}_1 und \vec{F}_2 gehört ein Drehmoment τ mit. $\vec{\ell}$ ist dabei der Verbindungsvektor der Angriffspunkte von \vec{F}_1 und \vec{F}_2 .

Merke: Ein Kräftepaar dreht einen frei beweglichen Körper so, daß seine Drehung um eine durch den Schwerpunkt gehende Achse erfolgt. Die Drehung ist dabei unabhängig von der Lage des Kräftepaares, da dieses ein freier Vektor ist.

Merke: Ein Kräftepaar kann im starren Körper unter Beibehaltung seiner Richtung verschoben werden, ohne dass das Drehmoment sich ändert.

Für die Rechnung mit Kräftepaaren heißt dieses Ergebnis, daß man das Kräftepaar für die jeweilige Bewegung geschickt verschieben kann, z.b. in den Schwerpunkt der oben berechneten Rolle.

Damit ist der vorangestellte Satz bewiesen:

Merke: Bei frei beweglichen Körpern läßt sich die Bewegung beschreiben durch **Translation des Schwerpunkts** und **Rotation um den Schwerpunkt**.

VI.3 Trägheitsmoment

Bisher haben wir drei wichtige Analogien zwischen Translation und Rotation herausgearbeitet:

	Translation		Rotation	
Impuls	\vec{p}	\ddot{U}	\vec{L}	Drehimpuls
Geschwindigkeit	\vec{v}	\ddot{U}	$\vec{\omega}$	Winkelgeschwindigkeit
Beschleunigung	\vec{a}	\ddot{U}	$\vec{\alpha}$	Winkelbeschleunigung
Kraft	\vec{F}	\ddot{U}	$\vec{\tau}$	Drehmoment
Masse	m	\ddot{U}	?	

Um das Grundgesetz der Mechanik übertragen zu können, fehlt uns nur noch ein Analogon zur Masse. Diese Übertragung der Masse wird Trägheitsmoment genannt. Wie kann man aus dem bisher bekannten eine mathematische Beschreibung des Trägheitsmomentes entwickeln?

Betrachten wir wieder ein einfaches Beispiel:

Ein einfacher Fall eines rotierenden starren Körpers ist eine rotierende Platte, deren Ebene senkrecht zur Rotationsachse ist. Die Platte bestehe aus diskreten Massenpunkten m_i , die starr miteinander verbunden sind. Dann ergibt sich für die Rotationsenergie E_R , also die kinetische Energie der Massepunkte m_i :

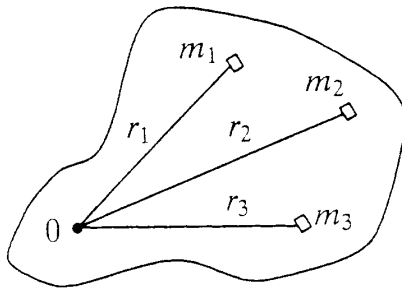


Abbildung VI.15: Massepunkte eines starren Körpers

Für eine Masse m_i

$$E_{Ri} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

für alle N Massen folgt

$$E_R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2$$

In einem starren Körper haben alle Massepunkte dieselbe Winkelgeschwindigkeit.

Also gilt mit $v = \omega r$

$$\Leftrightarrow E_R = \frac{1}{2} \sum m_i (\omega r_i)^2$$

mit $\omega = \text{const.}$

$$\Leftrightarrow E_R = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_i^2$$

Vergleichen wir diese Formel mit der Ausgangsformel für die kinetische Energie:

$$E_R = \frac{1}{2} v^2 m$$

$$E_R = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \sum m_i r_i^2$$

Die bereits bekannte Analogie

$\vec{v} \quad \ddot{U} \quad \vec{\omega}$ zeigt, daß die Ausdrücke

identisch sind, wenn

$$m = \sum m_i r_i^2 \quad \text{ist.}$$

Nun kann man das Trägheitsmoment definieren:

Definition VI.2: Das Trägheitsmoment eines starren Körpers mit diskreter Massenverteilung bezüglich einer zur Ebenen senkrechten Drehachse wird

definiert als
$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2,$$

wobei r_i der Abstand des Massepunktes m_i von der Drehachse ist.

Man hätte auch argumentieren können, daß $m_i r_i^2$ eine rein geometrische Größe ist, eine Eigenschaft starrer Körper. Dann definiert man eine Abkürzung

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 .$$

Die Rotationsenergie berechnet sich damit als

$$\text{Rotationsenergie} \quad E_R = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

$$\text{analog zur Translationsenergie} \quad E_T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 .$$

Merke: Die **Rotationsenergie** berechnet sich als

$$E_R = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

$$\text{analog zur Translationsenergie } E_T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 .$$

Auch für Rotationsbewegungen gilt die **Energieerhaltung**.

Diese Formel gilt für alle Körper, solange \vec{r}_i senkrecht auf der Drehachse steht.

Mit dieser Definition kann man nun alle Größen von der Translation auf die Rotation übertragen.

Nun fehlt nur noch der Übertrag dieses Ergebnisses auf kontinuierliche Massenverteilung, also die Summation über infinitesimale Massestücke.

Dementsprechend gilt bei Übergang zur Integration mit dem Abstand r von der Drehachse:

$$I_Z = \int r^2 dm$$

$$\text{mit der Dichte } \rho = \frac{dm}{dV} \quad \Rightarrow \quad I_Z = \int r^2 \rho dV$$

I_Z ist das Trägheitsmoment in bezug auf die Drehachse z .

Definition VI.3: Das Trägheitsmoment eines starren Körpers mit kontinuierlicher Massenverteilung bezüglich einer zur Ebenen senkrechten

Drehachse z wird definiert als $I_Z = \int r^2 \rho dV,$

wobei r_i der Abstand des Massepunktes m_i von der Drehachse ist.

Damit läßt sich das Grundgesetz der Mechanik auch auf die Rotation übertragen. Dazu sollen die Größen Drehimpuls und Drehmoment mit den Variablen Winkelgeschwindigkeit,

Winkelbeschleunigung und Trägheitsmoment geschrieben werden. Zunächst berechnen wir den

Drehimpuls:
$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

mit $p_i = m_i v_i \Rightarrow \vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$

und mit $r_i \perp v_i \Rightarrow \vec{L}_i = m_i r_i v_i \vec{e}_i$

mit $\vec{e}_i =$ Einheitsvektor in Richtung L_i

mit $v = \omega r \Rightarrow \vec{L}_i = m_i r_i^2 \omega \vec{e}_i$

$$\Rightarrow \vec{L} = m_i r_i^2 \vec{\omega}$$

falls $\vec{r} \perp$ auf der Drehachse steht, wie in unserem Beispiel angenommen wurde.

Damit gilt für den Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \vec{\omega}$$

$\Leftrightarrow \boxed{\vec{L} = I \vec{\omega}}$

Merke: Der **Drehimpuls** läßt sich analog zum Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ darstellen als $\vec{L} = I\vec{\omega}$

Eine analoge Berechnung zeigt, daß aus dem Drehmoment $\vec{\tau}$

mit
$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

und $\vec{L} = I\vec{\omega} \Rightarrow \vec{\tau} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}$,

mit $\frac{d\omega}{dt} = \alpha \Rightarrow \vec{\tau} = I \cdot \vec{\alpha}$ analog zu $\vec{F} = m\vec{a}$ folgt.

Merke: Das **Drehmoment** läßt sich analog zur Kraft $\vec{F} = m\vec{a}$ darstellen als.

VI.4 Drehimpulserhaltung

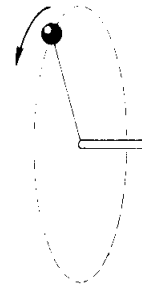
Wenn das resultierende externe Drehmoment null ist, bleibt der totale Drehimpulsvektor eines abgeschlossenen Systems konstant. Diese Aussage ist analog zu der Impulserhaltung der Translationsbewegung.

Drehimpulserhaltung: Ist das resultierende Drehmoment eines Systems null, so ist der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße.
Aus $\vec{\tau} = 0$ folgt $\vec{L} = \text{const.}$

Ist das Drehmoment null und damit der Drehimpuls,, konstant, muss das aber nicht bedeuten, dass damit auch Winkelgeschwindigkeit und Trägheitsmoment konstant sein müssen. Zur Veranschaulichung dieses Sachverhalts dient der nächste Versuchsblock:

Versuch VI.4: rotierender Ball

Dieser Versuchsaufbau besteht aus einem Eisengestell, das einen Winkel darstellt, so daß eine Stange parallel zu Boden in einigem Abstand dazu montiert ist. An dieser Stange wird ein Ball an einem Faden festgeknotet. Versetzt man nun diesen Ball einmal in Rotation um die Stange, so wirkt nach dem Anstoßen kein Drehmoment mehr, der Drehimpuls ist konstant. Dennoch kann man beobachten, daß der Ball, je mehr sich der Faden um die Stange wickelt, immer schneller rotiert. Die Länge des Fadens stellt den oben benutzten Vektor r , also den Abstand der Masse von der Drehachse dar. Verringert sich dieser Abstand, so wird auch das Trägheitsmoment kleiner. Da das Produkt aus Trägheitsmoment und Winkelgeschwindigkeit konstant bleibt, muß sich die Winkelgeschwindigkeit erhöhen - der Ball rotiert schneller.



Versuch VI.5: Drehschemel

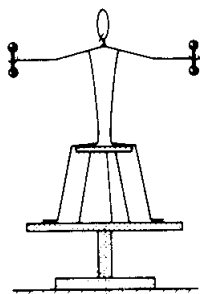


Abbildung VI.16:
Schemazeichnung
Versuch VI.5

Dasselbe Prinzip liegt diesem Versuch zugrunde. Eine Testperson setzt sich auf einen drehbaren Schemel und nimmt in beide Hände ein möglichst großes Gewicht. Bei ausgestreckten Armen wird die Person mit dem Stuhl angestoßen und so in Rotation versetzt. Beide drehen sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit. Zieht die Person nun die Gewichte an den Körper, so verringert sie ihr Trägheitsmoment und vergrößert damit die Winkelgeschwindigkeit.

Dieses Prinzip machen sich nicht nur gelangweilte Schreibtischstuhl - Benutzer zunutze, sondern z.b. auch Eiskunstläufer, die bei einer Pirouette den Schwung holen, in dem sie alle Gliedmaßen möglichst weit vom Rumpf weg strecken. Zum Drehen ziehen sie dann die Arme an den Körper um das Trägheitsmoment zu verringern.



Abbildung VI.17:
Pirouette

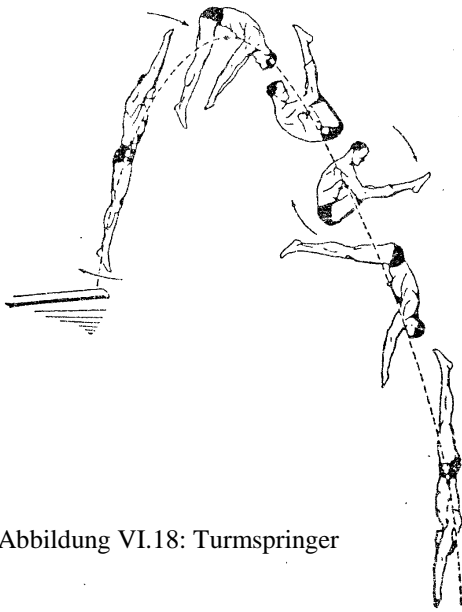


Abbildung VI.18: Turmspringer

Aus demselben Grund verringern auch Turmspringer vor einem Salto ihre Spannweite und damit das Trägheitsmoment. Der Anfangsdrehimpuls ist durch den Absprung festgelegt. Die Regelung der Umdrehungszahlen kann dann nur noch durch Änderung des Trägheitsmomentes erfolgen. Bei einem Turmspringer werden dabei Verhältnissen von $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ durch Änderung des Trägheitsmomentes erreicht.

Wenn die Winkelgeschwindigkeit ω' verändert wird, z.B. verdreifacht, dann durch die Veränderung des Trägheitsmomentes um denselben Faktor.

$$\text{Aus } \omega' = 3 \omega_0 \quad \Rightarrow \quad I' = \frac{1}{3} I_0,$$

$$\text{da} \quad I_0 \omega_0 = I' \omega'$$

aufgrund der Drehimpulserhaltung gelten muß.

$$\text{Für die Rotationsenergie gilt dann aber} \quad \frac{1}{2} I' \omega'^2 > \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2$$

Der Gewinn an Rotationsenergie muß von dem Springer durch Arbeit erbracht werden. Gegen die Zentrifugalkraft muß er Arbeit leisten, um die Arme und Beine anziehen zu können.

Versuch VI.6: Keltisches Wackelholz

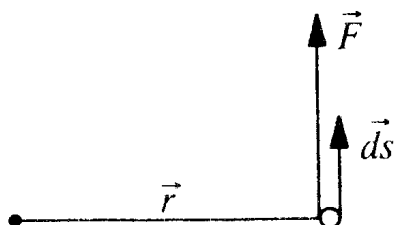
Das keltische Wackelholz ist ein Holzstück, das in Form eines Schiffsrumpfes geschnitzt ist. Drückt man eine Ecke senkrecht nach unten, so erwartet man, eine senkrechte Wippbewegung ähnlich einer Wippe. Diese Erwartung wird jedoch nicht erfüllt: Das Wackelholz beginnt zu rotieren. Da dem Holz nur ein Drehmoment in Richtung der waagerechten Achse gegeben wurde, scheint durch eine Drehung des Holzes um die waagerechte Achse das eben errechnete Gesetz widerlegt. Die Erklärung ist jedoch nicht ganz so spektakulär:

Das Holz ist unsymmetrisch gebaut worden, indem ein schweres Metallstück auf einer Seite eingelassen wurde. Dadurch liegt der Schwerpunkt nicht im erwarteten Symmetriepunkt. Das ausgeübte Drehmoment hat damit eine kleine Komponente längs der senkrechten Achse und das Holz dreht sich.

VI.5 Arbeit und Leistung

In der Dynamik der gradlinigen Bewegungen hatten wir die Arbeit definiert als Produkt aus zurückgelegtem Weg und dabei aufgebrachtener Kraft:

$$dW = d\vec{s} \cdot \vec{F}$$



Betrachtet man einen Massepunkt m , der bei einer Kreisbewegung ein Stück des Weges $d\vec{s}$ eines Kreises vom Radius r zurücklegt, so zeigt die geometrische Skizze den Zusammenhang

$$d\vec{s} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}.$$

Abbildung VI.19: Massepunkt m , der bei einer Kreisbewegung ein Stück des Weges $d\vec{s}$ eines Kreises vom Radius r zurücklegt

Die dabei geleistete Arbeit zeigt der Vergleich mit der Formel aus der Translation

$$dW = (d\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{F}$$

Mit der mathematischen Beziehung

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

gilt ebenso

$$dW = d\vec{\varphi} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$$

mit $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$\Rightarrow dW = d\vec{\varphi} \cdot \vec{\tau}$$

Merke: Die **Arbeit bei einer Rotationsbewegung** errechnet sich als

$$dW = d\vec{\varphi} \cdot \vec{\tau}$$

analog zur Arbeit der Translationsbewegung $dW = d\vec{s} \cdot \vec{F}$

Die Leistung war definiert als

$$P = \frac{dW}{dt}$$

mit dem obigen Ergebnis folgt dann

$$P = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \cdot \vec{\tau}$$

mit $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ folgt

$$P = \vec{\omega} \cdot \vec{\tau}$$

Merke: Die **Leistung bei einer Rotationsbewegung** errechnet sich als

$$P = \vec{\omega} \cdot \vec{\tau}$$

Im Folgenden betrachten wir die Leistung einer Rotationsbewegung anhand eines Motors:

Versuch VI.6: Messung der Stärke eines Motors durch Bestimmung seines Drehmomentes

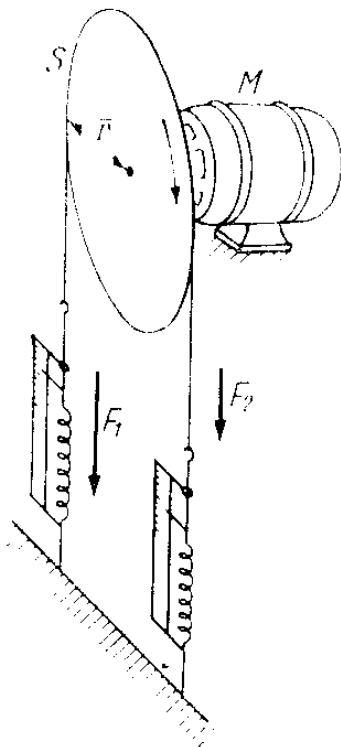


Abbildung VI.20: Leistung eines Motors

Bei diesem Versuch soll die Eingangsleistung eines Motors mit seiner Ausgangsleistung verglichen werden. Als Versuchsanordnung wird ein Motor M, der über eine Welle angetrieben wird, mit einer Riemenscheibe S des Radius r verbunden. Über die Scheibe wird ein Riemen gelegt, der durch Ziehen gespannt werden kann. An den beiden Enden des Riemens werden Federwaagen befestigt. Zunächst läßt man den Riemen locker hängen und mißt im Leerlauf die Umlauffrequenz ν , die sich einstellt, wenn der Motor läuft. Danach spannt man den Riemen bis der Motor die Scheibe nicht mehr beschleunigen kann. Dann wird das Motordrehmoment grade von Gesamtdrehmoment der Feder ausgeglichen. Die Federn sind ungleich gedehnt. Auf der einen Seite wirkt die Kraft F_1 , auf der anderen die Kraft F_2 .

Im Bezug auf die Achse wirken dann die Drehmomente dieser beiden Kräfte einander entgegen, das Gesamtdrehmoment berechnet sich also als

$$\tau_G = (F_1 - F_2)r \quad \curvearrowright$$

Die Motorleistung P läßt sich dann berechnen aus

$$P = \vec{\tau}_G \cdot \vec{\omega}$$

Für den Betrag folgt mit \curvearrowright

$$P = (F_1 - F_2)r \cdot \omega$$

mit $\omega = 2\pi\nu$ folgt

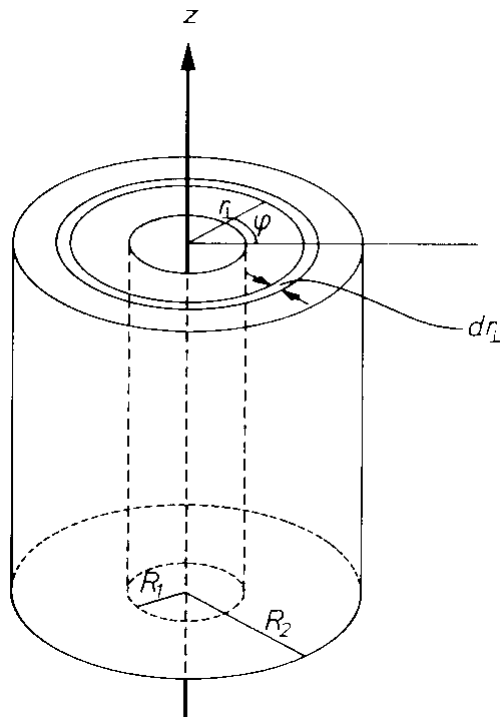
$$P = (F_1 - F_2)r \cdot 2\pi\nu$$

Die Eingangsleistung wird berechnet als Produkt von Stromstärke I und Spannung U

$$P_E = UI$$

Ein Vergleich der beiden Leistungen zeigt den Wirkungsgrad dieses Motors, der aufgrund von Energieverlusten, z.B. mechanischer Reibung, wesentlich kleiner als 100% ist.

VI.6 Konkrete Berechnung eines Trägheitsmoments



Nun betrachten wir ein Beispiel für Berechnung des Trägheitsmomentes. Zunächst soll das **Trägheitsmoment eines Zylinders** berechnet werden:

Wichtig bei der Berechnung eines Trägheitsmomentes ist zunächst die Symmetrieüberlegung. Wenn man die Koordinaten geschickt wählt und kleine Volumenelemente so definiert, daß man ihren Inhalt leicht berechnen und danach über alle Elemente summieren kann, spart man viel Zeit und Arbeit. Suchen wir also 'geschickte' Koordinaten:

Abbildung VI.21: Symmetriebetrachtung bei einem Zylinder

Der erste Versuch gilt den bekannten kartesischen Koordinaten. Nach der Formel für das

Trägheitsmoment
konstanten Dichte

$I_Z = \int r^2 \rho dV$ können wir mit der Bedingung einer
 $I_Z = \rho \int r^2 dV$ schreiben.

Der Zylinder habe die Dicke, bzw. Länge ℓ und den Radius R . Nun muß das Integral über das Volumen

$dV = \rho dx dy dz$ berechnet werden, also

$$I_Z = \int r^2 \rho dx dy dz = ?$$

Dieser Ansatz sieht kompliziert aus. Deshalb versuchen wir einen neuen Ansatz mit Zylinderkoordinaten. Dazu betrachten wir einen infinitesimal dünnen Hohlzylinder mit dem Radius r und der Dicke dr . Jetzt kann das Volumen direkt angegeben werden als Produkt aus Grundfläche $r^2 \pi$ und Höhe des Zylinders ℓ . Damit gilt

Volumen

$$V = r^2 \pi \cdot \ell$$

$$\Rightarrow dV = \ell \cdot 2\pi \cdot r dr$$

mit $\rho = \frac{dm}{dV}$

$$\Rightarrow dm = \rho \ell 2\pi r dr$$

$$\begin{aligned} \text{Aus } I_Z = \int r^2 dm & \Rightarrow I = 2\pi\rho\ell \cdot \int_0^R r^3 dr \\ & \Rightarrow I = 2\pi\rho\ell \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R \\ & \Rightarrow I = 2\pi\rho\ell \cdot \frac{R^4}{4} \\ & \Rightarrow I = \rho \cdot R^2 \pi \ell \cdot \frac{R^2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Mit } V = R^2 \pi \cdot \ell \quad \Rightarrow \quad I = \rho \cdot V \cdot \frac{R^2}{2}$$

Das ist die Formel für das Trägheitsmoment eines Zylinders des Radius R und des Volumens V.

Merke: Das **Trägheitsmoment eines Vollzylinders** beträgt

$$I = \rho \cdot V \cdot \frac{R^2}{2}$$

Wenn man nun zwei Zylinder derselben Masse eine schiefe Ebene herunter rollen lassen, müßten diese dieselbe Bewegung ausführen, wenn sie dasselbe Volumen und denselben Radius haben. Dieses Ergebnis betrachten wir bei einem Experiment:

Versuch VI.7: Zwei 'identische' Zylinder

Bei diesem Versuch werden zwei Zylinder derselben Masse und Abmessungen eine schiefe Ebene herunter rollen gelassen. Wider Erwarten rollt ein Zylinder schneller als der andere. Gehen wir wieder davon aus, daß die berechneten Prinzipien nicht falsch waren, muß analog zum Wackelholz auch hier eine Größe nicht das sein, was wir vermuten. Das Ergebnis findet sich beim Öffnen der Körper: ein Zylinder ist hohl. Berechnen wir nun, welcher Zylinder der schnellere ist:

Hierfür benötigen wir das Trägheitsmoment. Mit einer analogen Rechnung folgt dann für das Trägheitsmoment des Hohlzylinders:

$$I_H = MR^2$$

Genauer

$$I_H = \frac{M}{2} (R_a^2 + r_i^2)$$

Trägheitsmoment des Vollzylinders:

$$I_V = \frac{MR^2}{2}$$

Für die Kräfte, die auf rollende Zylinder wirken, gilt nach Seite 147:

$$\text{Kraft zur Beschleunigung} \quad ma = mg \sin\varphi - f \quad \hat{E}$$

mit $M = R \cdot f = I_Z \alpha \quad \neg$

mit $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

und $\omega = \frac{v}{R}$ $\Leftrightarrow \alpha = \frac{d\left(\frac{v}{R}\right)}{dt}$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \frac{1}{R}$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{a}{R} \quad \neg$

In $\neg \Rightarrow M = R \cdot f = I_Z \frac{a}{R}$

mit $I_Z =$ Trägheitsmoment um Symmetrieachse

Der Vergleich mit \hat{E} führt zu dem Ergebnis

$$a = \frac{g \sin \varphi}{1 + I / R^2 m}$$

Einsetzen der Trägheitsmomente für Vollzylinder und Hohlzylinder ergibt:

Vollzylinder: $a = \frac{2}{3} g \sin \varphi$

$\frac{1}{3}$ der Kraft wird auf Rotation verwendet.

Hohlzylinder: $a = \frac{1}{2} g \sin \varphi$

$\frac{1}{2}$ der Kraft wird auf Rotation verwendet.

Der Vollzylinder hat die größere Beschleunigung und rollt deshalb schneller.

Merke: Das **Trägheitsmoment eines Hohlzylinders** beträgt

$$I_H = \frac{M}{2} (R_a^2 + r_i^2).$$

Ein anderes Beispiel für die Berechnung einer Rotationsbewegung mit Hilfe des Trägheitsmomentes ist die **Maxwellsche Scheibe**:

Die Maxwellsche Scheibe ist aufgebaut wie ein Jojo mit einer inneren Scheibe, auf der ein Faden aufgerollt ist und einer äußeren Scheibe. Läßt man das Jojo fallen, während man den Faden festhält, wirken Erdanziehung und Fadenspannkraft. Der Schwerpunkt des Jojos, an dem

die Anziehungskraft der Erde angreift, liegt im Mittelpunkt der beiden konzentrischen Scheiben. Der Punkt, an dem die Kraft über den Faden angreift, liegt jedoch auf einem Punkt der inneren Scheibe. Die beiden Kräfte lassen sich wieder zerlegen in eine Restkraft und ein Kräftepaar. Das Jojo rotiert und läuft dabei nach unten. Ist der Faden jedoch ganz abgewickelt, läuft das Jojo wieder bis zum Ausgangspunkt hinauf. Die durch Heben des Jojos geschaffene potentielle Energie wird während des Vorgangs u.a. in Rotationsenergie umgewandelt. Offensichtlich wirkt die Energieerhaltung auch bei der Umwandlung von potentieller Energie in Rotationsenergie. Am untersten Punkt muß zudem die Drehimpulserhaltung das 'Aufwickeln' des Fadens auf dem Weg nach oben bewirken. Diese Prinzipien wollen wir nun mathematisch zusammenfassen, um die Beschleunigung zu berechnen, mit der die Scheibe nach unten läuft.

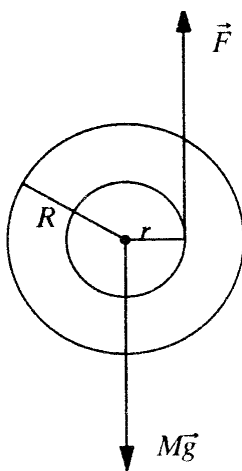


Abbildung VI.22:
Maxwellsche Scheibe

Die Fadenkraft \vec{F} greift an einem Punkt, der um den kleinen Radius vom Schwerpunkt entfernt liegt, senkrecht nach oben an.

Die Erdanziehungskraft \vec{G} greift im Schwerpunkt senkrecht nach unten an.

Die Resultierende der beiden Kräfte ist eine Kraft, die im Newton'schen Sinne eine Beschleunigung verursacht. Es gilt also:

$$\begin{aligned} M\vec{a} &= M\vec{g} + \vec{F} \\ \Leftrightarrow -\vec{F} &= M(\vec{g} - \vec{a}). \quad \hat{E} \end{aligned}$$

Die Fadenkraft \vec{F} ist uns leider nicht direkt über eine bekannte Formel zugänglich, wir wissen aber, daß die Fadenkraft ein

Drehmoment auf die Scheibe ausübt.

Da die Verbindungslinien \vec{r} senkrecht auf \vec{F} steht, kann mit Beträgen gerechnet werden. Statt $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ können wir das

Drehmoment $\tau = r \cdot F$ benutzen.

Ebenso gilt $\tau = I \frac{d\omega}{dt}$.

Aus $\tau = r \cdot F$ und $\tau = I \frac{d\omega}{dt}$ folgt $r \cdot F = I \frac{d\omega}{dt}$.

$$\Leftrightarrow r \cdot F = I \cdot \frac{1}{r} \frac{dv}{dt}$$

$$\Leftrightarrow r \cdot F = I \cdot \frac{a}{r}$$

$$\Leftrightarrow F = I \cdot \frac{a}{r^2}$$

Setzen wir diesen Ausdruck für die Fadenkraft in den Betrag von \hat{E} ein, so folgt

$$M(g - a) = I \cdot \frac{a}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow Ia = r^2 M (g - a)$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{r^2 M g}{I + r^2 M}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{g}{1 + I / r^2 M}$$

Setzen wir in diese Formel für die Beschleunigung eines Jojos noch das Trägheitsmoment einer Scheibe, bzw. eines Zylinders ein, so folgt

$$\text{mit } I = \frac{MR^2}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{g}{1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{r^2}}$$

Ist R^2/r^2 also wesentlich größer als 1, so rollt die Scheibe äußerst langsam ab.

Versuch VI.8: Maxwellsche Scheibe an einer Waage

Bei diesem Versuch wird eine Maxwellsche Scheibe an eine Schale einer Waage gehängt.

1) Im aufgerollten Zustand des Jojo wird die Waage justiert, indem man in die andere Waagschale Gewichte legt. Das Jojo ist so gewählt, daß der äußere Radius erheblich größer ist als der innere.

2) Läßt man nun das Jojo herunter laufen, so geht die Waagschale mit dem Jojo nach oben; sie zeigt ein kleineres Gewicht als vorher an. Das läßt sich so begründen:

Im Zustand 1) wirkt auf die Schale nur die Anziehungskraft der Erde $G = Mg$.

Läuft das Jojo, so wirken die oben aufgestellten Kräfte. Der Vergleich der Kräfte zeigt, daß die Kraft im Zustand 2) kleiner ist als die erste. Diese Differenz zeigt die Waage an.

3) Nachdem das Jojo umgeschlagen ist, zeigt die Waage beim Hinauflaufen wieder ein geringeres Gewicht an. Auch hier müssen wieder beide Kräfte von oben betrachtet werden. Diesmal wirkt die Beschleunigung a zwar als Verzögerung nach oben, sie hat aber ein negatives Vorzeichen. Damit wirkt die Resultierende wieder nach unten und die wirkende Kraft wird verringert.

VI.7 Steinerscher Satz

Bis jetzt haben wir gelernt, Rotationen um Symmetrieachsen zu beschreiben, indem wir das Trägheitsmoment bezüglich dieser Achse berechnet haben. Wollen wir nun die Rotation um eine andere als die Symmetrieachse berechnen, geraten wir in Schwierigkeiten. Bei der Berechnung des Trägheitsmoments haben wir uns die Symmetrie zunutze gemacht, um mit geeigneten Koordinaten rechnen zu können. Nun müssen wir uns darauf aufbauend eine

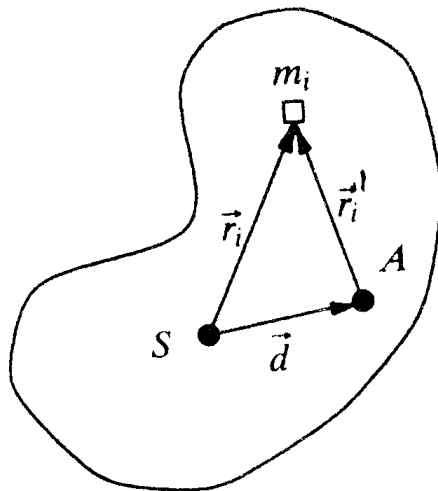


Abbildung VI.23: Zum Steinerschen Satz

Möglichkeit überlegen, die Rotation um beliebige Achsen zu berechnen. Dabei wollen wir uns aber auf Achsen beschränken, die parallel zur Symmetrieachse verlaufen.

Gegeben sei das Trägheitsmoment um die Symmetrieachse S. Gesucht ist das Trägheitsmoment um die dazu parallele Achse A. In der Skizze sind die Radiusvektoren eines Massepunktes m von den Achsen eingezeichnet.

\vec{r}_i sei der Radiusvektor bezüglich S

\vec{r}_i' sei der Radiusvektor bezüglich A und

\vec{d} sei der Abstand der Achsen S und A.

$$\vec{r}_i' = \vec{d} + \vec{r}_i$$

$$\Leftrightarrow r_i'^2 = r_i^2 + d^2 + 2 \vec{r}_i \cdot \vec{d}$$

Daraus folgt für das Trägheitsmoment bezüglich A mit

$$I_A = \int_V r_i'^2 dm$$

$$\Rightarrow I_A = \int_V r_i^2 dm + \int_V d^2 dm + 2 \int_V \vec{r}_i \cdot \vec{d} dm$$

laut Definition ist

$$\int_V r_i^2 dm = I_s$$

mit konstantem Abstand d und der Gesamtmasse M gilt

$$\int_V d^2 dm = M d^2$$

Da $\vec{r}_i \frac{\vec{d}}{d} =$ Projektion von \vec{r}_i auf \vec{d} ist, d.h. das Integral $\int_V \vec{r}_i \frac{\vec{d}}{d} dm$ die

Schwerpunktsdefinition bezüglich der Richtung von $\frac{\vec{d}}{d}$ ist, folgt

$$d \int_V \vec{r}_i \frac{\vec{d}}{d} dm = 0$$

Zusammengefaßt gilt dann:

$$I_A = I_s + M d^2$$

Diese einfache Formel zum Berechnen eines Trägheitsmoment bezüglich einer Rotationsachse parallel zu Symmetrieachse wird Steinerscher Satz genannt.

Steinerscher Satz: Ist I_s das Trägheitsmoment für eine Rotationsachse durch den Schwerpunkt, so gilt für eine parallele Achse durch A im Abstand d zur Rotationsachse

$$I_A = I_s + M d^2.$$

VI.8 Zusammenfassender Vergleich Rotation - Translation

Jetzt können wir abschließend eine komplette Gegenüberstellung der Größen in der Translation und der Rotation vornehmen. Die englischen Begriffe sind ebenfalls angeführt. Sie werden bei der Lektüre englischer Fachliteratur benötigt und helfen zudem, sich die Abkürzungen der einzelnen Größen zu merken.

Rectilinear Motion geradlinige Bewegung - Translation		Rotation about a Fixed Axis Rotation um eine feste Achse	
Displacement <i>Verschiebung</i>	\mathbf{x}	θ	Angular displacement <i>Winkelverschiebung</i>
Velocity <i>Geschwindigkeit</i>	$dx/dt = \mathbf{v}$	$\omega = d\theta/dt$	Angular velocity <i>Winkelgeschwindigkeit</i>
Acceleration <i>Beschleunigung</i>	$dv/dt = \mathbf{a}$	$\alpha = d\omega/dt$	Angular acceleration <i>Winkelbeschleunigung</i>
Mass (translational inertia) <i>Masse</i>	\mathbf{M}	\mathbf{I}	Rotational inertia <i>Trägheitsmoment</i>
Force <i>Kraft</i>	$M\mathbf{a} = \mathbf{F}$	$\tau \equiv M = I\alpha$	Torque <i>Drehmoment</i>
Work <i>Arbeit</i>	$\int Fdx = W$	$W = \int \tau d\theta$	Work <i>Arbeit</i>
Kinetic energy	$\frac{1}{2} Mv^2$	$\frac{1}{2} I\omega^2$	Kinetic energy
Power <i>Leistung</i>	$Fv = P$	$P = \tau \omega$	Power <i>Leistung</i>
Linear momentum <i>Impuls</i>	$Mv = \mathbf{p}$	$\mathbf{L} = I\omega$	Angular momentum <i>Drehimpuls</i>

Tabelle VI.1: Rotation - Translation

Die Beziehungen zwischen den oben angeführten grundlegenden Größen der Translation und der Rotation zeigt die folgende Tabelle.

Rectilinear Motion geradlinige Bewegung - Translation	Verbindende Gleichung	Rotation about a Fixed Axis Rotation um eine feste Achse
Velocity <i>Geschwindigkeit</i>	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$	Angular velocity <i>Winkelgeschwindigkeit</i>
Acceleration <i>Beschleunigung</i>	$\vec{a} = \vec{r} \cdot \alpha$	Angular acceleration <i>Winkelbeschleunigung</i>
Force <i>Kraft</i>	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$	Torque <i>Drehmoment</i>
Linear momentum <i>Impuls</i>	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	Angular momentum <i>Drehimpuls</i>

Tabelle VI.2: Verbindungsgleichungen

VI.9 Drehung um bewegliche Achsen: Kreisel

Bisher haben wir nur Rotationsbewegungen betrachtet, bei denen das Drehmoment $\vec{\tau}$ parallel zur Drehachse war. War dies nicht gewährleistet, konnten wir nur die Komponente von $\vec{\tau}$ betrachten, die in Richtung der Drehachse zeigte.

Versuch VI.9: Auf seiner Spitze gelagerter Kreisel

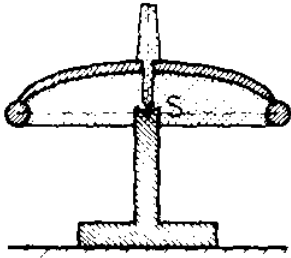


Abbildung VI.24: Kreisel im Schwerpunkt unterstützt

Ein einfaches Beispiel ist der Kreisel, der senkrecht steht und sich um seine Symmetrieachse dreht. Verliert der Kreisel aber durch Reibung an Energie, so führt er eine kompliziertere Bewegung aus. Man kann beobachten, daß ein Kreisel dann aus der senkrechten Anfangslage kippt und sich um sich selbst dreht, wobei die Achse des Kreisels zusätzlich einen Kreis beschreibt.

Diese Bewegung ist mit unseren Mitteln nicht mehr zu beschreiben.

Es gibt viele Beispiele für kompliziertere Kreiselbewegungen:

Versuch VI.10: Überkopf - Kreisel

Es gibt Kreisel, die zunächst mit senkrechter Achse rotieren, dann aber plötzlich umkippen und auf dem Kopf weiter drehen.

Versuch VI.11: Kreiselkompass

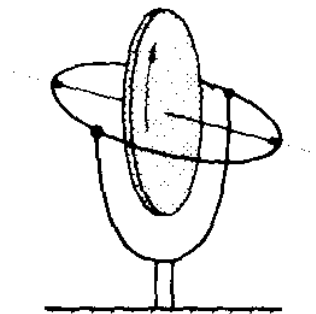


Abbildung VI.25: Prinzip des Kreiselkompasses

Rotationsbewegungen kann man sich in der Technik zunutze machen. Ein Beispiel ist der Kreiselkompass. Der Kompass kann einmal in eine Richtung ausgerichtet werden, dann behält er diese Ausrichtung bei, auch wenn das äußere Gestänge bewegt wird. Grundprinzip dieses Kompasses ist die sogenannte kardalische Aufhängung.

Versuch VI.12: Kardanisch aufgehängter Kreisel

Betrachten wir einen anderen Aufbau: Eine Scheibe wird so in einem Ring befestigt, daß sie in einer Ebene senkrecht zum Boden frei rotieren kann. Dieser Ring ist fest mit einer Stange verbunden, die ihrerseits zum Erdboden geneigt werden kann. Sie ist mit einem Gewicht so justiert, daß sie senkrecht zum Erdboden steht. Eine zweite Stange vom Boden zur Stange mit dem Ring kann reibungsfrei um ihre eigene Achse rotieren, bleibt dabei aber immer

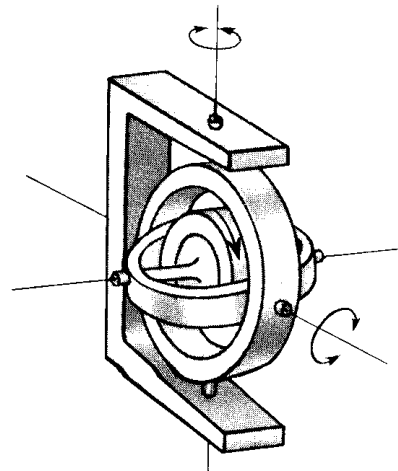


Abbildung VI.26: Kardanisch aufgehängter Kreisel

senkrecht zum Erdboden. Stellt man alle Stangen im rechten Winkel zueinander ein und dreht das Rad

an, so kann die Stange danach frei im Raum ausgerichtet werden, ohne daß sie wieder in die Ausgangslage zurückfällt. Hängt man ein weiteres Gewichtsstück an das dem Rad gegenüberliegende Ende der Stange, so beginnt die Stange sich in Horizontalebene zu drehen.

Wie kann man die in diesen Versuchen beobachteten Bewegungen beschreiben?

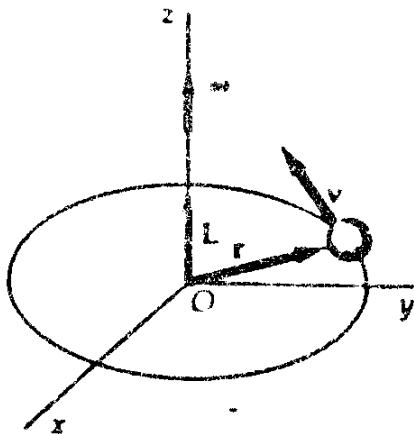


Abbildung VI.27: Teilchen auf Kreisbahn: Drehimpuls bzgl. Keismittelpunkt ist parallel zur Winkelgeschwindigkeit

Offensichtlich müssen wir von der bisherigen Einschränkung abweichen, das Drehmoment sei parallel zur Drehachse (Abbildung VI.27). Damit sind die bisherigen Beziehungen für den idealen kräftefreien Kreisel ($\vec{\tau} = 0$ und \vec{L} parallel zu $\vec{\omega}$ und zur Symmetrieachse) nicht mehr gültig. Wir müssen jetzt Achsen betrachten, deren Richtung sich ändert. Das Drehmoment ist nicht null ($\tau \neq 0$), da der Kreisel nicht im Schwerpunkt aufgehängt ist

Zerlegen wir das Drehmoment in Komponenten parallel zur Drehachse und senkrecht dazu, so können wir die Bewegung aufgrund des parallelen Anteils des Drehmomentes mit dem bisher Erarbeiteten sofort angeben. Welche Wirkung aber haben Komponenten von $\vec{\tau}$ senkrecht zur Drehachse?

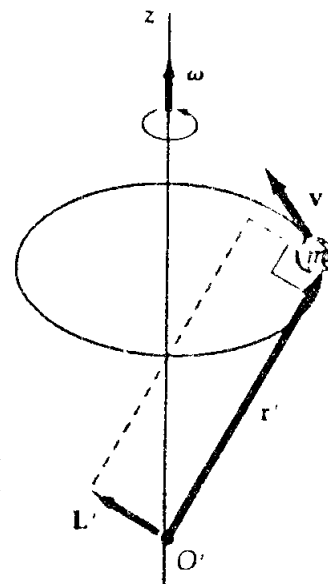


Abbildung VI.28: Drehimpuls bezogen auf einen vom Kreismittelpunkt verschiedenen Nullpunkt. Der Drehimpuls ist nicht parallel zur Winkelgeschwindigkeit.

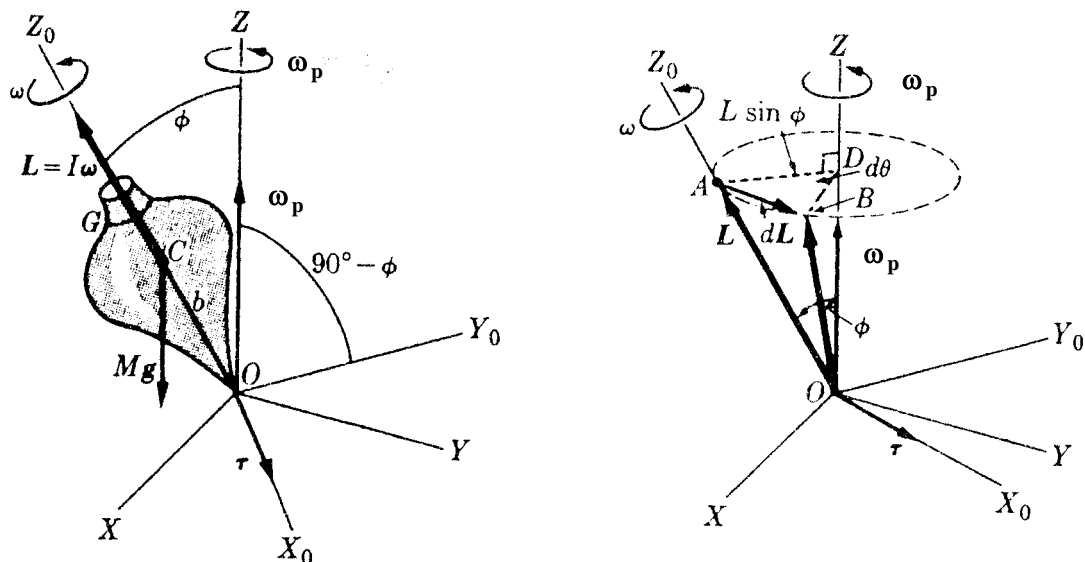


Abbildung VI.29: zeigt einen Kreisel, der sich mit ω um die Figurenachsens (Z_0) dreht

Abbildung VI.29 zeigt einen Kreisel, der sich mit ω um die Figurenachsens (Z_0) dreht, und auf den ein Drehmoment $\vec{\tau}$ wirkt, das nicht verschwindet. Hierdurch ist der Drehimpuls \vec{L} nicht mehr zeitlich konstant, denn aus

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

folgt mit

$$\vec{\tau} \neq 0$$

$$\Rightarrow \vec{L} \neq \text{const.}$$

Allgemein gilt

$$d\vec{L} = \vec{\tau} dt .$$

Steht das Drehmoment $\vec{\tau}$ senkrecht zum Drehimpuls \vec{L} ist die Änderung $d\vec{L}$ ebenfalls *senkrecht* zu.

Das wirkende Drehmoment $\vec{\tau}$ ist auf das im Schwerpunkt C wirkende Gewicht $M\vec{g}$ des Kreisels zurückzuführen und ist gleich dem Vektorprodukt $\vec{OC} \cdot M\vec{g}$. Dies bedeutet, daß das Drehmoment $\vec{\tau}$ senkrecht zu den Achsen Z und Z_0 ist und somit auch zu. Sein Betrag ist

$$|\vec{\tau}| = M g b \sin \phi$$

mit dem Winkel ϕ zwischen Z und Z_0 und $b = \overline{OC}$.

Unter Wirkung des Drehmomentes $\vec{\tau}$ **präzidiert** die Figurenachse Z_0 um die Achse Z mit der Winkelgeschwindigkeit ω_p . Das Ergebnis der Gleichung lautet

$$d\vec{L} / dt = \vec{\tau}$$

d.h. $d\vec{L}$ zeigt in die Richtung des Drehmomentes $\vec{\tau}$.

Im Folgenden soll die Präzessionsfrequenz ω_p berechnet werden. Allgemein gilt

$$\omega_p = d\Theta / dt$$

Die geometrische Betrachtung der Abbildung zeigt die Beziehung:

$$d\Theta = dL / L \sin \phi$$

$$\text{mit } d\vec{L} / dt = \vec{\tau} \quad \Rightarrow \quad d\Theta = \tau dt / L \sin \phi$$

wenn eine Näherung für kleine Winkel betrachtet werden soll.

$$\Rightarrow \quad \omega_p = \frac{\tau}{L \sin \phi}$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega_p = \frac{M g b \sin \phi}{L \sin \phi}$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega_p = \frac{M g b}{L}$$

$$\text{mit } L = I\omega \quad \Leftrightarrow \quad \omega_p = \frac{M g b}{I\omega}$$

Benennt man nun das Trägheitsmoment Mgb als τ , dann lautet die Formel

$$\boxed{\omega_p = \frac{\tau}{I\omega}}$$

wobei I das Trägheitsmoment um die Figurenachse des Kreisels und ω die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels ist.

Diese Formel zeigt, daß der Kreisel schnell präzediert, wenn das Drehmoment $\tau = Mgb$ groß ist und langsam, wenn der Drehimpuls groß ist. Seine Stabilität gegenüber einwirkenden Drehmomenten ist also um so größer, je größer das Trägheitsmoment und die Winkelgeschwindigkeit sind. Die Richtungen von $\vec{\omega}_p, \vec{L}$ (oder $\vec{\omega}$) und $\vec{\tau}$ bilden ein Rechtssystem.

In Vektorschreibweise gilt deshalb

$$\vec{\tau} = \vec{\omega}_p \times \vec{L}$$

$$\vec{\tau} = I(\vec{\omega}_p \times \vec{\omega})$$

oder

Merke: Die **Winkelgeschwindigkeit der Präzession** berechnet sich vektoriell aus

$$\vec{\omega}_p = \vec{\tau} \times \vec{L} \quad \text{bzw.} \quad \vec{\omega}_p = I^{-1}(\vec{\tau} \times \vec{L}).$$

Um diese Überlegung zu verifizieren betrachten wir zwei Versuche:

Versuch VI.13: Kugelkreisel auf Luftkissen

Bei diesem Versuch wird eine schwere eiserne Kugel mit einer herausschauenden Achse in einer Schale auf einem Luftkissen möglichst reibungsfrei gelagert. Die Kugel wird mit Hilfe einer Schleifmaschine in Rotation versetzt. Zunächst steht die Achse der Kugel senkrecht nach oben. Ist die Kugel so in Rotation versetzt worden, kann man danach die Achse beliebig ausrichten, die Richtung der Achse bleibt erhalten. Hängt man hingegen ein Gewicht an die Achse, so führt die Kugel eine Präzessionsbewegung aus. Sie präzediert um so schneller, je größer die angehängte Masse ist. Nach kurzer Zeit verliert die Kugel trotz Luftkissen durch Reibung Energie. Der Drehimpuls wird dadurch verringert und die Präzession schneller.

Dieser Versuch zeigt, daß die Präzessionsfrequenz nicht vom Winkel, wohl aber von der Masse abhängt.

Versuch VI.14: Präzession einer Fahrradfelge

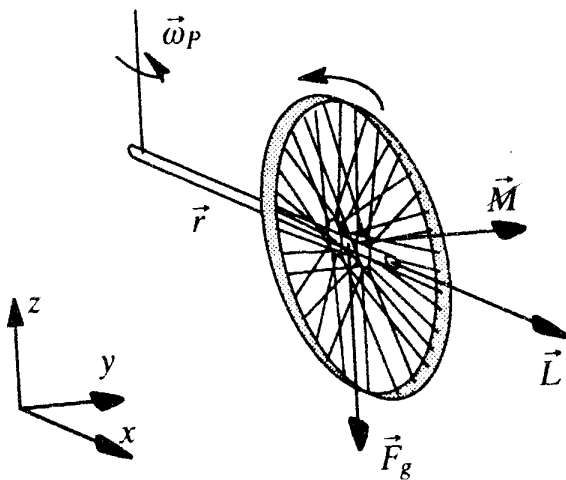


Abbildung VI.30: Versuch VI.14 - Präzession einer Fahrradfelge

Bei diesem Versuch wird eine Fahrradfelge an einem Stab befestigt. Der Stab wiederum ist an einem Seil befestigt, welches festgehalten wird. Wird die Felge in Rotation versetzt, so stellt sie sich auf, bis sie im rechten Winkel zur Erde steht. In dieser Lage rotiert die Felge mit dem Stab um den Aufhängepunkt.

Die Erklärung kann aus der Zeichnung abgelesen werden: Die Vektoren \vec{L} und \vec{F}_g bewirken ein Drehmoment. $\Delta\vec{L}$ zeigt

in die Richtung von $\vec{\tau}$ in die Zeichenebene hinein.

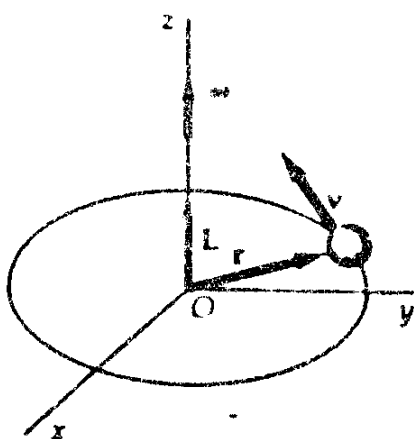
Die Präzessionsfrequenz kann wie oben berechnet werden als:

$$\omega_p = \frac{r \cdot mg}{L}$$

Die Richtung von ω_p kehrt sich um, wenn L umgedreht wird.

VI.10 Unsymmetrische Rotationskörper

In diesem Kapitel betrachten wir wieder feste Rotationsachsen.



1) Das einfachste Beispiel ist ein Massepunkt, der auf einer Kreisbahn um den Nullpunkt rotiert. Wir hatten festgestellt, daß der Drehimpuls als $\vec{L} = I\vec{\omega}$ geschrieben werden kann, d.h. der Drehimpulsvektor ist parallel zum Vektor der Winkelgeschwindigkeit.

Abbildung VI.31: Teilchen auf Kreisbahn: Drehimpuls bzgl. Keismittelpunkt ist parallel zur Winkelgeschwindigkeit

2) Betrachten wir dieses Beispiel jetzt für dieselbe Bewegung, jedoch mit einem anderen Nullpunkt. Zur Vereinfachung liege der Nullpunkt auf einer Achse durch den Kreismittelpunkt, der z-Achse. Der Radiusvektor \vec{r} , der Verbindungsvektor des Nullpunktes mit dem Massepunkt, steht jetzt nicht senkrecht auf der Rotationsachse. Dann hat der Drehimpuls \vec{L} wegen

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

eine Komponente senkrecht zur Drehachse:

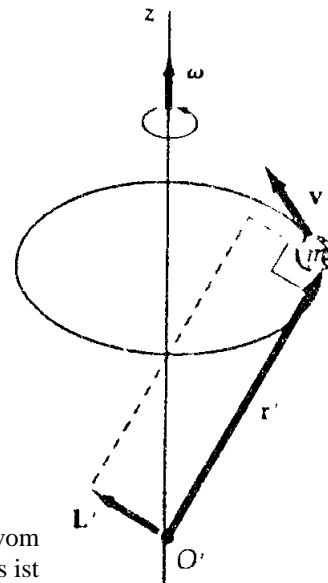


Abbildung VI.32: Drehimpuls bezogen auf einen vom Kreismittelpunkt verschiedenen Nullpunkt. Der Drehimpuls ist nicht parallel zur Winkelgeschwindigkeit.

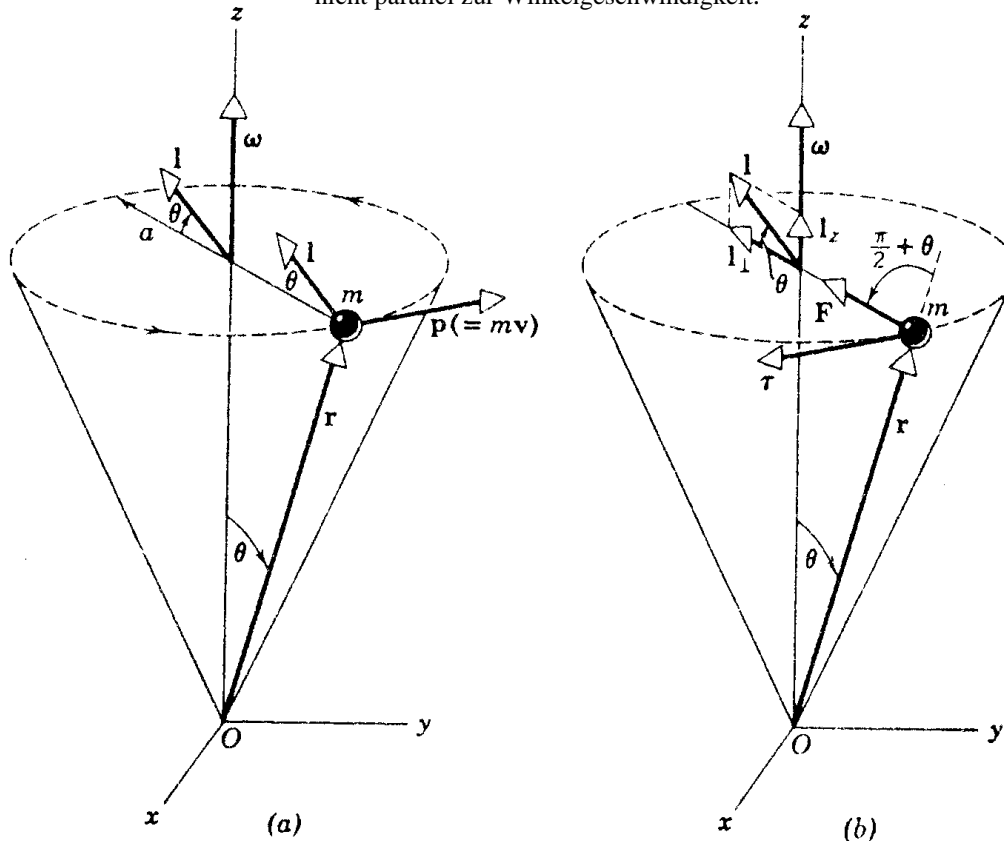


Abbildung VI.33: Geometrische Betrachtung (ℓ entspricht \vec{L} im Text).

Das Problem bei der Berechnung dieser Bewegung ist, für ein Massenelement m_i den zugehörigen Drehimpuls L_i abhängig von der Wahl des Drehpunktes 0 auf der Achse zu

bestimmen. Der Nullpunkt muß also für jeden Körper unter Berücksichtigung der Lagerung der Drehachse geeignet gewählt werden.

In unserem Beispiel drehe \vec{L} sich im Raum. Dann muß wegen

$$d\vec{L} / dt = \vec{\tau}$$

ein Drehmoment $\vec{\tau}$ existieren, das $\Delta\vec{L}$ hervorruft.

Das zugehörige Moment um 0 ist $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_{ZP}$

wobei \vec{F} die Zentripetalkraft (z.B. Fadenkraft) bezeichnet.

Das Drehmoment $\vec{\tau}$ hat die Richtung der Bahntangente und damit die Richtung von.

Statt $\vec{L} = I\vec{\omega}$

gilt jetzt: $L_Z = I \cdot \omega$

wobei L_Z und ω dieselbe Richtung haben.

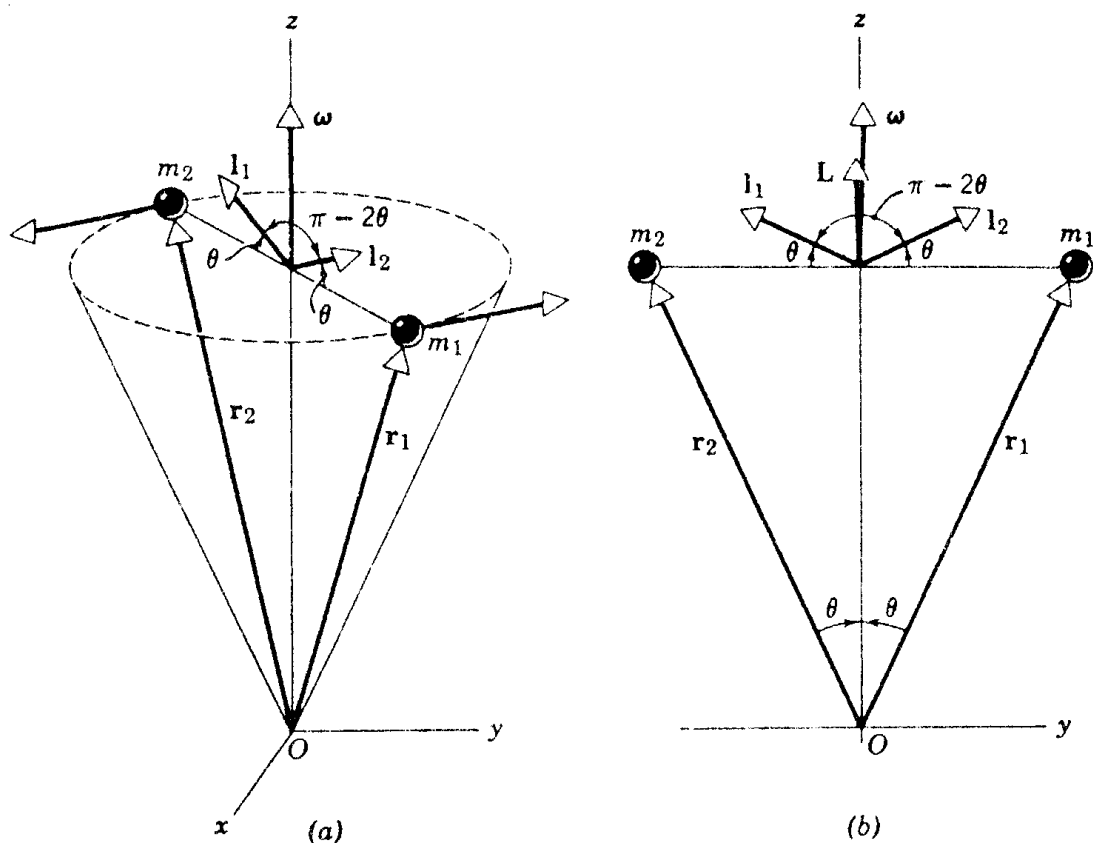


Abbildung VI.34: Rotationssymmetrisches Hantelmodell

3) Ergänzt man die Masse m_1 durch Hinzufügen der Masse m_2 zu einer Hantel, deren Achse senkrecht auf der Drehachse steht, so bekommt man wieder einen rotationssymmetrischen Drehkörper. Jetzt ist

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

$$\Leftrightarrow \vec{L} = (L_{1z} + L_{2z}) \vec{u}_z = \text{const.}$$

Dieser Ausdruck ist unabhängig von der Wahl des Nullpunktes auf der Drehachse. Damit ist

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = 0$$

Diese Berechnung gilt für alle Körper, deren Massenelemente symmetrisch zur Drehachse sind.

Merke: Für alle Körper, deren Massenelemente symmetrisch zur Drehachse sind, gilt:

$$\vec{L} \parallel \vec{\omega} \quad \text{und damit} \quad \vec{L} = I \vec{\omega}.$$

4) Nun betrachten wir ein konkretes **Beispiel eines unsymmetrischen Drehkörpers mit fixierten Achsen**

Eine Hantel liege mit spitzem Winkel Θ gegen die Rotationsachse, die geht durch Schwerpunkt der Hantel geht. Durch Zentrifugalkräfte versucht die Hantel, sich senkrecht zur Drehachse zu stellen!

Die Lagerung der Achse muß oben die Kraft \vec{F} und unten die Kraft $-\vec{F}$ auf die Achse ausüben, um sie in ihrer Lage zu halten. Dies **Kräftepaar** ergibt ein Drehmoment um C. Das Drehmoment $\vec{\tau}$ zeigt in Richtung von $\Delta\vec{L}$ vertikal aus der Zeichenebene heraus. Die Kräfte \vec{F} drehen sich mit \vec{L} und verursachen ein „Flattern“ oder eine „Unwucht“ des

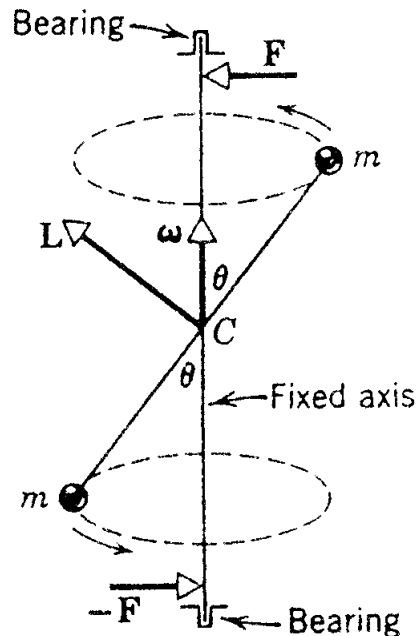


Abbildung VI.35: Beispiel eines unsymmetrischen Drehkörpers mit fixierten Achsen

Rotationskörpers. Da $\vec{F} \sim \omega^2$ ist, ist das Auswuchten von Rädern für hohe Fahrgeschwindigkeiten z.B. eines Fahrgestells von Flugzeugen, extrem wichtig.

5) Nun berechnen wir ein **Beispiel freier Achsen**.

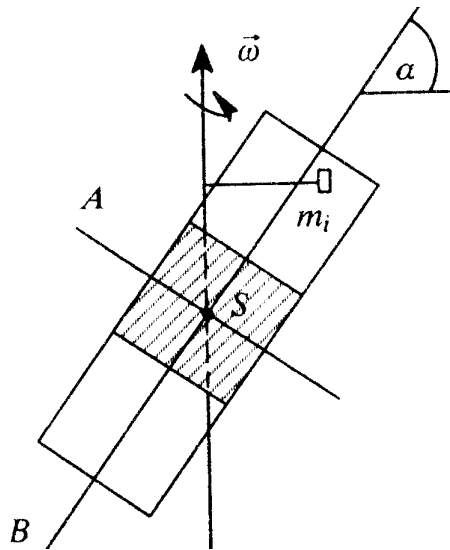


Abbildung VI.36: rotierender zylindrischer Stab

Eine Symmetrieachse definiert für einen Körper ein Hauptträgheitsmoment, wir haben Trägheitsmomente deshalb immer nur bezüglich einer Achse angegeben. Eine Zigarrenkiste z.B. hat 3 Hauptträgheitsmomente. Dreht ein Körper sich um eine beliebige Achse, so ist die Drehung im Allgemeinen nicht stabil. Die bei der Rotation auftretenden Drehmomente sind so, daß nur Drehungen um die Achsen des größten und des kleinsten Drehmomentes stabil sind. Schon kleinste Störungen bringen die Achse des mittleren Trägheitsmomentes aus der Ausgangslage heraus. Die Achse des größten Trägheitsmomentes ist am stabilsten.

Als Voraussetzung legen wir fest, A sei die Hauptträgheitsachse mit dem größtem Trägheitsmoment. Dann gilt allgemein

$$I_A > I_B$$

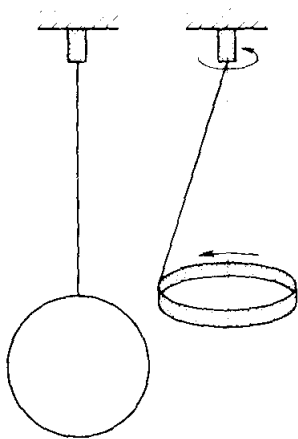
Wenn, wie in unserem Beispiel angenommen, der Winkel $\alpha = 45^\circ$ ist, dann ist der in der Zeichnung schraffiert dargestellte Teil symmetrisch.

Das resultierende Drehmoment berechnet sich aus den Massen m_i im unschraffierten Teil, die ein Zentrifugalkraft-Paar erzeugen. Das durch die Zentrifugalkräfte erzeugte Drehmoment wird Deviationsmoment genannt. Eine Drehung erfolgt solange, bis alle Massen symmetrisch verteilt sind. Dann ist A eine stabile Drehachse. Bei einem starren Körper versucht das Deviationsmoment einen Körper so zu drehen, daß er um seine Hauptträgheitsachse rotiert. Ist der Körper nicht frei aufgehängt, wird er durch dieses wirkende Moment verbogen.

Zu diesem Phänomen betrachten wir das Verhalten verschiedener Körper in einem Versuch:

Versuch VI.15: Rotierende Körper und deren Hauptträgheitsachsen

Bei diesem Versuch werden verschiedene Körper mit Fäden an eine vertikal nach unten gerichtete Achse eines Motors gehängt. Über den Motor können die Körper mit verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten in Rotation um ihre freien Achsen versetzt werden.



Der erste Körper in unserem Versuch ist ein Ring, der zunächst senkrecht herabhängt. Mit steigender Winkelgeschwindigkeit richtet sich der Ring horizontal auf. Der Ring rotierte also zunächst um die Achse mit dem geringsten Trägheitsmoment, danach um die Achse mit maximalem Trägheitsmoment.

Abbildung VI.37: Drehbewegung eines außerhalb des Schwerpunktes unterstützten Ringes

Als zweiten Körper betrachten wir eine Kette, die zunächst glatt herunter hängt. Bei der Rotation weitet sie sich durch die Zentrifugalkräfte zu einem Ring aus und richtet sich dann ebenfalls in die stabilste Lage der Rotation aus. Sie rotiert in horizontaler Lage analog zum Ring.

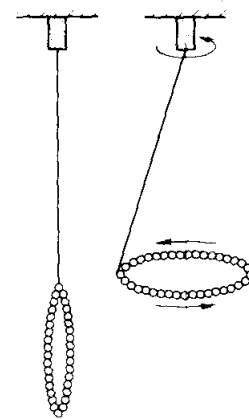
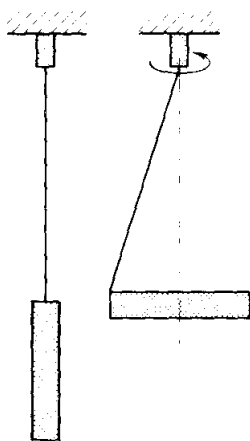


Abbildung VI.38: Drehbewegung einer außerhalb des Schwerpunktes unterstützten Kette



Als dritten Körper versetzen wir einen Stab in Rotation um seine freien Achsen. Auch dieser Körper dreht sich bei größerer Winkelgeschwindigkeit um seine Hauptträgheitsachse, d.h. er rotiert horizontal zur Erde.

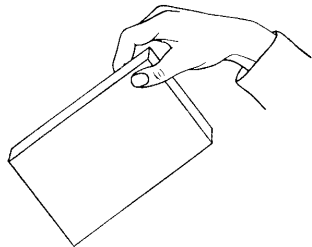
Abbildung VI.39: Drehbewegung eines außerhalb des Schwerpunktes unterstützten zylindrischen Stabs

Man kann für jeden beliebigen Körper drei Achsen finden, die durch den Schwerpunkt gehen und für die das Deviationsmoment null ist.

Diese Achsen sind dann die oben erwähnten Hauptträgheitsachsen. Wie bereits erläutert, hat ein Körper in der Regel verschiedene Trägheitsmomente durch verschiedene Achsen. Die Achsen, zu denen das größte und das kleinste Trägheitsmoment gehört, sind immer freie Achsen, die dritte Hauptträgheitsachse steht senkrecht auf den beiden. Die Drehung um die Achse mit dem kleinsten Trägheitsmoment und um die Achse mit dem größten

Trägheitsmoment ist stabil, die Drehung um die dritte frei Achse ist labil. Diese Tatsache läßt sich leicht an einer Zigarrenkiste verdeutlichen:

Versuch VI.16: Hauptträgheitsachsen der Zigarrenkiste



Um die Hauptträgheitsachsen zu verdeutlichen kann ein simpler Versuch genutzt werden: Ein Quader, z.b. eine Zigarrenkiste

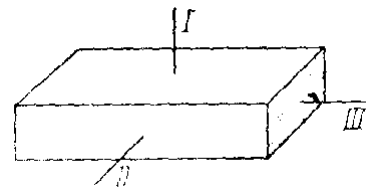


Abbildung VI.40:
Hauptträgheitsachsen eines Quaders

wird in die Luft geworfen und dabei um verschiedene Achsen gedreht. Beim ersten Wurf versetzt man den Quader in Rotation um die Achse 1 und

beobachtet die Richtung der Achse im Raum - sie bleibt erhalten. Dasselbe gilt, wenn man die Kiste mit einer Drehung um die Achse 2 hoch wirft. Versetzt man die Kiste jedoch in Rotation um die Achse mit dem mittleren Trägheitsmoment, Achse 3, so ändert sich die Lage dieser Achse während des Flugs ständig. Die Rotation um diese Achse ist nicht stabil.

VI.11 Erklärung der Kreiselversuche

Mit den bis jetzt gewonnenen Erkenntnissen wollen wir versuchen, die eingangs gezeigten Versuche zu erklären:

Erklärung des Versuchs VI.9: „Auf seiner Spitze gelagerter Kreisel“

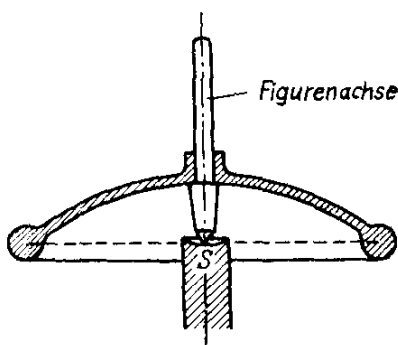


Abbildung VI.41a): Auf seiner Spitze gelagerter Kreisel rotiert um die Figurenachse

Bei diesem einfachsten Beispiel hatten wir festgestellt, daß sich der Kreisel, wenn er senkrecht steht, um seine Symmetrieachse

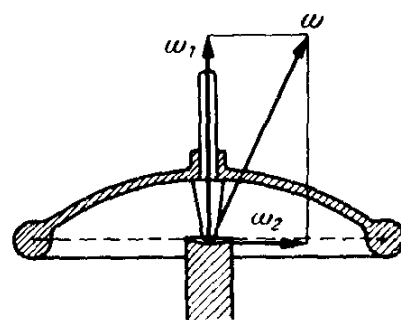


Abbildung VI.41 b): Winkelgeschwindigkeit des Kreisels

dreht. Wir hatten beobachtet, daß der Kreisel nach einiger Zeit aus der

senkrechten Anfangslage kippt und sich um sich selbst dreht, wobei die Achse des Kreisels zusätzlich einen Kreis beschreibt. Dabei liegt der Lagerpunkt je nach Stellung der Spitze über oder unter dem Schwerpunkt. Der Kreisel führt eine Präzessionsbewegung aus, deren Richtung abhängig ist vom Trägheitsmoment und der Schwerpunktlage. Dieser Kreisel hat das

Hauptträgheitsmoment bei einer Rotation um seine Symmetrieachse, die z-Achse. Für die anderen Trägheitsmomente gilt:

$$I_x = I_y < I_z$$

Versuch VI.11: Kreiselkompass

Der Kreiselkompass kann einmal in eine Richtung ausgerichtet werden, dann behält er diese Ausrichtung bei, auch wenn das äußere Gestänge bewegt wird. Als Grundprinzip dieses Kompasses hatten wir die kardanische Aufhängung erkannt. Der Kreisel selbst ist ein Drehkörper mit möglichst großem Trägheitsmoment. Die Drehachse ist die Figurenachse.

Versuch VI.12: Kardanisch aufgehängter Kreisel

Der wesentliche Aspekt dieses Kreisels liegt darin, daß er ein kräftefreier Kreisel ist. Zunächst hatten wir alle Stangen im rechten Winkel zueinander eingestellt und das Rad angedreht. Die Stange konnte danach frei im Raum ausgerichtet werden, ohne daß sie wieder in die Ausgangslage

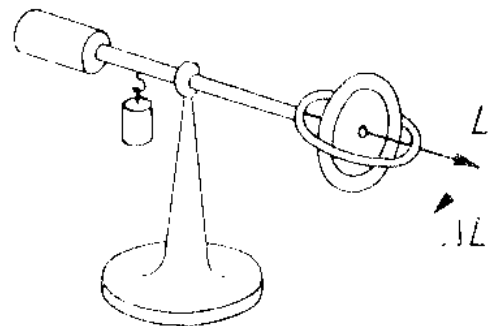


Abbildung VI.42: Kardanisch aufgehängter Kreisel

zurückfiel. Hängt man ein weiteres Gewichtsstück an das dem Rad

gegenüberliegende Ende der Stange, so beginnt die Stange sich in Horizontalebene zu drehen. Jetzt wollen wir zudem dem äußeren Ende der Stange gegenüberliegend vom Kreisel einen kräftigen aber kurzen Schlag nach unten versetzen. Nach dem Satz der Erhaltung des Drehimpulses für kräftefreie Kreisel bleibt der Drehimpuls frei im Raum erhalten.

Die Figurenachse hingegen dreht sich auf Kegelmantel um. Nach Schlag kann die Figurenachse nicht zurück in die Ausgangslage fallen, da das Drehmoment null ist und zudem die Trägheit existiert.

Zugleich wird aber eine Drehung um x-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_2$ angeworfen.

Für die gesamte Winkelgeschwindigkeit gilt dann mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_1$ bei der

Drehung um Figurenachse
$$\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}$$

Mit dieser resultierenden Winkelgeschwindigkeit rotiert der Kreisel um die momentane Drehachse. Diese Bewegung nennen wir **Nutation**.

Versuch VI.13: Kugelkreisel auf Luftkissen

Bei diesem Versuch wurde eine schwere eiserne Kugel mit einer herausschauenden Achse in einer Schale auf einem Luftkissen möglichst reibungsfrei gelagert und in Rotation versetzt. Zunächst stand die Achse der Kugel senkrecht nach oben, aber nachdem die Kugel so in Rotation versetzt worden war, konnte die Achse beliebig ausgerichtet werden. Die Richtung der Achse im Raum blieb erhalten.

Dieses Verhalten kann aus der Symmetrie der Kugel erklärt werden: Die Trägheitsmomente sind bezüglich der Rotation um jede Achse gleich, also $I_z = I_y = I_x$. Drehimpuls \vec{L} und momentane Drehachse ω fallen somit immer zusammen.

Diese Symmetrie geht verloren, hängt man ein Gewicht an die Achse. Deshalb konnten wir beobachten, daß die Kugel eine Präzessionsbewegung ausführt.

VI.12 Zusammenfassung der Kreiselbewegungen

Um die Kreiselbewegungen um verschiedene Achsen zusammenfassend zu betrachten, werden wir uns auf kräftefreie Kreisel beschränken.

Als erstes hatten wir die **Präzession** kennengelernt. Hier ist der Betrag des Drehmoments zeitlich konstant. Die Richtung ändert sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.

Der Drehimpuls dreht sich laufend im Raum; auch sein Betrag ist zeitlich konstant. Drehimpuls

und Drehmoment berechnen sich als
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}.$$

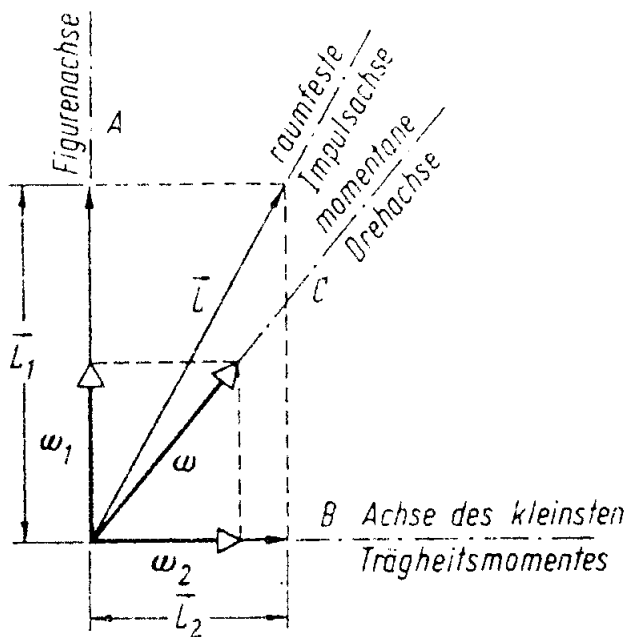
Die Präzessionsgeschwindigkeit beträgt damit
$$\omega_P = \frac{\tau}{L}.$$

Die Figurenachse weicht der Kraft seitlich in Richtung des Drehmomentes aus

Bei dem kardanisch aufgehängten Kreisel konnten wir eine Bewegung beobachten, die wir **Nutation** genannt haben. Sie tritt nur beim kräftefreien Kreisel auf, wenn der Drehimpuls konstant ist. Versetzt man dem Kreisel einen kurzen Stoß, so erhält er einen zusätzlichen

Drehimpuls $\Delta\vec{L}$, für das gilt
$$\Delta\vec{L} = \int_0^{\Delta t} \vec{\tau} dt$$

Auch hier weicht der Kreisel nach der Seite aus, solange $\Delta\vec{L} \ll \vec{L}$ ist. Es gibt zu demselben Drehimpuls verschiedene Rotationsformen, die von der Vorgeschichte abhängig sind, je nachdem, ob die momentane Drehachse in Ruhe ist oder nicht.



Vor dem Stoß fallen Figurenachsens, Drehimpulsrichtung und momentane Drehachse zusammen und sind raumfest.

Nach dem Stoß ist die Figurenachsens einmal in Bewegung versetzt und bleibt in Bewegung.

Abbildung VI.43: Ein kurzer Schlag verursacht aufgrund der Drehimpulserhaltung eine Drehung um die Achse des kleineren Trägheitsmomentes I_2 . Beim symmetrischen Kreisel existieren nur zwei verschiedene Trägheitsmomente!

Merke: Die im Körper feste Figurenachsens A, die im Raum feste Drehimpulsachsens \vec{L} und die momentane Drehachse C ($\vec{\omega}$) liegen in einer Ebene und bilden immer den gleichen Winkel miteinander (symmetrischer Kreisel).

Die genaue Bewegung wird beschrieben durch die Gleichungen der einzelnen Komponenten des Drehimpulses. Dazu muß der Drehimpuls in seine Komponenten längs der Figurenachsens, Achsens A, und der Achsens des kleinsten Trägheitsmomentes, Achsens B, zerlegt werden. Die geometrische Betrachtung zeigt dann

$$\vec{L}_1 = \vec{\omega}_1 I_1$$

und

$$\vec{L}_2 = \vec{\omega}_2 I_2.$$

Da das Trägheitsmoment längs der Achsens B laut Definition der Achsens das kleinste Trägheitsmoment ist, gilt immer

$$I_1 > I_2$$

Die Figurenachsens hat das größte Trägheitsmoment.

Aus der Drehimpulserhaltung

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \text{const}$$

folgt

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

Der Vektor der Gesamtwinkelgeschwindigkeit ist nicht parallel zum Vektor des Drehimpulses. Das Verhältnis kann aus den Trägheitsmomenten berechnet werden.

Die Winkelgeschwindigkeiten $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}$ liegen in einer Ebene mit $\vec{L}_1, \vec{L}_2, \vec{L}$ und rotieren um $\vec{L} = \text{const}$. Die Figurenachsens und die momentane Drehachse rotieren um die raumfeste Impulsachsens.

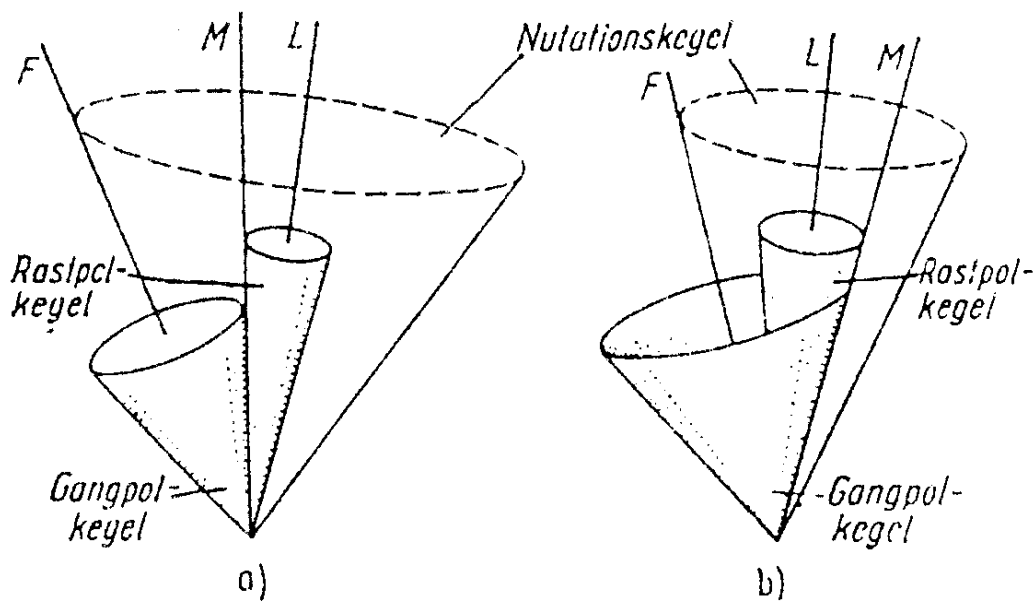


Abbildung VI.44: Rastpol-, Nutations- und Gangpolkegel

Die momentane Drehachse M (bzw. $\bar{\omega}$) beschreibt den raumfesten **Rastpolkegel**, die Figurenachse F den **Nutationskegel**, der sich ebenfalls um die Drehimpulsachse L bewegt. Dabei rollt auf dem raumfesten Rastpolkegel, der mit der Figurenachse fest verbunden ist, der **Gangpolkegel** ab, wobei dies mit konstanter Geschwindigkeit erfolgt. Diese Aussagen gelten für den abgeplatteten kräftefreien Kreisel

Notation VI.2: Von einem **abgeplatteten Kreisel** spricht man, wenn die *geometrische Figurenachse die Hauptträgheitsachse des größten Trägheitsmomentes* ist.

Notation VI.3: Von einem **verlängertem Kreisel** spricht man, wenn die *geometrische Figurenachse die Hauptträgheitsachse des kleinsten Trägheitsmomentes* ist.

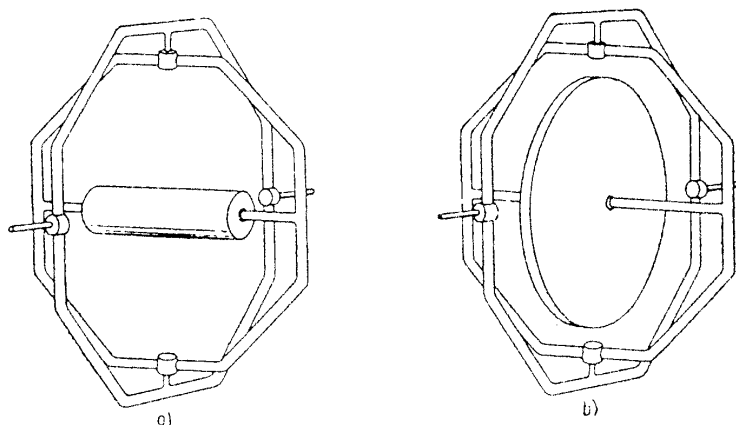


Abbildung VI.45: Verlängerter und abgeplatteter Kreisel

VI.13 Trägheitsmomente und Drehschwingung

In Kapitel IV hatten wir uns mit Schwingungen beschäftigt. Wir hatten festgestellt, daß Schwingungsdauern auf verschiedene Weisen sehr genau gemessen werden können. Ein Beispiel war die Federschwingung. Nun wollen wir die Schwingung betrachten, die durch Spiralfedern hervorgerufen werden können. Bisher konnten wir alle Erkenntnisse über Rotation durch Übertragen der aus der Translation bekannten Ergebnisse gewinnen. Deshalb vergleichen wir auch hier einmal die lineare Federschwingung mit der Schwingung einer Spiralfeder.

Bei der Federschwingung hatten wir zusammenfassend folgende Ergebnisse gewonnen:

Die Rückstellkraft einer Feder lautet (Hook'sches Gesetz) $\vec{F} = -k\vec{x}$.

Die **Schwingungsgleichung** der Federschwingung lautet $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.

Die **allgemeine Lösung** der Schwingungsgleichung lautet

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

Die **Kreisfrequenz** der Schwingung ist gegeben durch

$$\omega \text{ mit } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Die **Schwingungsdauer** ist gegeben durch

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Die **Schwingungsfrequenz** ist gegeben durch

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{1}{2\pi}$$

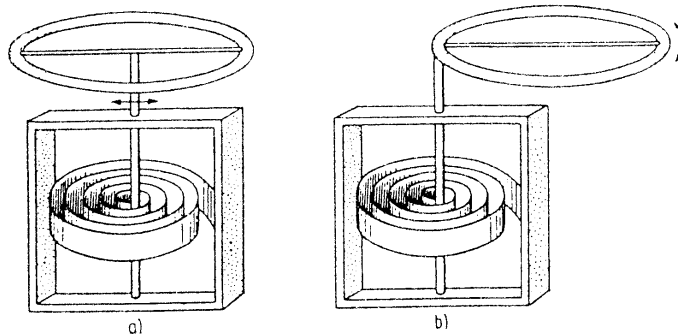


Abbildung VI.46: Drehschwingung

Analog zur Translation betrachten wir statt der Kraft \vec{F} das Drehmoment $\vec{\tau}$ und statt des linearen Weges \vec{x} den Winkel φ . Die Federkonstante wird mit D bezeichnet, sie heißt Direktionsmoment. Damit können

wir im Vergleich mit dem Hook'schen

Gesetz direkt die 'Rückstellkraft' - bei der Rotation wird diese rücktreibendes Moment genannt - angeben:

Bei Auslenkung um den Winkel φ übt eine Spiralfeder ein rücktreibendes Drehmoment aus:

rücktreibendes Drehmoment $\tau = -D\varphi$.

Die Bewegungsgleichung berechnet analog man aus

$$I \ddot{\varphi} = -D\varphi$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\varphi} + \frac{D}{I} \varphi = 0$$

Dementsprechend ist die allgemeine Lösung

$$\varphi = \varphi_{\max} \cos\left(\sqrt{\frac{D}{I}} t + \varphi_0\right)$$

mit der Schwingungsdauer

$$T = 2 \pi \sqrt{I / D}$$

I ist das Trägheitsmoment des auf die Drillachse aufgesetzten Probekörpers, wenn das Trägheitsmoment der Drillachse selbst vernachlässigt werden kann. Dieses Ergebnis entspricht dem Ergebnis der linearen Federschwingung, wenn man das Trägheitsmoment als Analogon zur Masse und das Direktionsmoment als Analogon zur Federkonstanten sieht.

Je größer das Direktionsmoment ist, desto schneller schwingt der Körper; je größer das Trägheitsmoment des schwingenden Körpers ist, desto langsamer schwingt er.

Als mögliche Anwendung dieses Verhältnisses kann man eine Bestimmung des Direktionsmomentes D vornehmen, oder das Trägheitsmoment eines Körpers durch Rotation um verschiedene Achsen berechnen

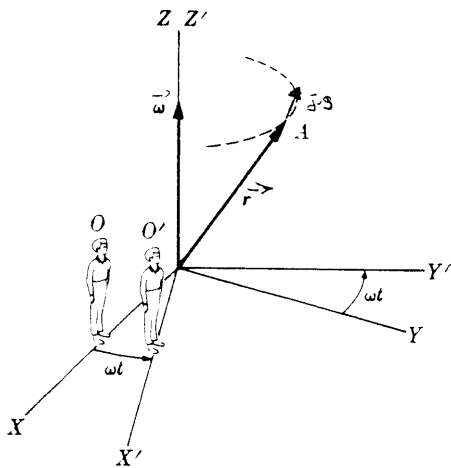
Diese Schwingung ist auch die Erklärung für die Schwingung bei der Gravitationsdrehwaage nach Cavendish.

VI.14 Rotierende Bezugssysteme und Trägheitskräfte

Bisher hatten wir die Erde als Bezugssystem vieler Bewegungen betrachtet. Dabei gingen wir davon aus, daß die Erde ein Inertialsystem ist. Daß diese Annahme eine Vereinfachung darstellte, war bereits bekannt. Die Aufstellung der Kräfte nach Newton haben wir mit $\vec{m}\ddot{\vec{a}} = \sum \vec{F}$ angegeben, als mögliche Kräfte betrachteten wir Gravitation, Federkräfte oder andere Zwangskräfte. Diese Formel muß korrekterweise noch um jene Kräfte erweitert werden, die durch die Rotation der Erde entstehen. Eine Kraft, die aus der Rotation entsteht ist die Zentrifugalkraft. Bei der Geschwindigkeit, mit der die Erde sich dreht, kann diese Kraft für die meisten Berechnungen vernachlässigt werden. Dennoch ändert sie die resultierende Kraft meßbar: Die Differenz der Gravitationskraft z.B. beträgt zwischen dem Äquator und den Polen 3 Promille. Zusätzlich zu der Zentrifugalkraft tritt eine neue Trägheitskraft bzw. Scheinkraft, die der mitbewegte Beobachter registriert. Es ist die **Corioliskraft**.

Im Folgenden soll die Corioliskraft hergeleitet werden aus einer Rotation des Koordinatensystems^(VI.1). Bei dieser Herleitung können wir leider auf eine etwas kompliziertere mathematische Betrachtung nicht verzichten. Die Herleitung selber zu kennen ist weniger

wichtig, als zu erkennen, daß nur aus der Drehung des Bezugssystems die Corioliskraft herzuleiten ist. Das Vorgehen ist uns schon aus der Galileitransformation bekannt und kann auch hier rein formal durchgeführt werden.



Gegenüber einem Inertialsystem S drehe sich das System S' mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse. Beide Systeme haben denselben Ursprung.

Um die Rechnung zu vereinfachen, möchte ich zunächst einige Konventionen zur Schreibweise einführen:

Zeitliche Ableitungen im System S werden wie bisher üblich mit einem Punkt gekennzeichnet. Insbesondere

gilt $\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$ und. Die Geschwindigkeit im System S sei, der Weg.

Zeitliche Ableitungen im System S' werden mit $\frac{d}{dt}$ gekennzeichnet. Insbesondere gilt. Die Geschwindigkeit im System S' sei, der Weg.

1. Schritt: Wie groß ist die Geschwindigkeit des Punktes A im System S, wenn A sich im System S' mit der Geschwindigkeit \vec{u} bewegt?

Für eine Geschwindigkeit $\vec{u} = 0$ gilt für einen Beobachter in S

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r}.$$

Mit $\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{v}$

und $\frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega}$

folgt $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Hat der Punkt A eine Geschwindigkeit \vec{u} in S', so muß diese in S zu \vec{v} addiert werden. Damit gilt allgemein

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \neg$$

und mit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ $\dot{\vec{r}} = \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad -$

2. Schritt: Wie sieht die Beschleunigung \vec{b} des Punktes A in S' im System S aus?

Aus der Mechanik ist der Zusammenhang $\vec{b} = \dot{\vec{v}}$ bekannt.

Damit folgt aus Gleichung $\vec{v} = \dot{\vec{u}} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}$

da $\dot{\vec{\omega}} = 0$ ist, gilt $\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{u}} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$.

Mit $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{u}} + \vec{\omega} \times (\vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r})$

$$\Leftrightarrow \boxed{\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{u}} + \vec{\omega} \times \vec{u} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})} \quad \textcircled{R}$$

3. Schritt: Was ist $\dot{\vec{u}}$?

Ebenso, wie für die Transformation des Vektors \vec{r} von S' nach S gilt für jeden

beliebigen Vektor \vec{a} $\dot{\vec{a}} = \frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a}$

Somit ist $\dot{\vec{u}} = \frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{u}$.

eingesetzt in \textcircled{R} ergibt $\dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{u} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$.

Zusammengefasst gilt $\dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{u}}{dt} + 2(\vec{\omega} \times \vec{u}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$.

4. Schritt: Was bedeutet diese Gleichung?

Die Beschleunigung $\dot{\vec{v}}$ setzt sich offensichtlich aus drei Termen zusammen:

- $\frac{d\vec{u}}{dt}$ Dieser Term gibt die **Beschleunigung von Punkt A** in System S' an.
- $2(\vec{\omega} \times \vec{u})$ Dieser Term ist Ausdruck der **Coriolisbeschleunigung**. Jetzt können wir mit der Formel $F = ma$ auch die Corioliskraft angeben: $\vec{F}_C = 2m\vec{u} \times \vec{\omega}$.
- $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ Dieser Vektor steht senkrecht auf, sein Betrag ist $\omega^2 r$. Für $\cos\varphi = 1$, also, ergibt sich aus dieser Beschleunigung die Kraft $F = m\omega^2 r$. Diese Formel kennen wir als **Zentrifugalkraft**.

Jetzt haben wir eine Formel für die Corioliskraft hergeleitet und zudem eine Gleichung für alle in einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierenden System herrschenden Kräfte aufgestellt.

Merke: Die **Corioliskraft** $\vec{F}_C = 2m\vec{u} \times \vec{\omega}$ steht immer senkrecht auf der Relativgeschwindigkeit im rotierenden Bezugssystem.

Merke: Im rotierenden Bezugssystem gilt die Newtonsche Grundgleichung:

$$m\dot{\vec{v}} = m \left[\frac{d\vec{u}}{dt} + 2(\vec{\omega} \times \vec{u}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \right].$$

Daß die Corioliskraft nicht immer vernachlässigbar ist, ist bereits aus der Geographie bekannt. Beim Wetter wirkt diese Kraft erheblich auf die Bildung von Luftströmen.

Betrachten wir jetzt einige einfache Beispiele für die auftretenden Kräfte in rotierenden Systemen:

Um die Bewegung eines Körpers aus den verschiedenen Blickwinkeln, aus dem rotierenden Bezugssystem und aus einem Inertialsystem, qualitativ zu erfassen, betrachten wir zunächst ein Gedankenexperiment:

Für dieses Experiment bräuchten wir zwei Physiker, einen Ball und eine große rotierende Scheibe. Zunächst stehen beide Physiker einander zugewandt auf der Scheibe, einer stehe im Mittelpunkt, der andere am Rand. Sie werfen sich den Ball zu. Ein beobachtender Student im Inertialsystem sieht, daß der Ball linear nach außen fliegt, der zweite Physiker ihn allerdings verpasst, da er sich inzwischen nach links weiter gedreht hat.

Nun stellt sich auch der Beobachter auf die Scheibe. Wird der Ball erneut von der Mitte nach außen geworfen, sieht der Beobachter eine andere Bahn: Der Beobachter ist relativ zum System, in dem der Ball geworfen wird, in Ruhe, der Ball scheint nach rechts abgelenkt zu werden. Die Scheinkraft, die den Ball auf einer parabelförmigen Bahn erscheinen läßt, ist die Corioliskraft.

Einen ähnlichen Versuch führen wir durch:

Versuch VI.17: Schuß auf rotierender Scheibe

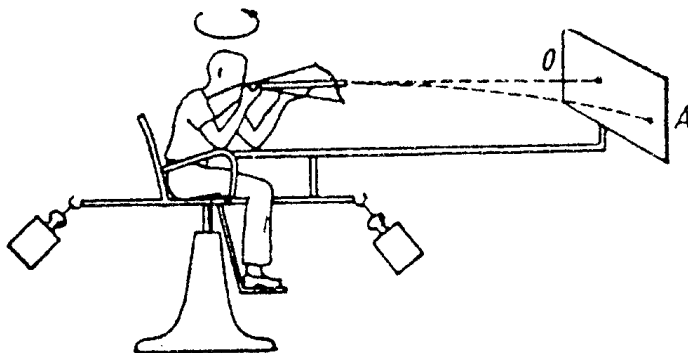


Abbildung VI.48: Versuch zur Erläuterung der Corioliskraft

Bei diesem Versuch wird eine Person auf einen Drehstuhl gesetzt. An dem Stuhl ist eine Stange waagrecht zum Boden angebracht; an deren Ende befindet sich eine gewölbte Plexiglasscheibe. Die Person schießt jetzt mit einem Pfeil längs der Verbindungsstange

auf die Scheibe. Dieser Versuch ist analog zum Gedankenexperiment aufgebaut: Der Physiker in der Mitte des Kreises wirft keinen Ball, sondern einen Pfeil. Um die Abweichung genauer bestimmen zu können wird nicht ein punktueller Fänger am Rand des Kreises aufgestellt, sondern eine Scheibe. Wenn man auf dieser Scheibe in Ruhe den Punkt 0 der Verbindungsgraden zur Person markiert, kann nach dem Schuß die Abweichung exakt gemessen werden. Qualitativ sieht der Beobachter im Vorlesungssaal, also in einem Inertialsystem, daß die Markierung sich vom Auftreffpunkt wegdreht. Im Stand trifft die Versuchsperson die markierte Mitte 0, je schneller sie sich dreht, desto weiter weicht die Auftreffstelle A des Pfeils davon ab.

Über die geometrische Betrachtung der Bewegung kann die Coriolisbeschleunigung hergeleitet, bzw. bei bekannten Parametern errechnet werden. Dabei müssen wir beachten, daß der Pfeil nicht direkt von der Mitte des Kreises aus abgeschossen wird, sondern aus einer Armlänge r_A Entfernung davon.

Das rotierende System nennen wir S' , das Inertialsystem S . S' rotiere gegen S mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit.

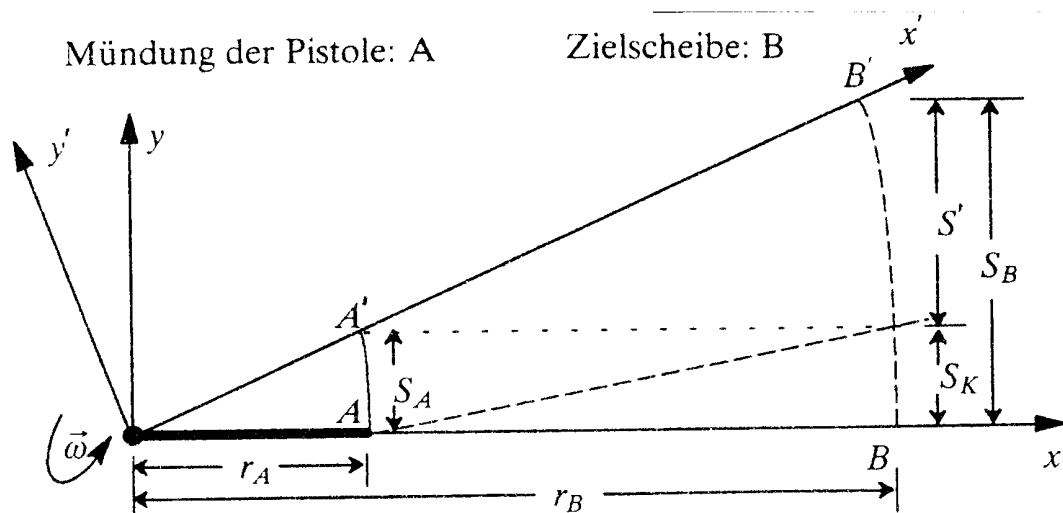
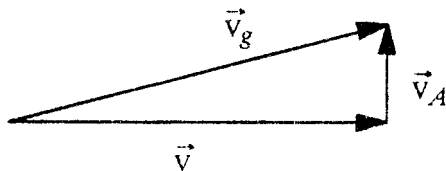


Abbildung VI.49: Geometrische Überlegung zum Versuch

Ohne Drehung wird der Pfeil mit der Geschwindigkeit \vec{v}' von $x = r_A$ bei $t = 0$ abgeschossen. Er kommt bei Punkt B, dem Mittelpunkt der Scheibe, an nach einer Zeit t . Aus der Kinematik

kennen wir die Beziehung für t
$$t = \frac{r_B - r_A}{v'}$$
 \neg

Nun wird die Bewegung mit Drehung vom Inertialsystem aus betrachtet:



Die Kugel hat beim Verlassen des Laufes bei A die Geschwindigkeit, für die gilt

$$\vec{v}_g = \vec{v} + \vec{v}_A$$

Es addiert sich die Geschwindigkeit der Laufmündung.

Der Pfeil kommt im Abstand S_K von Punkt B aus an.

$$S_K = v_A \cdot t = \omega r_A t$$

Die geometrische Betrachtung der Skizze zeigt, daß der Abstand S_K der Strecke S_A entspricht.

Betrachtet man denselben Vorgang vom rotierenden System aus gesehen, so hat sich nach der Zeit t hat der Punkt A nach A' und B nach B' bewegt. Die Wege der Punkte A und B sind verschieden:

$$S_A = v_A t$$

mit $v = r\omega$

$$\Leftrightarrow S_A = \omega r_A t = S_K$$

$$S_B = v_B t$$

$$\Leftrightarrow S_B = \omega r_B t$$

Vom mitgedrehten Beobachter aus gesehen gilt für die Streckendifferenz S'

$$S' = - (S_B - S_K)$$

mit den Ergebnissen von oben

$$\Leftrightarrow S' = - \omega (r_B - r_A)t$$

Dann gilt mit \neg

$$S' = - \omega v t^2 .-$$

Mit der allgemeinen Berechnung der Beschleunigung

$$S = \frac{a}{2} t^2$$

gilt, ergibt sich aus -

$$a = \frac{d^2 S}{dt^2} - 2 \omega v \quad \textcircled{R}$$

Diese Beschleunigung ist die Coriolisbeschleunigung in einem rotierenden Bezugssystem.

Die so ermittelte Formel ist in Einklang mit der allgemein hergeleiteten, wenn man die Anfangsgeschwindigkeit im bewegten System $\vec{v} = \vec{v}'$ setzt und beachtet, daß

$$\vec{a}_C = \vec{v}' \times \vec{\omega} = -\vec{\omega} \times \vec{v}' \quad \text{ist.}$$

Wie bereits erwähnt, spielt die Corioliskraft auch auf der Erde aufgrund der Eigenrotation eine große Rolle. Hier ist sie vor allem bei dem Verständnis des Wetters ein wichtiger Faktor,

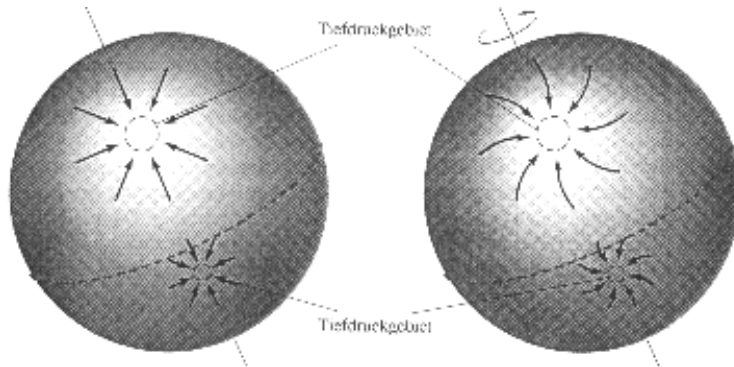


Abbildung VI.50: Ablenkung von Winden

der betrachtet werden muß.

Betrachtet man die Zyklone

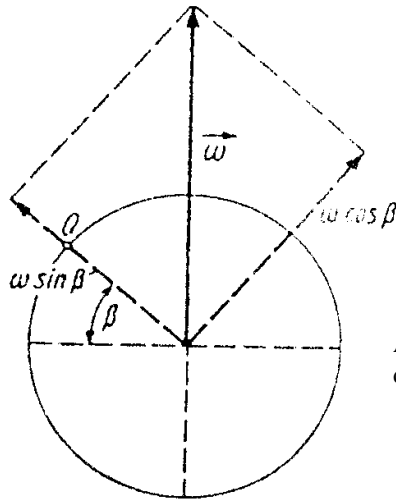
der beiden Halbkugeln von einem Satelliten, also einem Inertialsystem, aus, so drehen die Zyklonen sich auf der Südhalbkugel rechts herum, auf der Nordhalbkugel dagegen links herum. Würde die Erde sich nicht drehen, so müßten die Winde gradlinig in das Tiefdruckgebiet in der Mitte hineinlaufen. Die Beobachtung der abgelenkten Ströme ist deshalb ein weiterer Beweis für die Rotation der Erde.

Versuch VI.18: Foucaultscher Pendelversuch

Ein anderer Nachweis zur Erdrotation ist der Foucaultsche Pendelversuch. Grundprinzip dieses Versuches ist es, mit einem einfachen Pendel die Erdrotation nachzuweisen. Dabei schwingt ein Pendel von einem Aufhängepunkt A in einer Pendelebene senkrecht zum Boden. Durch die Erdrotation dreht sich der Boden unter dem Pendel weg, dessen Ausrichtung senkrecht zum Fixsternhimmel erhalten bleibt, da es keine Kräfte gibt, die senkrecht zur Pendelebene auf das Pendel wirken.

Um den Versuch quantitativ auswerten zu können, wird in der Gleichgewichtslage des Pendels der Faden über eine optische Anordnung vergrößert an die Wand projiziert. Dann lenkt man das Pendel aus und justiert es so, daß das Bild des Fadens wieder exakt denselben Strich darstellt. So ist die Pendelebene senkrecht zum Boden und senkrecht zur Wand justiert. Läßt man nun das Pendel schwingen, dreht sich für die mitbewegten Beobachter die Pendelebene im Uhrzeigersinn und ist dann nicht mehr senkrecht zur Wand. Tatsächlich kann man das Bild des Fadens schon nach wenigen Schwingungen deutlich die Wand entlang wandern sehen.

Um die Bewegung zu berechnen müssen wir zunächst die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ der Erde in 2 Komponenten aufteilen.



Die Vertikalkomponente ist dann $\omega \sin \beta$; wobei β die geographische Breite ist.

Diese Vertikalkomponente erzeugt Corioliskräfte, die in die waagerechte Ebene fallen und so die beobachtete Seitenablenkung des Pendels bewirkt.

Abbildung VI.51: Zerlegung der Winkelgeschwindigkeit der Erde

Die Horizontalkomponente $\omega \sin \beta$ bewirkt eine Änderung der Schwerkraft. Auf der Nordhalbkugel erfolgt die Drehung gegen den Uhrzeigersinn: Die

Corioliskräfte zeigen immer nach rechts. Das Pendel schwingt wie erläutert also nicht in einer Ebene.

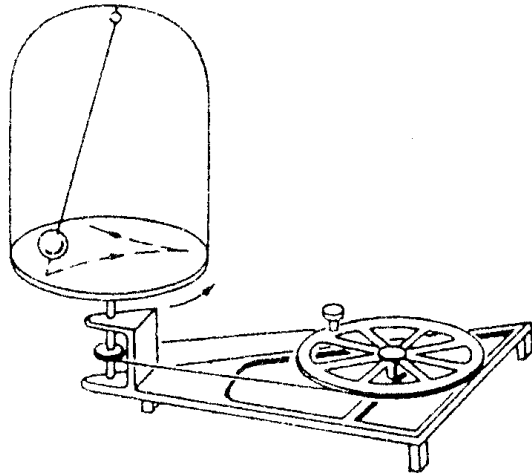


Abbildung VI.52: Modellversuch zur Drehung der Pendelebene

α sei der Drehungswinkel für eine Schwingung.
 r sei die Schwingungsweite. Dann gilt für die Bogenlänge die geometrische Beziehung

$$\alpha = \frac{\delta}{r}$$

Andererseits ist

$$\alpha = T \omega \sin \beta$$

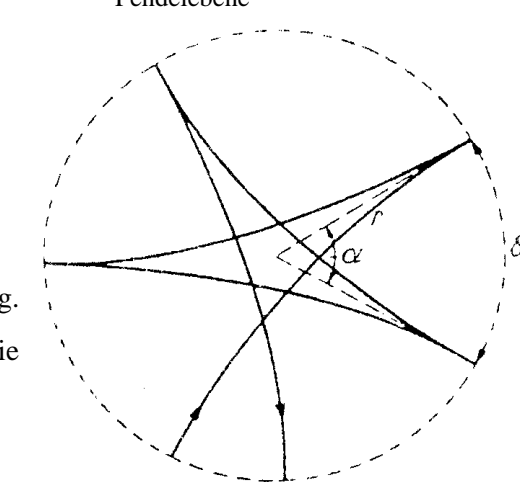


Abbildung VI.53: Drehung der Pendelebene

Insgesamt folgt dann
$$\frac{\delta}{r} = T \omega \sin \beta$$

Im Vorlesungsversuch wurde bei der Projektion ein als bekannt vorausgesetzter

Vergrößerungsfaktor $\frac{f}{d}$ benutzt. Aus
$$\omega \sin \beta = \frac{\delta}{r T} \cdot \frac{f}{d}$$

kann z.B. der Längengrad in Aachen bestimmt werden. Der Erwartungswert für **Aachen** ist

$$\beta = 50^{\circ} 44'$$

VII. Mechanische Eigenschaften fester Körper

Bisher haben wir die Idealisierung von Punktmassen oder starren Körpern betrachtet. Dabei mussten wir oft Annahmen machen, die in der Realität nicht erfüllt sind. Bei der Energieerhaltung beispielsweise haben wir in der Rechnung stets die Reibung vernachlässigt. Dass die Reibung nicht wirklich zu vernachlässigen ist, zeigten die Abweichungen der Versuchsergebnisse von den errechneten Werten. Punktmassen stellen also eine Idealisierung dar, die sich experimentell nie ganz verwirklichen lässt.

Starre Körper hatten wir beschreiben durch eine Bewegung des Schwerpunktes und Rotation um den Schwerpunkt

Diese Vorgehensweise liefert im Prinzip exakte Beschreibungen mit Hilfe des Grundgesetzes der Mechanik. Reale Körper sind jedoch zusammengesetzt aus sehr vielen Bausteinen ($\sim 10^{19} - 10^{24}$ Atome / Moleküle pro cm^3), zwischen denen sehr komplizierte Wechselwirkungen bestehen. Häufig sind Bewegungen dieser Körper nur noch mit Näherungen (Modellen) lösbar. Man stellt empirische Gesetze mit begrenztem Gültigkeitsbereich auf.

In diesem Kapitel wollen wir einige dieser empirischen Gesetze betrachten und ihre Gültigkeit experimentell überprüfen

VII.1 Aggregatzustände

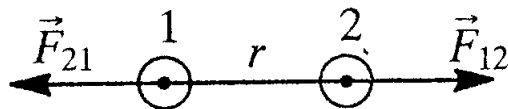


Abbildung VII.1: Schematisches atomares Modell

Um die Vorgänge in einem Körper betrachten zu können, betrachten wir zunächst die Kräfte zwischen zwei Atomen, die sich im Abstand r voneinander befinden. Aufgrund vor allem elektrischer Wechselwirkungen üben die beiden

Atome aufeinander eine Kraft

$$\vec{F} = \vec{F}_{12} (= -\vec{F}_{21}) \quad \text{aus.}$$

Diese Kräfte verursachen eine potentielle Energie

$$\vec{F}(r) = -\text{grad } W_p = -\frac{dW_p}{dr}$$

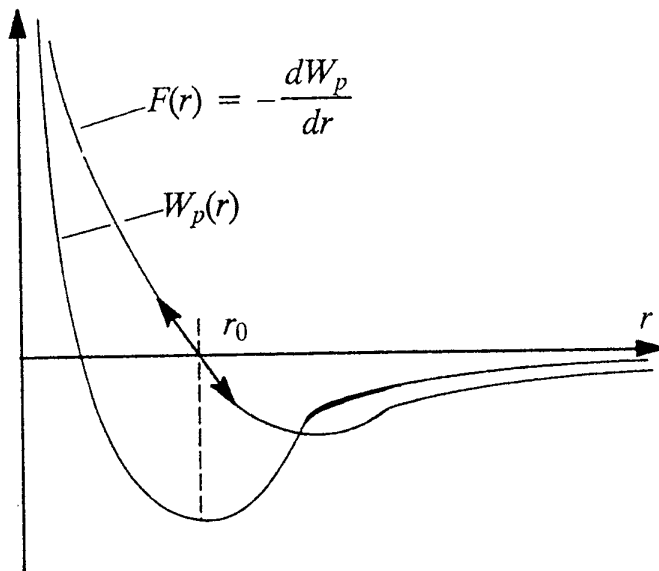


Abbildung VII.2: Quantitativer Verlauf der Kräfte zwischen zwei Atomen

Betrachten wir den Verlauf der wirkenden Kräfte und der potentiellen Energie in Abhängigkeit vom Abstand der Atome. Zunächst befinden die Atome sich in der Gleichgewichtslage. Es wirken also keine Kräfte, wenn der Abstand r_0 beträgt:

$$\vec{F}(r_0) = 0$$

Damit muss die potentielle Energie an dieser Stelle in Minimum haben

$$(F \sim \frac{dW}{dr}), \text{ also}$$

$$W_p(r_0) = \text{Minimum.}$$

Ist die Kraft zwischen den Atomen positiv, befinden sie sich also in einem näheren Abstand als der Gleichgewichtslage, dann muss gelten

$$\vec{F}(r) > 0 \quad \text{für} \quad r < r_0$$

Die Atome stoßen sich ab. Gilt hingegen

$$\vec{F}(r) < 0 \quad \text{für} \quad r > r_0$$

dann ziehen sie sich an. Nur die Lage in r_0 ist folglich stabil.

Für kleine Abweichungen von der Ruhelage r_0 gilt annähernd ein lineares Kraftgesetz.

$$F(r - r_0) = K (r - r_0)$$

Dieses Gesetz ist dem Gesetz für die Federschwingungen und damit dem des harmonischen Oszillators sehr ähnlich. In der Tat wird ein Festkörper im Modell dargestellt als Anordnung von Punktmassen, die durch Federn verbunden sind.

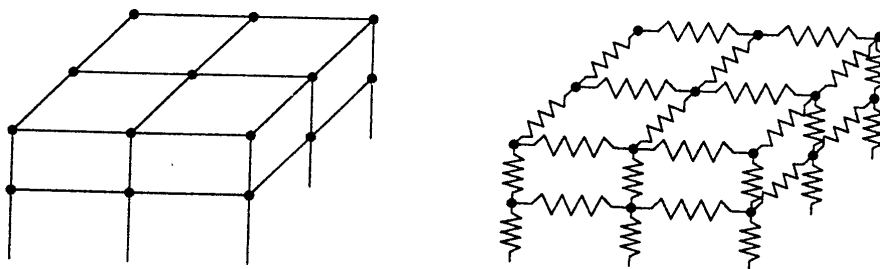


Abbildung VII.3: Federdarstellung eines Festkörpers

Die Atome führen kleine, harmonische Schwingungen um Gleichgewichtslage aus, solange man kleine Auslenkungen voraussetzt.

Bei Festkörpern unterscheidet man zwei verschiedene Arten:

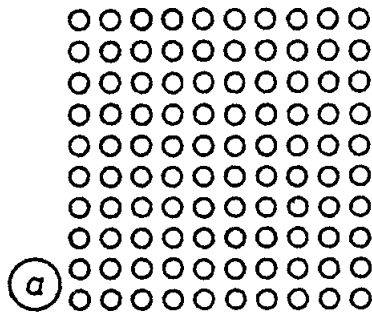


Abbildung VII.4a):
Zweidimensionales Schemata der Ordnungszustände der molekularen Bausteine: Fernordnung in einem Festkörper

a) Festkörper mit makroskopisch regelmäßigen Strukturen.

Sie werden kristalline Festkörper genannt, es besteht eine Fernordnung in diesen Kristallen. Bsp: Metalle

a') Festkörper mit makroskopisch unregelmäßige Strukturen und nur lokalen Regelmäßigkeiten. Sie werden amorphe Festkörper genannt, es besteht keine Fernordnung in diesen Körpern. Bsp: Glas, Zement

Energiezufuhr geschieht in der Regel durch Wärmezufuhr, aber auch andere Energiezufuhren sind möglich, z.b. mit Lasern. Durch Energiezufuhr bei einem Kristall wird die Schwingungsamplitude größer, bis schließlich kristalline Fernordnung aufgehoben wird.

b) Steigt die Temperatur über die Schmelztemperatur, sinkt die Bindenenergie und wird im Mittel so groß wie die kinetische Energie:

$$\langle W_p \rangle \approx \langle W_k \rangle.$$

Es entstehen Flüssigkeiten, deren Atome gegeneinander verschiebbar sind. Eine Nahordnung ist noch vorhanden und auch das Volumen ist konstant, aber der Körper hat keine feste Gestalt. Amorphe Festkörper sind also erstarrte Flüssigkeiten.

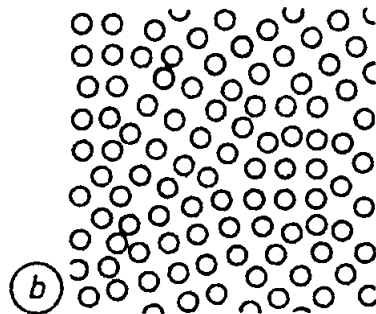


Abbildung VII.4b):
Zweidimensionales Schemata der Ordnungszustände der molekularen Bausteine: Nahordnung in einer Flüssigkeit

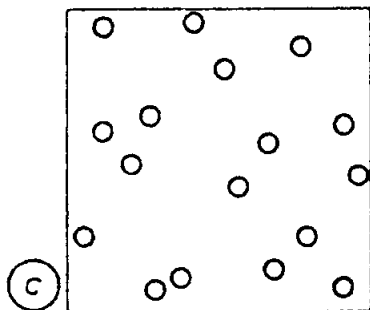


Abbildung VII.4c):
Zweidimensionales Schemata der Ordnungszustände der molekularen Bausteine: Unordnung in einem Gas

c) Durch weitere Wärmezufuhr werden die Bindungskräfte weitgehend aufgehoben. Die Temperatur erreicht die Siedetemperatur und die Bindeenergie und wird im Mittel sehr viel kleiner als die kinetische Energie: $\langle W_p \rangle \ll \langle W_k \rangle$. Es entsteht ein Gas, dessen Atome (Moleküle) ungeordnet aneinander stoßen. Ein Gas hat weder eine feste Gestalt noch ein festes Volumen. Es gibt weder Nah- noch Fernordnung

VII.2 Reibung

Die Existenz einer Reibungskraft haben wir bereits bei zahlreichen Versuchen gesehen und durch verschiedene Anordnungen, z.B. Luftkissen, versucht zu minimieren. Jetzt wollen wir versuchen zu klären, wie Reibung entsteht und wie sie wirkt.

Hierzu betrachten wir zwei beliebige Körper. Diese beiden Körper üben aufeinander Kräfte parallel zu ihrer Bewegungsrichtung aus, die sogenannte äußere Reibung. Sie wurde bisher in den Rechnungen vernachlässigt. Bereits aus dem Alltag ist bekannt, dass die Reibung abhängig ist von der Konstellation der Körper. Ein Motorradreifen auf einem Ölfilm beispielsweise verhält sich anders als auf der trockenen Straße. Entsprechend findet man empirisch verschiedene Reibungsgesetze:

Die **Coulomb-Reibung**, oder trockene Reibung, erfolgt, wenn ein Körper sich ohne Schmiermittel auf einer trockenen Unterlage bewegt. Dieser Fall ist der häufigste im Alltag und soll deshalb hier genauer behandelt werden.

Die **Stokes-Reibung**, oder viskose Reibung, erfährt ein nicht zu großer Körper, der sich mit mäßiger Geschwindigkeit in einem Fluid oder Gas bewegt. Diese Reibung werden wir später getrennt behandeln.

Die **Newton-Reibung** wirkt bei schneller Bewegung eines Körpers durch ein Fluid.

Versuch VII.1: Reibung eines Holzklotzes auf dem Tisch

Bei diesem Versuch soll gezeigt werden, dass Reibungskräfte existieren. Hierzu wird ein einfacher Holzklotz auf einen Tisch gelegt. Am Klotz ist ein Faden mit Federwaage befestigt. Nun wird am Faden so lange gezogen, bis der Klotz sich in Bewegung setzt. Bei einer beliebigen, nicht gemessenen Geschwindigkeit, soll nur noch so fest an dem Faden gezogen werden, dass der Klotz sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Obwohl die Geschwindigkeit konstant ist, zeigt die Federwaage einen Ausschlag an. Die Betrachtung dieses Vorgangs zeigt zwei wesentliche Ergebnisse:

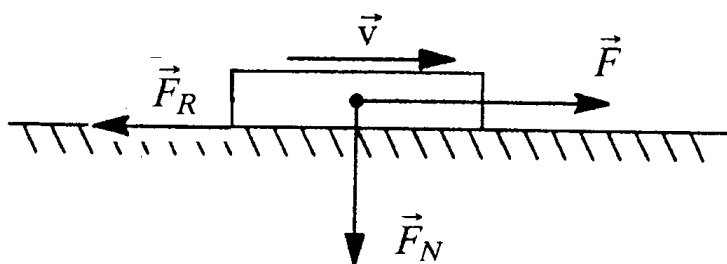


Abbildung VII.5: Die Reibungskraft greift nicht im Schwerpunkt an.

1) Der Holzklotz auf einer Ebene widersetzt sich der Beschleunigung durch eine Kraft \vec{F} so lange, bis diese Kraft größer wird, als die sich ihr widersetzende Reibungskraft. $\vec{F} > \vec{F}_R$ Gäbe es keine Reibungskraft, hätte der

Klotz sich aufgrund der resultierenden Kraft sofort in Bewegung setzen müssen. Die Existenz einer Reibungskraft, die der beschleunigenden Kraft entgegenwirkt, ist damit bewiesen

2) Auch bei konstanter Geschwindigkeit kann an der Federwaage eine Kraft abgelesen werden.

$\vec{F} \neq 0$. Da die Beschleunigung jedoch null ist, muss es im Newtonschen Sinn eine resultierende Kraft geben, für die gilt

$$m\vec{a} = 0$$

Gleichzeitig gilt auch

$$\vec{F}_R + \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_R + \vec{F} = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{F}_R = -\vec{F}$$

Bei konstanter Geschwindigkeit wirkt also der beschleunigenden Kraft eine gleich große Kraft entgegen, die Reibungskraft. Dabei greift die Reibungskraft nicht im Schwerpunkt des Körpers an, sondern an der Auflagefläche. Nach Definition VI.1 wirkt damit ein Kräftepaar. Je nach Krafteinwirkung kann die Reibungskraft also nicht nur zu einer Verzögerung der Bewegung führen, sondern den Körper zum Umkippen bringen.

Bei verschiedenen Versuchen findet man experimentell einige Bedingungen, die für die Coulomb-Reibungskraft gelten:

1) $F_R \sim F_N$: Die Reibungskraft ist bestimmt durch die Normalkraft, mit welcher der Körper auf die Unterlage drückt (Normalkraft \perp Auflage).

2) Die Reibungskraft F_R ist unabhängig von Auflagefläche A .

3) Die Reibungskraft F_R hängt nicht von der Geschwindigkeit ab, wenn die Geschwindigkeit ungleich null ist.

4) Die Reibungskraft F_R ist abhängig von der Oberflächenbeschaffenheit.

Bei anderen Reibungen weicht vor allem Punkt 3 von der Coulomb-Reibung ab. Im freien Fall beispielsweise fällt ein Körper nach anfänglich ungebremster Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit. Die Reibung zwischen geölten Flächen erfolgt nach einem $v^{1/2}$ - Gesetz.

Aus den Punkten 1) - 4) kann ein empirisches Reibungsgesetz aufgestellt werden.

Merke: Das **empirische Reibungsgesetz für die Coulomb-Reibung** lautet:

$$F_R = \mu F_N$$

Es ist jedoch nur in den aufgezeigten begrenzten Bereichen gültig.

Die wichtigste Frage, die sich bei diesem Versuch stellt, ist, warum die Coulomb-Reibung von der Geschwindigkeit unabhängig ist. Diese Frage wollen wir mit einer Plausibilitätserklärung beantworten:

Selbst polierte Oberflächen sind mikroskopisch sehr rau. Deshalb muss bei einer Verschiebung des Körpers um das Stück dx eine Anzahl mikroskopischer Unebenheiten überwunden werden, deren Anzahl proportional zum zurückgelegten Weg dx ist. Die zu dieser Verschiebung erforderliche Arbeit dW ist zu dx proportional und somit ebenfalls zur Anzahl dieser Vorsprünge. Der Proportionalitätsfaktor zwischen Arbeit und Weg ist die Reibung, sie ist also nicht abhängig von der Geschwindigkeit, mit der die Unebenheiten passiert wurden.

Die beiden Flächen berühren sich nur in wenigen Punkten, im Allgemeinen sogar nur in drei Punkten, denn eine Ebene ist bereits mit drei Punkten aufgespannt. Die Beziehungsfläche ist nur durch Verformung in diesen Punkten gegeben. Somit ist die Reibungskraft proportional zu F_N , und unabhängig von A .

Versuch VII.2: Haft- und Gleitreibung

Bei diesem Versuch verwenden wir wieder denselben Aufbau wie zuvor. Diesmal achten wir jedoch auf den genauen Ausschlag der Federwaage. Zunächst befinde sich der Klotz in Ruhe, der Faden sei gespannt aber es wirke noch keine Kraft. Jetzt wird langsam an dem Faden gezogen. Zunächst bleibt der Körper liegen, während wir die Kraft linear erhöhen. Plötzlich reicht die Kraft aus, die Haftreibung zu überwinden und

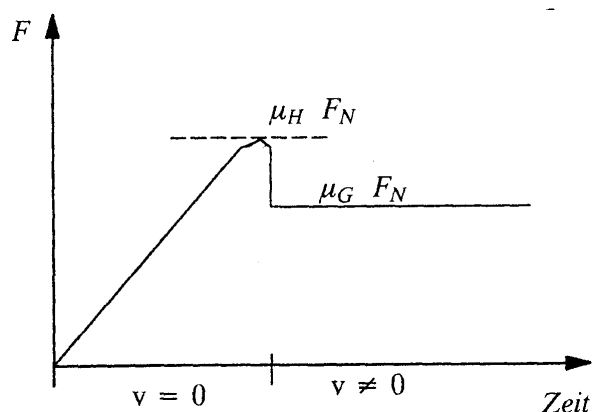


Abbildung VII.6: Reibungskraft in Abhängigkeit von Zeit und Geschwindigkeit

der Klotz bewegt sich. Gleichzeitig schnellte die Federwaage ein gutes Stück zurück und zeigt einen geringeren Ausschlag als kurz vor dem 'Anfahren'.

Dieser Versuch zeigt, dass es verschiedene Reibungskoeffizienten geben muss zwischen zwei Körpern, abhängig vom Bewegungszustand. In der Tat ist die Reibung, die zwischen ruhenden Körpern wirkt, die sogenannte **Haftreibung**, größer als die Reibung zwischen bewegten Körpern, die **Gleitreibung**.

Das oben aufgestellte Gesetz muss nun modifiziert werden je nach Bewegungszustand.

Merke: Das **empirische Reibungsgesetz für die Coulomb-Reibung** zwischen zwei ruhenden Körpern lautet: $F_R = \mu_H F_N$.

Das **empirische Reibungsgesetz für die Coulomb-Reibung** zwischen zwei bewegten Körpern lautet: $F_R = \mu_G F_N$.

Notation VI.1: Die Reibungskoeffizienten werden je nach Bewegungszustand mit einem Index versehen:

Haftreibungskoeffizient μ_H

Gleitreibungskoeffizient μ_G

Rollreibungskoeffizient μ_R .

Das in diesem Versuch ermittelte empirische Gesetz $\mu_H > \mu_G$ kann ebenfalls aus der Mikrostruktur der Oberflächen plausibel begründet werden:

Die Haftreibung ist größer als die Gleitreibung, weil ein ruhender Körper tiefer in die Vertiefungen der Unterlage einrasten kann als ein bewegter. Aus dieser Tatsache sieht man bereits, dass das Gesetz über die Unabhängigkeit von der Geschwindigkeit nur näherungsweise gelten kann. Bei sehr kleinen Geschwindigkeit muss der Körper erst aus den Vertiefungen in die 'Gleitstellung' gehoben werden, der Reibungskoeffizient nimmt also erst langsam den niedrigeren Gleitwert an.

In der folgenden Tabelle werden einige Wert für Haftreibungskoeffizient μ_H und Gleitreibungskoeffizient μ_G angegeben: Das Beispiel Aluminium zeigt, dass die oben erläuterten Gesetze nur begrenzte Gültigkeit haben und es durchaus Ausnahmen gibt.

Typische Werte	μ_H	μ_G	μ_R in cm
Stahl auf Holz	0,5	0,8 - 0,5	
Stahl auf Stahl	0,15	0,05 - 0,1	10^{-4}
Stahl auf Stahl mit Ölfilm	0,08	0,06	
Stahl auf Eis	0,027	0,014	
Alu auf Alu	1,1	1,8 - 1,0	
Autoreifen auf trockener Straße	1,2	1,05	0,7
Autoreifen auf nasser Straße	0,6	0,4	

Tabelle VII.1: Reibungskoeffizienten

Das Reibungsgesetz für Rollreibung soll hier nicht hergeleitet werden. Eine schöne Darstellung findet sich z.B. im Recknagel oder im Gerthsen, Vogel.

Merke: Für die **Rollreibung** gilt $F_R = \frac{\mu_R}{r} F_N$, mit r = Radius des Rades.

Betrachten wir abschließend noch die vektorielle Schreibweise für Gleitreibung. Die Reibungskraft zeigt in Richtung der Geschwindigkeit, deshalb wird die skalare Formel mit dem Einheitsvektor in Richtung der Geschwindigkeit multipliziert:

Merke: Die vektorielle Schreibweise für Gleitreibung lautet

$$\vec{F}_R = -\mu_G F_N \frac{\vec{v}}{v}$$

Die Reibungskraft ist ein Beispiel für eine nicht konservative Kraft. Nach Definition IV.3 muss für eine konservative Kraft gelten:

$$\oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = 0.$$

Für die Reibungskraft

$$\vec{F}_R = -\mu_G F_N \frac{\vec{v}_x}{v_x}$$

gilt jedoch

$$\int_{x_2}^{x_1} \vec{F}_R d\vec{x} = -\mu_G F_N (+1) (x_2 - x_1)$$

und

$$\int_{x_2}^{x_1} \vec{F}_R d\vec{x} = -\mu_G F_N (-1) (x_1 - x_2).$$

Damit folgt

$$\oint \vec{F}_R d\vec{x} = -2\mu_G F_N (x_2 - x_1) \neq 0$$

F_R ist somit nicht konservativ, da sich die Vorzeichen von v und damit von F_R mit einer Richtungsänderung umkehren.

Versuch VII.3: Kurvenfahrt im Auto

Bei der normalen Kurvenfahrt in einem Auto wird die Zentrifugalkraft F_z durch die Haftreibung der Reifen auf dem Asphalt $\mu_H F_N$ kompensiert. Bremsst man mit blockierenden Reifen, so geht die Haftreibung in Gleitreibung $\mu_G F_N$ über. Da $\mu_G F_N < \mu_H F_N$ ist, kann die Reibung die Zentrifugalkraft nicht mehr kompensieren.

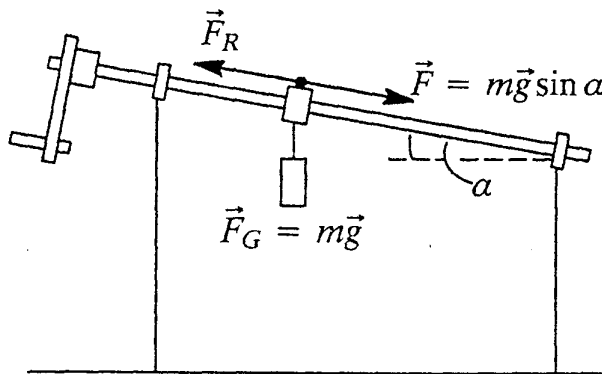


Abbildung VII.7: Versuchsanordnung für Versuch VII.3

Diese Situation wollen wir mit einem anderen Versuchsaufbau zeigen: Eine Masse M hängt an einem glatten Metallstab, der mit dem Boden einen Neigungswinkel α bildet. Der Winkel sei so gewählt, dass das Gewicht grade noch im Stillstand bleibt. Dann ist die Haftreibung größer als die Hangabtriebskraft

$\mu_H G \cos \alpha > Mg \sin \alpha$

$$\mu_H G \cos \alpha > Mg \sin \alpha$$

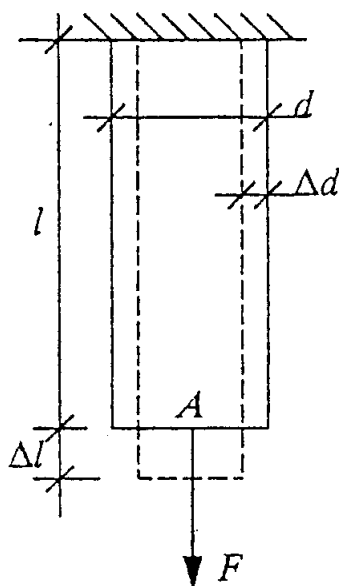
Wird der Stab nun um seine Längsachse gedreht, so beginnt die Masse zu gleiten. Das liegt darin begründet, dass die Haftreibung zu einer Gleitreibung mit geringerem Koeffizienten übergeht. Dann gilt

$$\mu_G G \cos \alpha < Mg \sin \alpha .$$

VII.3 Dehnung und Kompression fester Körper

Zunächst betrachten wir nur elastische Verformungen, d.h. Verformung, die wieder vollständig zurückgehen, wenn keine sie hervorrufende Kraft mehr wirkt. Als Beispiel einer solchen Verformung betrachten wir einen Versuch:

Versuch VII.4: Dehnung eines Stabes



Ein Stab der Länge l und der Querschnittsfläche A wird an einem Ende fest eingespannt, auf einer parallelen Skala wird seine Länge markiert. Dann wird mit einer Kraft am unteren Ende des Stabes gezogen. Die Längenänderung des Stabes wird ebenfalls an der Skala markiert. Nachdem die Kraft nicht mehr wirkt, zieht der Stab sich wieder auf seine ursprüngliche Länge zusammen.

Die markierte Differenz der Länge des Stabes Δl in belastetem und unbelastetem Zustand kann nun abgelesen werden. Führt man diesen Versuch für verschiedene Stäbe und verschiedene Kräfte durch, so findet man experimentell, dass $\Delta l \ll l$ ist. Das

Verhältnis zwischen der ursprünglichen Länge des Stabes und der Längenänderung durch eine

Abbildung VII.8: Dehnung

Krafteinwirkung nennt man seine Dehnung. Die Einheit der Dehnung ist 1:

$$\text{Einheitenbetrachtung: } [\varepsilon] = \frac{[\Delta l]}{[l]} = \frac{\text{m}}{\text{m}} = 1$$

Definition VII.1: Das Verhältnis zwischen der ursprünglichen Länge eines Körpers und der Längenänderung durch eine Krafteinwirkung nennt man Dehnung : $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$

Bei diesem Versuch stellt man ebenfalls fest, dass die Dehnung nicht nur abhängt von der Kraft, mit der gezogen wird, sondern auch von der Querschnittsfläche des Stabes. Man definiert deshalb eine weitere Größe aus einem wichtigen Verhältnis:

Definition VII.2: Das Verhältnis von aufgewendeter Kraft, mit der an einer Fläche A gezogen wird, und der Fläche selbst, nennt man Spannung: $\frac{F}{A} = \sigma$

$$\text{Einheitenbetrachtung: } [\sigma] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Das Verhältnis von Dehnung zu Spannung ist gegeben durch eine Proportionalität

$$\varepsilon \sim \sigma$$

Notation VII.2: Die Proportionalitätskonstante wird **Dehnungskoeffizient genannt und mit α abgekürzt.**

Damit folgt
$$\varepsilon = \alpha \sigma$$

Mit der Definition der Spannung und der Dehnung gilt

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha \frac{F}{A}$$

Statt des Dehnungskoeffizienten α benutzt man häufig das Elastizitätsmodul.

Notation VII.3: Den Umkehrwert des Dehnungskoeffizienten bezeichnet man mit E und nennt ihn **Elastizitätsmodul.**

Damit lautet das Gesetz für die Dehnung

$$\varepsilon E = \sigma.$$

Dieses Gesetz ist analog zum Federgesetz $F_a = K x$.

**Merke: Das Dehnungsgesetz ist eine Form des Hook'schen Gesetzes.
Es lautet: $\varepsilon E = \sigma$**

Einheitenbetrachtung: $[E] = [\sigma] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{N}{m^2}$.

Bei der Dehnung eines Körpers tritt zudem eine Querkontraktion auf. Das zeigen wir in einem weiteren Versuch:

Versuch VII.5: Dehnung eines Kautschukband

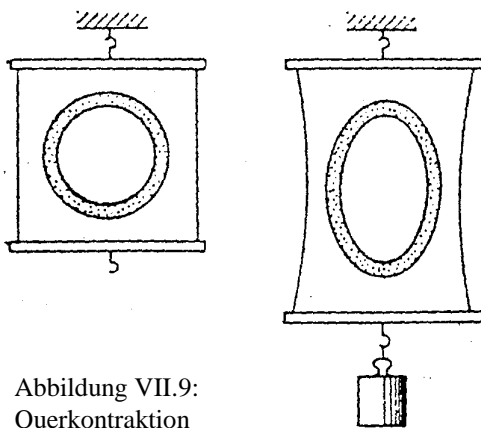


Abbildung VII.9:
Querkontraktion

Der Versuchsaufbau ist derselbe wie zuvor, nur mit dem Unterschied, dass diesmal statt eines Stabes ein Kautschukband der Breite d gedehnt wird. Um die Verformung besser beobachten zu können, ist auf dem Band ein Kreis aufgezeichnet. Dehnt man das Band, so verformt sich der Kreis des Radius r zu einer Ellipse mit einer kleineren Halbachse $< r$. Die Änderung der Breite d wird wieder mit dem Verhältnis angegeben:

$$\frac{\Delta d}{d}$$

Die ganze Verformung wird beschrieben durch das Verhältnis der Dehnung zur Querkontraktion.

$$\mu = - \frac{\Delta d}{d} / \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

Merke: Die Verformung einer Fläche wird beschrieben durch das Verhältnis der Dehnung zur Querkontraktion. $\mu = -$. Das Verhältnis wird angegeben mit der Poissonschen Zahl μ .

Die Poissonschen Zahl μ ist nach dieser Definition immer kleiner eins.

Betrachten wir nun die Volumenänderung anhand eines Quaders mit der quadratischen Fläche

$A = d \cdot d$ und der Länge ℓ :

$$\Delta V = (d + \Delta d)^2 \cdot (\ell + \Delta \ell) - d^2 \ell$$

Vernachlässigt man alle Terme mit Δ^2 , dann gilt

$$\text{mit } (\Delta d)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta V = (d^2 + 2d \Delta d) (\ell + \Delta \ell) - d^2 \ell$$

$$\text{und mit } \Delta d \Delta \ell = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta V = d^2 \Delta \ell + 2 \ell d \Delta d.$$

Für das Verhältnis Volumenänderung zu Volumen gilt dann

$$\text{mit } V = d^3 \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta \ell}{\ell} + 2 \frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta \ell}{\ell} (1 - 2\mu)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta \ell}{\ell} (1 - 2\mu)$$

$$\text{mit } \frac{\Delta \ell}{\ell} = \varepsilon \text{ und } \varepsilon = \frac{1}{E} \sigma \quad \Leftrightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{E} (1 - 2\mu) \sigma$$

Merke: Die **Volumenänderung eines Quaders** durch

$$E \text{ und } \mu \text{ ausgedrückt lautet } \frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{E} (1 - 2\mu) \sigma .$$

Dieser Ausdruck ist positiv, wenn die Poissonsche Zahl größer als 0,5 ist.

Nun betrachten wir die Kompression eines Körpers.

Kompression wird verursacht durch die Einwirkung eines allseitig gleichmäßigen Druckes p auf einen Körper. Definieren wir zunächst den Begriff des Drucks:

Definition VII.3: Der Druck p ist der Betrag der Kraftkomponente F_n normal zur Fläche

$$\text{geteilt durch die Fläche } A, \text{ auf welche die Kraftkomponente wirkt: } p = \frac{F_n}{A} .$$

Die Einheit des Drucks wird in verschiedenen Systemen unterschiedlich angegeben. Offiziell rechnet man im SI mit Pascal, gebräuchlich ist aber immer noch die Einheit Bar. Um die Umrechnung zu erleichtern, folgt hier eine Tabelle mit den gebräuchlichsten Einheitenbezeichnungen:

Einheit	Zeichen	Faktor zur Umrechnung in				
		Pa	bar	at	atm	Torr
Pascal = 1 Nm ⁻²	Pa	1	10 ⁻⁵	1.02 • 10 ⁻⁵	9.87 • 10 ⁻⁶	7.50 • 10 ⁻³
Bar = 10 ⁵ Pa = 0,1 MPa	bar	10 ⁵	1	1.02	0.987	7.5 • 10 ²
Techn. Atmosphäre	at	9.81 • 10 ⁴	0.981	1	0.968	7.36 • 10 ²
Phys. Atmosphäre	atm	1.013 • 10 ⁵	1.013	1.033	1	7.6 • 10 ²

Torr	Torr	$1.333 \cdot 10^2$	$1,333 \cdot 10^{-3}$	$1,36 \cdot 10^{-3}$	$1.32 \cdot 10^{-3}$	1
-------------	------	--------------------	-----------------------	----------------------	----------------------	---

Tabelle VII.2: Druckeinheiten

Merke: 1 bar \approx 1 at und 1 hPa = 1 mbar

Nun betrachten wir einen Würfel, der an drei Seiten festgehalten wird und auf dessen drei freie Seiten der Druck p wirkt.

Die Volumenänderung können wir direkt berechnen aus

$$\frac{\Delta V}{V} = 3 \cdot \frac{1}{E} (1 - 2\mu) \sigma$$

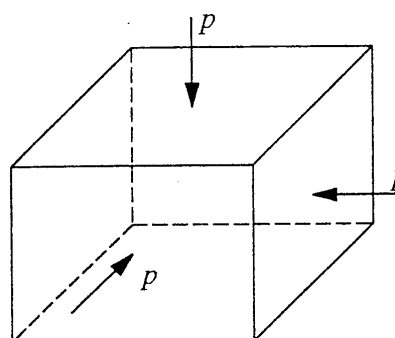


Abbildung VII.10: Kompression

wegen $\sigma = -p$ folgt

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa p$$

mit

$$\kappa = \frac{3(1-2\mu)}{E}$$

Die so ermittelte Proportionalitätskonstante κ wird Kompressibilität genannt. Analog zum Elastizitätsmodul definiert man ein Kompressionsmodul.

Notation VII.4: Den Umkehrwert der Kompressibilität bezeichnet man mit K und nennt ihn **Kompressionsmodul**.

Die Volumenänderung ist also proportional zum Druck. Sie wird angegeben durch das Kompressionsmodul, das zusammenhängt mit E und μ über die Gleichung

$$\kappa = \frac{3(1-2\mu)}{E}$$

Da $\frac{\Delta V}{V} < 0$ ist gilt für positiven Druck $p > 0$: $\kappa > 0$ und $\mu < 0.5$

Nun wollen wir in einem weiteren Versuch untersuchen, was passiert, wenn man einen Draht über die elastische Grenzen hinaus ausdehnt.

Versuch VII.6: Zerreißspannung

Bei diesem Versuch wird ein Kupferdraht an der Wand des Vorlesungssaals befestigt und über eine Umlenkrolle mit einer Federwaage nach unten gezogen. Die Umlenkrolle ist mit einem

Zeiger versehen, der die Umdrehung und damit die Längenänderung des Drahtes anzeigt. Zunächst wird nur leicht am Draht gezogen, bis der Zeiger einen gut ablesbaren Winkel anzeigt. Wir lesen den Winkel und die Kraft ab, die die Längenänderung hervorgerufen hat. Dann lassen wir den Draht los und überprüfen, ob der Zeiger auf den Nullpunkt zurück schwenkt. Wenn dies der Fall ist, war die vorgenommene Verformung elastisch und wir können aus den abgelesenen Daten das E-Modul berechnen.

Danach ziehen wir so lange an dem Draht, bis er reißt. Dabei kann über Zählen der Umdrehungen des Zeigers die Längenänderung ermittelt werden. Analog wird dann das E-Modul berechnet, es gibt jetzt die Zerreißspannung an.

Zwischen Zerreißen und elastischer Verformung liegen natürlich noch andere Bereiche. Von

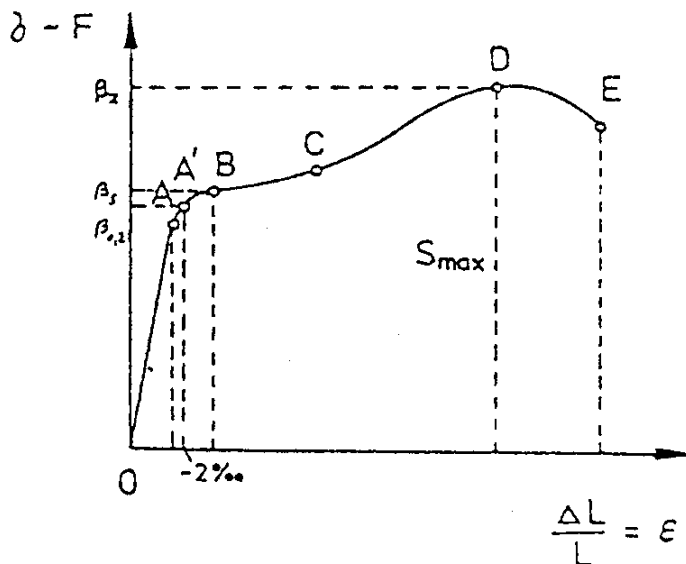


Abbildung VII.11: Spannungs-Dehnungsdiagramm eines Metalls (Kupfer)

einem Gummiband ist uns bekannt, dass man es elastisch spannen kann, und es nimmt seine ursprüngliche Länge wieder an. Zieht man etwas zu fest, so leiert das Gummi aus, und es kehrt nicht wieder in seine Ausgangsform zurück. Zieht man dann fest genug, zerreißt es.

Dieses Verhalten sieht bei Metallen skizziert wie folgt aus:

1. Elastischer Bereich: 0 - A (bzw. A')

Die Abbildung zeigt, dass im Hook'schen Bereich die Verformung bis zur **Proportionalitätsgrenze** (A) rein elastisch ist. Bis zu diesem Punkt sind Spannung und Dehnung proportional ($\epsilon \sim \sigma$) und die Spannungs-Dehnungs-Kurve ist eine Gerade. Aus messtechnischen Gründen wurde die Elastizitätsgrenze ($\beta_{0,2}$) (A') eingeführt, bei der die verbleibende Verformung 0,01 % beträgt. Bis hierher nimmt die Dehnung zwar etwas stärker zu, aber die Verformungen lassen sich in beiden Richtungen identisch durchlaufen.

2. Inelastischer, plastischer Bereich: B - E

Oberhalb $\beta_{0,2}$ knickt die Kurve ab und erreicht bei weiterer Belastung die **Streck- oder Fließgrenze** (β_s) (B). Ab dem Punkt B beginnt das Fließen des Metalls, d.h. ganze Bereiche im Polykristall verschieben sich gegeneinander. Bei einigen Metallen tritt dann wieder eine **Verfestigung** ein, die durch die Gleitmöglichkeit des Stoffes festgelegt ist. Bei weiterer Belastung nimmt dann die elastische Spannung bis zu einem maximalen Wert wieder zu. Die an diesem Punkt (D) wirkende Höchstspannung wird als **Zug- bzw. Zerreißfestigkeit (-spannung)** (β_z) bezeichnet oder auch als **Bruchdehnung** (σ_B).

Die Verformungen, die zwischen der Elastizitsgrenze (A') und der Bruchdehnung (D) auftreten werden als plastische Verformungen bezeichnet. Trotz dieser Verformungen lässt sich

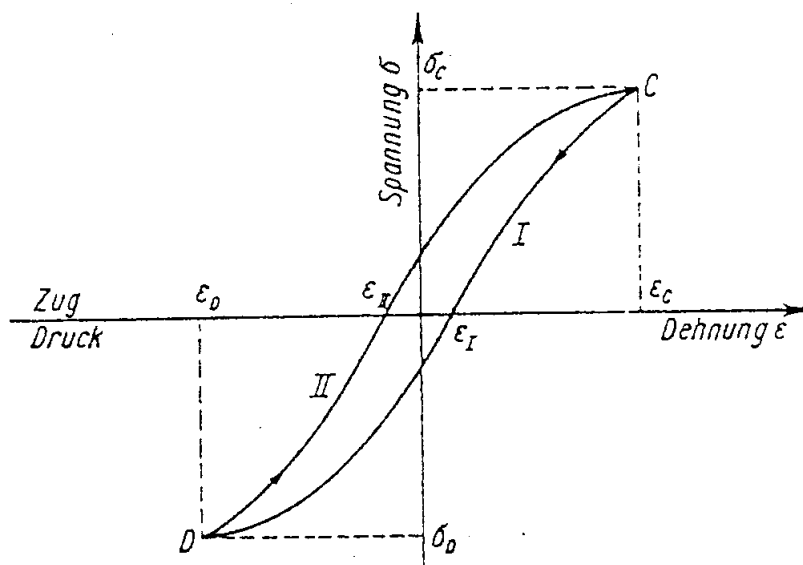


Abbildung VII.12: elastische Hysterese

ungefähr eine Gerade parallel zur ursprünglichen in beide Richtungen durchlaufen, da einzelne Teilbereiche noch elastisch bleiben. Die bei der Be- und Entlastung durchlaufenen Geraden werden als **elastische Hysterese** bezeichnet.

3. Zerreißen: nach E

Bei weiterer Belastung nach der Bruchdehnung (D) schnürt sich der Draht ein, es erfolgt eine Querschnittsverminderung, die Spannungs-Dehnungs-Kurve 'fällt ab' und der Stab reißt an dieser Stelle im Punkt (E).

VII.4 Schub und Torsion

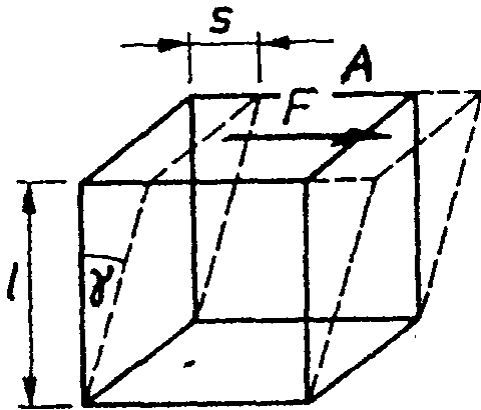


Abbildung VII.13: Scherung

Wir betrachten einen Quader, auf den einseitig eine Kraft wirkt. Dazu denken wir uns einen Klotz, dessen Auflagefläche auf den Tisch befestigt ist. Nun soll eine Kraft \vec{F} tangential an der dazu parallelen Oberfläche A angreifen: Der Körper wird wie in der Abbildung gezeigt in sich verschoben. Die so entstehende Spannung wird deshalb Schubspannung oder Scherspannung genannt.

Notation VII.5: Die durch Verschieben zweier paralleler Oberflächen entstehende Schub- oder Scherspannung wird mit τ bezeichnet.

Analog zur Definition des Druckes wird die Schubspannung τ definiert als Verhältnis von tangential an einer Fläche angreifender Kraft F und der Fläche.

Definition VII.4: Die Schubspannung τ wird definiert als Verhältnis von tangential an einer Fläche angreifender Kraft F und der Fläche: $\tau = \frac{F}{A}$.

Merke: Für die Schubspannung gilt wieder das Hook'sche Gesetz $\tau = G \cdot \alpha$

Die Proportionalitätskonstante G wird Schub- bzw. Torsions-Modul genannt.

Der Zusammenhang des Torsions-Moduls mit dem Elastizitäts-Modul und der Poisson'schen

Zahl ist gegeben durch:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

Diese Formel gilt nur für isotrope Körper, also z.B. Polykristalle. Der Beweis der Formel kann z.B. im Recknagel nachgelesen werden. An dieser Stelle reicht es, festzuhalten, dass die Module alle in derselben Größenordnung liegen und somit gegeneinander abgeschätzt werden können. Wichtig ist die Mechanik fester Körper z.B. für Bauingenieure, die abschätzen müssen, wie sehr ein Balken sich durchbiegt oder welche Belastung er verträgt. Schwierig wird diese Berechnung bei anisotropen Stoffen. Da diese nur in den einfachsten Fällen analytisch berechnet werden können, muss in der Statik zu numerischen Lösungsverfahren gegriffen werden. Man rechnet im Bauwesen zunehmend mit den sogenannten Finiten Elementen.

Abschließend werden noch einige typische Werte der Module angegeben.

Einige typische Werte für Stahl:

M Pa	E 200 000	G 800 000	K 160 000	σ_B ~ 10 000	μ 0.28
bar ⁻¹	$5 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{-7}$	~ 10 000	
	$\alpha = 1/E$	$\gamma = 1/G$	$\kappa = 1/K$	σ_B	

Tabelle VII.3: Module für Stahl

IIX. Ruhende Flüssigkeiten und Gase

In diesem Kapitel wollen wir versuchen, die Reaktion von Gasen und Flüssigkeiten auf äußere Einflüsse, insbesondere auf Druck, zu untersuchen. In Kapitel VII hatten wir dieses Verhalten für Festkörper bereits untersucht und kurz den atomaren Aufbau von Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen erörtert.

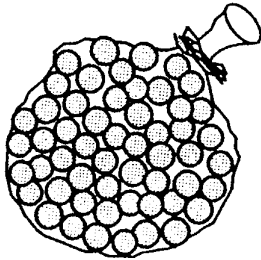


Abbildung IIX.1: Modell der Moleküle in einer Flüssigkeit

Wir hatten ein Modell für Flüssigkeiten entwickelt, bei dem Atome der Flüssigkeit gegeneinander verschiebbar sind. Eine Nahordnung ist noch vorhanden und auch das Volumen ist konstant, aber der Körper hat keine feste Gestalt, weil die Atome bzw. Moleküle ihre festen Gitterplätze verlassen haben und gegeneinander verschiebbar sind, die Bindungskräfte sind noch vorhanden. Anschaulich kann man sich dieses Modell auch als einen Sack mit Murmeln vorstellen: Die Kugeln berühren sich, man kann den Sack in verschiedene Formen bringen, sein Volumen jedoch nur sehr

schwer verändern.

Dabei hatten wir festgestellt, dass bei Flüssigkeiten die Moleküle annähernd so dicht gepackt sind, wie bei Festkörpern. Deshalb ändert sich die Dichte eines Körpers, wenn er schmilzt, nicht wesentlich. Wir können somit erwarten, dass die Flüssigkeiten ebenso wie die Festkörper einer Volumenänderung, also einer Annäherung ihrer Moleküle, erheblichen Widerstand entgegen setzen.

IIX.1 Kompressibilität

Mit den so gewonnenen Feststellungen können wir die Kompressibilität von Flüssigkeiten analog zu den Festkörpern angeben:

Das Volumen einer Flüssigkeit sei V . Wirkt dann eine Druckänderung Δp auf das Volumen, so ändert sich das Volumen um ΔV . Für das Verhältnis des Volumens zur Volumenänderung gilt

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \Delta p$$

oder differentiell geschrieben:

$$\frac{dV}{dp} = -\kappa V$$

κ gibt dabei die Kompressibilität bei Flüssigkeiten an.

Merke: Die **Kompressibilität κ bei Flüssigkeiten** wird analog zu Festkörpern

berechnet als $\frac{dV}{dp} = -\kappa V$

Die Kompressibilität κ bei Flüssigkeiten ist etwa $10 \div 100$ mal größer als bei Festkörpern. Man braucht z.B. 1000 bar, um das Volumen von Wasser um 5% zu verkleinern. Weitere Werte sind in der folgenden Tabelle zusammen gestellt.

Flüssigkeit	K [10^9 N m^{-2}]	$\kappa = 1/K$ [$10^{-12} \text{ m}^2 \text{ N}^{-1}$]
Alkohol	0,9	1100
Wasser	~ 2,0	500
Quecksilber	25	40
zum Vergleich:		
Kupfer	125	8
Luft	10^{-4}	10^7

Tabelle IIX.1: K-Module

Merke: Die Kompressibilität κ bei Flüssigkeiten ist größer als im Festkörper. Im Verhältnis zur Kompressibilität bei Gasen ist κ von Flüssigkeiten immer noch sehr klein. Man spricht deshalb von einer **‘praktischen Inkompressibilität’ von Flüssigkeiten.**

Wird die Druckänderung zurückgenommen, so nimmt die Flüssigkeit ihr ursprüngliches Volumen wieder ein, Flüssigkeiten besitzen also wie feste Körper eine Volumenelastizität. Die Flüssigkeiten unterscheiden sich von festen Körpern im wesentlichen durch die größere Verschiebbarkeit der Moleküle gegeneinander. Wie die Murmeln in unserem Modell können die Moleküle einer Flüssigkeit leicht aneinander vorbei gleiten. Anders als bei Festkörpern, bei denen eine Formänderung aufgrund der festen Gitterstruktur nur mit großem Kraftaufwand möglich ist, passen sich Flüssigkeiten von selbst der Gefäßform an, das Schubmodul G ist folglich gleich null. Die große Beweglichkeit der Moleküle bedingt ebenfalls die Einstellung eines gleichen Flüssigkeitsniveaus und eine allseitige Druckausbreitung. Diese Phänomene wollen wir im folgenden untersuchen:

IIX.2 Druckausbreitung in Flüssigkeiten

Zunächst werden bei der Betrachtung der Druckausbreitung die Kompressibilität κ und die Schwerkraft vernachlässigt.

Betrachten wir nun ein Gedankenexperiment:

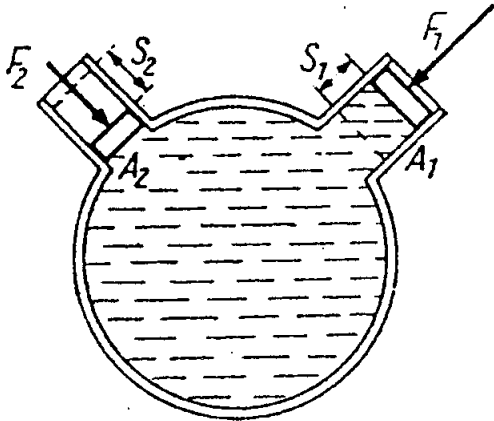


Abbildung IIX.2: Schematische Darstellung des Gedankenexperimentes

Ein mit einer Flüssigkeit gefülltes, rundes Gefäß sei an zwei Stellen mit je einem verschiebbaren Kolben versehen. Die Fläche der Kolben sei A_1 und A_2 . Nun wird Kolben 1 bei einem festen Druck p_1 auf Kolben 1 und p_2 auf Kolben 2 langsam um eine Strecke s_1 bzw. s_2 verschoben, wobei das Volumen konstant bleibt: $V = \text{const.}$

Für die Änderung des Drucks gilt

$$\Delta p_1 = \Delta p_2 = 0.$$

Bei diesem Verschieben der Kolben muss Arbeit geleistet werden. Wie bereits bekannt,

berechnet man für konstante Krafteinwirkung, hier also für konstanten Druck, Arbeit als Produkt aus Kraft und Weg. Damit ist die Arbeit

$$W = F s$$

Die Kraft an Kolben 1 hat mit der Definition des Drucks den Wert

$$F_1 = p_1 A_1$$

Der Kolben werde um die Strecke s_1 verschoben, somit wird die Arbeit

$$W_1 = F_1 s_1 \quad \text{geleistet.}$$

$$\Rightarrow W_1 = p_1 A_1 s_1$$

Die Volumenänderung in einem Kolben wird berechnet als

$$V_i = A_i s_i.$$

Damit gilt für die Arbeit an Kolben 1

$$\Rightarrow W_1 = p_1 V_1$$

Analog berechnet man die Arbeit, die an dem zweiten Kolben verrichtet werden muss:

$$W_2 = p_2 V_2$$

Der Kolben soll so langsam verschoben werden, dass die Flüssigkeit keine kinetische Energie erhalte. Die Arbeit wird also nur aufgewendet, um den anderen Kolben zu verschieben. Mit dieser Voraussetzung gilt der Energieerhaltungssatz.

Der Energiesatz liefert die Beziehung

$$W_1 = W_2.$$

Mit den oben gewonnen Ausdrücken für die Arbeit gilt

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

Da das Volumen konstant bleibt, die Flüssigkeit sei als inkompressibel angenommen, gilt mit der Beziehung für die Volumina der beiden Kolben

$$V_1 = V_2.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{p_1 = p_2}$$

Der Druck in der Flüssigkeit ist also in alle Richtungen konstant.

Merke: Druck breitet sich in ruhenden Flüssigkeiten gleichmäßig nach allen Richtungen aus, wenn die Flüssigkeit als inkompressibel betrachtet wird und die Schwerkraft und der daraus resultierende Schweredruck vernachlässigt wird.

Druck kann somit, wie bereits ohne Begründung von uns angewandt, als skalare Größe behandelt werden.

Trotzdem hat die vom Druck erzeugte Kraft oder die druckerzeugende Kraft eine Richtung.

Merke: Kräfte stehen in ruhenden Flüssigkeiten immer senkrecht auf den Grenzflächen. Die tangentielle Kraftkomponente muss anschaulich null sein, weil sonst eine Verschiebung längs der Grenzfläche entstehen würde.

Versuch IIX.1: Hydraulische Presse

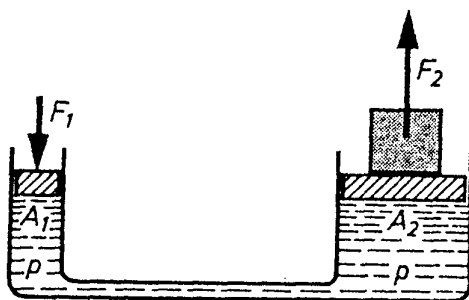


Abbildung IIX.3: Hydraulische Presse

Die bei dem Gedankenexperiment abgeleitete Formel

$$p_1 = p_2$$

kann mittels der Definition des Drucks geschrieben

werden als
$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

$$\Leftrightarrow F_2 = A_1 \frac{F_2}{A_2}.$$

Diese Formel zeigt, dass sich mit kleinen Kräften F_1 große Kräfte F_2 erzeugen lassen, indem man die Flächen, auf die der Druck wirkt, geschickt wählt. Angewandt wird diese Tatsache bei

den sogenannten hydraulischen Pressen. In unserem Versuch wollen wir einen massiven Holzbalken durchbrechen, indem wir nur den Druck des Wasser aus der Wasserleitung verwenden.

Die schematische Darstellung zeigt eine allgemeine Form der hydraulischen Presse. Wir verwenden als wirkende Kraft, die durch den Wasserdruck der Leitung auf eine Querschnittsfläche A_1 eines Wasserschlauchs wirkende Kraft. Die Fläche A_2 realisieren wir durch eine große Gummiblase in einem festen Metallzylinder. Die Kraft F_2 , die von dieser Blase aus wirkt, drückt einen Holzbalken nach oben. Da der Balken an den Enden fest eingespannt ist, kann nur die Mitte unter dem Druck nachgeben. Die so erzeugte Kraft ist so groß, dass der Balken in der Mitte durchbricht.

IIX.3 Schweredruck

Bisher hatten wir den Druck, der durch das Gewicht der Flüssigkeit selbst entsteht, vernachlässigt. In der Realität aber kommt zum äußeren Druck der Schweredruck aufgrund des Gewichtes der Flüssigkeit hinzu. Im Folgenden wollen wir versuchen, die dadurch entstehenden Druckverhältnisse im Inneren einer Flüssigkeit zu beschreiben. Hierzu betrachten wir eine Flüssigkeit im Gleichgewicht. Innerhalb der Flüssigkeit untersuchen wir die Kräfte auf eine infinitesimale Scheibe der Fläche A und der Dicke dy .

Wenn das so gewählte Flüssigkeitselement in Ruhe ist, bedeutet das, dass keine resultierende Kraft in irgendeine Richtung wirken kann. Folglich heben horizontale Drucke sich gegenseitig auf, so dass die Resultierende null ist. In y -Richtung gilt für die wirkenden Kräfte deshalb

$$F_y = 0.$$

Betrachten wir nun die einzelnen Kräfte:

Zunächst wirkt auf unser Element der von außen ausgeübte Druck

$$F_o = pA.$$

F_o wirkt in nach unserer Konvention in positive y -Richtung, also 'nach unten'.

Durch die Druckänderung wirkt dem entgegen eine Kraft F_u

$$F_u = (p+dp) A.$$

Durch das Gewicht unseres Elementes wirkt ferner die Gewichtskraft F_G

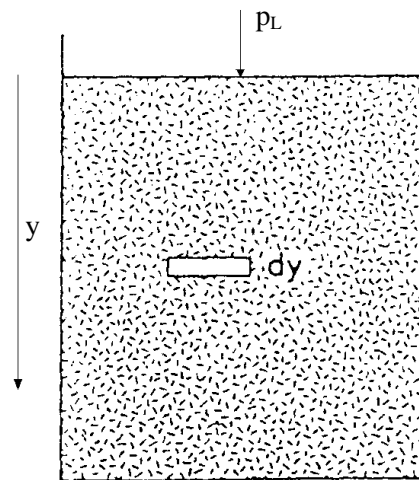


Abbildung IIX.4: Infinitesimale Scheibe einer Flüssigkeit der Fläche A und der Dicke dy .

$$F_G = dm g$$

Das Massestück dm habe die Dichte ρ . Dann gilt

$$F_G = \rho dV g.$$

Mit $dV = A dy$ folgt

$$F_G = \rho A dy g.$$

Die Gewichtskraft wirkt ebenfalls in positive y -Richtung.

Insgesamt beträgt die resultierende Kraft in y -Richtung dann

$$F_y = F_o + F_G - F_u$$

$$\Leftrightarrow F_y = pA + \rho A dy g - (p+dp) A$$

Mit $F_y = 0$

$$\Rightarrow pA + \rho A dy g = (p+dp) A$$

$$\Leftrightarrow \rho dy g = dp$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dp}{dy} = \rho g}$$

Da die Dichte und die Gravitation als konstant angenommen werden können, nimmt die Druckänderung dp mit der zunehmenden Tiefe dy proportional zu. Wichtig ist hierbei die Unabhängigkeit des Querschnitts A des Gefäßes.

Merke: Der **Schweredruck** nimmt proportional zur Tiefe zu

unabhängig vom Querschnitt A : $\frac{dp}{dy} = \rho g$.

Um den Schweredruck berechnen zu können betrachtet man das Integral

$$\Delta p = \int_0^h \rho g dy$$

$$\Leftrightarrow \Delta p = \rho g h$$

Der Druck in 10 m Wassertiefe berechnet sich damit z.B. als

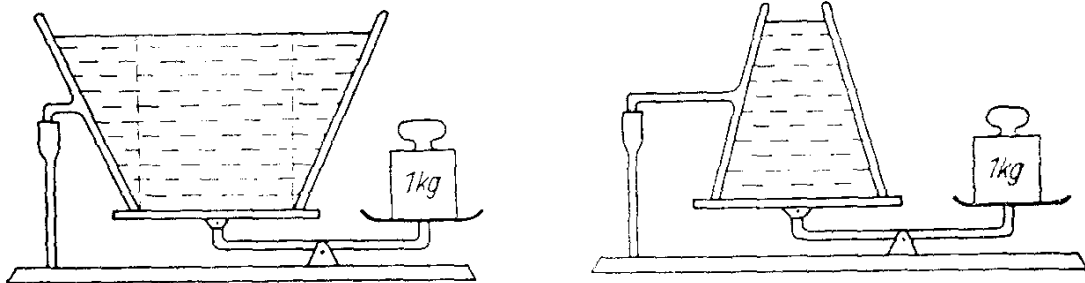
$$\Delta p = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m} = 10^5 \text{ N} / \text{m}^2 = 1 \text{ bar}$$

Der Druck in 10 Meter Wassertiefe entspricht damit etwa einen Atmosphärendruck.

Aus der Unabhängigkeit der Schweredrucks von der Querschnittsfläche des Gefäßes resultiert das 'Hydrostatische Paradoxon'. Dieses soll in einem Versuch verdeutlicht werden:

Versuch IIX.2: Hydrostatisches Paradoxon

Gefäße unterschiedlicher Form haben den gleichen Bodendruck, da dieser nur von der Höhe der Wassersäule abhängt. Falls die Querschnitte der Böden verschiedener Gefäße gleich sind, also



$A_1 = A_2$, so ist auch die Kraft auf die Böden gleich, da Druck nur von Füllhöhe h abhängt und die Kraft von Druck und Fläche. Das vermeintliche Paradoxon besteht darin, dass das Gewicht auf einen Punkt der Bodenfläche unterschiedlich ist und dennoch derselbe Druck herrscht.

Um diese Aussage zu verifizieren, wird in diesem Versuch ein Gefäß mit Wasser gefüllt und auf eine Waage gestellt. Ein Zeiger schlägt entsprechend der Kraft aus, die auf den Gefäßboden wirkt. Dieser Versuch wird mit verschiedenen Gefäßen wiederholt, wobei vorher überprüft wurde, ob alle Gefäße die gleiche Grundfläche und einen gleichen Wasserstand haben. Der Zeiger zeigt wirklich bei allen Gefäßen dieselbe Kraft an, obwohl der Inhalt der Gefäße verschieden groß ist.

Auf demselben Prinzip beruht auch der folgende Versuch:

Versuch XII.3: Kommunizierende Röhren

Bei diesem Versuch wird ein Gefäß, wie nebenstehend schematisch dargestellt, mit einer Flüssigkeit gefüllt. Am unteren Ende des Gefäßes besteht eine offene Verbindung zu anderen, beliebig geformten Gefäßen.

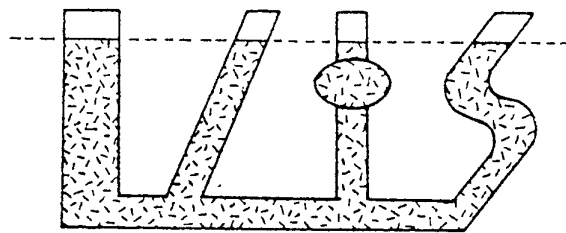


Abbildung IIX.6: Kommunizierende Röhren

Man kann beobachten, dass die Flüssigkeit in allen miteinander verbundenen Röhren

gleichmäßig auf einer Ebene ansteigt, unabhängig von der Fassungsmenge. Aufgrund der Tatsache, dass überall dieselbe Höhe angezeigt wird, wissen wir, dass auf jede Oberfläche derselbe Druck wirkt. An jedem Querschnitt der Röhren, z.B. ganz unten, muss der Druck $p = \rho g h$ beiderseits gleich sein, damit ein Gleichgewicht herrscht und die Flüssigkeit nicht mehr von einer in die andere Röhre fließt. Bei Auffüllen mit nur einer Flüssigkeit, also gleicher Dichte ρ ist das nur dann der Fall, wenn die Höhe der Wassersäule auf beiden Flächen gleich groß ist. Querschnitt und Form sind hierbei beliebig.

Bei ungleichen Dichten der Flüssigkeit in den Rohren kann dieser Aufbau genutzt werden, die Dichte zu messen, indem man die Höhendifferenz misst.

Versuch IIX.4: Weinheber

Dieses Bestreben der Flüssigkeiten, die Wassersäulen auszugleichen, kann man sich zunutze machen, um Flüssigkeiten zu heben. Ein Beispiel hierfür ist der sogenannte Weinheber. Zwei Messbecher werden bei diesem Versuch auf verschiedene Niveaus gestellt. Dann füllt man die Gefäße mit einer Flüssigkeit. Verbindet man die Gefäße jetzt mit einem hochgelegten und vollständig mit derselben Flüssigkeit gefüllten Schlauch, so beginnt die Flüssigkeit aus dem höher liegenden Gefäß in das tiefer gelegene zu strömen. Die Erklärung folgt wieder aus dem Schweredruck: Auf die Querschnittsfläche

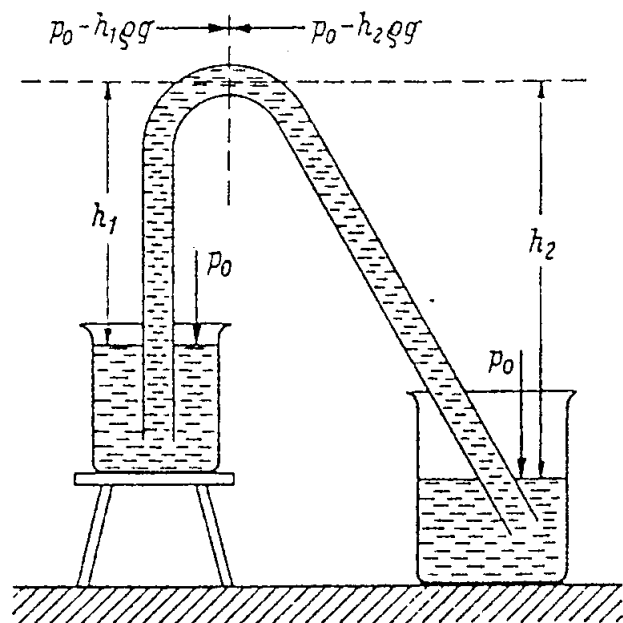


Abbildung IIX.7: Weinheber - der Flüssigkeitsspiegel gleicht sich aus

A des Schlauchs wirkt von beiden Seiten der Druck $p_1 = p_0 - \rho gh_1$ bzw. $p_2 = p_0 - \rho gh_2$. Diese beiden Drucke bewirken je eine Kraft $F_1 = A(p_0 - \rho gh_1)$ bzw. $F_2 = A(p_0 - \rho gh_2)$. Die Differenz $F_2 - F_1$ dieser Kräfte ist Ursache für die Bewegung der Flüssigkeit. Aus $F_1 - F_2 = \rho g(h_2 - h_1)$ folgt, dass die Pegel in den Gläsern sich solange ausgleichen bis die Höhen h_1 und h_2 gleich sind (was hier natürlich zum Überlaufen führen würde), denn dann gilt $F_2 - F_1 = 0$ und damit auch $\Delta p = 0$.

Versuch IIX.5: Schlauchwasserwaage

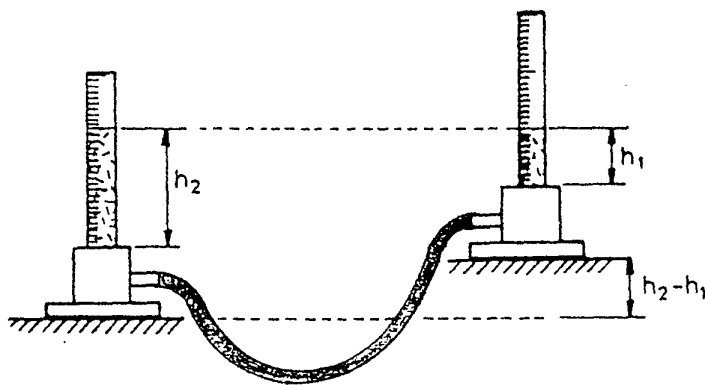


Abbildung IIX.8 Schlauchwasserwaage

Dieses Prinzip macht man sich bei einer Schlauchwasserwaage zunutze.

Bei dem von uns verwendeten Versuchsaufbau werden zwei Zylinder mit einem transparenten Schlauch verbunden. Der Schlauch kann beliebig verlaufen; wir hängen ihn über ein Gestell, welches

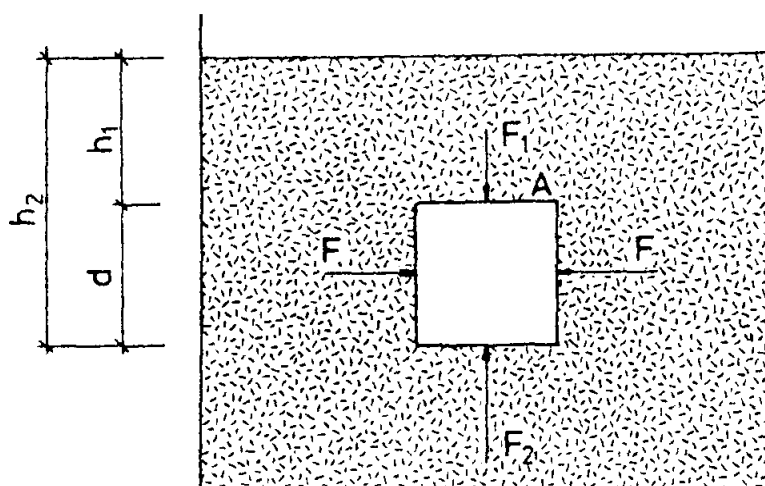
sich über den Zylinder befindet. Nun wird ein Zylinder mit einer gefärbten Flüssigkeit gefüllt, der andere Zylinder ist leer. Wenn man nun die Flüssigkeit im Schlauch ansaugt, fließt die gefärbte Flüssigkeit durch den Schlauch in das andere Gefäß, bis das Niveau des Flüssigkeitspegels in beiden Zylindern gleich ist. Man kann sich diesen Aufbau, der eine Konsequenz der allgemeinen Druckausbreitung ist, also gut als Höhenmessung zunutze machen.

IIX.4 Auftrieb

Aus dem Alltag ist bekannt, dass Flüssigkeiten scheinbar an Gewicht verlieren. Ein einfaches Beispiel dafür ist ein Stück Holz, das auf dem Wasser schwimmt, anstatt auf den Boden zu fallen. Diese Eigenschaft von Flüssigkeiten wollen wir nun quantitativ untersuchen.

Hierzu betrachten wir ein Gedankenexperiment:

Ein Körper werde in eine Flüssigkeit getaucht. Wir gehen im Allgemeinen davon aus, dass die Dichte des Körpers nicht gleich der Dichte der Flüssigkeit ist. Die Dichte des Körpers bezeichnen wir mit ρ , die Dichte der Flüssigkeit mit ρ_{Fl} .



Aufgrund des Tiefendrucks wirken an Ober- und Unterkante des Körpers unterschiedliche Kräfte. Die Differenz der beiden Kräfte ist die Auftriebskraft

$$F_A = F_2 - F_1.$$

Abbildung IIX.9: Welche Kräfte wirken auf einen tauchenden Körper ?

Mit

$$F_i = p_i A$$

und

$$p_i = \rho_{F1} \cdot g h_i$$

folgt

$$F_A = p_2 A - p_1 A$$

und damit

$$F_A = \rho_{F1} g A (h_2 - h_1)$$

Definiert man nun die Differenz der beiden Höhen $h_2 - h_1 = d$

so folgt

$$F_A = \rho_{F1} g A d$$

Das Volumen des Prismas beträgt

$$V = A d, \quad \text{also gilt für die Auftriebskraft}$$

$$F_A = \rho_{F1} g V$$

Mit der Masse M der verdrängten Flüssigkeit

$$M_{F1} = \rho_{F1} V$$

folgt

$$F_A = M_{F1} \cdot g.$$

Dieses Produkt entspricht der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit. Dieses Ergebnis wird im Archimedischen Prinzip zusammen gefasst. Die aus einem Prisma hergeleitete Formel gilt für beliebig geformte Körper.

Archimedisches Prinzip: Der Auftrieb eines beliebig geformten Körpers ist gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit:

$$F_A = \rho_{F1} \cdot g V = M_{F1} \cdot g = G_{F1}$$

Merke: Der Auftrieb greift im Schwerpunkt der Flüssigkeit S_{F1} an und ist entgegengesetzt gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit.

Nun wollen wir das alles Archimedische Prinzip an Hand eines Versuchs nachweisen.

Versuch IIX.6: Nachweis des Archimedischen Prinzips

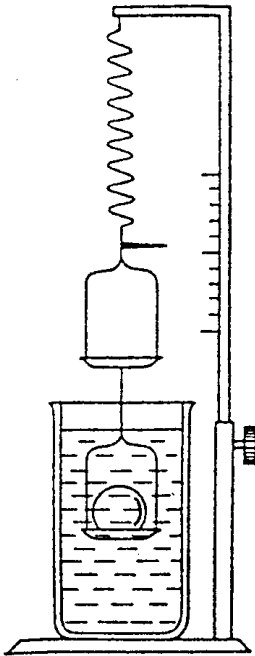


Abbildung IIX.10:
Jollysche Federwaage zum
Nachweis des
Archimedischen Prinzips

Bei diesem Versuchsaufbau werden zwei Waagschalen untereinander an eine Federwaage gehängt. Ein Zeiger gibt die Auslegung der Feder und damit die wirkende Gewichtskraft an. Zunächst wird ein Körper in die obere Waagschale gelegt. Die angezeigte Gewichtskraft wird notiert. Danach wird der Körper auf die untere Schale gelegt, die in Wasser getaucht ist. Durch das Eintauchen des Körpers wird Flüssigkeit verdrängt. Diese Flüssigkeit wird noch aufgefangen. Die weniger als vorher gedehnte Feder misst jetzt Gewichtskraft minus den Auftrieb. Addiert man zu diesem verringerten Gewicht das Gewicht des aufgefangen Wassers, so entspricht diese Summe der Gewichte der ursprünglichen Gewichtskraft des Körpers. Diese Messungen bestätigen das Archimedische Prinzip. Der Versuchsaufbau ist auch unter dem Namen *Jollysche Federwaage* bekannt.

Zusammenfassend können wir festhalten, dass ein Körper auf einer Flüssigkeit schwimmt, wenn seine Gewichtskraft kleiner ist als die Auftriebskraft. Ein Körper sinkt in der Flüssigkeit hingegen, wenn seine Gewichtskraft größer ist als Auftriebskraft. Sind Auftriebskraft und Gewichtskraft hingegen gleich groß, so schwebt der Körper in der Flüssigkeit. Mit der Aussage des Archimedischen Prinzips, Auftriebskraft entspricht Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit, können wir damit Aussagen über die Verhältnisse der Dichten machen.

Demnach schwimmt ein Körper in einer Flüssigkeit, wenn seine Dichte geringer ist als die Dichte der Flüssigkeit. Ein Körper sinkt, wenn er eine größere Dichte hat, als die ihn umgebende Flüssigkeit. Im Grenzfall des Schwebens sind die Dichte der Flüssigkeit und die Dichte des Körpers gleich.

Merke:

Schwimmt ein Körper in einer Flüssigkeit, so gilt:

$$F_A > G \quad \text{also} \quad \rho < \rho_{\text{Fl.}}$$

Sinkt ein Körper in einer Flüssigkeit, so gilt:

$$F_A = G \quad \text{also} \quad \rho = \rho_{\text{Fl.}}$$

Schwebt ein Körper in einer Flüssigkeit so gilt:

$$F_A > G \quad \text{also} \quad \rho > \rho_{\text{Fl.}}$$

Ein Beispiel hierfür ist das Schwimmen im Toten Meer. Im Gegensatz zu anderen Gewässern hat das Tote Meer eine größere Dichte, als der menschliche Körper. Deshalb schwimmt ein unbeweglicher menschlicher Körper auf dem Toten Meer.

Um den Zusammenhang von Schwimmen und Sinken eines Körpers mit seiner Dichte zu zeigen, betrachten wir jetzt noch einen Versuch.

Versuch IIX.7: Wasserteufelchen

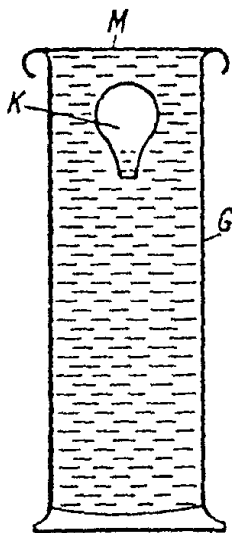


Abbildung IIX.11:
Wasserteufelchen

Für diesen Versuch benötigen wir einen großen Glaszylinder, der oben mit einem Gummistopfen verschlossen wird, und ein kleines Reagenzglas. Das Reagenzglas wird mit Luft gefüllt und in den mit Wasser gefüllten Glaszylinder eingelassen. Dabei ist das Reagenzglas genauso weit mit Luft gefüllt, dass es gerade schwebt. Wir wissen also, dass die Dichte des Reagenzglases der Dichte der Flüssigkeit in entspricht. Nun drückt man auf den Gummistopfen. Der so ausgeübte zusätzliche Druck auf die Wasseroberfläche pflanzt sich durch das Wasser fort und drückt die im Reagenzglas eingeschlossene Luft zusammen. Dadurch steigt der

Flüssigkeitsspiegel im Reagenzglas, und seine Dichte ändert sich. Die Gewichtskraft des Reagenzglases ist jetzt größer als Auftriebskraft, das Glas sinkt. Nimmt man den Druck weg, so expandiert die Luft und das Glas steigt wieder.

Betrachten wir jetzt noch einmal schwimmende Körper. Jeder an der Wasseroberfläche schwimmende Körper nimmt eine bestimmte Lage ein. Ein Stab, der senkrecht ins Wasser getaucht wird, fällt um. Ein Brett, das hochkant eingetaucht wird, legt sich auf seine Seite. Offensichtlich nimmt jeder Körper eine Gleichgewichtslage beim Schwimmen ein. Versuchen wir nun, mit Hilfe der Betrachtung von Kräften, diese Gleichgewichtslage zu analysieren. Auf den Körper wirkt ein Kräftepaar, das aus Gewichtskraft und Auftrieb besteht. Am Schwerpunkt des Körpers zieht die Gewichtskraft senkrecht nach unten,

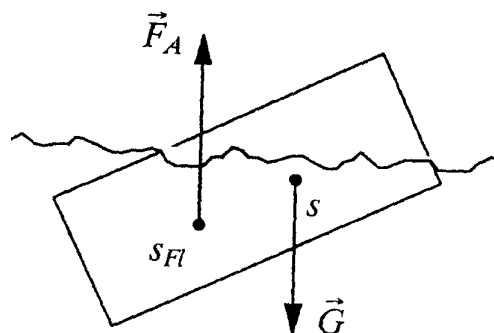


Abbildung IIX.12: auf einen schwimmenden Körper wirkende Kräfte

im Schwerpunkt des verdrängten Wassers greift die gleich große Auftriebskraft an und zieht nach oben. Wir wissen, dass die Gewichtskraft und Auftrieb gleich groß sind. Damit sind die Bedingungen für ein Kräftepaar gegeben. Aus diesen Kräften resultiert ein Drehmoment. Beide Kräfte drehen deshalb den Körper.

Ob eine Schwimmelage stabil oder labil ist, entscheidet man mit Hilfe eines neu eingeführten Zentrums, des Metazentrums. Befindet sich der schwimmende Körper in seiner Gleichgewichtslage, so liegen der Schwerpunkt des Körpers und der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit übereinander. Die Verbindungslinie der beiden Punkte denke man sich nun fest am Körper angeheftet. Liegt der schwimmende Körper nicht in seiner Gleichgewichtslage, so liegt diese Verbindung schräg. Liegt das Metazentrum oberhalb des Schwerpunkts, dann ist die ursprüngliche Schwimmelage stabil, anderenfalls ist sie labil. Es wirkt ein Drehmoment, der Körper wird in eine stabile Gleichgewichtslage gedreht.

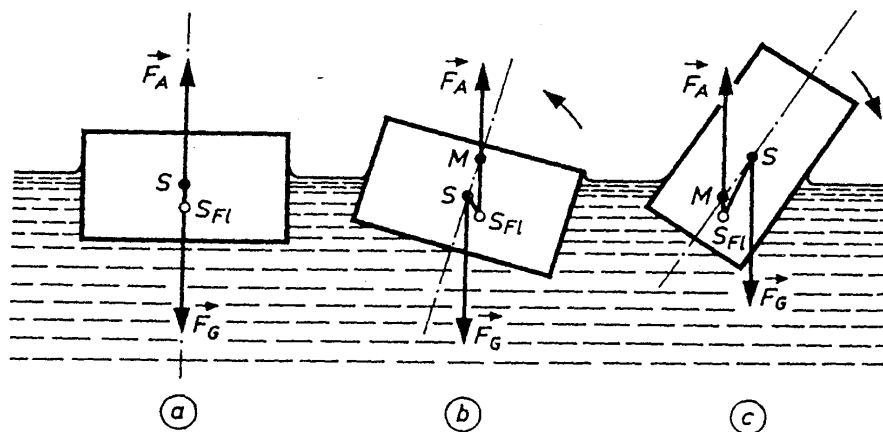


Abbildung IIX.13: a) Stabile Schwimmelage b) Drehmoment dreht in Ausgangslage zurück, das Metazentrum liegt höher als der Schwerpunkt, sonst ist die Schwimmelage instabil wie in Bild c)

IIX.5 Druck in Gasen

Bisher haben wir Druck nur in festen Körpern und Flüssigkeiten besprochen. Im Gegensatz zu Gasen sind Festkörper und Flüssigkeiten inkompressibel. Diese Tatsache haben wir bereits bei dem Versuch mit dem Wasserteufel betrachtet. Ferner haben wir festgestellt, dass Gas weder eine Form- noch eine Volumen-Elastizität besitzen. Das lag darin begründet, dass die Moleküle eines Gases im Gegensatz zum festen und flüssigen Aggregatzuständen einen verhältnismäßig großen Abstand haben. Die zwischenmolekularen Kräfte sind daher in Gasen außerordentlich klein. Im Grenzfall des sogenannten Idealen Gases werden diese Kräfte völlig vernachlässigt.

Definition IIX.1: Ein Ideales Gas ist ein Gas, in dem die zwischenmolekularen Kräfte null sind.

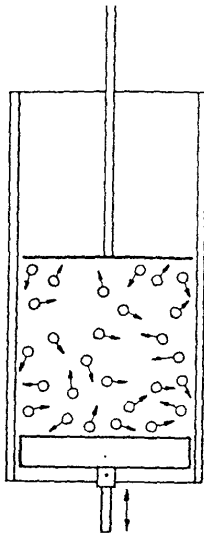


Abbildung IIX.14:
Modellversuch
zum Gasdruck

Als Modell eines idealen Gases kann man sich ein geschlossenes Volumen vorstellen, in dem elastische Kugeln ohne sich zu berühren regellose Bewegungen ausführen.

Selbstverständlich sind die Kugeln nicht immer gleichmäßig über den Raum verteilt. Stellt man sich dem Druck nun so vor, dass die Kugeln an die Gefäßwand treffen, so folgt aus dieser ungleichen Verteilung eine statistische Schwankungen der Kraft, die ein eingesperres Gas auf einen Kolben ausübt.

Die Druckausbreitung in Gasen erfolgt, genauso wie die Druckausbreitung in Flüssigkeiten, in alle Richtungen gleich.

Da zwischen den Molekülen eines Gases im

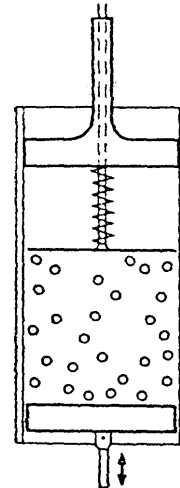


Abbildung IIX.15:
Statistische Schwankungen
der Verteilung der Teilchen
in einem abgeschlossenen
Volumen

idealen Fall keine Abstoßungskräfte mehr wirken, lassen sich Gase im Vergleich zu Flüssigkeiten sehr stark zusammendrücken. Die Kompressibilität ist sehr groß, sie haben jedoch keine Volumenelastizität mehr. Die Erfahrung zeigt, dass man trotzdem einen nicht unerheblichen Druck aufwenden muss, um das Volumen eines Gases zu ändern.

Empirisch findet man für ideale Gase, dass bei konstanter Temperatur der doppelte Druck aufgewendet werden muss, um das Volumen zu halbieren. Dies gilt natürlich nur, wenn die Menge des Gases konstant gehalten wird.

Diese Gesetzmäßigkeit wird *Gesetz von Boyle-Mariotte* oder auch nur *Boylesches Gesetz* genannt.

Merke: Bei gleicher Menge eines Gases und konstanter Temperatur ist das Produkt aus Volumen und Druck konstant:
 $p \cdot V = \text{const}$ Boyle-Mariotte

eine genaue Untersuchung dieses Gesetzes wird später in der kinetischen Gastheorie vorgenommen.

Mit diesem Gesetz können wir die Kompressibilität eines Gases angeben:

Allgemein hatten wir für die Kompression die Formel

$$\kappa = \frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \quad \text{hergeleitet.}$$

Aus dem Boyle - Mariott'schen Gesetz $p V = p_0 V_0$

$$\Leftrightarrow V = p_0 V_0 \frac{1}{p}$$

folgt

$$\frac{dV}{dp} = - \frac{V_0 p_0}{p^2} .$$

Damit gilt

$$\kappa = \frac{1}{V} \frac{V_0 p_0}{p^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\kappa = \frac{1}{p}}$$

Merke: Die **Kompressibilität idealer Gase** ist gleich dem Kehrwert des komprimierenden Drucks: $\kappa = 1/p$

Das bedeutet, dass die Kompressibilität idealer Gase bei kleinen Drucken sehr groß ist. Je größer der Druck ist, desto geringer ist die Kompressibilität.

Um den Luftdruck nachzuweisen, wurden bereits im 17. Jahrhundert spektakuläre Versuche vorgenommen.

Einen Versuch unternahm Otto von Guericke (1602 - 1686): den Versuch der *Magdeburger Halbkugeln*. Bei diesem Versuch vor dem Reichstag 1654 setzte Otto von Guericke zwei Halbkugeln lose aufeinander. Die Halbkugeln wurden dann ausgepumpt. An jeder Hälfte der Kugel wurde ein Seil befestigt, an dem Seil zogen auf jeder Seite 8 Pferde. Die Kraft der 16 Pferde reichte nicht aus, um die leergepumpten Halbkugeln gegen den Luftdruck auseinander zu ziehen.

Einen ähnlichen Versuch wollen wir in der Vorlesung auch zeigen:

Versuch IIX.8: Magdeburger Halbkugeln

Da wir in der Vorlesung keine Pferde zur Verfügung haben, müssen wir den Versuch mit Professoren durchführen. Um die Proportion zu wahren, verwenden wir natürlich kleinere Halbkugeln. Doch auch unseren Professoren gelingt es nicht, die Halbkugeln gegen den Luftdruck auseinander zu ziehen.

Der Luftdruck wurde quantitativ zuerst von Toricelli im Jahre 1643 bestimmt. Wir führen zur quantitativen Untersuchung des Luftdrucks folgenden Versuch durch:

Versuch IIX.9: Messung des Drucks

Für diesen Versuch verwenden wir ein Rohr, das mit einem verschließbaren Kolben verschlossen ist. Durch Herausziehen des Kolbens kann das Rohr leergepumpt werden. Statt mit einem Seil an dem Kolben zu ziehen, verwenden wir nun eine Federwaage. Damit kann direkt abgelesen werden, welche Kraft wirkt, so kann errechnet werden, welcher Druck herrscht.

Bereits ohne exakte Werte zu messen, kann man beobachten, dass das Zusammendrücken des Kolbens leichter geht, je mehr Volumen noch eingeschlossen ist. Ist der Kolben sehr weit in das Rohr geschoben, so ist eine weitere Kompression nur sehr schwer zu erzielen.

IIX.6 Barometrische Höhenformel

Bisher haben wir nur den Schweredruck von Flüssigkeiten berechnet. Dabei gingen wir davon aus, dass die Dichte von Flüssigkeiten als konstant angenommen werden kann. Diese Annahme ist allerdings für große Tiefen falsch. Begründet hatten wir diese Einschränkung damit, dass Flüssigkeiten praktisch inkompressibel sind. Wie wir gesehen haben, sind Gase jedoch nicht

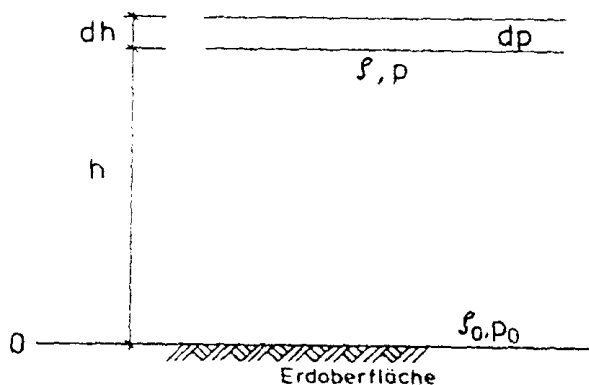


Abbildung IIX.16: geometrische Betrachtung einer dünnen Gasschicht im Schwerfeld der Erde

inkompressibel. Wir müssen deshalb die Dichte in Gasen als nicht konstant ansehen. Für den Schweredruck der Luft unserer Erde folgt daraus, dass höhere Luftschichten die unteren zusammen drücken. Die Luftdichte ist deshalb eine Funktion der Höhe.

Betrachten wir nun eine unendlich dünne Luftschicht der Höhe dh. In dieser unendlich dünnen Schicht können wir die Dichte als konstant

voraussetzen. Bei konstanter Dichte ρ ändert sich der Druck dp wie bei Flüssigkeiten:

$$dp = -\rho g dh$$

Die Höhe h soll dabei nach oben positiv gemessen werden.

Daraus folgt für die Höhe

$$dh = -\frac{1}{\rho g} dp.$$

Ferner gehen wir davon aus, dass die Temperatur in allen Luftschichten konstant sein soll.

Diese Annahme ist für große Höhen, wie wir bereits wissen, falsch. Auch die Masse des Gases soll als konstant angenommen werden. Aus dem Boyleschen Gesetz wissen wir, dass

$$p \cdot V = \text{const} \quad \text{gilt.}$$

Mit
$$V = \frac{m}{\rho}$$

folgt
$$p \frac{m}{\rho} = \text{const.}$$

und mit konstanter Masse m
$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} = \text{const}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \frac{1}{p}$$

p_0 und ρ_0 bezeichnen dabei z.B. Dichte und Druck der Luft an der Erdoberfläche.

Damit folgt für die Dicke der Luftschicht dh

$$dh = -\frac{1}{g} dp \frac{p_0}{\rho_0 p}$$

Durch Integration folgt dann für eine beliebige Höhe

$$h = \int_0^h dh$$

$$h = -\frac{p_0}{\rho_0 g} \int_{p(0)}^{p(h)} \frac{dp}{p}$$

$$\Leftrightarrow h = -\frac{p_0}{\rho_0 g} (\ln p(h) - \ln p_0)$$

$$\Leftrightarrow h = -\frac{p_0}{\rho_0 g} \ln \frac{p(h)}{p_0}$$

$$\Rightarrow p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g h}{p_0}\right)$$

Diese Formel gibt den Luftdruck in Abhängigkeit von der Höhe an. Es ist wichtig, zu beachten, dass diese Formel hergeleitet wurde unter der Annahme, dass Temperatur und Masse der Luft konstant sind. Die unter dem Namen Barometrische Höhenformel bekannte Formel stellt deshalb eine Idealisierung dar.

Die **Barometrische Höhenformel** gibt den Luftdruck in Abhängigkeit von der Höhe an.

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g h}{p_0}\right)$$

Als Beispiel berechnen wir den Luftdruck, der in acht Kilometer Höhe herrscht. Die Dichte der Luftschicht nehmen wir mit $\rho_0 = 1.29 \text{ kg/m}^3$ an, der Druck an der Erdoberfläche sei $p_0 = 1.013$ bar. Dann ist der Luftdruck in acht Kilometern Höhe

$$\frac{p_0}{\rho_0 g} \approx 8 \text{ km}$$

Daraus folgt

$$p(h) = p_0 e^{-h/8 \text{ km}}$$

Für $h = 8 \text{ km}$

$$p(8 \text{ km}) \cong \frac{p_0}{e}$$

Für $h = 5,5 \text{ km}$ gilt

$$p(5,5 \text{ km}) \cong \frac{p_0}{2}$$

In einer Höhe von 500 Kilometern haben wir also noch ungefähr die Hälfte des Luftdrucks von dem an der Erdoberfläche herrschenden Luftdruck.

Die folgende Abbildung zeigt den Verlauf des Schweredruckes in Wasser und in Luft. Man sieht, dass im Wasser das Volumen als konstant angenommen wird.

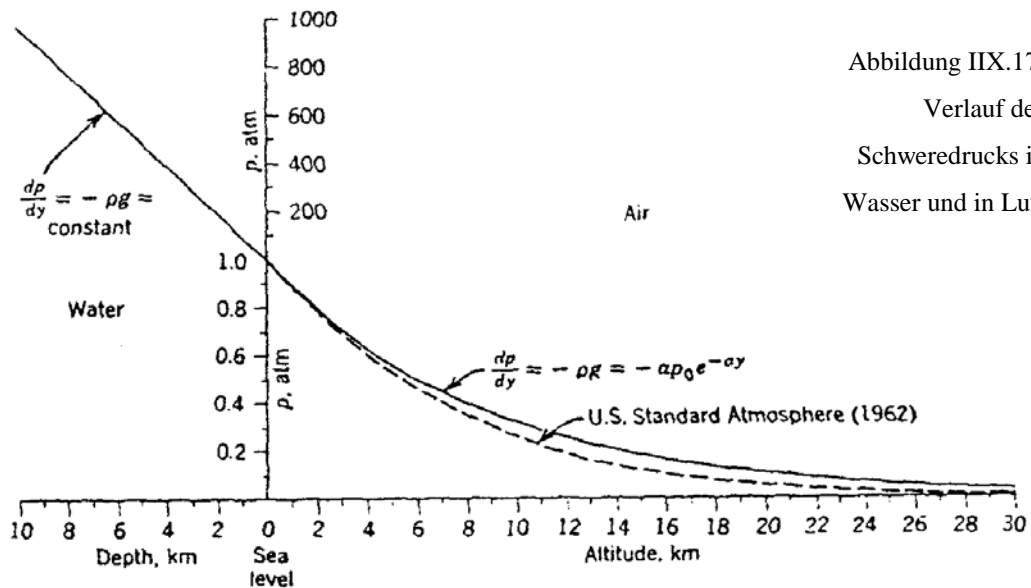


Abbildung IIX.17:
Verlauf des
Schweredruckes in
Wasser und in Luft

IIX.7 Oberflächenspannung

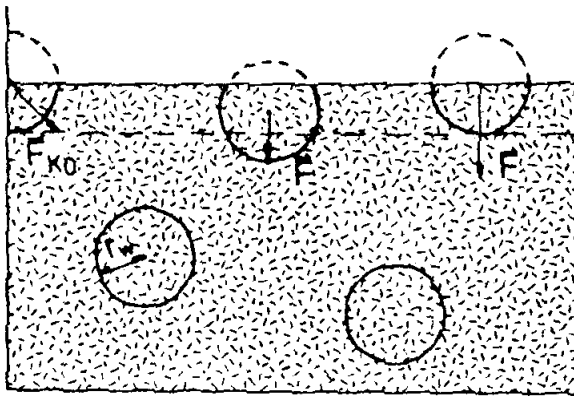


Abbildung IIX.18: Flüssigkeitsmoleküle im Innern und an der Oberfläche einer Flüssigkeit

Wie wir bereits festgestellt haben, wirken zwischen den Molekülen von Flüssigkeiten Kräfte. Nun wollen wir versuchen, die Eigenschaften von Flüssigkeitsoberflächen zu beschreiben, die durch diese zwischenmolekulare Anziehungskraft hervorgerufen werden.

Auf ein Flüssigkeitsmolekül im Innern einer Flüssigkeit wirkt die Anziehungskraft nach allen Seiten. Wir wissen, dass Druck sich in Flüssigkeiten

gleichmäßig ausbreitet. Im Gleichgewicht verschwindet also die resultierende Kraft. Betrachten wir nun aber ein Teilchen, das an der Oberfläche der Flüssigkeit ist. An diesem Teilchen wirken von oben keine Anziehungskräfte. Die resultierende Kraft zieht deshalb nach unten. Aufgrund dieser Kraft werden die Randmoleküle zur Flüssigkeit hin gezogen, die Kraft versucht also, die Oberfläche zu verkleinern.

Wie kann man das quantitativ erfassen? Um die Oberfläche zu vergrößern, muss man Arbeit gegen diese resultierende Zugkraft leisten:

Dabei ist die Arbeit zur Vergrößerung der Oberfläche ΔW proportional zu der Vergrößerung der Oberfläche ΔA $\Delta W \sim \Delta A$.

Diesen Proportionalitätsfaktor definieren wir jetzt als Oberflächenspannung:

Definition IIX.2: Die Oberflächenspannung oder „spezifische Oberflächenenergie“ ist der Quotient aus geleisteter Arbeit zur Vergrößerung der Oberfläche und der

$$\text{Vergrößerung der Oberfläche: } \sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A}$$

Einheitenbetrachtung:

Die Dimension der Oberflächenspannung ist $[\sigma] \frac{[W]}{[A]} = \frac{J}{m^2} = \frac{N}{M} = \frac{[Kraft]}{[Länge]}$

Wie man an den Einheiten sieht, ist der Begriff der Oberflächenspannung irreführend. Die Oberflächenspannung oder spezifische Oberflächenenergie hat die Einheit Kraft durch Länge.

Merke: Da zur Vergrößerung der Oberfläche Arbeit erforderlich ist, sind Flüssigkeiten bestrebt, die Oberfläche zu minimieren.

Die mechanische Arbeit, die verwendet worden ist, um die vergrößerte Oberfläche zu bilden, ist also in ihr gespeichert. Eine ebene Flüssigkeitsoberfläche zeigt das Bestreben, sich möglichst zu verkleinern. Das ist gleichbedeutend mit der Aussage: die Oberflächenenergie strebt einem möglichst kleinen Wert zu. Das wollen wir an Hand eines Versuchs zeigen.

Versuch IIX.10: Verkleinern der Oberfläche von Seifenhäuten

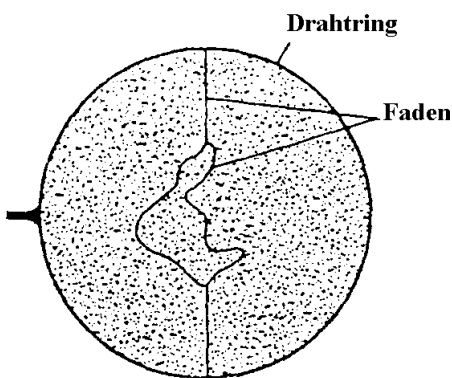


Abbildung IX.19a: geschlossene Seifenlamelle in einem Drahtring

In einem runden Drahtrahmen wird eine Haut aus Seifenwasser hergestellt. In dem Rahmen ist ein nicht gespannter geschlossener Fasern festgebunden. Die Haut geht über den ganzen Ring. Wird nun die Haut innerhalb des Fadens durchstochen, so wird der Faden zu einem vollkommen

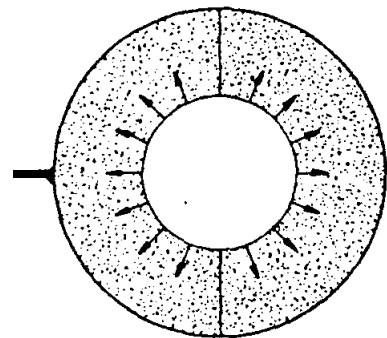


Abbildung IX.19b: Um die Oberfläche zu minimieren spannt die Seifenhaut den Faden zu einem Ring

Kreis auseinander gezogen. Das basiert auf dem Bestreben der Flüssigkeit, die kleinst mögliche Oberfläche zu haben. Der Kreis ist dabei die geschlossene Kurve, die bei gegebenem Umfang den größten Flächeninhalt einschließt.

Bei einem anderen Versuch wird in ein Uhrglas, das stark verdünnte Schwefelsäure enthält, ein kleiner Tropfen Quecksilber gegeben. Das Quecksilber wird dann mit einem Glasstab umgerührt. Die dadurch entstehenden kleinen Tropfen schließen sich schnell zu einem größeren zusammen, der allmählich alle kleineren aufnimmt. Auch hier ist die Flüssigkeit bestrebt, die Oberflächen zu minimieren. Dabei hat das insgesamt eingeschlossene Volumen dann die kleinste Oberfläche, wenn nur eine Kugel vorhanden ist.

Nun versuchen wir, die Oberflächenspannung quantitativ zu erfassen.

Versuch IIX.11: Messung der Oberflächenspannungen

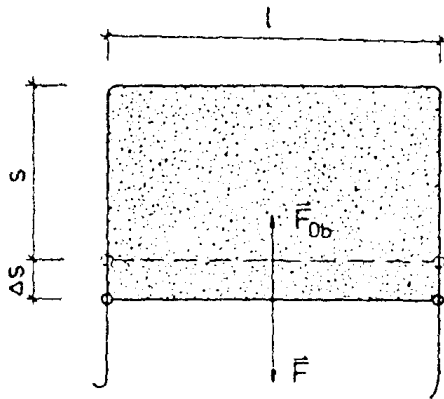


Abbildung IIX.20: Drahtbügel mit Flüssigkeitshaut

Bei diesem Versuch wird ein Drahtbügel senkrecht in Seifenlauge getaucht. Danach wird der Bügel langsam herausgezogen, so dass sich eine Flüssigkeitshaut bildet.

Vernachlässigt man die Ränder, und beachtet man, dass die Haut zwei Seiten hat, so hat die Haut die Fläche $A = 2ls$

Nun ziehen wir den Bügel um ein kleines Stück Δs heraus. Um auf diese Weise die Oberfläche zu vergrößern, müssen wir Arbeit leisten. Mit der

Definition von Arbeit als Kraft mal Fläche

$$\Delta W = F \cdot \Delta s$$

folgt für die Oberflächenspannung

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A}$$

$$\Leftrightarrow \sigma = \frac{F \Delta s}{2l \Delta s}$$

$$\Leftrightarrow \sigma = \frac{F}{2l}$$

Auf diese Weise kann man für verschiedene Flüssigkeiten die Oberflächenspannung berechnen.

Einige typische Werte von σ sind:

Wasser	$70 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}} = \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}$	temperaturabhängig
--------	---	--------------------

Seifenlösung ca.	$30 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}} = \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}$
------------------	---

Quecksilber	$480 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}} = \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}$
-------------	--

Betrachten wir noch einen weiteren Versuch:

Versuch IIX.12: Überdruck einer Seifenblase

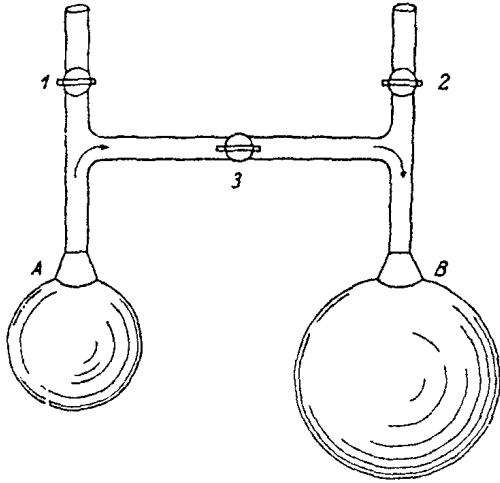


Abbildung IIX.21: die große Blase saugt die kleine auf

Bei diesem Versuch werden eine große und eine kleine Seifenblase miteinander verbunden. Die Verbindung kann durch eine Dichtung verschlossen werden. Zunächst sei die Verbindung geschlossen, die Seifenblasen behalten ihre Größe bei. Nun wird die Verbindung geöffnet: man kann beobachten, dass die große Blase die kleine aufsaugt. Betrachten wir nun die Erklärung:

Im Inneren der Blase herrscht ein Überdruck Δp vom Aufblasen, der sich mit der Oberflächenspannung die Waage hält. Für die

Arbeit, die ich leiste, um r und dr zu vergrößern, gilt:

$$\begin{aligned} \Delta W_{\Delta p} &= F \, dr \\ \Leftrightarrow \Delta W_{\Delta p} &= \frac{F}{A} \, A \, dr \\ \Leftrightarrow \Delta W_{\Delta p} &= \Delta p \, dV \end{aligned}$$

Diese Arbeit führt zu einer Erhöhung der Oberflächenenergie:

$$dW_{\sigma} = \sigma \cdot dA$$

Diese Oberflächenenergie entspricht der aufgenommenen Energie.

Aus dem Energiesatz folgt:

$$dW_{\sigma} = dW_{\Delta p}$$

also

$$\Delta p \, dV = \sigma \, dA$$

wobei $dW_{\Delta p}$ die geleistete Arbeit bezeichnet.

Mit der Fläche einer Kugel

$$A = 4\pi r^2 \cdot 2$$

und dem Volumen

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Die Seifenblase hat eine innere und eine äußere Oberfläche. Deshalb beträgt die Änderung der Oberfläche

$$dA = 16\pi r \, dr$$

und die des Volumens

$$dV = 4\pi r^2 \, dr$$

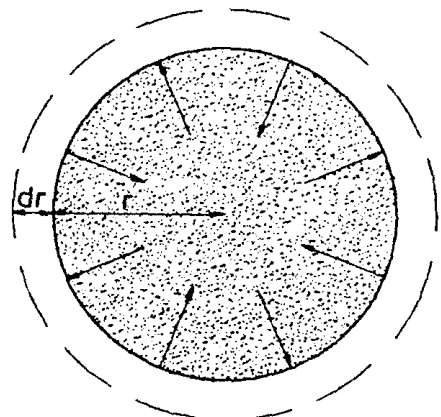


Abbildung IIX.22: Vergrößerung der Blase um dr

Eingesetzt in

$$\Delta p dV = \sigma dA$$

folgt

$$\sigma \cdot 16 \pi r dr = \Delta p 4\pi r^2 dr$$

\Leftrightarrow

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{r}$$

d.h. Innendruck der Seifenblase nimmt mit $1/r$ ab.

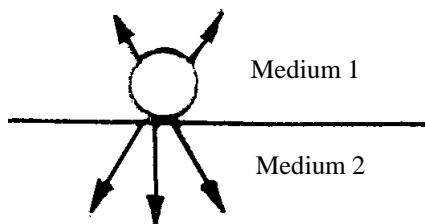
Das Ergebnis lässt sich für beliebige Oberfläche verallgemeinern. Für nur eine Oberfläche gilt

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r}.$$

Merke: Eine Flüssigkeit übt einen Druck $\Delta p = 2\sigma/r$ zum Inneren der Flüssigkeit aus, wobei r der Radius der Kugel ist, welche die Oberfläche im betrachteten Punkt beschreibt.

IIX.8 Grenzflächenspannung und Kapillarität

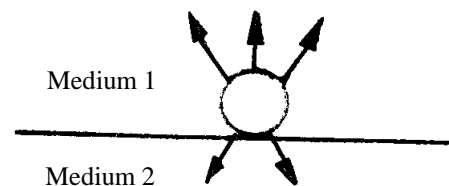
In diesem Kapitel wollen wir den hergeleiteten Begriff der Oberflächenspannung verallgemeinern. Bisher haben wir nur die Oberflächenspannungen einer Flüssigkeit gegen Luft, genau genommen gegen Vakuum, betrachtet, nun gehen wir davon aus, dass die Grenzfläche allgemein von zwei Medien, Medium 1 gegen Medium 2, aufgespannt wird. Eine solche Grenzfläche besteht z.B. zwischen zwei Flüssigkeiten, zwischen einer Flüssigkeit und einem Festkörper oder zwischen einer Flüssigkeit und einem Gas. Um zu kennzeichnen, zwischen welchen Medien die Grenzfläche besteht, kennzeichnen wir die Oberflächenspannung jetzt mit zwei Indizes σ_{12} . Diese Oberflächenspannung bezeichnet jetzt die Spannung, die von Oberfläche 1 nach Oberfläche 2 wirkt. Die Oberflächenspannung ist dabei ein Maß für die Energie, die man aufwenden muss oder gewinnt, wenn man Veränderungen der Grenzfläche von Medium 1 gegen Medium 2 vornimmt.



zu minimieren.

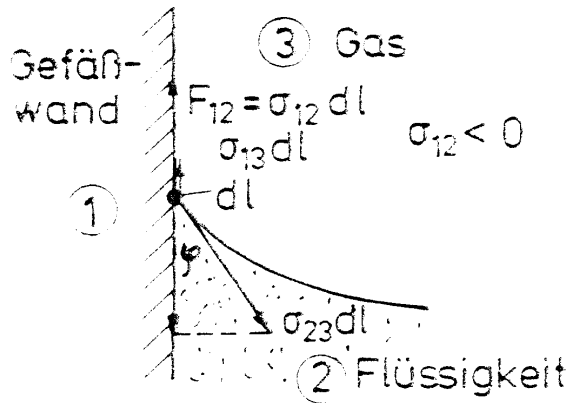
Ist die Oberflächenspannung größer 0, so wird ein Oberflächenmoleküle in Medium 2 stärker von dem eigenen Medium, also Medium 2 angezogen, als von Medium 1. Wie bereits besprochenen, versucht die Grenzfläche, sich

Ist die Oberflächenspannung hingegen negativ, so wird das Oberflächenmolekül stärker von Medium 1 als von Medium 2 angezogen. In diesem Fall versucht die Grenzfläche sich zu maximieren.



Besteht die Grenzfläche zwischen zwei Flüssigkeiten, so ist eine Durchmischung möglich.

Dieses Phänomen betrachten wir nur in einem Beispiel. Hierzu überlegen wir uns, wie die



Oberflächenspannung auf eine Oberfläche einer Flüssigkeit gegen eine Gasphase an einer Gefäßwand wirkt

Die erste Abbildungen zeigt die Grenzfläche einer Flüssigkeit gegen ein Gas an einer Gefäßwand, wobei die Oberflächenspannung positiv ist.

Abbildung IIX.23: Oberflächenspannung, die auf eine Oberfläche einer Flüssigkeit (2) gegen eine Gasphase (3) an einer Gefäßwand (1) wirkt

Nun betrachten wir das Linienelement $d\ell$ der Begrenzungslinie zwischen den 3 Medien; an dieser Begrenzungslinie greifen

3 Kräfte an: $F_{ik} = \sigma_{ik} d\ell$.

Dabei liegen $F_{13} = \sigma_{13} d\ell$ und $F_{12} = \sigma_{12} d\ell$ in einer Wirkungslinie, sind jedoch entgegengesetzt.

Die in diese Richtung wirkende Kraftkomponente von $F_{23} = \sigma_{23} d\ell$ berechnet man mit Hilfe des Cosinus.

Für $\sigma_{12} > 0$ versuchen alle 3 Kräfte, die zugehörige Oberfläche zu reduzieren. Im Gleichgewicht gilt an der Gefäßwand

$$\begin{aligned} \sum F_{ik} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sigma_{13} d\ell - \cos\varphi \sigma_{23} d\ell &= \sigma_{12} d\ell \\ \Leftrightarrow \sigma_{13} - \sigma_{12} &= \sigma_{23} \cos\varphi \\ \Leftrightarrow \cos\varphi &= \frac{\sigma_{13} - \sigma_{12}}{\sigma_{23}} \end{aligned}$$

$\sigma_{13} - \sigma_{12}$ nennt man auch Haftspannung.

Es gibt vier verschiedene Möglichkeiten, wie die Oberflächenspannungen sich zueinander verhalten:

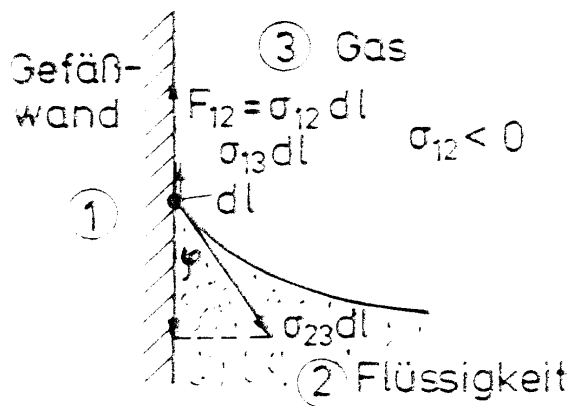


Abbildung IIX.24a: $\sigma_{12} < \sigma_{13}$, $\varphi < 90^\circ$, benetzend

2. Fall: $\sigma_{12} > \sigma_{13}$. Der Winkel den die Flüssigkeit mit der Gefäßwand einschließt ist $\varphi > 90^\circ$. Die Flüssigkeit ist benetzend. Dieser Fall ist in Abbildung IIX.24b dargestellt. Ein Beispiel hierfür ist Seifenlauge.

1. Fall: $\sigma_{12} < \sigma_{13}$. Der Winkel den die Flüssigkeit mit der Gefäßwand einschließt ist $\varphi < 90^\circ$. Die Flüssigkeit ist nicht benetzend. Dieser Fall ist in Abbildung IIX.24a dargestellt. Ein bereits verwendetes Beispiel ist Quecksilber.

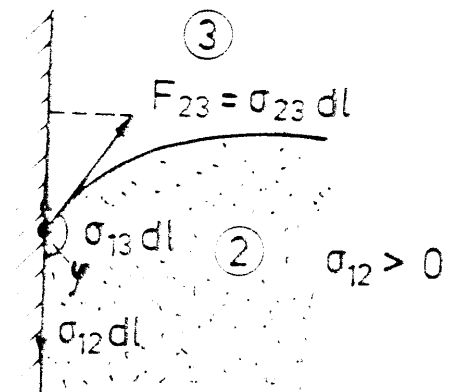


Abbildung IIX.24b: $\sigma_{12} > \sigma_{13}$, $\varphi > 90^\circ$, nicht benetzend

3. Fall: Ein Gleichgewicht nur möglich falls $|\sigma_{13} - \sigma_{12}| \leq \sigma_{23}$ ist.

4. Fall: Falls $\sigma_{13} - \sigma_{12} > \sigma_{23}$ ist, kriecht die Flüssigkeit an der Gefäßwand hoch und benetzt sie vollständig. Diese Eigenschaft hat z.B. Kriechöl.

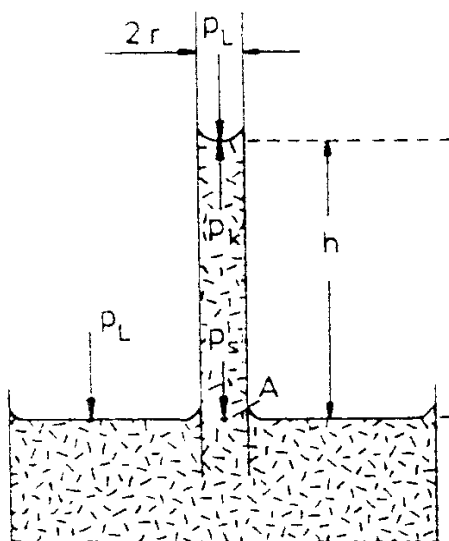


Abbildung IIX.25: Kapillarität

Die unterschiedliche Benetzung von Oberflächen mit Flüssigkeiten hat zur Folge, dass Flüssigkeiten in engen Gefäßen ein anderes Niveau einnehmen, als die Flüssigkeit außerhalb des Gefäßes. Diese Eigenschaft wird Kapillarität genannt.

Betrachten wir diese Konsequenz der Grenzflächenspannung in einem Gedankenexperiment:

Eine Flüssigkeit steigt in einem engen Rohr des Radius r um das Stück h an. Die Oberfläche bildet

einen Teil einer Kugelschale mit dem Radius R. Dieser Radius R entspricht nur im Grenzfall eines sehr kleinen Benetzungswinkels φ .

Aus dem Versuch mit der Seifenblase wissen wir, dass durch das Verringern der Oberfläche ein Druck wirkt. Der Druck der gekrümmten Flüssigkeitsoberfläche ist

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}$$

Für den Anstellwinkel φ der Flüssigkeit an der Wand gilt

$$\cos \varphi = \frac{r}{R}$$

Damit folgt für den Druck

$$\Delta p = \frac{2\sigma \cos \varphi}{r}$$

Im Gleichgewicht halten sich Schwerkraft und Oberflächenspannung die Waage:

$$\frac{2\sigma}{R} = \rho g h$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sigma}{r} \cos \varphi = \rho g h$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{2\sigma}{\rho g} \cos \varphi = h$$

Fasst man $r/\cos \varphi$ zusammen zu r' , so folgt das

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g} \cdot \frac{1}{r'} \quad \text{Kapillargesetz}$$

Für den Grenzfall $\varphi = 0$ lautet das Kapillargesetz

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g} \cdot \frac{1}{r}$$

Die Steighöhe ist also umgekehrt proportional zum Radius des Rohres.

σ ist die Oberflächenspannung der Flüssigkeit gegen Luft. Für nicht benetzende Flüssigkeiten wirkt der Druck in die entgegengesetzte Richtung: Der Flüssigkeitsspiegel wird herabgedrückt. Man spricht in diesem Fall von einer 'Kapillardepression'

Betrachten wir nun zwei Versuche zum Kapillargesetz.

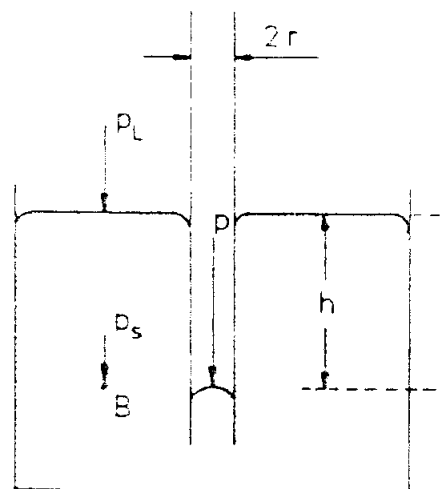
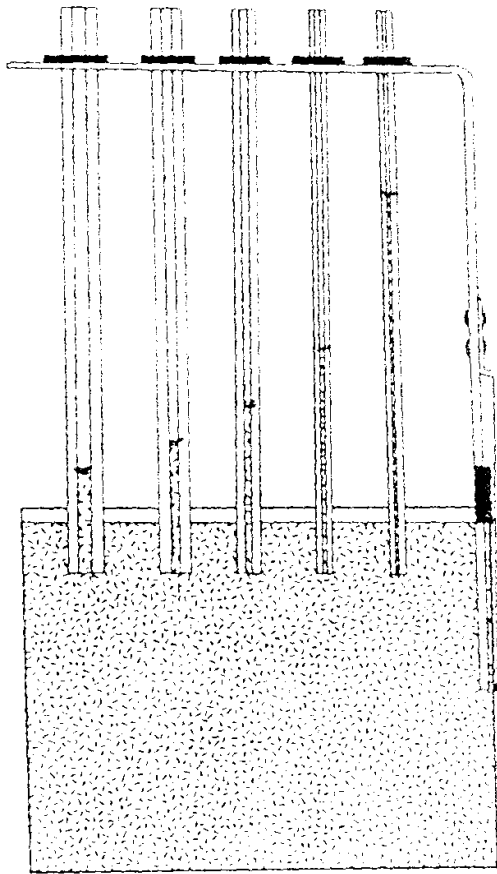


Abbildung IIX.26: Kapillardepression

Versuch IIX.13: Steighöhe in Kapillaren



Bei diesem Versuch werden fünf Röhre mit verschiedenen Radien gleich tief in eine Flüssigkeit getaucht. Aufgrund der Kapillarwirkung steigt das Wasser in den Röhren nach oben. Man kann beobachten, dass die Flüssigkeit in den Röhren mit kleineren Radien höher steigt. Betrachtet man ein Rohr mit zwei Millimeter und eines mit einem Millimeter Durchmesser, so sieht man das umgekehrte Verhältnis von Steighöhe und Durchmesser des Rohres bewahrheitet: in dem dünneren Rohr steht das Wasser doppelt so hoch.

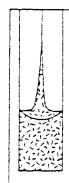
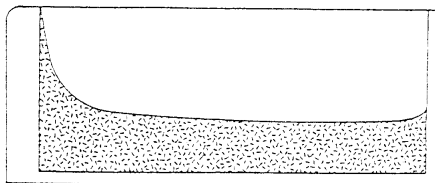
Abbildung IIX.27: Die Steighöhe in Kapillaren ist umgekehrt proportional zum Durchmesser der Röhre

In einem weiteren Versuch betrachten wir ein Keil aus Glas:

Versuch IIX.14: Keilglas

Zwei Glasplatten sind so miteinander befestigt, dass sie einen Winkel einschließen. Sie bilden einen Keil. In dem Keil ist in einem Fall Wasser, in einem anderen Fall Quecksilber eingelassen. Geometrische Überlegungen zeigen, dass die Steighöhe hyperbelförmig

zunehmenden muss, je mehr man sich der Spitze des Keils nähert.



Beim Wasser sehen wir wie zu erwarten eine steigende Hyperbel; je geringer Abstand der Platten wird, desto höher steigt das Wasser.

Abbildung IIX.28a: **Wasser** im Keilglas

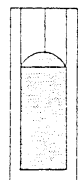
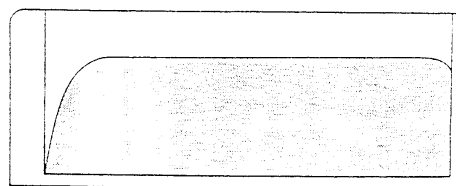


Abbildung IIX.28b: **Quecksilber** im Keilglas

Das Quecksilber hingegen ist nicht benetzend, bei sinkendem Abstand der Platten sinkt auch die Steighöhe.

IX. Strömende Flüssigkeiten und Gase

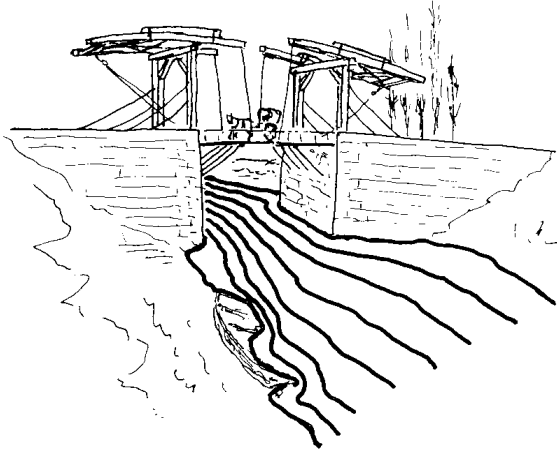


Abbildung IX.1: Im Alltag begegnet man oft strömenden Flüssigkeiten und kann deren Gesetzmäßigkeiten erkennen. In einem engen Querschnitt beispielsweise strömt das Wasser eines Flusses schneller als davor. Hinter Brücken bilden sich oft Wirbel. Dieses Verhalten strömender Flüssigkeiten wollen wir in diesem Kapitel näher untersuchen.

In Kapitel IIX haben wir nur ruhende Flüssigkeiten und Gase untersucht. Dabei konnten wir Gase und Flüssigkeiten meistens zusammen untersuchen. Das Gebiet der Physik, welches sich mit ruhenden Flüssigkeiten befasst wird *Hydrostatik*, die Beschäftigung mit ruhenden Gasen wird *Aerostatik* genannt.

Nun wollen wir die Bewegung von Flüssigkeiten und Gasen, also die Hydrodynamik und die Aerodynamik, untersuchen. Auch diese beiden Gebiete können weitgehend gemeinsam behandelt werden. Im Folgenden werden wir deshalb nur dann gesondert darauf hinweisen, wenn Aussagen, die für Flüssigkeiten hergeleitet werden, nicht für Gase

gelten. Da, wie wir gesehen haben, Gase eine recht große Kompressibilität besitzen, Flüssigkeiten hingegen inkompressibel sind, müssen wir bei den folgenden Berechnungen davon ausgehen, dass die betrachteten Geschwindigkeiten klein sind, und auch die wirkenden Drucke sollen so klein gewählt werden, dass die Kompression der Gase vernachlässigt werden kann. Eine vollständige Behandlung strömender Flüssigkeiten und Gase erfordert die Kenntnis aller wirkenden Kräfte, also insbesondere der Druckkräfte, der Schwerkraft und der Reibungskräfte.

Die hier hergeleiteten Näherungen sind also nur gut für kleine Geschwindigkeiten und kleine Drucke.

IX.1 Ideale stationäre Strömungen

Das Adjektiv “ideal” hatten wir bereits für Gase eingeführt. Dabei hatten wir ideale Gase definiert als Gase, in denen keine zwischenmolekularen Kräfte wirken. Analog wollen wir nun ideale Strömungen definieren als Strömungen, bei denen die Bindungskräfte zwischen den Molekülen ebenfalls vernachlässigt werden können, d.h. reibungsfreie Strömungen. Diese Darstellung stellt jedoch vor allem im Bezug auf Flüssigkeiten eine Vereinfachung dar, die in den folgenden Kapiteln korrigiert wird. Zunächst nehmen wir aber an, es sei bei der Bewegung

von Flüssigkeiten und Gasen keine Reibung und damit auch kein Verlust mechanischer Energie gegeben.

Strömungen können auf verschiedene Weisen dargestellt werden:

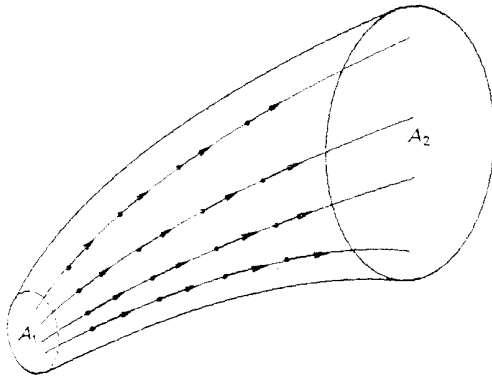


Abbildung IX.2: Stromröhre

Strombahnen, auch **Bahnlinien** genannt, geben die Bahn der Flüssigkeitsteilchen an. Man kann die Bahnlinien z.B. dadurch sichtbar machen, dass man Kork-Partikel in die Flüssigkeit gibt.

Stromlinien geben die Richtung der Geschwindigkeit Tangente an Stromlinie an. Aus der Mechanik können wir deshalb sagen, dass sie die Tangenten an die Stromlinien in jedem Punkt sind.

Aus dem Alltag weiß man, dass es verschiedene Arten von Strömungen gibt. Ein Beispiel ist die Wasserströmung in einem Fluss: Bei langsamer Strömung oder in der Mitte eines Flusses fließt das Wasser gradlinig. Ist ein Hindernis im Wasser, so strömt das Wasser darum herum und bildet unter Umständen Verwirbelungen. Diese verschiedenen Strömungen führen zu einer Dreierklassifizierung:

- Stationäre Strömung
- Laminare Strömung
- Turbulente Strömung

Beginnen wir zunächst mit der einfachsten Form der Strömung:

IX.1.1 Stationäre Strömungen

Bei stationären Strömungen fließen alle Wasserteile mit derselben Geschwindigkeit geradeaus in dieselbe Richtung. Gibt man kleine Kork- oder Aluminium- Körperchen in die Strömung, so fließen diese parallele Bahnen lang. Die Bahnlinien sind folglich Parallelen. Die Stromlinien, gegeben durch die Änderung der Geschwindigkeit, sind die Tangenten an diese Geraden, also mit den Parallelen identisch. Weder Stromlinien noch Strombahnen ändern sich mit der Zeit. Man kann bei stationären Strömungen deshalb das Geschwindigkeitsfeld sichtbar machen, denn sie entsprechen den Strombahnen.

Merke: Bei **stationären Strömungen** sind Stromlinien und Strombahnen identisch.

IX.1.2 Laminare Strömungen

Auch bei laminaren Strömungen kreuzen die Strombahnen sich nicht. Laminare Strömungen entstehen z.B. dadurch, dass Hindernisse in eine stationäre Strömung gebracht werden. Die Wasserteilchen müssen nun um das Hindernis herum strömen, sie ändern also ihre Richtung und auch ihre Geschwindigkeit.

Ist die Geschwindigkeit der stationären Strömung nicht zu groß, so entstehen hinter den

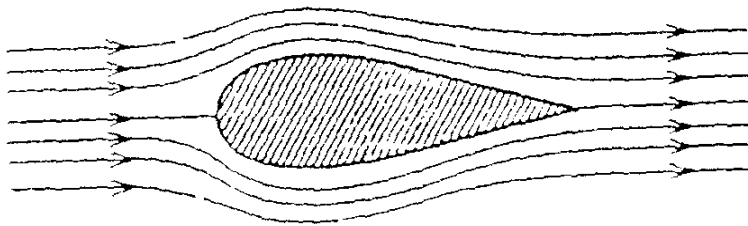


Abbildung IX.3: Strombahnen bei einer laminaren Strömung

Hindernissen keine Wirbel oder Turbulenzen. Dann werden diese Strömungen, bei denen Strombahnen nicht gleich Stromlinien sind, laminare Strömungen genannt.

Wir wollen in einem Versuch stationäre und laminare Strömungen sichtbar machen:

Versuch IX.1: Stromlinienapparat

Bei diesem Versuch wird ein Glaskasten von einer Flüssigkeit durchflossen. Zunächst befindet sich in dem oben offenen Kasten kein Hindernis. Da der Flüssigkeit emulgierende Teilchen zugesetzt sind, kann man die parallelen Strombahnen beobachten.

Nun werden nacheinander verschiedene Körper in die Strömung gebracht. Zunächst betrachten wir einen Quader: Wird der Quader mit einer Spitze in Strömungsrichtung gehalten, so teilt sich der Strom an dieser Spitze. Hinter dem Körper entstehen Wirbel. Dreht man den Quader mit einer Seite in die Strömung, so sind viel mehr Wirbel zu beobachten. Bei einem Keil hingegen, der auch mit der Spitze in Strömungsrichtung eingetaucht wird, entstehen nur wenig Wirbel an der flachen Rückseite. Zuletzt betrachten wir die Strömung um einen abgerundeten Keil, eine Art Flugzeugflügel herum. Hier entstehen keine Wirbel, man sieht eine laminare Strömung. Deutlich ist zu erkennen, dass die Teilchen um das Hindernis herumschwimmen und dabei ihre Richtung und Geschwindigkeit ändern.

Das ist einfach zu erklären: der Gesamtmassendurchfluss muss konstant bleiben, das bedeutet, dass jedes Wasserteilchen, das in den Behälter hineinfließt auch wieder herausfließen muss. Da das Volumen nicht verändert wird und auch die Dichte konstant bleibt, ist dies die logische

Schlussfolgerung. Die quantitative Untersuchung dieser Überlegung führt zur sogenannten *Kontinuitätsgleichung*:

IX.1.3 Kontinuitätsgleichung

Zur Berechnung der Änderung der Geschwindigkeit von Wasserteilchen, die einen veränderten Querschnitt passieren, gehen wir also von der Annahme aus, die Strömung sei laminar und die Kompressibilität κ sei null. Betrachten wir nun eine Flüssigkeit, die durch einen Schlauch fließt, der sich verengt.

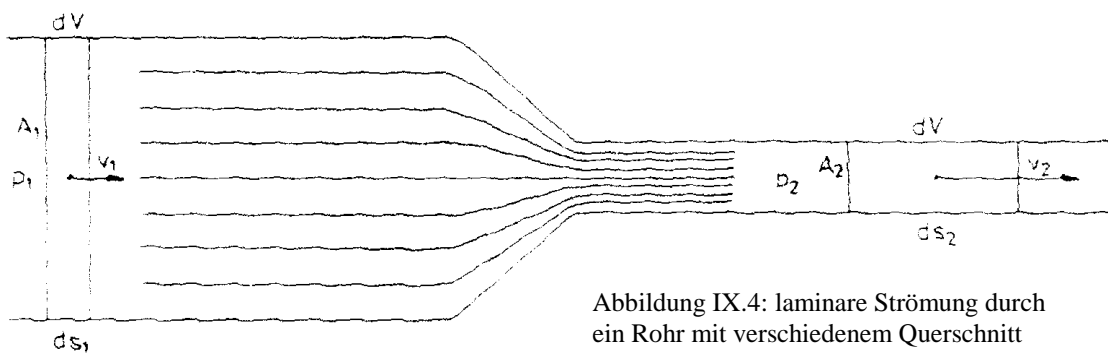


Abbildung IX.4: laminare Strömung durch ein Rohr mit verschiedenem Querschnitt

Für ein Volumenelement dV einer Flüssigkeit gilt:

$$dV = A_1 ds_1 = A_2 ds_2$$

Die in diesem Volumenelement befindliche Masse dM ist dann

$$dM = \rho dV$$

mit konstanter Dichte ρ .

Dann strömt durch die Fläche A_1 in der Zeit dt die Masse

$$\frac{dM}{dt} = \rho dV \frac{1}{dt}$$

Mit $dV_1 = A_1 ds_1$ folgt

$$\frac{dM}{dt} = \rho A_1 \frac{ds_1}{dt}$$

Die Massenerhaltung besagt, dass dieselbe Masse pro Zeit auch durch die geringere Querschnittsfläche A_2 fließen muss.

Also gilt

$$\rho A_2 \frac{ds_2}{dt} = \rho A_1 \frac{ds_1}{dt}$$

$$\Leftrightarrow A_2 \frac{ds_2}{dt} = A_1 \frac{ds_1}{dt}$$

mit $v_i = \frac{ds_i}{dt}$ $\Rightarrow A_2 v_2 = A_1 v_1$

wenn die Dichte konstant, also κ gleich null ist.

Das Verhältnis von Querschnittsfläche und der Geschwindigkeiten ist also umgekehrt proportional. Diese Formel wird Kontinuitätsgleichung genannt; sie gilt aber nur für $\kappa = 0$.

Kontinuitätsgleichung für inkompressible Flüssigkeiten: $\frac{A_1 v_1}{A_2 v_2} = 1$

Die Ursache der Geschwindigkeitserhöhung ist eine Druckdifferenz $\Delta p = p_2 - p_1$.

IX.2 Bernoullische Gleichung

Die Druckdifferenz wurde zuerst von D. Bernoulli (1700 - 1782) berechnet. Seine Lösung ist als Bernoullische Gleichung bekannt; auch sie gilt nur für ideale, inkompressible Flüssigkeiten.

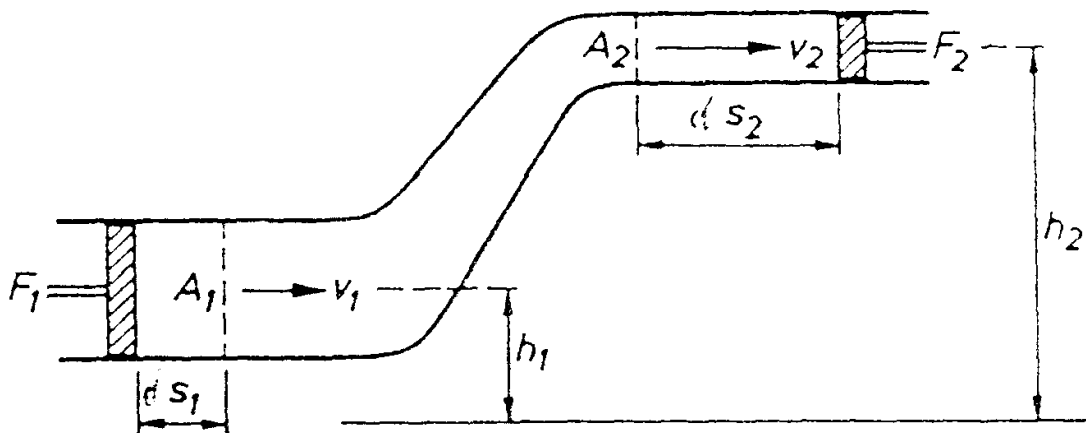


Abbildung IX.5: laminare Strömung durch ein ansteigendes Rohr mit verändertem Querschnitt

Um die Druckdifferenz $\Delta p = p_2 - p_1$ berechnen zu können, betrachten wir wieder Volumenelemente einer Flüssigkeit in einem Schlauch mit sich verengendem Querschnitt. Zugleich wollen wir aber die Annahme fallen lassen, der Schweredruck sei vernachlässigbar. Wir setzen also voraus, der Schlauch steige um eine Höhe Δh an. Der Schweredruck soll berücksichtigt werden.

Aus der Annahme der Inkompressibilität $\kappa = 0$ können wir mit

$$dm = \rho dV$$

direkt angeben
$$dV_1 = dV_2 = \frac{dm}{\rho}$$

Aus der Berechnung für die Kontinuitätsgleichung kennen wir die Gleichung

$$A_1 ds_1 = A_2 ds_2$$

Stellen wir uns vor, die Volumenänderungen dV würden durch Kolben vorgenommen. Die Verschiebungsarbeiten, die geleistet werden, um die Volumen zu verändern, sind gegeben als Produkt aus aufgewendeter (konstanter) Kraft und zurückgelegter (gradliniger) Strecke:

$$dW_1 = F_1 ds_1$$

Mit der Definition des Drucks als Kraft pro Fläche folgt

$$dW_1 = p_1 A_1 ds_1$$

und mit $dV_1 = A_1 ds_1$ folgt
$$dW_1 = p_1 dV.$$

Analog gilt
$$dW_2 = p_2 dV$$

Wegen der Energieerhaltung muss die zusätzliche Geschwindigkeit, bzw. kinetische Energie dW_k und die Höhe, bzw. potentielle Energie dW_p von der geleisteten Arbeit dW_1 aufgebracht werden:

$$dW_1 = dW_2 + dW_p + dW_k \text{ Energiesatz}$$

Die potentielle Energie im Schwerfeld können wir direkt angeben mit

$$dW_p = dm \cdot g(h_2 - h_1)$$

$$\Leftrightarrow dW_p = \rho \cdot dV \cdot g(h_2 - h_1)$$

Die kinetische Energie aufgrund der Strömungsgeschwindigkeit beträgt

$$dW_k = \frac{dm}{2}(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Leftrightarrow dW_k = \frac{1}{2}\rho \cdot dV(v_2^2 - v_1^2)$$

Einsetzen in die Gleichung der Energieerhaltung liefert:

$$p_1 dV = p_2 dV + \rho g (h_2 - h_1) dV + \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) dV$$

$$\Leftrightarrow p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$\Rightarrow \boxed{p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const}}$$

Merke: Für strömende, inkompressible und ideale Flüssigkeit gilt die **Bernoulli-Gleichung**

$$p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const}$$

Diese Gleichung gilt eigentlich nur für ideale Flüssigkeiten mit $\kappa = 0$, ist aber häufig auch für reale Flüssigkeiten eine sehr gute Näherung, solange v , κ und die innere Reibung nicht zu groß sind.

p gibt den **hydrostatischen Druck** an, also den Druck auf ein mitbewegtes Volumenelement.

$\rho g h$ gibt den **Schweredruck** an.

$\frac{1}{2} \rho v^2$ gibt den **hydrodynamischen Druck**, auch "Staudruck" genannt, an.

Mit dem Schweredruck haben wir uns schon beschäftigt: $\rho g h$ nimmt mit der Höhe zu, d.h. der hydrostatische Druck nimmt mit h ab.

Im Folgenden wollen wir den hydrodynamischen Druck, d.h. den Staudruck näher untersuchen. Da wir den Schweredruck bereits analysiert haben, setzen wir nun zur Vereinfachung den Höhenunterschied, den das Wasser überbrücken muss gleich null: $\Delta h = 0$. Wir betrachten damit wieder ein Rohr, dessen Querschnitt sich ändert, analog zu den Betrachtungen von Seite. Bei dieser Untersuchung hatten wir festgestellt, dass die Querschnitte des durchflossenen Rohres umgekehrt proportional sind zu den Strömungsgeschwindigkeiten.

Aus der Bernoulli-Gleichung
$$p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const.}$$

folgt mit $\Delta h = 0$
$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const.}$$

Betrachten wir ein Rohr mit dem Querschnitt A_1 , in dem eine Flüssigkeit mit der Strömungsgeschwindigkeit v_1 fließt. Dann herrscht dort ein hydrostatischer Druck p_1 . An dieser

Stelle des Rohres gilt nach Bernoulli
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \text{const.}$$

In einem engeren Stück des Rohres nimmt die Geschwindigkeit zu. Hier gilt

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = \text{const.}$$

Insgesamt gilt dann für das Verhältnis der beiden Gesamtdrucke

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_2 - p_1.$$

Mit $v_1 > v_2$ gilt
$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2 > 0$$

Daraus folgt
$$p_2 - p_1 > 0$$

$$\Leftrightarrow p_2 > p_1$$

An der Einschnürung eines von einer Flüssigkeit durchflossenen Rohres nimmt der hydrostatische Druck p also ab.

Merke: Der Querschnitt eines Rohres und die Geschwindigkeit einer darin strömenden Flüssigkeit sind umgekehrt proportional.

Der Querschnitt eines Rohres und der hydrostatische Druck einer darin strömenden Flüssigkeit sind proportional.

Zu diesem Phänomen können einige Versuche betrachtet werden:

Versuch IX.2: Statischer Druck

Ziel dieses Versuches ist es, qualitativ zu bewahren, dass bei einer Querschnittsverjüngung eines Rohres der hydrostatische Druck abnimmt. Hierzu betrachten wir folgenden Versuchsaufbau: Drei Röhren mit gleichem Durchmesser sind senkrecht auf einem dickeren Röhren befestigt, wobei eine Verbindung zum waagerechten Rohr besteht. Nun wird das waagerechte Rohr mit einem Schlauch verbunden und mit Wasser gefüllt. Trennt man dann die Wasserversorgung ab, ruht also die Flüssigkeit in dem Rohr, so steht die Flüssigkeit in allen drei Röhren gleich hoch.

Dann wird der Schlauch wieder angeschlossen und das Wasser strömt. Man kann beobachten, dass die Wassersäule im ersten Röhrchen höher steht als im zweiten, und in diesem wiederum höher als im dritten. Offensichtlich findet ein Druckabfall statt, obwohl keine Querschnittsverengung des Rohres existiert. Der lineare Druckabfall rührt offensichtlich von einer Art Reibung her, die im Innern der Flüssigkeit stattfinden muss. Diese Beobachtung werden wir später gesondert untersuchen. Zunächst markieren wir die so ermittelte Steighöhe in jedem Röhrchen. Die Verbindung der Höhenmarkierungen führt zu einer Geraden.

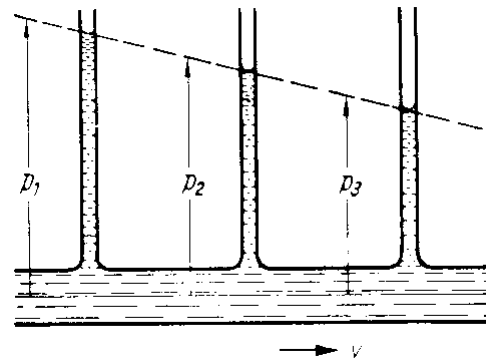


Abbildung IX.6a: Je weiter die Röhrchen in Strömungsrichtung verschoben sind, desto niedriger steigt das Wasser.

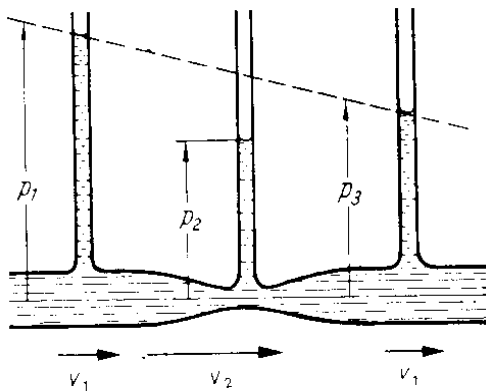


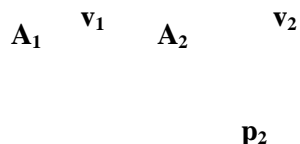
Abbildung IX. 6b: Druckverteilung in einem durchströmten Rohr mit einer Einschnürung.

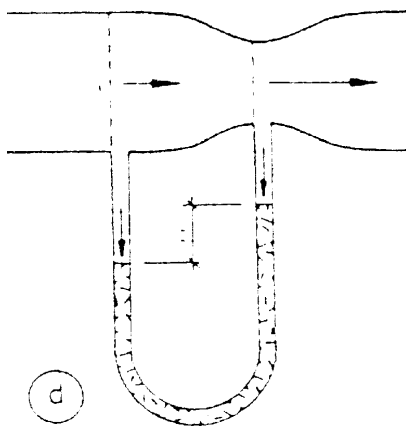
Nun verwenden wir einen anderen Versuchsaufbau, der nur durch eine Querschnittsverjüngung des waagerechten Rohres unterhalb des mittleren Röhrchens von dem ersten abweicht. Lassen wir nun Wasser durch das Rohr strömen, so sehen wir, dass im mittleren Rohr der niedrigste Pegel angezeigt wird. Die zuvor ermittelte Gerade, die den Druckabfall durch Reibung angibt, zeigt, dass Rohr 1 und Rohr 3 denselben hydrostatischen Druck haben, nur bei der Verringerung des Querschnitts sinkt die Wassersäule.

Analog kann man ein Rohr verwenden, das in der Mitte einen größeren Querschnitt hat, als an den Seiten. Dann steigt das Wasser in der Mitte höher.

Um die verschiedenen Drücke zu messen, die in einer strömenden Flüssigkeit herrschen, kann man verschiedene Druckmesssonden verwenden. Mithilfe dieser Druckmesssonden versuchen wir nun, die Druckverhältnisse experimentell zu bestimmen:

Versuch IX.3: Druckmesssonden





Zunächst betrachten wir noch einmal die Strömung durch ein horizontales Rohr mit Verengung. Wir hatten qualitativ ermittelt, dass der hydrostatische Druck in der Taille des Rohres am kleinsten sein muss, da die Strömungsgeschwindigkeit dort am größten ist. Um dies nun auch quantitativ zu messen, benutzen wir eine sogenannte **Venturi - Düse**. (Bild d) Diese Düse misst die Durchflussrate. Die Messung der Druckdifferenz vor und in der Verengung genügt uns, um die

Strömungsgeschwindigkeit berechnen zu können:

Aus

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v_2^2 = p_2 - p_1.$$

folgt mit $v_1 A_1 = v_2 A_2$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)$$

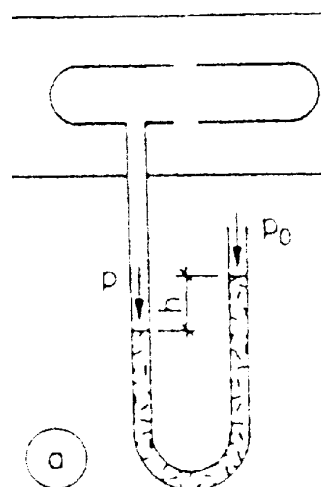
und damit gilt für die Geschwindigkeit

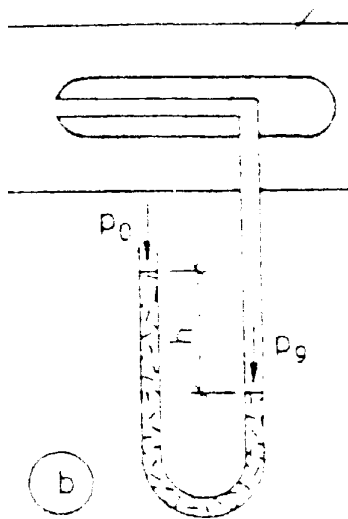
$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)}}.$$

Eine andere Möglichkeit, den hydrostatischen Druck zu messen, bietet die Sonde in Bild a. Mit dieser Sonde kann der statische Druck des vorbeiströmenden Mediums gemessen werden. Wenn der Außendruck p_0 bekannt ist, berechnet sich aus der Höhendifferenz der beiden Wassersäulen mit

$$p = p_0 + \rho_{\text{Fl}} g h$$

der hydrostatische Druck p .





Mit Hilfe des **Pilot-Rohres** (Bild b) misst man den Druck im Stauegebiet. Die Öffnung der Sonde ist vorn, wo die Stauung eintritt, so dass dort die Strömungsgeschwindigkeit $v_1 = 0$ herrscht.

Aus
$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_2 - p_1$$

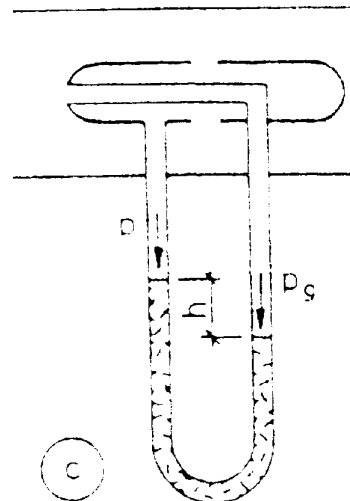
folgt mit $v_1 = 0$
$$-\frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_2 - p_1.$$

Der hydrostatische Druck p_1 in der Sonde ist damit

$$p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 .$$

Mit dieser Sonde kann man den Gesamtdruck messen.

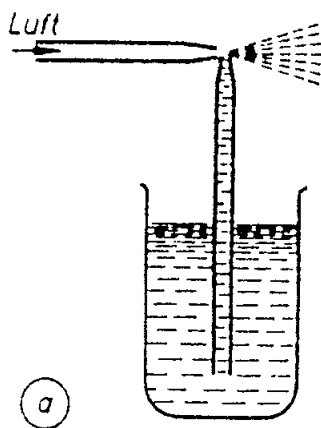
Eine Messung des Staudrucks kann man mit dem **Praudtl'schen Staurohr** (Bild c) vornehmen. Diese Sonde ist eine Kombination aus Sonde a und b. Hiermit misst man den Staudruck



$$\frac{1}{2}\rho v^2 = p_g - p .$$

Mit dieser Gleichung kann man dann die Strömungsgeschwindigkeit berechnen:

$$v = \sqrt{\frac{2(p_g - p)}{\rho}} .$$



Diese Eigenschaften strömender Flüssigkeiten und Gase macht man sich bei verschiedenen Anwendungen zu nutze. Bei einem Zerstäuber wird mit Hilfe des Unterdrucks eine Flüssigkeit aus einem Behälter hochgehoben.

Dieses Prinzip wird in großem Umfang bei Wasserstrahlpumpen verwandt: Ein

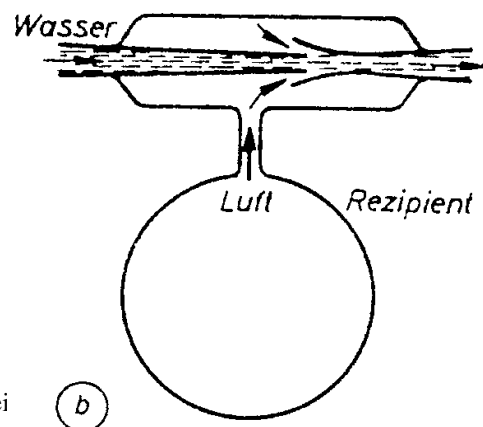


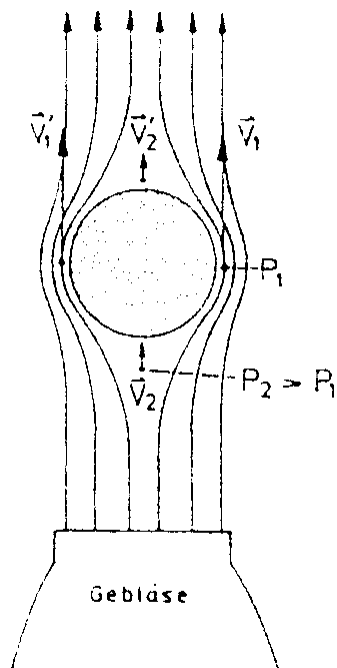
Abbildung IX.8: Zerstäuber als Anwendungsbeispiel für Unterdruck durch Querschnittsverengung

Abbildung IX.9: Wasserstrahlpumpe

Wasserstrahl fließt hierbei durch eine Verengung und erzeugt damit einen Unterdruck. Von diesem Unterdruck angesaugt, steigt eine Flüssigkeit oder ein Gas aus einem Behälter nach oben. Wendet man dieses Prinzip auf ein mit Gas gefülltes Gefäß an, so erhält man eine einfache Vakuumpumpe.

Versuch IX.4: Schwebender Styroporball

Durch Unterdruck kann man auch Körper in strömenden Gasen stabilisieren. Bei unserem Versuch wird ein Styroporball in den Luftstrahl eines Gebläses gebracht.



Der Styroporball wird im Luftstrahl durch Unterdruck stabilisiert da der Luftdruck p_2 , an der Stelle, an der sich die Luft unterhalb der Kugel staut, kleiner ist als der

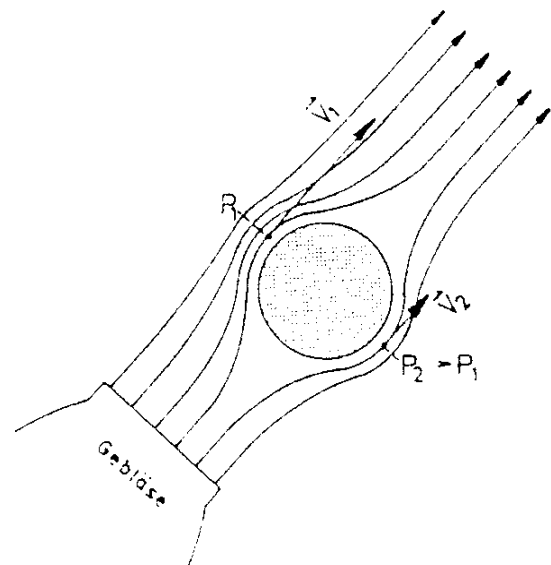


Abbildung IX.10: Ein leichter Ball kann in einem Luftstrom schweben.

vorbeifließenden Luft. So entsteht durch den Unterdruck eine Gleichgewichtslage, in die der Ball auch nach einer Ablenkung zurück fliegt. Auch in einem geneigten Luftstrom wird der Ball noch gehalten.

IX.3 Laminare Strömungen realer Flüssigkeiten

Wie wir bereits in Versuch IX.2 gesehen haben, kann die Reibung bei der Betrachtung von strömender Flüssigkeit nicht vernachlässigt werden. Im Folgenden werden wir deshalb von der

Idealisierung der Flüssigkeiten, also Flüssigkeiten ohne Reibung, zu realen Flüssigkeiten, d.h. Flüssigkeiten mit zwischenmolekularen Kräften und damit mit Reibung, übergehen.

IX.3.1 Das Newtonsche Reibungsgesetz

In einem Gedankenexperiment betrachten wir zwei parallele Platten, zwischen denen sich eine Flüssigkeit befindet. Die Platte (CD) wird mit einer konstanten Kraft F an Fläche (AB) entlanggezogen.

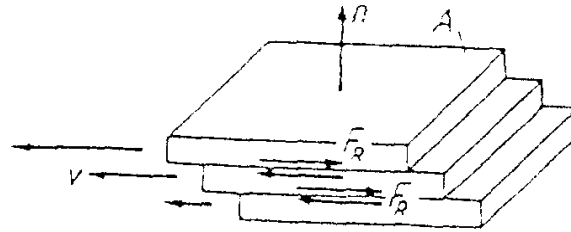
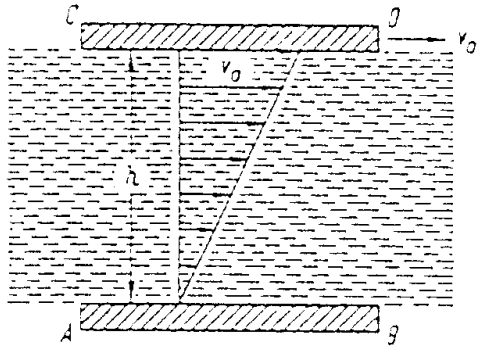


Abbildung IX.11: Die Flüssigkeitsschichten gleiten mit Reibung aneinander entlang (Schichten \rightarrow laminar).

Die Platte bewegt sich (nach kurzer Anfangsphase) mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{v}_0$.

Zwischen Platte und Fläche bildet sich ein Geschwindigkeitsgefälle $\frac{dv}{dh}$ aus, weil die Moleküle

an der bewegten Platte haften und mitgezogen werden. Obwohl eine konstante Kraft Ursache der Bewegung ist, findet keine Beschleunigung statt. Dieses Phänomen hatten wir schon bei der Reibung für Festkörper angesprochen. Offensichtlich wirkt eine Reibungskraft der Zugkraft F entgegen und ist dieser entgegengesetzt gleich groß.

Empirisch findet man zudem noch zwei weitere Besonderheiten:

1) Die Reibungskraft F_R ist proportional zur Fläche A der Platten:

$$F_R \sim A$$

2) Die Reibungskraft ist proportional zur Änderung der Geschwindigkeit mit dem Abstand h

von der bewegten Fläche:

$$F_R \sim \frac{dv}{dh}$$

Zusammengefasst führen diese Beobachtungen zu einem Kraftgesetz der Form

$$F_R \sim A \frac{dv}{dh}$$

Die Proportionalitätskonstante ist eine Materialkonstante. Sie ist der **Koeffizient der inneren Reibung** und wird **Viskosität** oder **dynamische Zähigkeit** genannt und mit η bezeichnet.

Der gesamte Vorgang wird also durch das empirische Gesetz beschrieben

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dh} \quad \text{Newtonsches Reibungsgesetz}$$

Merke: Die Reibung innere Reibung einer Flüssigkeit wird angegeben durch das

$$\text{Newtonsche Reibungsgesetz: } F_R = \eta A \frac{dv}{dh}$$

Einheitenbetrachtung:

Die Einheit der Viskosität ist: $[\eta] = 1 \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ im SI.

Als alte Einheit wird gelegentlich noch 1 Poise verwendet mit $1 \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 10 \text{ Poise}$.

Notation IX.1: Der Kehrwert der Viskosität η wird **Fluidität** genannt.

Die Viskosität von Flüssigkeit ist stark temperaturabhängig. Bei Motorenöl z.b. wird die Viskosität für bestimmte Temperaturbereiche angegeben. Als Beispiel sei hier nur die Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Wasser und Glycerin angeführt:

	$\eta(t)$ von Wasser in m Pa s	$\eta(t)$ von Glycerin in m Pa s
$t = 0^\circ$	1.79	12100
$t = 20^\circ$	1.002	1480
$t = 100^\circ$	0.282	14.8

Tabelle IX.1: Temperaturabhängigkeit der Viskosität

Eine direkte Überprüfung dieses Reibungsgesetzes ist sehr schwer, obwohl es qualitativ einsichtig ist, z.B. wenn ein Löffel aus Honig gezogen wird. Um uns dennoch dem Gesetz quantitativ zu nähern, betrachten wir folgenden Spezialfall laminarer Strömung mit Reibung:

IX.3.2 Anwendung des Reibungsgesetzes: Strömung durch ein Rohr

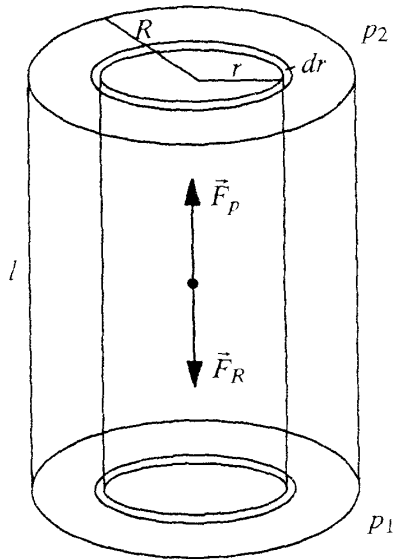


Abbildung IX.12:
zylindrisches
Flüssigkeitselement mit
Radius r in einem Rohr des
Radius R

Das Newtonsche Reibungsgesetz kann genutzt werden, um die Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit, z.B. durch ein Rohr zu berechnen. Diese Berechnung wurde von zwei Wissenschaftlern, Hagen, einem Ingenieur, und Poiseuille, einem Arzt, im Jahr 1840 durchgeführt.

Für die Berechnung betrachten wir ein Rohr mit dem Radius R . Das Rohr habe die Länge l .

Zwischen den beiden Enden des Rohres herrsche eine Druckdifferenz $p_2 - p_1$. Diese Druckdifferenz ist die Ursache für eine Strömung durch das Rohr, sie erzeugt eine Kraft F_p .

$$\text{Aus } p_1 - p_2 = \frac{F_p}{A} \text{ folgt}$$

$$F_p = \pi r^2 (p_1 - p_2)$$

Betrachten wir nun einen Ausschnitt der strömenden Flüssigkeit. Hierzu wählen wir einen Flüssigkeitszylinder, der konzentrisch im Rohr liegt. Zunächst berechnen wir mit dem Newtonschen Reibungsgesetz die Reibungskraft am Flüssigkeitszylinder mit Radius r und Länge l :

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dr}$$

mit der Mantelfläche

$$A = 2 \pi r l$$

folgt

$$F_R = \eta 2 \pi r l \frac{dv}{dr}$$

Die Reibungskraft F_R muss im Gleichgewicht (stationäre Strömung) entgegengesetzt gleich der Druckkraft F_p sein, mit der die Druckdifferenz $p_1 - p_2$ auf den Flüssigkeitszylinder wirkt:

$$\vec{F}_p = -\vec{F}_R$$

Wir können die Bewegung der Wasserteilchen als lineare Bewegung durch das Rohr ansehen, deshalb betrachten wir nur die Komponenten der Kräfte entlang ℓ .

Es folgt
$$\pi r^2 (p_1 - p_2) = -\eta 2 \pi r \ell \frac{dv}{dr}$$

Die Geschwindigkeitsverteilung $\frac{dv}{dr}$ ist noch unbekannt. Um zu berechnen, wie sich die

Strömungsgeschwindigkeit mit der Entfernung vom Rohrmantel verändert, müssen wir diese Formel nach v auflösen. Dazu berechnen wir die

Differentialgleichung für $v(r)$

$$\frac{dv(r)}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta\ell} r$$

$$\Leftrightarrow \int_{v_r}^{v_R} dv(r) = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta\ell} \int_r^R r dr$$

Mit den Randbedingungen $v_R = 0$, denn die äußersten Flüssigkeitsmoleküle haften am Rohr, ergibt sich daraus

$$0 - v_r = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta\ell} \frac{1}{2} (R^2 - r^2)$$

$$\Leftrightarrow v_r = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta\ell} (R^2 - r^2)$$

Diese Gleichung gibt die Geschwindigkeitsverteilung in Abhängigkeit

vom Abstand zum Rohr an.

Dieses Gesetz stellt eine parabolische Geschwindigkeitsverteilung $v_r(r)$ mit

$$v(R) = 0 \quad \text{und} \quad v_0(r=0) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta\ell} R^2 \quad \text{dar.}$$

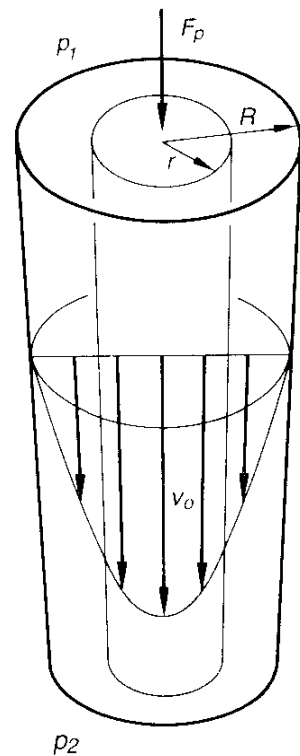


Abbildung IX.13:
parabolische
Geschwindigkeitsverteilung

Wie groß ist nun der Gesamtstrom durch das Rohr? Um diese Frage zu beantworten, berechnet man die Flüssigkeitsmenge dV , die in einer vorgegebenen Zeit t durch den Rohrquerschnitt zwischen r und $r + dr$ fließt:

$$dV = dA \cdot v(r) \cdot t$$

Mit

$$dA = 2\pi r \cdot dr$$

folgt

$$dV = 2\pi r dr v_r t.$$

Dann fließt durch das ganze Rohr

$$V = \int_0^{V(R)} dV$$

$$\Leftrightarrow V = 2\pi t \int_0^R r \cdot dr \cdot v(r)$$

$$\Leftrightarrow V = 2\pi t \int_0^R \frac{p_1 - p_2}{2\eta \ell} (R^2 - r^2) r \, dr$$

$$\Leftrightarrow V = t\pi \frac{p_1 - p_2}{2\eta \ell} \int_0^R (R^2 - r^2) r \, dr$$

$$\Leftrightarrow V = t\pi \frac{p_1 - p_2}{2\eta \ell} \left[\int_0^R R^2 r \, dr - \int_0^R r^3 \, dr \right]$$

Ausrechnen des Integrals und dividieren durch ergibt

Hagen-Poiseuille

$$I = \frac{V}{t} = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8\eta \ell} R^4$$

Dieses Gesetz gibt die Stromstärke im Rohr mit R an und ist nach den Wissenschaftlern benannt, die es zuerst aufstellten.

Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit \bar{v} ergibt sich aus der Definition

**Definition IX.1: Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit \bar{v} ist definiert als
Stromstärke durch die durchflossene Fläche A : $I = A \cdot \bar{v}$**

Mit dieser Definition berechnet sich die mittlere Strömungsgeschwindigkeit als

$$I = A \cdot \bar{v}$$

$$\Leftrightarrow I = \pi R^2 \bar{v}$$

Einsetzen von I führt zu

$$\pi R^2 \bar{v} = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8\eta \ell} R^4$$

$$\Leftrightarrow F_R = A (p_1 - p_2)$$

$$\Leftrightarrow F_R = \pi R^2 (p_1 - p_2)$$

$$\Leftrightarrow F_R = 8 \pi \eta \ell \bar{v}$$

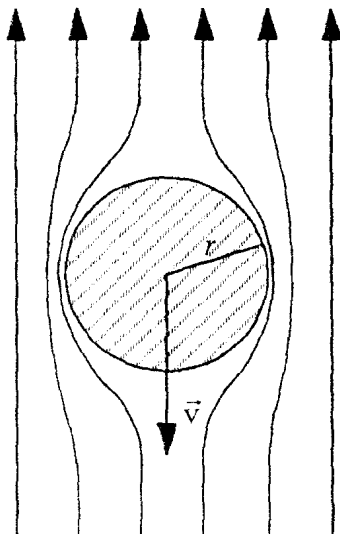
Der Druckabfall lässt sich berechnen aus

$$(p_1 - p_2) = 8 \eta \ell \bar{v} \frac{1}{R^2}$$

Dieser Reibungswiderstand ist für das lineare Druckgefälle in einem Rohr verantwortlich, welches wir bereits in Versuch IX.2 beobachtet haben.

Aus $\bar{v} = \text{const.}$ folgt
$$\Delta p = \frac{F_R}{A} = \text{const} \cdot \ell .$$

IX.3.3 Stokes'sches Gesetz



Eine ähnliche, aber leider kompliziertere Rechnung liefert für eine Kugel vom Radius r in einer laminaren Strömung das Reibungsgesetz

$$\vec{F}_R = -6\pi\eta r \vec{v}$$

wobei \vec{v} die Relativgeschwindigkeit der Kugel gegen die Flüssigkeit ist. Die Reibungskraft ist der Stokes'schen Reibung also proportional zur Geschwindigkeit.

Abbildung IX.14: Reibung einer Kugel, die sich relativ zu einer Flüssigkeit bewegt

Betrachten wir zu diesem Reibungsgesetz einen Versuch:

Versuch IX.5: Stokes'sche Reibung

Bei diesem Versuch soll die Sinkgeschwindigkeit verschiedener Kugel in einer zähen Flüssigkeit gemessen werden. Für den Versuchsaufbau benötigen wir einen Zylinder, der mit einer zähen Flüssigkeit gefüllt ist, mehrere Kugeln mit verschiedenem Durchmesser desselben Materials und eine Stoppuhr. Auf dem Zylinder sind zwei Messmarken angebracht. Während des Versuchs soll die Zeit gestoppt werden, die die Kugeln brauchen, um den Weg zwischen den beiden Markierungen zurückzulegen. Die erste Markierung ist nicht an der Oberfläche der Flüssigkeit angebracht, damit sich erst ein Gleichgewicht einstellen kann.

Die Kugeln werden von der Gewichtskraft F_G nach unten angezogen. Dem entgegen wirken die Reibungs- und Auftriebskraft F_R und F_A .

Für die Kräfte gilt
$$F_G = \rho_K V_K g ,$$

$$F_R = 6\pi\eta r \bar{v}$$

und

$$F_A = \rho_{FL} V_K g ,$$

wobei der Index $_K$ die Größen der Kugel und der Index $_{FL}$ die Konstanten der Flüssigkeit bezeichnet.

Für die Sinkgeschwindigkeit ergibt sich mittels der Kräftebetrachtung ein Wert von

$$\bar{v} = \frac{2}{9} g (\rho_K - \rho_{Fl}) r_K^2$$

Der Versuch mit verschiedenen Kugeln bestätigte, dass die Sinkgeschwindigkeit proportional zum Quadrat der Radien der Kugeln ist.

IX.4 Turbulente Strömungen

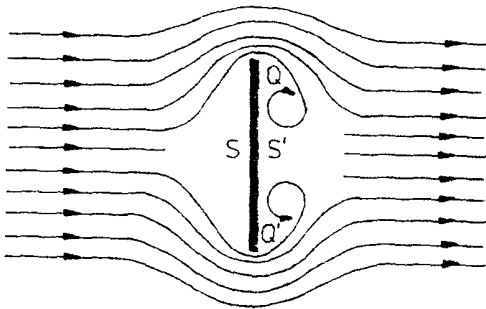


Abbildung IX.15: turbulente Strömung hinter einem Hindernis

Wir hatten am Anfang des Kapitels bereits festgestellt, dass man eine Strömung dann turbulent nennt, wenn die Flüssigkeit durchmischt wird. Das bedeutet, dass die Fortbewegung in die Strömungsrichtung überlagert wird von dazu quer verlaufenden Bewegungen.

Bei einem Versuch hatten wir beobachtet, dass laminare Strömung ab einer gewissen Geschwindigkeit in turbulente Strömung

umschlagen kann. Das liegt daran, dass die Druckdifferenz der strömenden Flüssigkeit vor und neben dem Hindernis so groß wird, dass dahinter Wirbel entstehen. Aufgrund der Drehimpulserhaltung setzen sich die Wirbel nach hinten fort.

Wir hatten ebenfalls festgestellt, dass an einem Körper in einer strömenden Flüssigkeit ein Reibungswiderstand entsteht. Unmittelbar am Körper haftet die Flüssigkeit fest. Die relative Geschwindigkeit zwischen Körper und Flüssigkeit ist also dort null. In der Grenzschicht steigt die Geschwindigkeit auf den Wert der ungestörten Strömung. In dieser Grenzschicht entsteht durch die innere Haftung der Flüssigkeit der Reibungswiderstand.

Neben dem Reibungswiderstand ist der sogenannte Druckwiderstand von größter Bedeutung. Bewegt ein Körper sich relativ zu einer Flüssigkeit, so bilden sich, wie eben erläutert, an seiner Rückseite Wirbel. Diese lösen sich vom Körper und wandern weg. Durch diese Wirbelbildung entsteht der Druckwiderstand.

Will man den Druckwiderstand verringern, so muss man dazu die Wirbel möglichst verhindern. Das kann durch eine geeignete Körperform, eine sogenannte Stromlinienform, realisiert werden.

Reibungswiderstand und Druckwiderstand addieren sich zum Strömungswiderstand. Der Betrag dieser Widerstandskraft ist bei größeren Geschwindigkeiten direkt proportional zur Stirnfläche A , das heißt zum größten Querschnitt des Körpers normal zur Strömungsrichtung, und zum Staudruck $\frac{1}{2} \rho v^2$.

$$F_w = c_w \cdot \frac{1}{2} \rho v^2 \cdot A \quad \text{Strömungswiderstand}$$

c_w wird der Widerstandsbeiwert genannt.

Ein Vergleich mit dem Gesetz von Stokes liefert

$$c_w \frac{1}{2} \rho v^2 \pi^2 R = 6 \pi \eta R v$$

$$\Rightarrow c_w = \frac{12}{Re} \quad \text{für laminare Strömung}$$

mit
$$Re = \frac{R \rho v}{\eta} \quad \text{Reynold'sche Zahl}$$

Damit gibt die Reynold'sche Zahl das Verhältnis von kinetischer Energie des bewegten Volumens und verbrauchter Reibungsenergie bei der Bewegung an.

Merke: Die **Reynold'sche Zahl** $Re = \frac{R \rho v}{\eta}$ ist der Quotient aus der zweifachen kinetischen Energie des bewegten Volumens und der verbrauchten Reibungsenergie bei der Bewegung.

Die Reynold'sche Zahl ist damit ein Maß dafür, ob eine Strömung laminar oder turbulent ist. Ist die kinetische Energie kleiner als die Reibungsenergie, so ist die Strömung laminar. Bei großer kinetischer Energie, d.h. bei hoher Strömungsgeschwindigkeit schlägt die Strömung in eine turbulente Strömung um. Der Wert von Re , bei dem dies passiert, wird kritische Re -Zahl genannt. Der typische Wert wird bei $Re \cong 1160$ angesetzt, der kritische Wert der Rohrströmung ist $Re \cong 2300$.

IX.5 Gedämpfte Schwingungen

Um die Mechanik ganz abschließen zu können, müssen wir noch einmal auf Schwingungen zurückkommen. In Kapitel IX.8 hatten wir reine Sinusschwingungen betrachtet. Eine reine Sinusschwingung ist allerdings eine mathematische Abstraktion. Sie müsste nämlich nach ihrer Definition unendlich lange weiter schwingen. In Wirklichkeit hört aber jede freie Schwingung irgendwann auf, entweder allmählich in Folge einer Dämpfung, wie ein Glocken- oder Klavierton, den man nachschwingen lässt, oder plötzlich.

Da Reibungskräfte nie ganz vermeidbar sind, ist jede Schwingung mehr oder weniger gedämpft. Um eine unbegrenzte Schwingung zu erhalten, muss man der schwingenden Masse während einer Periode genau die Energie wieder zuführen, die sie in einer Periode durch Reibung verliert. In der Technik wird das durch Selbststeuerung oder Rückkopplung realisiert: durch das schwingende System werden in geeigneter Phase Kräfte ausgelöst, die den Energieverlust in jeder Periode ausgleichen. Diese Energie muss aufgrund der Energieerhaltung einem anderen Energievorrat entnommen werden. Ein Beispiel dafür ist allen bekannt: das Pendel einer Pendeluhr wird in der geeigneten Schwingungsphase über den Anker durch die Zähne des Steigrades beschleunigt. Die ihm dadurch zugeführte Energie stammt aus dem Energievorrat einer gespannten Feder oder eines gehobenen Gewichts der Uhr.

Die bisher betrachteten, reinen Sinusschwingungen hatten keinen Energieverlust durch Reibung. Eine solche Schwingung nennt man ungedämpft.

Merke: Eine Schwingung nennt man **ungedämpft**, wenn ihre Schwingungsenergie und damit ihre Amplitude konstant bleibt.

Eine Schwingung nennt man **gedämpft**, wenn ihre Schwingungsenergie und damit ihre Amplitude dauernd abnimmt.

Meistens ist die Ursache des Energieverlustes die Reibung. Wir hatten gelernt, dass es verschiedene Gesetze für Reibung gibt. In einer Flüssigkeit zum Beispiel ist die Reibung proportional zur Geschwindigkeit.

Im Folgenden wollen wir eine Schwingungsgleichung herleiten für ein mathematisches Pendel, das durch Reibung gedämpft wird. Die Reibungskraft ist dabei direkt proportional zur Geschwindigkeit und dieser entgegen gerichtet.

Zunächst betrachten wir noch einmal die ungedämpfte Schwingung:

Im Gegensatz zur Federschwingung stellt das mathematische Pendel kein lineares Problem dar, denn das Pendel bewegt sich in einer Ebene:

Das Pendel sei um den Winkel φ ausgelenkt, wenn es losgelassen wird. Auf die Masse m wirkt nun wie bei der Federschwingung nur noch die Gewichtskraft \vec{G} .

Die Tangentialkomponente G_t verursacht nach dem 2. Newtonschen Axiom nun eine Beschleunigung längs des Kreisbogens in Richtung der Ruhelage, $\varphi = 0^\circ$.

Die Tangentialkomponente $\vec{G}_t = m \vec{g} \sin\varphi$

wirkt als beschleunigende Kraft $F = m \vec{a}$.

$$\Rightarrow m \vec{g} \sin\varphi = m \vec{a}$$

mit $\vec{a} = \ddot{\vec{x}} = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$ $\Rightarrow m \vec{g} \sin\varphi = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$

Diese Differentialgleichung hängt nicht nur von einer Variablen ab, sondern von den beiden Variablen \vec{x} und φ . Um die Gleichung dennoch lösen zu können, mussten wir sie in die Form

$$mg \sin\varphi = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

überführen

$$\Leftrightarrow m \frac{d^2 s}{dt^2} + mg \sin\varphi = 0 \quad \neg$$

Mit $s = \varphi l$ $\Leftrightarrow \frac{d^2 \varphi}{dt^2} l + g \sin\varphi = 0$

$$\Leftrightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin\varphi = 0$$

Die Lösung dieser Gleichung ist kompliziert, sie erfolgt über die Reihenentwicklung für $\sin\varphi$:

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$$

Wenn man nach dem ersten Term alle weiteren vernachlässigt, gilt

(Kleinwinkelnäherung) $\sin\varphi = \varphi$.

Damit lautet die Schwingungsgleichung $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$.

Betrachten wir nun dieselbe Schwingung mit dem Unterschied, dass zuzüglich zu der oben diskutierten Tangentialkomponente der Gravitationskraft noch eine dem entgegengesetzte Reibungskraft wirkt. Die Reibungskraft sei proportional zur Geschwindigkeit, allgemein hat eine solche Reibung das Kraftgesetz $F_R = \beta \dot{s}$,

wobei β der Proportionalitätsfaktor ist. Dann müssen wir die Gleichung \neg erweitern um diesen

Reibungsfaktor $m \frac{d^2 s}{dt^2} + mg \sin\varphi = \beta \frac{ds}{dt}$

Mit $s = \varphi l$ und $\sin\varphi = \varphi$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} l + g = \frac{\beta}{m} \frac{d\varphi}{dt} l$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} = \frac{\beta}{m} \dot{\varphi}$$

Um diese Gleichung zu lösen definieren wir die Terme mit den Konstanten um. Wir definieren wie oben:

$$\omega_0^2 = -\frac{g}{l}$$

und als neue Konstante

$$\frac{\beta}{m} = 2\delta$$

Daraus folgt

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$$

In Kapitel IV hatten wir diese Gleichung dadurch gelöst, dass wir einen Lösungsansatz erraten hatten. Dieser musste die Bedingung erfüllen, dass seine zweite Ableitung einem konstanten Vorfaktor multipliziert mit dem eigentlichen Term ergibt. Die Lösung waren die Sinus- oder Cosinusfunktionen. Um diese neue Gleichung zu lösen, müssen wir nun eine Funktion suchen, die in ihrer ersten und ihrer zweiten Ableitung dem Ursprungsterm entspricht. Der hier zu erratene Lösungsansatz muss eine e-Funktion sein. Die richtige Lösung dieser Gleichung lautet

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\delta t} (\cos \omega t + \alpha)$$

Dabei sind φ_0 , die Amplitude, und α Integrationskonstante.

Diese Gleichung wird erfüllt mit

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$$

Analog zur reinen Sinusschwingung ist dies die Winkelgeschwindigkeit der Schwingung. Statt diese Lösung herzuleiten, was übrigens in jedem Lehrbuch nachzulesen ist, ist es an dieser Stelle wichtiger, dieses Ergebnis zu untersuchen, um die gedämpfte Schwingung qualitativ zu verstehen.

Betrachten wir die Gleichung $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$:

Für die Winkelgeschwindigkeit können wir drei markante Fälle angeben:

1) $\delta < \omega_0$: Da δ ein Maß für die Dämpfung ist, handelt es sich in diesem Fall um eine **gedämpfte Schwingung**, um eine Schwingung also, deren Amplitude mit der Zeit abklingt. Unser Ansatz zeigt, dass die Amplitude exponentiell mit der Zeit abnehmen muss. Dieser Fall wird **Schwingfall** genannt.

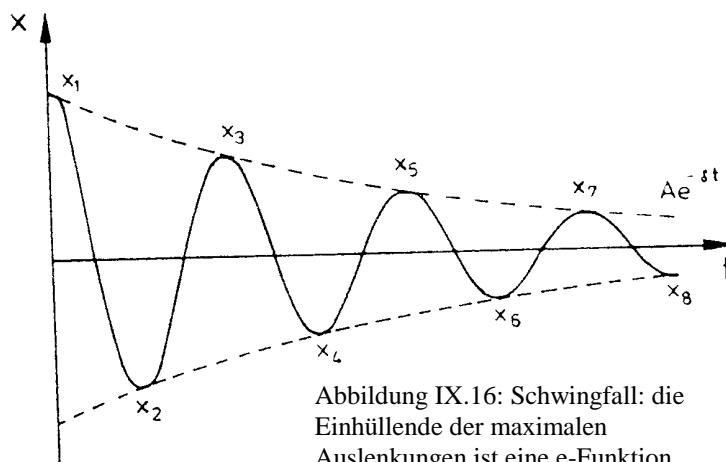


Abbildung IX.16: Schwingfall: die Einhüllende der maximalen Auslenkungen ist eine e-Funktion.

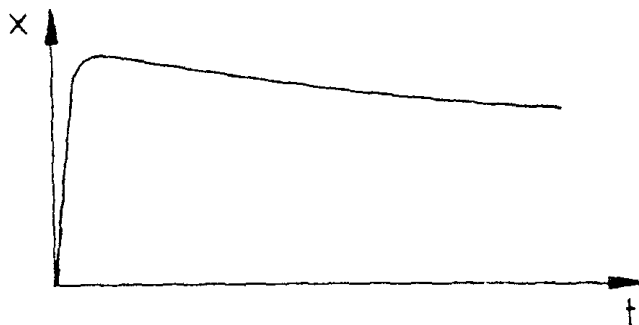


Abbildung IX.17: Kriechfall, die Abklingzeit ist proportional zur Dämpfung

2) $\delta > \omega_0$: Der Dämpfungsfaktor ist größer als der Faktor der Winkelgeschwindigkeit, es kommt keine Schwingung zustande. Das Pendel ist zu stark gedämpft um zu schwingen. Die Bewegung verläuft nicht periodisch, das heißt der Körper kehrt kriechend in seine Ausgangslage zurück, ohne über diese hinaus zu schwingen. Dieser Fall ist der **Kriechfall**.

3) $\delta = \omega_0$: Diesen Fall nennt man **aperiodischen Grenzfall**. Das Pendel kehrt in einer minimalen Abklingzeit in seine Ruhelage zurück. Dieser Fall ist besonders bei technischen Anwendungen interessant: in vielen Situationen möchte man die Schwingung von

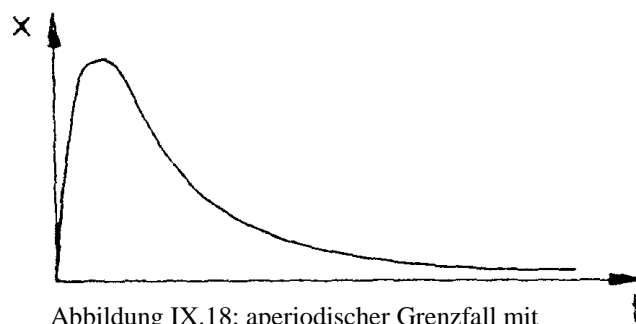


Abbildung IX.18: aperiodischer Grenzfall mit minimaler Abklingzeit

mechanischen Teilen unterdrücken. Wählt man dazu einen Dämpfungsfaktor, der kleiner ist als der des Grenzfalles, so klingt die Schwingung nur langsam exponentiell ab. Wählt man hingegen einen zu großen Dämpfungsfaktor, so dauerte es lange, bis er Körper in seine Ruhelage zurückkehrt.

Abschließend wollen wir eine gedämpfte Schwingung in einem Experiment betrachten:

Versuch IX.6 : gedämpfte Schwingung eines Fadenpendels

Bei diesem Versuch wählen wir denselben Aufbau, wie wir ihn bereits zur Untersuchung der ungedämpften Schwingung verwandt haben. Diesmal schwingt die Kugel jedoch nicht durch die Luft, sondern in einem mit Wasser gefülltem Gefäß. Durch die Reibung der Kugel mit dem Wasser ist die Pendelbewegung jetzt gedämpft. Dieses Mal zeigt die Computerauswertung eine Schwingung, deren Amplitude exponentiell mit der Zeit abnimmt. Um zu beweisen, dass der Funktionsgraph, die von den maximalen Amplitude beschrieben wird, wirklich eine Exponentialfunktion ist, tragen wir diese mit dem Computer auf einer exponentiellen Skala ab. Nun ist der Funktionsgraph eine Gerade: die Amplitude nimmt wie vermutet exponentiell ab. Eine mathematische Betrachtung zeigt, dass die Schwingungsperiode einer gedämpften Schwingung mit abklingender Amplitude länger wird. Diese Erscheinung ist bei unserem Versuchsaufbau leider zu gering, um sie zuverlässig nachweisen zu können.

Einleitung in die Wärmelehre

Im ersten Teil der Experimentalphysik, Mechanik, haben wir die Grundlagen geschaffen, Bewegung von einzelnen Massepunkten und später von starren Körpern zu berechnen. Wir hatten festgestellt, dass die Ursache dieser Bewegungen Kräfte sind. Diese Kräfte konnten wir untersuchen und die funktionalen Beziehungen zwischen den Kräften und verschiedenen Bewegungsformen der Körper analysieren. Bei diesen Untersuchungen mussten wir weder den Aufbau der Körper noch die Struktur seiner Materie kennen. Unter diesen Voraussetzungen konnten wir mit Hilfe derselben Bewegungsgesetze, die wir für feste Körper entwickelt hatten, die Kinematik und Dynamik von Flüssigkeiten oder Gasen betrachten.

In den nun folgenden Teilen der Experimentalphysik wollen wir auf den Aufbau, die Erscheinungsformen von Materie und deren Änderungen genauer eingehen. Wichtig sind hier vor allem die Abhängigkeit von der Temperatur und umgekehrt die Temperaturänderung in Abhängigkeit von der Zustandsänderung der Stoffe.

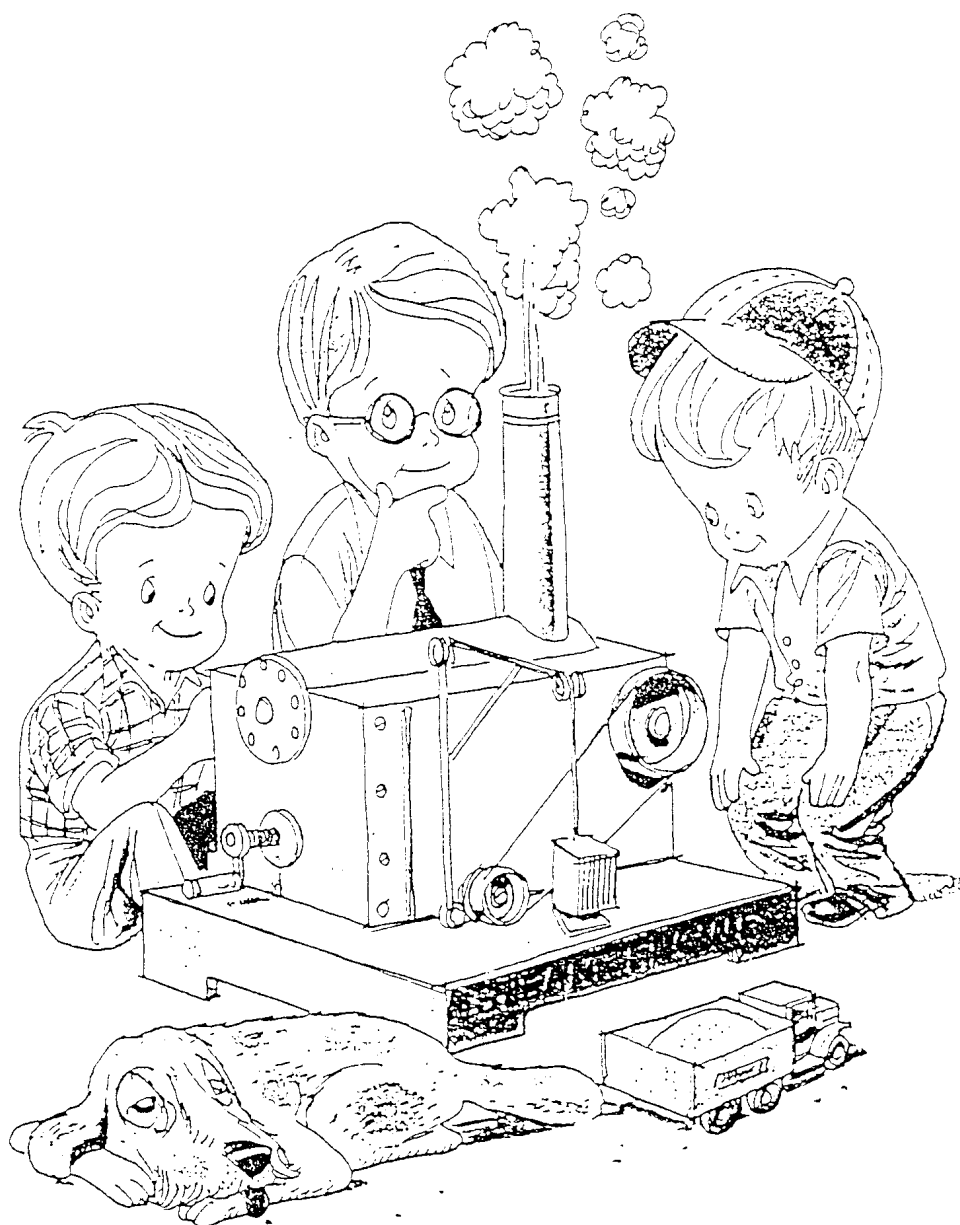
Um die Erscheinungsformen der Materie und deren Änderungen zu untersuchen, gibt es zwei unterschiedliche Methoden:



1) Die **Statistische Mechanik** betrachtet den Aufbau der Stoffe aus Atomen und Molekülen und erfasst die **makroskopischen** Veränderungen beim Energieaustausch in thermodynamischen Systemen mit Hilfe der Statistik. Die bereits formal bekannten Größen Temperatur und Wärmemenge werden als statistische Größen anschaulich deutbar über das Verhalten der Mikroteilchen. Die fundierte Anwendung dieser Methode setzt größere Kenntnisse der mathematischen Statistik voraus.

2) Die **thermodynamische Methode** beruht auf der **mikroskopischen** Betrachtung experimenteller Größen bei der Veränderung eines Systems in Folge von Energieumwandlung. Im Gegensatz zur Mechanik werden nun Temperaturänderungen oder Wärme als wichtigste Energieform berücksichtigt. Im Gegensatz zur statistischen Mechanik werden keine speziellen Vorstellungen über die Natur der Wärme entwickelt. Auch die Vorgänge im Inneren der Stoffe werden nicht mehr betrachtet. Die Thermodynamik beobachtet vor allem die sogenannten Zustandsparameter, z.B. Temperatur und Entropie.

Wie in dieser Erklärung bereits deutlich wurde, sind die beiden zentralen Begriffe der Wärmelehre die Begriffe **Wärmemenge** und **Temperatur**. Die Wärmemenge ist eine Form der Energie, die sich in der ungeordneten Bewegung der Moleküle auch im einzelnen deuten lässt als mittlere mechanische Energie dieser Moleküle. Im Gegensatz dazu beschreibt die Temperatur den thermischen Zustand, das heißt den Wärmezustand, eines makroskopischen Körpers. Die Temperatur ist dabei eine neue Basisgröße, für die zuerst eine Einheit und eine Skala festgelegt werden muss, um Messungen durchführen zu können. In Kapitel II, Wärmelehre, wollen wir deshalb damit beginnen, zumal die Beobachtung der Temperatur sowohl die Grundlage zur Untersuchung der thermischen Stoffeigenschaften ist als auch wichtige Unterlagen liefert, um Gesetzmäßigkeiten der Wärmebewegung, also letztlich das



‘Wesen der Wärme’ zu erkennen.

X. Grundlagen der Wärmelehre

In diesem Kapitel wollen wir, wie angekündigt, zunächst auf die Begriffe Temperatur und Wärme eingehen. Dabei müssen wir uns fragen, was Temperatur ist, wie man sie messen kann und welche Einheit und Skala der Temperatur zugeordnet wird. Nach einer kurzen Definition der Wärme und der Stoffmenge, betrachten wir abschließend die drei möglichen Aggregatzustände eines Körpers und deren Übergänge.

X.1 Temperatur

Was ist Temperatur?

Mittels Nerven, die an bestimmten Stellen unserer Haut, dem Warm- und Kaltpunkten, die auf Wärme reagieren, empfinden wir die Temperatur eines Körpers. Um diese Empfindungen zur Beurteilung oder gar zur Messung einer Temperatur zu nutzen, reagieren unsere Nerven zu stark auf die Abkühlungs- oder Erwärmungsgeschwindigkeit. Deshalb empfinden wir denselben Gegenstand einmal kalt und einmal warm, je nachdem, ob die Hand vorher in kälterer oder in wärmerer Umgebung war. Zudem fühlt sich ein Körper aus Metall kälter an als ein Körper aus Holz, wenn beide dieselbe Temperatur haben. Der Grund hierfür liegt in der besseren Wärmeleitung des Metalls, welches der Hand die Wärme rascher entzieht. Schließlich kann ein brennend heißer Körper die selben Empfindungen auslösen wie ein besonders kalter Körper. Die Temperaturdefinition über unser Sinnesorgan ist deshalb ungeschickt. Man muss ein davon unabhängiges Messverfahren für die Temperatur eines Körpers finden.

Wie misst man eine Temperatur?

Bei einer Festlegung eines geschickten Messverfahrens gibt es drei wesentliche Schwierigkeiten:

Die erste Schwierigkeit ist es, eine geeignete **Wahl der Fixpunkte** der Temperaturskala zu schaffen. Dazu müssen Substanzen ausgewählt werden, die unter vorgegebenen Bedingungen stets dieselbe Temperatur, denselben thermischen Zustand haben.

Die zweite Schwierigkeit liegt darin, die **Reproduzierbarkeit der Fixpunkte** zu gewährleisten. Die Temperatureinheit Fahrenheit wählt als einen der Fixpunkte die Körpertemperatur eines Menschen. Dieser Fixpunkt entspricht sicherlich nicht dem Kriterium, exakt reproduzierbar zu sein.

Die dritte Schwierigkeit stellt die **Skaleneinteilung** dar. Der Versuch, die Temperaturdifferenz zwischen zwei Fixpunkten durch die Ausdehnung zu definieren, ist nicht unproblematisch. Verschiedenen Flüssigkeiten dehnen sich unterschiedlich aus. Bei einer linearen Skaleneinteilung entsprechen 60 Grad Celsius von Quecksilber 61,9 Grad Celsius, legt man die Ausdehnung von Alkohol zugrunde.

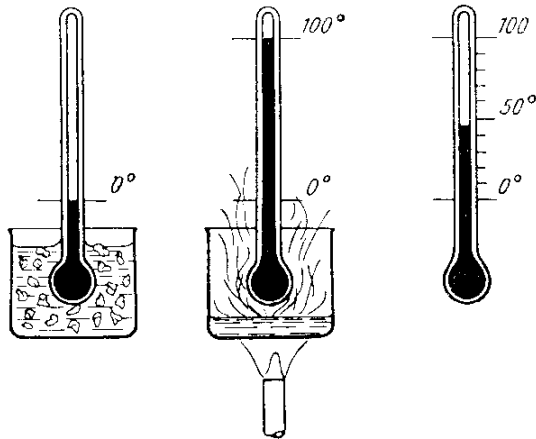


Abbildung X.1: Fixpunkte der Celsius-Skala:

- 1) 0°C bei Koexistenz von Eis und Wasser
- 2) 100°C beim Siedepunkt
- 3) zeigt die lineare Aufteilung der Skala

Skala fest. Ein Grad Celsius entspricht dann einem Hundertstel der Temperaturdifferenz zwischen Schmelz- und Siedepunkt.

Zur **Skaleneinteilung** zwischen diesen Fixpunkten wird oft die Wärmeausdehnung von Quecksilber benutzt. Dazu muss nur die Standhöhe einer Quecksilbersäule in einer Kapillaren, die an eine mit Quecksilber gefüllte Thermometerkugel anschließt, im thermischen Gleichgewicht mit Wasser der beiden Fixpunkttemperaturen notiert werden. Die so entstandene Strecke wird in hundert gleiche Teile geteilt. Diese Teilung kann man nach oben und unten im gleichen Maßstab fortsetzen. Die so geschaffene Temperaturskala setzt dann einen linearen Zusammenhang zwischen der Temperatur und der Wärmeausdehnung von Quecksilber voraus. Im Laufe der weiteren Entwicklung zeigte sich, dass einige Verbesserungen und Änderungen angebracht sind.

Zur Interpolation zwischen den Fixpunkten und zur Extrapolation nach beiden Seiten benutzt man den Druck von Helium, das heißt den Druck eines idealen Gases, bei konstantem Volumen. Dieses ändert sich gegenüber der Ausdehnung von Quecksilber zwischen null Grad Celsius und hundert Grad Celsius praktisch nicht.

Im Prinzip lassen sich diese drei Schwierigkeiten durch eine internationale Einigung umgehen: Man wählt den ersten Fixpunkt, den Eispunkt, als die Temperatur des unter dem normalen Luftdruck von 1013 mbar schmelzenden reinen Eises, das heißt die Temperatur einer Mischung von Eis mit Wasser im thermischen Gleichgewicht. Dieser Punkt ist leicht reproduzierbar. Als zweiter Fixpunkt dient die Temperatur des bei 1013 mbar siedenden reinen Wassers, der Siedepunkt des Wassers. Diese beiden Fixpunkte legen die weit verbreitete **Celsius-**

Ein weiteres Problem bei der Definition der Celsius Skala ist die willkürliche Definition des Nullpunktes. Deshalb müssen wir uns fragen, ob es nicht eine **natürliche Skala** gibt, die wir verwenden können.

Um eine solche natürliche Skala zu finden, betrachten wir nun **temperaturabhängige Effekte**: Im Allgemeinen dehnen sich alle Körper aus, wenn sie warm werden. Die Längenänderung des Festkörpers kann mit einer einfachen Formel berechnet werden:

Der Körper besitzt bei $t_0 = 0^\circ\text{C}$ die Länge l_0 , er wird erwärmt um $\Delta t = t$. Dann berechne man seine neue Länge über die Beziehung

$$l(t) = l_0(1 + \alpha t)$$

α ist der lineare Wärmeausdehnungskoeffizient.

Merke: Ein Körper der Länge l_0 bei $t_0 = 0^\circ\text{C}$ erfährt bei Erwärmung um $\Delta t = t$ eine **Längenänderung** von $l(t) = l_0(1 + \alpha t)$.

Folglich gilt für die Änderung des Volumens eines Quaders aus festem Material mit den Kantenlängen a , b und c

$$V(t) = a \cdot b \cdot c(1 + \alpha t)^3$$

mit $V_0 = abc$ folgt

$$V(t) = V_0(1 + \alpha t)^3$$

Wenn αt sehr klein ist gegen eins, folgt

$$V(t) = V_0(1 + 3\alpha t)$$

mit $\gamma = 3\alpha$ folgt

$$V(t) = V_0(1 + \gamma t)$$

Dabei ist V_0 das Volumen des Quaders bei null Grad Celsius.

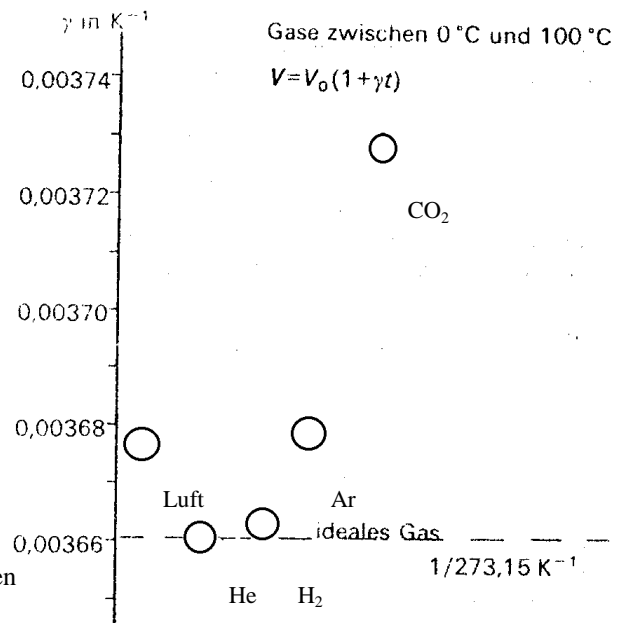
γ wird Volumenausdehnungskoeffizient genannt.

Merke: Ein Körper des Volumens V_0 bei $t_0 = 0^\circ\text{C}$ erfährt bei Erwärmung um $\Delta t = t$ eine **Volumenänderung** von $V(t) = V_0(1 + \gamma t)$.

Da Flüssigkeiten und Gase keine feste Form haben, ist bei Ihnen nur der Volumenausdehnungskoeffizient von Bedeutung. Bei Flüssigkeiten und erst recht bei Gasen ist dieser erheblich höher als bei festen Körpern. Bei der experimentellen Überprüfung dieses Gesetzes zeigt sich ein interessantes Phänomen:

Hält man den Druck konstant, während ein Gas aufgrund von Wärme ausgedehnt wird, so gilt das oben hergeleitete Gesetz. Erstaunlich ist dabei, dass der Koeffizient für alle idealen Gase unabhängig von ihrer chemischen Zusammensetzung denselben Wert ergibt. Dieses Phänomen lässt sich

Abbildung X.2: Volumenausdehnungskoeffizienten verschiedener Gase
um so genauer beobachten, je kleiner der



Gasdruck ist. Offenbart setzt dieses Verhalten idealer Gase einen natürlichen Nullpunkt bei einer Temperatur von minus 273 Grad Celsius.

Diese Eigenschaft wurde im Jahre 1802 von Gay-Lussac in einem Gesetz formuliert:

Merke: Ein Gas des Volumens V_0 bei $t_0 = 0^\circ\text{C}$ erfährt bei konstantem Druck bei Erwärmung um $\Delta t = t$ eine **Volumenänderung** von $V(t) = V_0(1 + \frac{1}{273} t)$.

Gesetz von Gay-Lussac

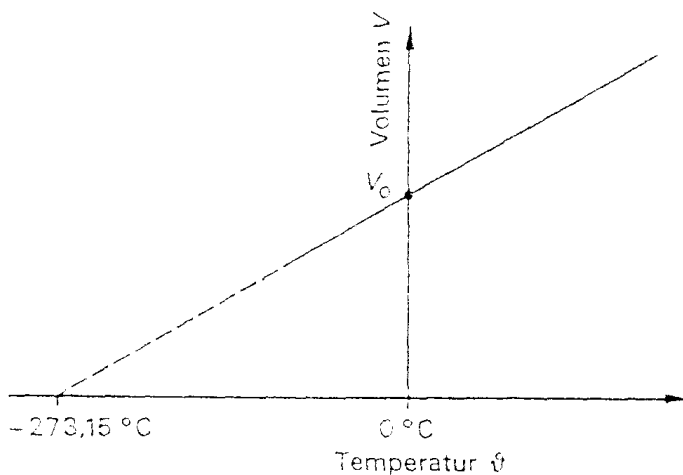


Abbildung X.3: Die Messung von $V(t)$ wird nach $V = 0$ extrapoliert.

Um die Willkür bei der Wahl des Nullpunktes in der Celsius-Skala zu beseitigen, richtet man den Nullpunkt der Skala nach dem natürlichen, dem sogenannten

absoluten Nullpunkt

$t = -273,15 \text{ °C}$

aus. Dabei verschiebt man nur den Nullpunkt, lässt aber das Intervall von einem Grad. Praktisch ist dieser Punkt nicht zu erreichen, denn das

Volumen des Gases wäre bei dieser Temperatur null. Diese Skala wird als absolute oder **Kelvin-Temperaturskala** bezeichnet.

Im folgenden wollen wir die Verschiebung des Nullpunktes gerundet mit -273°C angeben. Um Missverständnisse zu vermeiden, in welcher der beiden gebräuchlichen Skalen die Temperatur angegeben wird, bezeichnen wir im Folgenden:

Notation X.1: Temperaturen in der **Celsius-Skala** werden mit **t** bezeichnet und in $^{\circ}\text{C}$ gemessen. Temperaturen in der **Kelvin-Skala** werden mit **T** bezeichnet und in **K** gemessen.

Merke: Die Skalen können umgerechnet werden über $T = t + 273,15$

Jetzt haben wir zuzüglich zu den SI-Basiseinheiten der Mechanik eine weitere Basiseinheit kennen gelernt:

Die SI-Basiseinheit der Temperatur ist ein Kelvin. Dieses ist definiert als:

Definition X.1: Die SI-Basiseinheit 1K(elvin) ist definiert als der 273,16te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers.

Weil der Tripelpunkt des Wassers bei $0,01^{\circ}\text{C}$ liegt, beträgt die Schmelztemperatur des Eises 0°C oder 273,15 K.

Die Wärmeausdehnung findet im praktischen Leben viele Anwendungen. Ein Beispiel hierfür ist ein Thermoschalter: Lötet man zwei flache Metallstäbe, z.B. aus Eisen und Kupfer, der Länge nach aneinander, so dehnt sich beim Erwärmen der Kupferstab stärker aus. Deshalb biegt sich der Metallstab. Dieses Prinzip wird bei Bimetallthermometern und Temperaturregler vielfach praktisch angewandt.

Bisher haben wir Werkzeug erlernt, die Zustandsänderung eines Körpers, einer Flüssigkeit oder eines Gases zu betrachten und zu beschreiben, welche sich bei einer Temperaturänderungen einstellen. Jetzt geht es um die Ursache der Temperaturänderungen. Damit wenden wir uns dem zweiten Grundbegriff in der Wärmelehre zu: dem Begriff der Wärme.

X.2 Wärme und Wärmemenge

Bis Ende des 18. Jahrhunderts herrschte die Meinung vor, Wärme sei ein unwägbarer, nichtzusehender Stoff. Dieser wurde „Calorium“ genannt.

1789 stellte Graf Rumford fest, dass Wärmeentwicklung zum Beispiel durch Reibung bei mechanischer Arbeit entsteht.

Erst um 1850 wurde der eigentliche Charakter von Wärme endgültig erkannt:

Wärme ist eine Form von Energie.

Experimentell findet man den Zusammenhang zwischen Temperatur und Wärme: Die Wärme ist proportional zur Temperatur und der Masse des erwärmten Körpers. Das zeigt ein einfaches Gedankenexperiment: Um einen Becher Glas mit einem Kilogramm Wasser mittels eines Tauchsieders mit bekannter Leistung auf eine vorgegebene Temperatur zu erwärmen, braucht man die doppelte Zeit wie zur Erwärmung eines halben Liters Wasser. Darüber hinaus ist die Zeit zur Erwärmung auf eine bestimmte Temperatur der Temperaturerhöhung selbst annähernd proportional.

Aus diesem Gedankenexperiment gewinnt man die Vorstellung, dass der Tauchsieder in einer Zeit eine bestimmte **Wärmemenge Q** abgibt, die in Wasser zugeführt wird. Zur Erwärmung ist dann eine Wärmemenge erforderlich, die nicht nur die Temperaturerhöhung, sondern auch der Wassermenge proportional ist.

Nach dieser Überlegung müssen wir den in der Mechanik hergeleiteten Begriff der Energie um die Wärmemenge als eine besondere Energieform erweitern. Wärme kann als Energieform weder aus Nichts entstehen noch ohne Ersatz verloren gehen. Die Energieerhaltung besagt, dass sie sich nur in eine andere Energieform, z.B. mechanische Energie, umwandeln kann. Umgekehrt besteht, wie wir wissen, die Möglichkeit, mechanische Energie z.B. durch Reibung in Wärme umzuwandeln.

Die Einheit der Wärmemenge ist entsprechend dieselbe Einheit wie die der Arbeit oder der Energie ganz allgemein:

$$[Q] = J = Nm$$

Man definiert eine neue Einheit, die Calorie als:

Definition X.2: Eine Calorie ist die Wärmemenge, die man braucht, um ein Gramm Wasser von 14,5°C auf 15,5°C zu erhitzen.

Merke: **1 cal = 4,1868 J**

Die Proportionalitätskonstante zwischen Wärmemenge ΔQ und Temperaturänderung ΔT einer Masse m wird spezifische Wärme genannt:

Merke: Der Quotient aus Wärmemenge ΔQ und dem Produkt aus Temperaturänderung ΔT und der Masse m des erwärmten Körpers wird **spezifische Wärme c** genannt:

$$c = \frac{\Delta Q}{\Delta T \cdot m}.$$

Die benötigte Wärmemenge pro veränderter Temperatur gibt dann das Produkt aus spezifischer Wärme und der Masse des Körpers an. Diese Materialeigenschaft des zu erwärmenden Körpers wird Wärmekapazität genannt.

Merke: Die **Wärmekapazität** gibt die benötigte Wärmemenge pro veränderter Temperatur an:

$$c \cdot m = \frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

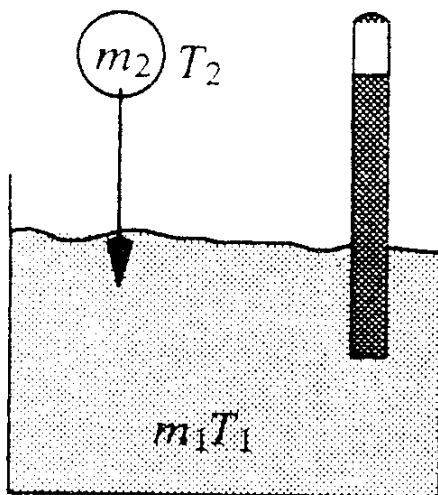


Abbildung X.4: Messung der spezifischen Wärmekapazität eines Körpers mit Hilfe eines Kalorimeters

Gedankenexperiment:

Die spezifische Wärmekapazität eines Stoffes kann man am einfachsten mit Hilfe der Mischungsmethode bestimmen. Dazu bringt man einen Körper der Masse m_2 und der Temperatur T_2 in einen Behälter mit Wasser der Masse m_1 und der niedrigeren Temperatur T_1 . Nach einiger Zeit kann man die Mischtemperatur T des Wassers messen. Aufgrund der Energieerhaltung muss diese vom Metall bei der Abkühlung auf die gemeinsame Temperatur abgegebene Wärmemenge gleich mit der vom Wasser aufgenommenen Wärmemenge sein.

Damit gilt die Gleichung:

$$\begin{aligned} \Delta Q_1 &= \Delta Q_2 \\ \Leftrightarrow c_1 m_1 (T_1 - T) &= c_2 m_2 (T - T_2) \end{aligned}$$

Da alle Größen außer c_2 messbar sind und die spezifische Wärme von Wasser laut Definition bekannt ist, kann mit dieser Methode die Wärmekapazität verschiedener Körper gemessen werden.

Die spezifische Wärmekapazität von Wasser ist besonders groß. Deshalb erwärmen sich Meere und Seen sehr viel langsamer als das sie umgebende Land. Dadurch werden die Unterschiede von Land- und Seeklima bedingt.

X.3 Aggregatzustände

Wir hatten in der Mechanik bereits grob die drei verschiedenen Aggregatzustände besprochen und den ihnen zugrunde liegenden molekularen Aufbau der Stoffe charakterisiert. In diesem Kapitel wollen wir deshalb hauptsächlich auf die Änderung der Aggregatzustände eingehen. Die Umwandlung zwischen den drei Aggregatzuständen findet dabei durch Änderung der Wärmemenge statt. Man kann drei mögliche Übergänge betrachten:

1. der Übergang vom festen zum flüssigen Körper und umgekehrt:

Schmelzen und Erstarren

Wie wir bereits bei der Betrachtung der Reproduzierbarkeit eines Fixpunkts, der Temperatur, bei der Wasser und Eis koexistieren, voraus gesetzt hatten, tritt das Schmelzen bei kristallinen Stoffen stets bei der gleichen Temperatur ein. Diese Temperatur ist eine Materialkonstante und heißt Schmelztemperatur oder Schmelzpunkt.

Führt man bei der Schmelztemperatur dem Körper durch Arbeit oder Wärme Energie zu, während der Druck konstant gehalten wird, so wird diese Energie zur Auflösung des Kristallgitters verwendet. Erst wenn der ganze Körper geschmolzen ist, erhöht sich bei weiterer Energiezufuhr die Temperatur der Flüssigkeit.

Entzieht man der Flüssigkeit hingegen die Energie, so erstarrt sie bei der Schmelztemperatur wieder.

2. den Übergang vom flüssigen zum gasförmigen Aggregatzustand:

Verdampfen und Kondensieren

Führt man bei der Siedetemperatur einer Flüssigkeit Energie bei konstantem Druck zu, so wird dieser dazu verwendet, die Moleküle aus dem Flüssigkeitsverband zu lösen. Das Volumen des Dampfes gegenüber der Flüssigkeit wird stark vergrößert. Erst wenn die ganze Flüssigkeit verdampft ist, erhöht sich bei weiterer Energiezufuhr die Temperatur des Dampfes. Der Entzug von Energie hat zur Folge, dass der Dampf kondensiert.

Die Abhängigkeit der Temperatur eines Körpers von der zugeführten Wärme lässt sich für verschiedene Körper messen. Aufgetragen in einem Q/T-Diagramm sieht man die Grade, also die konstanten Temperaturen, bei denen die zugeführte Energie keine Temperaturerhöhung, sondern eine Änderung des Aggregatzustandes bewirkt. Diese Diagramme lassen sich für verschiedene Stoffe aufnehmen. Bei dem Diagramm für Eis-Wasser-Dampf können die Fixpunkte der Celsius-Skala abgelesen werden.

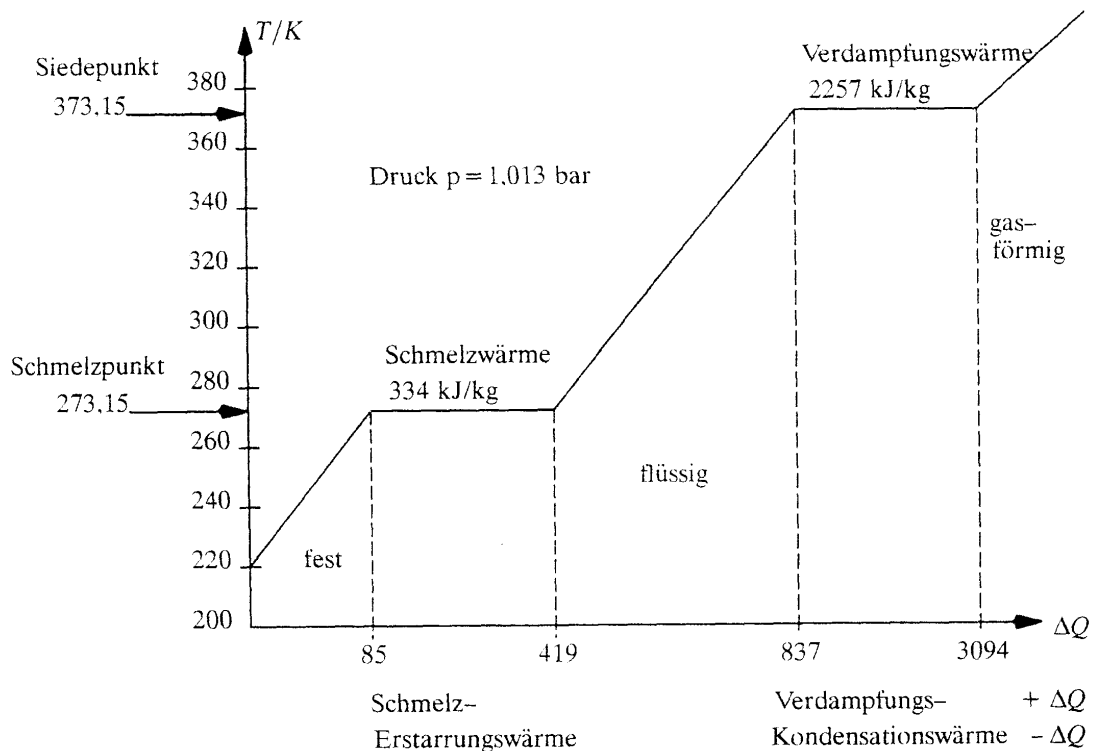


Abbildung X.5: Q/T -Diagramm von H_2O

Aus diesen Diagrammen lässt sich der Zusammenhang von Druck p und Temperatur T mit den Grenzen zwischen den Aggregatzuständen konstruieren. Dabei tritt noch ein Übergang zwischen den Phasen auf:

3. Übergang vom Festkörper zum Gas

Sublimation

Im p,T Diagramm hat die Dampfdruckkurve eine viel geringere Steigung als die Schmelzkurve: Die beiden müssen sich also irgendwo treffen. Dieser Punkt wird Tripelpunkt genannt. An dieser Stelle können gasförmige, flüssige und feste Körper nebeneinander bestehen. Unterhalb und links dieses Punktes gibt es keinen flüssigen Zustand.

Merke: Nur im Tripelpunkt existieren alle drei Aggregatzustände gleichzeitig

Der Tripelpunkt liegt für H_2O bei einem Druck von $6,1 \text{ mbar}$ und $0,0075^\circ\text{C}$ und für CO_2 bei $5,1 \text{ mbar}$ und -56°C .

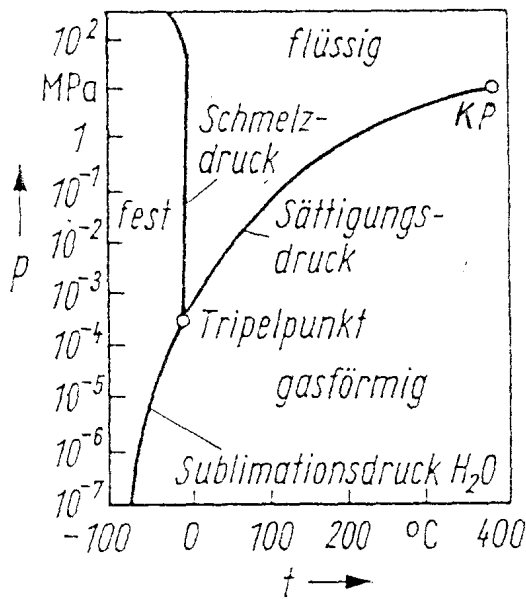


Abbildung X.6: Zustandsdiagramm von H_2O

Merke: Oberhalb der **kritischen Temperatur** kann ein Stoff auch mit beliebiger Druckerhöhung nicht verflüssigt werden.

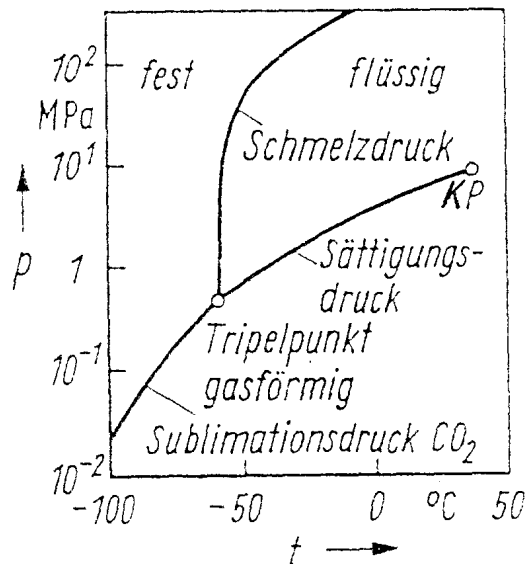


Abbildung X.7: Zustandsdiagramm von CO_2

Die Betrachtung dieser Zustandsdiagramme zeigt, dass es noch einen weiteren, wichtigen Punkt gibt: den kritischen Punkt. Steigt die Temperatur über die kritische Temperatur t_k , so kann der Stoff trotz Druckveränderung nicht mehr verflüssigt werden. Unterhalb der Temperatur t_k kann mittels Druckerhöhung immer der Übergang in die flüssige Phase erzwungen werden. Oberhalb aber ist die Dichte des 'Gases' so groß, dass man nicht sagen kann, ob der Stoff gasförmig oder flüssig ist.

Zu den Phasenübergängen wollen wir nun einen Versuch betrachten:

Versuch X.1: Kritischer Punkt

Bei diesem Versuchsaufbau ist in einem abgeschlossenen Zylinder zur Hälfte Freon 115 eingeschlossen bei einem festen Druck von 30,8 bar. Über ein Wasserbad, welches mit einem Tauchsieder erhitzt wird, kann die Temperatur dieses Stoffes variiert werden. Der Zylinder besteht teilweise aus Glas und wird mit einer Lampe durchleuchtet, so dass man die Vorgänge im Inneren betrachten kann.

Zunächst ist die Temperatur des Wasserbades (und damit der Freon 115) unter 80°C . Man beobachtet unten im Zylinder eine Flüssigkeit und oberhalb Gas. Die Phasen sind klar exakt in der Mitte des Zylinders getrennt. Nun wird der Stoff erhitzt. Ab einer Temperatur von knapp 80°C steigt die flüssige Phase an und füllt immer mehr Raum aus. Ab der kritischen Temperatur

von 80°C kann nur noch eine homogene Substanz beobachtet werden, die den ganzen Zylinder ausfüllt. Man kann nicht sagen, ob dieser Stoff flüssig oder gasförmig ist. Senkt man die Temperatur wieder, so bilden sich erneut zwei Phasen aus.

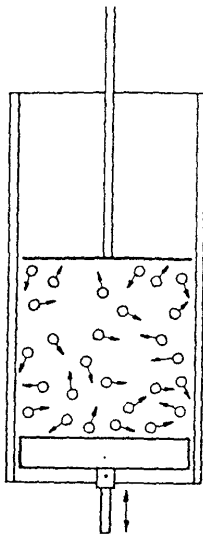
XI. Kinetische Gastheorie

Nachdem wir nun die Begriffe Wärme und Temperatur besprochen haben, wollen wir mit Hilfe dieser beiden Begriffe versuchen, thermodynamische Vorgänge zu beschreiben.

Dabei lernen wir das erste Beispiel einer relativ vollständigen Theorie in der Physik kennen.

Im Allgemeinen sind thermodynamische Vorgänge kompliziert. Deshalb betrachten wir zunächst den einfachsten Fall: ideales Gas. Zur Erinnerung:

Definition IIX.1: Ein Ideales Gas ist ein Gas, in dem die zwischenmolekularen Kräfte null sind und die Moleküle keine Ausdehnung haben (punktförmig sind).



Wie wir bereits festgestellt hatten, kann man sich wie die idealen Gase in einem einfachen Modell veranschaulichen:

Als Modell eines idealen Gases kann man sich ein geschlossenes Volumen vorstellen, in dem elastische Kugeln ohne sich zu berühren regellose Bewegungen ausführen. Selbstverständlich sind die Kugeln nicht immer gleichmäßig über den Raum verteilt. Stellt man sich dem Druck nun so vor, dass die Kugeln an die Gefäßwand treffen, so folgt aus dieser ungleichen Verteilung eine statistische Schwankung der Kraft, die ein eingesperrtes Gas auf einen Kolben ausübt. Dieses Phänomen wollen wir in diesem Kapitel untersuchen.

Wir hatten ideale Gase definiert als Gase, bei denen keine Bindungskräfte zwischen den einzelnen Molekülen existieren. Es gibt einige Gase, die diesem Kriterium nahezu gerecht werden. Physikalischen kann man ideale Gase auch in anderen Fällen realisieren, indem man das Gas hinreichend verdünnt. Die Anziehungskräfte zwischen den einzelnen Molekülen werden dann beliebig klein.

Dieser Idealisierung entspricht der Idealisierung des Massepunktes in der Mechanik. Tatsächlich wollen wir versuchen, das Verhalten der idealen Gase auf mechanische Gesetze zurückzuführen, indem wir die Moleküle als bewegte Massepunkte auffassen.

XI.1 Idealgasgesetze

Zwei wichtige Gesetzmäßigkeiten bei idealen Gasen haben wir bereits in Kapitel IIX und in Kapitel X kennen gelernt. Bevor wir diese Gesetze interpretieren, werden sie hier noch einmal kurz benannt:

1. Gesetz für ideale Gase:

Dieses Gesetz wollen wir zunächst noch einmal anhand eines Versuchs herleiten:

Versuch IX.1: Nachweis des Boyle-Mariottchen Gesetzes

Für diesen Versuchsaufbau benötigen wir einen Zylinder, der mit einem beweglichen Stempel dicht verschlossen ist, und eine Pumpe. In einem Teilraum des Zylinders wird ein ideales Gas eingeschlossen. Die Seite, an der die Pumpe angeschlossen ist, sei mit Luft gefüllt. Jetzt kann mit Hilfe der Pumpe ein Unterdruck im Zylinder

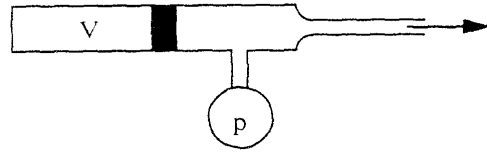


Abbildung XI.1: schematischer Versuchsaufbau zum Boyle-Mariott'schen Gesetz

erzeugt werden. Auf dem Zylinder sind lineare Markierungen angebracht, so dass das Volumen des eingeschlossenen Gases qualitativ gemessen werden kann. Auch der Druck kann gemessen werden. Nun legt man beliebig eine Anfangsstellung fest. Komprimiert man das Gas, so steigt der Druck an. Umgekehrt hat die Erzeugung von Unterdruck zur Folge, dass das Gasvolumen sich ausdehnt.

Empirisch findet man bei diesem Versuch für ideale Gase, dass bei konstanter Temperatur der doppelte Druck aufgewendet werden muss, um das Volumen zu halbieren. Dies gilt natürlich nur, wenn die Menge des Gases konstant gehaltenen wird.

Bis auf Meßungenauigkeiten bei hohen Drucken, wird das Gesetz bestätigt. Die Ungenauigkeiten liegen darin begründet, dass kein ideales Gas verwendet wurde.

Diese Gesetzmäßigkeit hatten wir schon als *Gesetz von Boyle-Mariotte* oder auch nur *Boylesches Gesetz* kennen gelernt.

Merke: Bei gleicher Menge eines Gases und konstanter Temperatur ist das Produkt aus Volumen und Druck konstant:

$$p \cdot V = \text{const} \quad \text{Boyle-Mariotte}$$

2. Gesetz für ideale Gase

I Kapitel X hatten wir für den Zusammenhang zwischen Temperatur und Volumen eines idealen Gases das Gesetz von Gay-Lussac formuliert:

Merke: Ein Gas des Volumens V_0 bei $t_0 = 0^\circ\text{C}$ erfährt bei konstantem Druck bei Erwärmung um $\Delta t = t$ eine **Volumenänderung** von $V(t) = V_0 \left(1 + \frac{1}{273} t\right)$.

Gesetz von Gay-Lussac

Dieses Gesetz besagt, dass das Volumen eines Gases linear mit der Temperatur ansteigt.

Mit der absoluten Temperatur

$$T = t + 273,15$$

folgt aus dem Gesetz

$$V(T) = V_0 \left(1 + \frac{T - 273,15}{273,15}\right)$$

$$\Leftrightarrow V(T) = V_0 \left(1 + \frac{T}{273,15} + \frac{-273,15}{273,15}\right)$$

$$\Leftrightarrow V(T) = V_0 \frac{T}{273,15}$$

mit $T_0 = 0^\circ\text{C} = 273,15 \text{ K}$

$$\Leftrightarrow V(T) = V_0 \frac{T}{T_0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0}}$$

Diese Formel gilt für beliebige Temperaturen T und die dazu gehörigen Volumina V . Bei festem Druck p sind V_0 und T_0 Konstante. Damit folgt

$$\boxed{\frac{V}{T} = \text{const}} \quad \text{für ideale Gase und } p = \text{const}$$

Dieses Gesetz wird manchmal 1. Gesetz von Gay-Lussac genannt. Es ist nur eine äquivalente Formulierung des bereits bekannten Gesetzes von Gay-Lussac.

Merke: Das **1. Gesetz von Gay-Lussac** besagt, dass für ideale Gase bei konstantem Druck $\frac{V}{T} = \text{const}$ gilt.

Der Vergleich der beiden Gesetze zeigt dann eine weiterführende Gesetzmäßigkeit:

Aus $\mathbf{p \cdot V = const}$ für $T = \text{const}$

und $\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{T}} = \text{const}$ für $p = \text{const}$

folgt

$$\boxed{\frac{\mathbf{pV}}{\mathbf{T}} = \text{const}}$$

Dieses Gesetz gilt für die feste Menge eines idealen Gases.

Um die folgenden Rechnungen zu vereinfachen, muss eine neue Größe eingeführt werden. Das Modell des idealen Gases lässt bereits vermuten, dass diese Konstanten aus den Gesetzen für ideale Gase von der Anzahl der Moleküle in einem Gasvolumen abhängen. Deshalb definiert man eine Hilfsgröße, die ein Maß dafür ist, wie viele Moleküle in einem Gasvolumen sind. Diese Größe heißt mol und wird aus messtechnischen Gründen definiert als

Definition XI.1: Ein mol ist die Stoffmenge eines Gases, die ebenso viele

Moleküle enthält wie zwölf Gramm C^{12} , nämlich N_A .

In 12 g C^{12} sind $6,022 \cdot 10^{23}$ Moleküle. Damit entspricht ein Mol des Stoffes C^{12} genau einer Menge von 12 g. Diese Anzahl, die aus messtechnischen Gründen über C^{12} definiert wurde, wird Avogadro-Zahl genannt.

Definition XI.2: Die Avogadro-Zahl ist die Anzahl der Moleküle in einem mol.

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \frac{\text{Moleküle}}{\text{mol}}.$$

Der Vorteil dieser Definition liegt darin, dass man mit dieser festgelegten Stoffmenge immer eine Menge Gas beschreiben kann, die dieselbe Menge Moleküle besitzt. Aus der Überlegung, dass 12g C^{12} $6,022 \cdot 10^{23}$ Moleküle besitzt, kann man die durchschnittliche Masse eines Moleküls angeben. Ferner definiert man

Definition XI.3: Die relative Molekülmasse M_r eines Stoffes entspricht einem Zwölftel der Masse von C^{12} mal der Molekülmasse.

$$M_r = \frac{\text{Molekülmasse}}{\frac{1}{12} \text{Masse von } C^{12}}.$$

Damit entspricht die relative Molekülmasse ungefähr der Summe der Atomgewichte, als z.B. bei H_2O ist $M_r = 18$. Diese Näherung kann gut für Überschläge der Größenordnungen genutzt werden.

Abschließend definiert man die Molmasse M , d.h. die Masse, die ein mol eines Stoffes einnimmt.

Definition XI.4: Die Molmasse M ist das Produkt aus der Masse eines Moleküls und der Anzahl der Moleküle in einem mol.

$$M = N_A \cdot \text{Molekülmasse} = M_r \frac{\text{g}}{\text{mol}}.$$

Die Einheit der Molmasse ist gebunden an die Dimension.

Abschließend definieren wir noch die Molwärme:

Definition XI.5: Die Molwärme ist das Produkt aus der spezifischen Wärme eines Stoffes und seiner Molmasse: Molwärme = Mc .

Mit Hilfe dieser Größen wollen wir nun die Proportionalitätskonstante aus dem Gesetz

$$\frac{pV}{T} = \text{const}$$

bestimmen. Dabei bezeichnen wir die Größen, die sich auf die Stoffmenge von einem mol beziehen nun mit dem Index m .

Eine Konsequenz des Gesetzes ist, dass ein mol eines idealen Gases unter gleichen Bedingungen immer das gleiche Volumen V_m annimmt. Unter Normalbedingungen, d.h.

$$T_0 = 273,15 \text{ K und } p_0 = 101,325 \text{ kPa}$$

beträgt dieses Volumen $V_{m_0} = 22,4138 \text{ l pro mol.}$

Dieses Volumen nennt man molares Normvolumen.

Merke: Ein mol eines idealen Gases nimmt bei $T_0 = 273,15 \text{ K}$ und $p_0 = 101,325 \text{ kPa}$ das **molare Normvolumen V_{m_0}** =

22,4138 l pro mol ein.

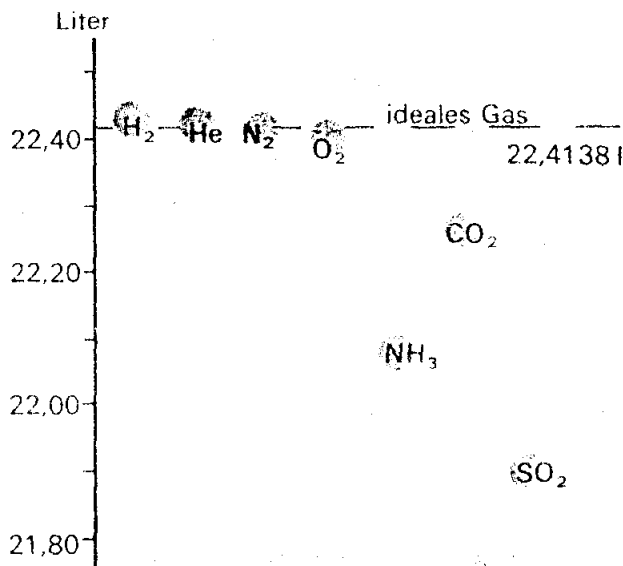


Abbildung XI.2: Mißt man das molare Volumen einiger Gase, so sieht man, daß annähernd ideale Gase dasselbe molare Normvolumen haben.

Das Volumen für n mol berechnet sich dann als

$$V = V_m n.$$

damit ergibt sich aus

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$

mit $V_0 = V_{m_0} n$

$$\frac{p \cdot V_m \cdot n}{T} = \frac{p_0 \cdot V_{m_0} \cdot n}{T_0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p \cdot V_m}{T} = \frac{p_0 \cdot V_{m_0}}{T_0}$$

Der Vergleich mit der ursprünglichen Gleichung zeigt, dass $\frac{p_0 \cdot V_{m_0}}{T_0}$ unsere gesuchte Konstante ist. Damit lässt sich diese Naturkonstante berechnen. Sie wird universelle Gaskonstante genannt und mit R bezeichnet.

Merke: Die **universelle Gaskonstante** $R = \frac{p_0 \cdot V_{m_0}}{T_0}$ beträgt

$$R =$$

bzw. in nicht SI-Einheiten $R =$.

Damit können wir das Gesetz jetzt formulieren:

$$\frac{p \cdot V}{T} = R \cdot n \quad \text{für } n \text{ mol}$$

oder mit $V = V_m n$

$$\frac{p \cdot V_m}{T} = R \quad \text{für ein mol}$$

Dieses Gesetz hatten wir Idealgasgesetz genannt

Idealgasgesetz:

$$\frac{p \cdot V}{T} = R \cdot n \quad \frac{p \cdot V_m}{T} = R$$

für n mol für 1 mol

Dieses Gesetz enthält bereits alles, was wir für die Zustandsberechnung idealer Gase wissen müssen. Es sei noch einmal erwähnt, dass diese Gesetzmäßigkeiten streng genommen nur für ideale Gase gelten, aber auch eine gute Näherung für reale Gase sind, solange diese ausreichend verdünnt sind. Dann ist das Volumen von einem mol groß und folglich die Temperatur hoch und der Druck klein.

Umgekehrt kann man nun aus dem Idealgasgesetz die beiden anfangs zugrunde gelegten Gesetze für ideale Gase und noch ein weiteres Gesetz ableiten.

Betrachten wir zunächst das Boyle-Mariott'sche Gesetz:

Gegeben sei $T = \text{const.}$

Dann folgt aus $\frac{p \cdot V}{T} = R \cdot n$

$$\Leftrightarrow p \cdot V = R \cdot n \cdot T$$

mit R, n und $T = \text{const}$ \Leftrightarrow $p \cdot V = \text{const}$

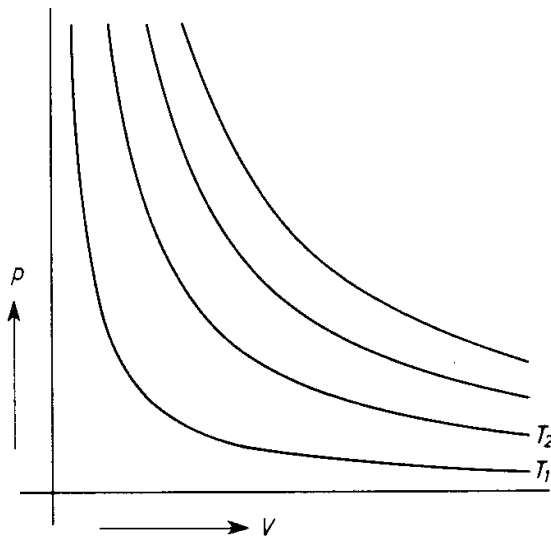


Abbildung XI.3: Isotherme

Im p/V-Diagramm führt die Gleichung $p(V) = \frac{1}{V} \text{const}$ zu Hyperbeln, die je nach Temperatur T steiler oder flacher verlaufen. Je größer T ist, desto größer ist auch $p \cdot V$; die Hyperbeln sind steiler. Diese Graphen der Gleichung des Boyle-Mariott'schen Gesetzes werden Isotherme genannt.

Merke: Der 1. Spezialfall des Idealgasgesetzes ist das
Boyle-Mariott'sche Gesetz mit $T = \text{const.}$
 Der **hyperbelförmige** Graph im p/V-Diagramm wird **Isotherme** genannt.

Betrachten wir nun das 1. Gesetz von Gay-Lussac:

Gegeben sei $p = \text{const.}$

Dann folgt aus $\frac{p \cdot V}{T} = R \cdot n$

$$\Leftrightarrow \frac{V}{T} = R \cdot n \frac{1}{p}$$

mit R, n und $p = \text{const}$ $\Leftrightarrow \frac{V}{T} = \text{const}$

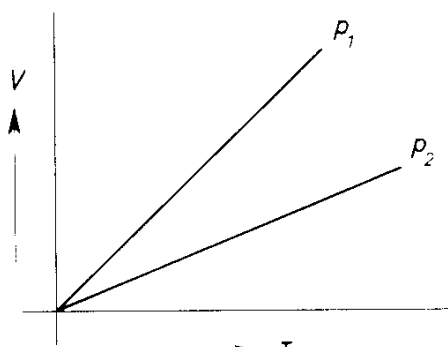


Abbildung XI.4: Isobare

Mit der obigen Rechnung folgt daraus auch die Gleichung

$$V(t) = V_0 \left(1 + \frac{1}{273} t \right)$$

Im V/T-Diagramm führt die Gleichung $V(T) = T \cdot \text{const}$ zu Geraden, die je nach Druck p steiler oder flacher verlaufen. Je kleiner p ist, desto größer ist $V(T)$; die Geraden sind steiler. Diese Graphen der Gleichung des 1. Gesetzes

von Gay-Lussac werden Isobare genannt.

Merke: Der 2.Spezialfall des Idealgasgesetzes ist das
1. Gesetz von Gay-Lussac mit $p = \text{const.}$
 Der **lineare** Graph im V/T-Diagramm wird **Isobare** genannt.

Abschließend berechnen wir, was bei konstantem Volumen aus der Idealgleichung folgt:

Gegeben sei $V = \text{const.}$

Dann folgt aus $\frac{p \cdot V}{T} = R \cdot n$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{T} = R \cdot n \cdot \frac{1}{V}$$

mit R, n und $V = \text{const}$ $\Leftrightarrow \frac{p}{T} = \text{const}$

Eine analoge Rechnung zu oben liefert daraus die Gleichung

$$p(t) = p_0 \left(1 + \frac{t}{273}\right)$$

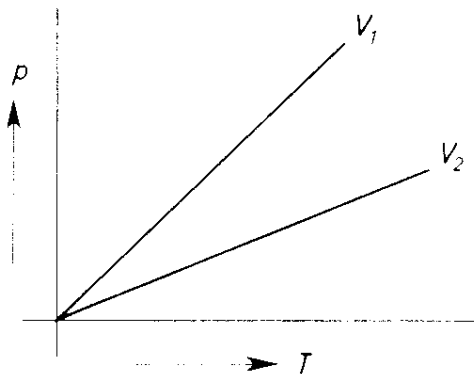


Abbildung XI.5: Isochore

Dieses Gesetz wird 2.Gesetz von Gay-Lussac genannt.

Im p/T-Diagramm führt die Gleichung $p(T) = T \cdot \text{const}$ zu Geraden, die je nach Volumen V steiler oder flacher verlaufen. Je kleiner V ist, desto größer ist V(T); die Geraden sind steiler. Diese Graphen der Gleichung des 2. Gesetzes von Gay-Lussac werden Isochore

genannt.

Merke: Der 3.Spezialfall des Idealgasgesetzes ist das
2. Gesetz von Gay-Lussac mit $p = \text{const.}$

$$p(t) = p_0 \left(1 + \frac{t}{273}\right)$$
 Der **lineare** Graph im p/T-Diagramm wird **Isochore** genannt.

XI.2 Kinetische Gastheorie

Wenn ideale Gase mit so einfachen Gesetzen beschreiben werden können, dann muss das einen tieferen Grund haben. Zudem gelten die gleichen Gesetze für gleich viele Moleküle, wobei die Gültigkeit um so besser ist, je dünner das Gas ist.

Diese Überlegungen führten 1857 dazu, dass der deutsche Physiker Rudolf Clausius (1822 - 1888) den Zusammenhang zwischen der Mechanik und der Wärmelehre aufdeckte. Mit dem Versuch, die Idealgasgesetze aus dem mikroskopischen Verhalten der Moleküle zu verstehen, die im Sinne der Mechanik Massepunkt darstellen, begründete Clausius die kinetische Gastheorie.

Dabei gehen wir wieder auf das inzwischen vertraut gewordene Modell eines idealen Gases zurück, bei dem die Moleküle sich wie elastische Kugeln ohne Ausdehnung verhalten. Mit diesen beiden Annahmen:

1. die Moleküle sind Punktmassen
2. sie führen nur elastische Stöße aus

kann man überlegen, was im Inneren eines mit Gas gefüllten Gefäßes passiert. Dabei kann man zunächst berechnen, wie eine Punktmasse sich bewegt. Danach wird es jedoch schwierig, jede einzelne Punktmasse der immerhin N_A Moleküle pro mol zu untersuchen. Die große Zahl erlaubt es uns aber, einen guten Mittelwert zu bilden. Im Klartext heißt das: Für den Zustand eines Idealen Gases ist nur eine statistische Beschreibung über Mittelwertbildungen möglich; diesem Umstand verdankt dieses Themengebiet der Wärmelehre seinen Namen:

Statistische Mechanik.

Merke: Die kinetische Gastheorie untersucht mit Hilfe der statistischen Mechanik den empirisch gefundenen Zusammenhang von Druck p , Volumen V und Temperatur T .

Betrachten wir nun ein Volumen V , in dem sich ein ideales Gas befindet. Der Einfachheit halber wählen wir das Volumen in Form eines Quaders mit quadratischer Stirnfläche a^2 und der Länge l .

Dann gilt für das Volumen des Quaders

$$V = a^2 \cdot l$$

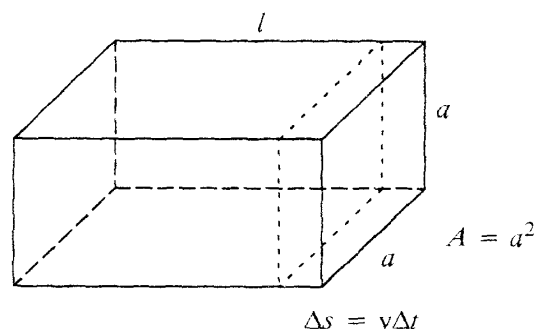
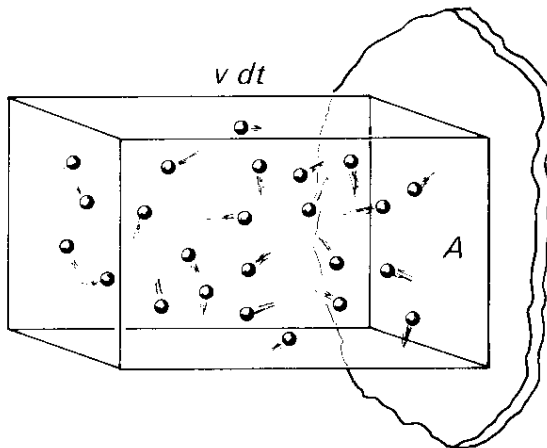


Abbildung XI.6: Quaderförmiges Gasvolumen



In diesem Volumen bewegen sich N Moleküle der Masse m regellos hin und her.

Abbildung XI.7: In diesem Quader bewegen sich die Moleküle regellos hin und her

Wie lässt sich in diesem Modell der Druck auf die Wände des Gefäßes aus der Molekülbewegung herleiten?

Um diese Frage zu beantworten betrachten wir wie angekündigt zunächst ein Molekül, das auf seinem Flug auf eine Wand trifft. Wir gehen davon aus, dass dieses Molekül nicht senkrecht auf die Wand treffe. Beim Stoß an der Wand wird ein Impuls übertragen, das wissen wir aus der Mechanik. Wir berechnen deshalb den Impuls, weil wir damit über die Beziehung der Kraft als Änderung des Impulses mit der Zeit und schließlich mit der Definition des Drucks als Kraft pro Fläche den Druck berechnen wollen.

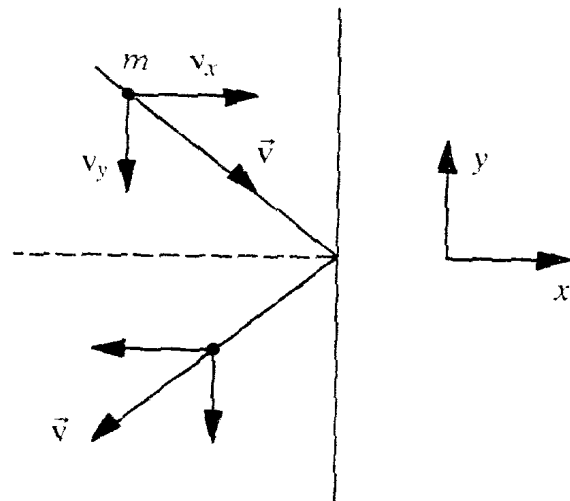


Abbildung XI.8: Stoßvorgang eines Moleküls

Die Änderung des Impulses berechnet sich dabei aus

$$\Delta \vec{p} = m \Delta \vec{v}$$

Legen wir nun das Koordinatensystem so, dass die y -Achse längs der angestoßenen Wand verläuft, und die x -Achse senkrecht dazu, so können wir den Geschwindigkeitsvektor geschickt zerlegen: Die y -Komponente des Geschwindigkeitsvektors bleibt beim Stoß erhalten, während die x -Komponente ihr Vorzeichen ändert. Diese Geschwindigkeitsänderung

$$\Delta \vec{v} = 2v_x$$

führt zu einer Impulsänderung $\Delta p = 2mv_x$.

Nun können wir davon ausgehen, dass unser Molekül nicht nur einmal an eine Wand stößt, sondern auf seinem Weg ohne Energieverlust immer wieder Wände treffen wird.

Wie häufig aber trifft unser Molekül auf eine Wand?

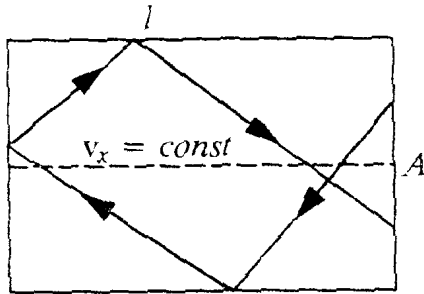


Abbildung XI.9: Flugbahn eines Moleküls

Diese Frage ist einfach zu beantworten: Wir wissen, dass der Betrag der Geschwindigkeit des Moleküls in x-Richtung konstant ist, da die Reflexion immer elastisch erfolgt und die y-Komponente erhalten bleibt. Aus der Mechanik kennen wir das Gesetz für die benötigte Zeit t um eine Strecke x mit konstanter Geschwindigkeit v zurück zulegen.

$$v = \frac{x}{t}$$

In unserem Fall muss eine Strecke von der zweifachen Länge ℓ des Quaders zurück gelegt werden, damit das Molekül wieder an dieselbe Wand stößt.

Dann gilt

$$\Delta t = \frac{2\ell}{v_x}$$

Die Kraft, die das Teilchen auf die Fläche A , also eine Wand, ausübt ist dann

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

$$\Leftrightarrow F = \frac{2mv_x}{\frac{2 \cdot \ell}{v_x}}$$

$$\Leftrightarrow F = \frac{m}{\ell} v_x^2$$

Der Druck auf die Fläche A , der durch unser eines Molekül erzeugt wird ist dann

$$\text{wegen } p = \frac{F}{A}$$

$$p = \frac{m}{\ell A} v_x^2$$

mit $V = \ell \cdot A$

$$\Leftrightarrow p = \frac{m}{V} v_x^2$$

Wie viel Druck üben nun N Moleküle auf diese Wand aus?

Das kann einfach über Summenbildung berechnet werden:

$$p = \sum_{i=1}^N p_i$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{m}{V} \sum_{i=1}^N v_{x_i}^2$$

Nun müssen wir versuchen, diese Summe zu interpretieren. Dazu erweitern wir mit N:

$$\Leftrightarrow p = \frac{m}{V} \cdot N \cdot \frac{\sum_{i=1}^N v_{x_i}^2}{N}$$

In der Statistik wird die Summe über mehrere Werte geteilt durch die Anzahl der Werte als Mittelwert eingeführt. Damit definieren wir die mittlere Geschwindigkeit als

Definition XI.6: Die mittlere Geschwindigkeit $\overline{v_x^2}$ definiert man als $\frac{\sum_{i=1}^N v_{x_i}^2}{N}$.

Mit dieser Definition folgt

$$p = \frac{m}{V} \cdot N \cdot \overline{v_x^2}$$

$$\Leftrightarrow p \cdot V = m \cdot N \cdot \overline{v_x^2}$$

Diese Größe ist eine rein statistische Größe. Wir brauchen jedoch eine messbare Größe, die uns in Versuchen zugänglich ist.

Mit

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

gilt auch

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$$

Wir nutzen jetzt aus, dass alle drei Raumrichtungen statistisch gleichberechtigt sind, d.h. dass keine Richtung bei der regellosen Bewegung der Moleküle bevorzugt wird.

Dann gilt

$$\frac{1}{3} \overline{v^2} = \overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$$

Damit folgt aus

$$p \cdot V = m \cdot N \cdot \overline{v_x^2}$$

direkt

$$p \cdot V = m \cdot N \cdot \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

Diese Gleichung wird Grundgleichung der kinetischen Gastheorie genannt.

Grundgleichung der kinetischen Gastheorie:

$$p \cdot V = m \cdot N \cdot \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

Jetzt haben wir den Druck, der auf eine Gefäßwand wirkt, aus der mechanischen Betrachtung der Gasmoleküle erklärt und einen Zusammenhang hergeleitet. Im Anschluss müssen wir uns fragen, wie die Temperatur als Folge der Bewegung der Moleküle aufzufassen ist:

Was ist die Temperatur T?

Um diese Frage zu beantworten betrachten wir wieder ein mol eines idealen Gases. Wir haben zwei wichtige Gleichungen kennen gelernt:

1. das Idealgasgesetz
$$\frac{p \cdot V_m}{T} = R$$

2. die Grundgleichung
$$p \cdot V = m \cdot N \cdot \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

Diese beiden Gleichungen wollen wir nun vergleichen. Dazu formen wir zunächst das Idealgasgesetz um in die Form
$$p \cdot V_m = R \cdot T \quad \neg$$

Nun betrachten wir die Grundgleichung der kinetischen Gastheorie für die Stoffmenge 1 mol: mit $N = N_A$ Molekülen in einem mol und dem Volumen V_m , das ein mol einnimmt gilt

$$p \cdot V_m = m \cdot N_A \cdot \frac{1}{3} \overline{v^2} \quad -$$

Der Vergleich von \neg und $-$ zeigt, dass gilt

$$R \cdot T = m \cdot N_A \cdot \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

$$\Leftrightarrow R \cdot T = m \cdot N_A \cdot \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

erweitert mit 2
$$\Leftrightarrow R \cdot T = \frac{2}{3} \cdot N_A \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot \overline{v^2}$$

In dieser Gleichung ist der Ausdruck für die mittlere kinetische Energie eines $\overline{W_K}$ Moleküls

enthalten. Mit $\overline{W_K} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \overline{v^2}$ folgt
$$R \cdot T = \frac{2}{3} \cdot N_A \cdot \overline{W_K}$$

$$\Leftrightarrow \frac{R}{N_A} \cdot T = \frac{2}{3} \cdot \overline{W_K}$$

Man fasst nun die beiden Naturkonstanten R und N_A zusammen, um die Rechnung mit dieser Gleichung zu vereinfachen

Definition XI.7: Die Boltzmann-Konstante wird definiert als $k = \frac{R}{N_A}$.

Damit ist $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$.

Mit dieser Abkürzung folgt

$$k \cdot T = \frac{2}{3} \cdot \overline{W_K}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{3}{2} kT = \overline{W_K}}$$

Diese Gleichung gibt den wichtigen Zusammenhang der mittleren kinetischen Energie eines Moleküls mit der Temperatur an. Da dieser Zusammenhang einer der wichtigsten der kinetischen Gastheorie ist, wollen wir ihn näher untersuchen.

Durch diese Beziehungen erhält die absolute Temperatur, die zunächst rein formal zur vereinfachenden Darstellung der Gasgesetze eingeführt wurde, eine anschauliche, physikalische Bedeutung. Offensichtlich wird nicht nur der Druck eines Gases, sondern auch seine Temperatur durch die Bewegungen seiner Teilchen bestimmt.

Dabei kommt es aber nur auf die ungeordnete oder thermische Bewegung der Teilchen an und nicht auf eine allen Molekülen gemeinsame, überlagerte Bewegung. Temperatur und Druck sind statistische Größen, die sich nur auf eine sehr große Anzahl von Teilchen beziehen lassen. Durch die kinetische Deutung der Temperatur wird jetzt auch die Bezeichnung absoluter Nullpunkt verständlich. Für $T = 0 \text{ K}$ ist auch $\overline{W_K} = 0$, d.h. die Teilchen sind in Ruhe. Da die kinetische Energie keine negativen Werte annehmen kann, ist dies der kleinste überhaupt mögliche Wert.

Auf ein einzelnes Teilchen des Gases entfällt der Energieanteil $\frac{3}{2} kT$. Da wir festgestellt hatten, dass keine Raumrichtung bevorzugt wird, besitzt jedes Teilchen entsprechend den drei räumlichen Richtungen drei voneinander unabhängige Bewegungsmöglichkeiten. Man sagt kurz: jedes Teilchen besitzt drei Freiheitsgrade der Translation. Besteht das Molekül nicht nur aus einem Atom, so hat es zusätzlich die Bewegungsfreiheit, sich um bestimmte Achsen zu drehen. Ein solches Molekül kann zusätzlich drei Freiheitsgrade der Rotation besitzen, je nachdem, ob die Drehachse raumfest ist (1 Freiheitsgrad) oder ob sie sich in einer Ebene bewegen kann (2 Freiheitsgrade) bzw. ob die Drehachse frei im Raum beweglich ist. Diese Überlegung zu einem späteren Zeitpunkt in der Experimentalphysik vertieft.

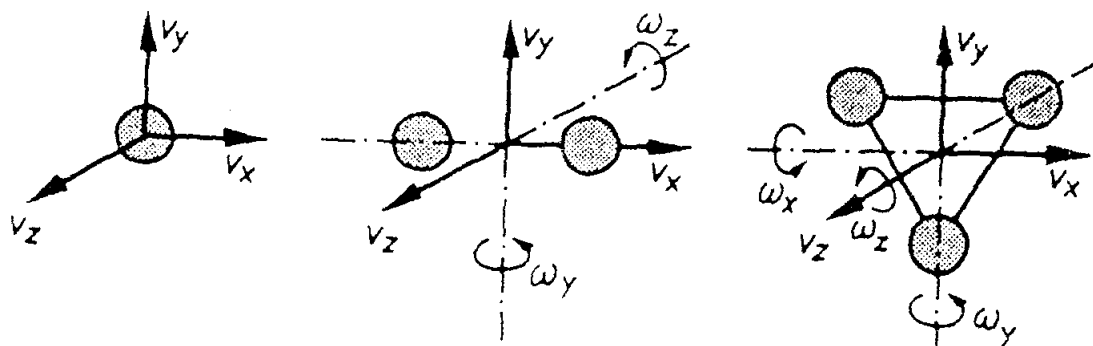


Abbildung XI.10 Freiheitsgrade ein-, zwei- und dreiatomiger Moleküle:

- a) 3 Freiheitsgrade der Translation
- b) 3 Freiheitsgrade der Translation und 2 der Rotation
- c) 3 Freiheitsgrade der Translation und 3 der Rotation

XI.3 Geschwindigkeitsverteilung

In den nächsten beiden Kapiteln wollen wir untersuchen, mit welcher kinetischen Energie, d.h. mit welcher Geschwindigkeit die Moleküle eines idealen Gases fliegen. Da sich die Geschwindigkeit nicht für jedes Molekül einzeln berechnen lässt, betrachten wir die sogenannte Geschwindigkeitsverteilung $n(v)$, d.h. die Häufigkeit, mit der die Moleküle eine feste Geschwindigkeit haben. Bevor wir die Geschwindigkeitsverteilung aber exakt berechnen, wollen wir uns ein Verständnis darüber beschaffen, in welcher Größenordnung wir uns bewegen.

$$\begin{aligned} \text{Die Gleichung besagt} & \quad \frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m\overline{v^2} \\ & \Leftrightarrow \frac{3kT}{m} = \overline{v^2} \\ \text{mit } k = \frac{R}{N_A} & \quad \Leftrightarrow \frac{3RT}{mN_A} = \overline{v^2} \\ \text{mit der Molmasse } M = mN_A & \quad \Leftrightarrow \frac{3RT}{M} = \overline{v^2} \\ & \quad \Leftrightarrow \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \end{aligned}$$

Bei einer Temperatur von $T = 293 \text{ K}$, also $t = 20^\circ\text{C}$, und einer Molmasse $M = 32$

$$\frac{\text{g}}{\text{mol}} \text{ entspricht das einer Geschwindigkeit} \quad \sqrt{\overline{v^2}} = 478 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{für } \text{O}_2$$

$$\text{bzw.} \quad \sqrt{\overline{v^2}} = 1700 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{für } \text{H}_2, \text{ ein leichteres Molekül.}$$

Die Geschwindigkeitsverteilung wurde erstmals 1920 von dem deutschen Physiker Otto Stern ausgeführt.¹

Prinzip dieses Versuchs ist es, die Geschwindigkeit eines scharf begrenzten Molekular- oder Atomstrahls zu messen. Zu diesem Zweck lässt man Gas aus einem Behälter strömen. Dieses strömende Gas wird durch zwei Kollimatorschlitze gebündelt. Die Geschwindigkeit dieser Atome kann man sehr einfach mit zwei Zahnrädern, die im Abstand s auf einer gemeinsamen Achse so montiert sind, dass ein Teilchen die ruhenden Scheiben durch die Löcher passieren kann, messen. Passiert ein Teilchen die erste Scheibe, so legt es danach einen Weg s zurück bis

¹ Otto Stern lebt von 1888 bis 1960. Er emigrierte 1933 aus Deutschland in die USA, wo er im Jahr 1943 den Nobelpreis verliehen bekam.

zur zweiten Scheibe. Diese befindet sich aber nicht in Ruhe sondern rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Das zweite Loch ist also gegenüber dem ersten Loch um den Winkel Θ verschoben. Für die zur Drehung benötigte Zeit gilt dann $t = \Theta/\omega$. In dieser Zeit hat das Teilchen die Strecke s zurückgelegt mit der konstanten Geschwindigkeit v , also gilt $t = \frac{s}{v}$. Ein Vergleich dieser beiden Beziehungen zeigt, dass die Geschwindigkeit v des Moleküls oder Atoms zu berechnen ist aus. Variiert man nun die Winkelgeschwindigkeit, so kann man mit einem Detektor messen, mit welcher Geschwindigkeit v wie viele Teilchen fliegen.

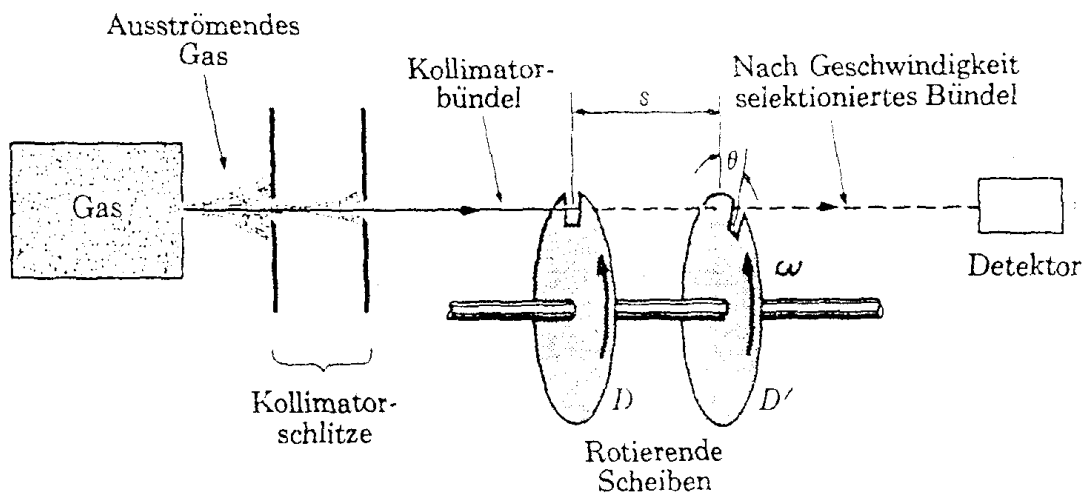


Abbildung XI.11: Schematischer Aufbau des Versuchs von Stern

Dieser Versuch ist leider sehr empfindlich und in der Vorlesung nicht nachzumachen. Deshalb betrachten wir einen Versuch mit unserem 'Gasmodell'. Dabei können wir die Geschwindigkeitsverteilung betrachten und zudem nachweisen, dass unser Modell auch in diesem Aspekt die Wirklichkeit ganz gut beschreibt.

Versuch XI.1: Geschwindigkeitsverteilung

Bei unserem Versuch wird ein Glaszylinder mit leichten Kugeln gefüllt und auf eine Rüttelplatte gestellt. Ein frei beweglicher Stempel drückt im Ruhezustand auf die Kugeln. In dieser Stellung kann man ablesen, welches Volumen die nicht-bewegten 'Gasmoleküle' einnehmen.

Im ersten Versuchsteil betrachten wir den Stempel, während wir die Rüttelplatte starten und damit die Gasmoleküle in Bewegung versetzen. Wir beobachten, dass der Stempel steigt. Offensichtlich erzeugt unser 'Gas' einen Druck auf das Gefäß.

Im zweiten Teil öffnen wir ein kleines Loch an einer Seite des Zylinders. Durch dieses Loch verlassen nun gelegentlich Kugeln das Gefäß. Ein Sortiergerät neben dem Gefäß fängt die Kugel auf und zeigt damit die Häufigkeit der Flugweite, sprich der Geschwindigkeit. Läuft der Versuch eine längere Zeit, so beobachtet man die in der Abbildung gezeigte Verteilung.

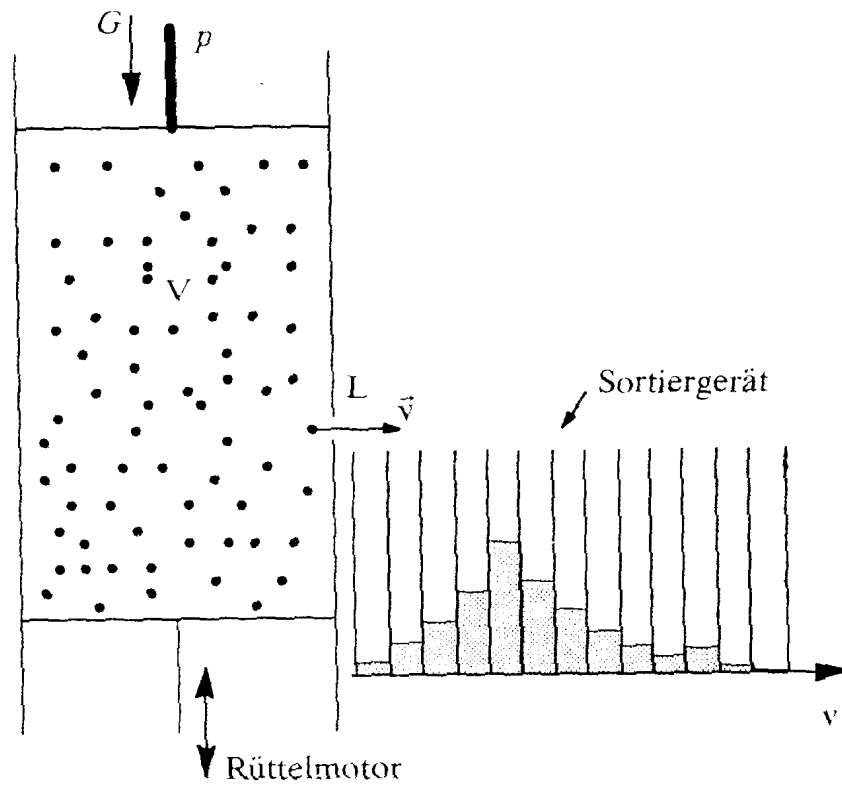


Abbildung XI.12 : Geschwindigkeitsverteilung der Moleküle eines Gasmodells

Im letzten Versuchsteil wollen wir das Boyle-Mariott'sche Gesetz bewahrheiten. Hierzu legen wir verschiedene Massen auf den Stempel und messen bei gleicher Rüttelbewegung das Volumen des Gases mittels einer auf den Zylinder gezeichneten Skala. Da der Druck des Gases durch die Rüttelplatte gleich bleibt, der Druck durch die Gewichte jedoch vergrößert wird, muss das Volumen sich verringern. Berücksichtigt man bei der Berechnung des Produktes von Volumen und Gesamtdruck das anfänglich gemessene Eigenvolumen des Gases, so kann man mit diesem Aufbau das Boyle-Mariott'sche Gesetz auf 10% genau bestätigt finden.

Die Geschwindigkeitsverteilung für ideale Gase haben alle eine charakteristische Form. Die Geschwindigkeitsverteilung ist von der Temperatur abhängig: Je größer die Temperatur und damit die kinetische Energie der Moleküle ist, desto weiter fliegen sie. Bevor wir die Geschwindigkeitsverteilung jedoch genau herleiten und interpretieren, betrachten wir zuvor qualitativ die Geschwindigkeitsverteilung $n(v)$ zweier idealer Gase:

Geschwindigkeitsverteilung $n(v)$ von Stickstoff-Molekülen

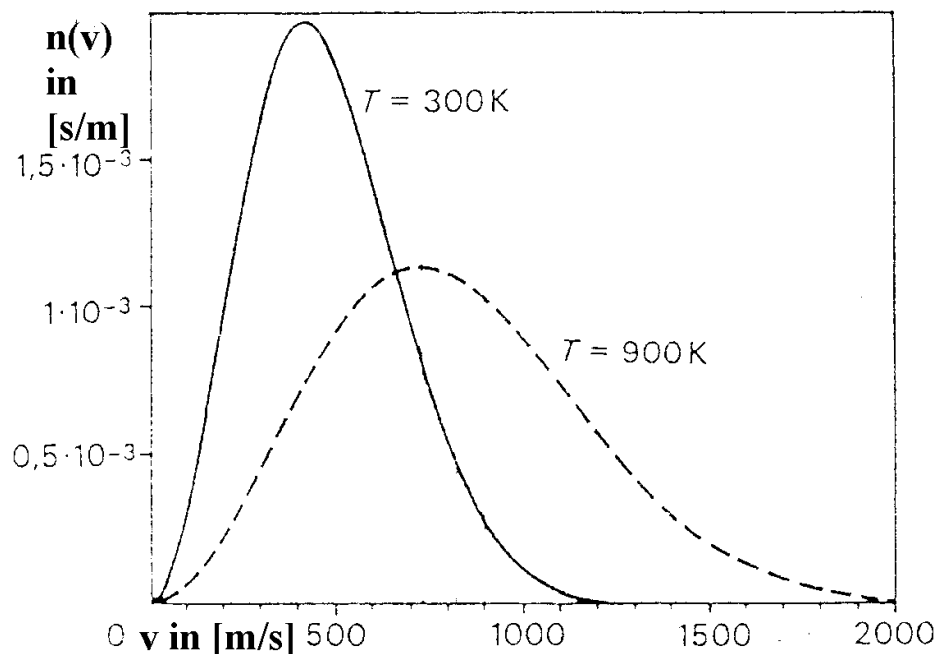


Abbildung XI.13 : Geschwindigkeitsverteilung von N_2 -Molekülen

Geschwindigkeitsverteilung $n(v)$ von Luft-Molekülen

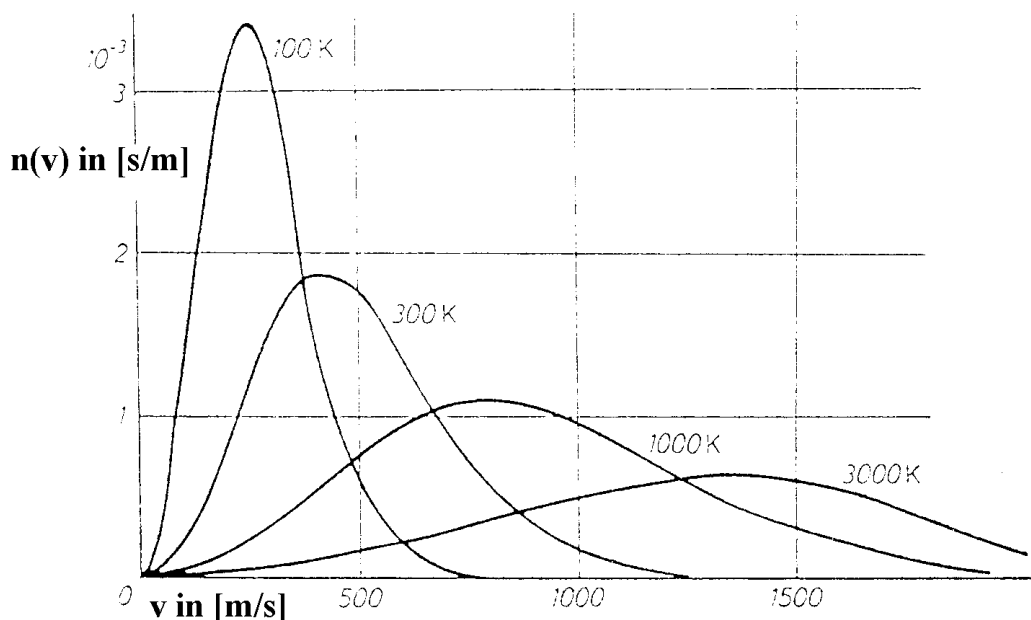


Abbildung XI.14: Geschwindigkeitsverteilung von Luft

Unabhängig von der Verschiebung durch die Temperatur kann man den beiden Diagrammen eine charakteristische Form der Graphen entnehmen. Unterhalb der häufigsten Geschwindigkeit, d.h. im ansteigenden Teil des Graphen verläuft dieser parabolisch. Hier scheint $n(v) \sim v^2$ zu sein. Im fallenden Teil des Graphen sieht man einen exponentiellen Verlauf, also $n(v) \sim e^{-v}$.

XI.4 Theoretische Berechnung von $n(v)$

In diesem Kapitel wollen wir die grob skizzierten Geschwindigkeitsverteilungen und deren Abhängigkeiten von den Zustandsgrößen eines Gases theoretisch herleiten. Diese Berechnung ist leider nicht ganz trivial, führt aber zu einer der wichtigsten Formeln der Physik allgemein, die auch in anderen Bereichen Gültigkeit hat.

Zunächst leiten wir die sogenannte ‘Boltzmann-Verteilung’ her:

XI.4.1 Boltzmann-Verteilung

Der österreichische Physiker Ludwig Boltzmann, 1844 - 1906, leitete ausgehend von der barometrischen Höhenformel eine Beziehung her zwischen Energie und Teilchendichte der Gasmoleküle in einem idealen Gas. Für diese Herleitung betrachten wir, wie gesagt, zunächst die Barometrische Höhenformel:

$$\frac{p}{p_0} = \exp\left(-\frac{\rho_0 g h}{p_0}\right).$$

Diese Formel beschreibt die Druckverteilung von Gas unter dem Einfluss der Schwerkraft (vgl. Kapitel IX.6 S.221).

Mithilfe der Idealgasgesetze können wir den Exponenten umformen, wobei wir zunächst annehmen, es handele sich um ein mol Gas. Dann folgt mit dem Volumen eines mol V_m , der Masse M eines mol des Gases und der Masse m eines Moleküls

$$\text{mit } \rho_0 = \frac{M}{V_{m_0}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p}{p_0} = \exp\left(-\frac{Mgh}{V_{m_0} p_0}\right)$$

$$\text{mit } M = m \cdot N_A \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p}{p_0} = \exp\left(-\frac{m \cdot N_A g h}{V_{m_0} p_0}\right)$$

mit dem Idealgasgesetz für ein mol

$$V_{m_0} p_0 = RT \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p}{p_0} = \exp\left(-\frac{m \cdot N_A g h}{RT}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{p}{p_0} = \exp\left(-\frac{mgh}{\frac{RT}{N_A}}\right)$$

$$\text{mit } k = \frac{R}{N_A} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p}{p_0} = \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)$$

Der Ausdruck mgh gibt die potentielle Energie W_P eines Moleküls im Schwerfeld wieder.

$$\text{Mit } W_P = mgh \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p}{p_0} = \exp\left(-\frac{W_P}{kT}\right)$$

Nun schreiben wir noch den Druck p um, indem wir die Teilchenzahldichte betrachten. Dabei definieren wir die Teilchenzahldichte n in Analogie zur Massendichte als Quotient aus den in einem Volumen V enthaltenen Teilchen N und dem Volumen.

Definition XI.8: Die Teilchenzahldichte n ist der Quotient aus den in einem

$$\text{Volumen } V \text{ enthaltenen Teilchen } N \text{ und dem Volumen: } n = \frac{N}{V}.$$

Bei konstanter Temperatur ist die Teilchenzahldichte n proportional zum Druck, da $p \cdot V \sim N$ ist bei konstantem T . Betrachten man ferner die Masse M als konstant, so folgt

$$\frac{n}{n_0} = \exp\left(-\frac{W_P}{kT}\right)$$

Diese Gleichung ist die Boltzmann-Verteilung.

Merke: Das Verhältnis der Teilchenzahldichte von der potentielle Energie der Moleküle eines idealen Gases wird gegeben durch die **Boltzmann-Verteilung**

$$\frac{n}{n_0} = \exp\left(-\frac{W_P}{kT}\right).$$

Anders ausgedrückt gibt diese Gleichung wieder, wie die Teilchenzahldichten n und n_0 sich verhalten, wenn sie an diesen Orten die potentielle Energie W und W_0 haben. Potentielle Energie kann dabei Schwereenergie, aber auch z.B. elektrische Energie sein. Deshalb formuliert man für allgemeine Energiezustände W_i eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit, mit der Gasmoleküle eines Systems diese Energie besitzen:

Merke: Wenn die Moleküle eines Systems bei der Temperatur T verschiedene Energien W_i einnehmen können, dann geschieht das mit der Wahrscheinlichkeit p_i :

$$p_i = g_i \exp\left(-\frac{W_i}{kT}\right).$$

Dabei ist g_i das statistische Gewicht des Zustandes i . Verschiedene Zustände haben verschiedene statistische Gewichte, wenn ihre Wahrscheinlichkeit schon abgesehen von allen energetischen Betrachtungen verschieden ist. Diese Gleichung wird zentrales Theorem der statistischen Mechanik genannt:

Zentrales Theorem der statistischen Mechanik:

$$p_i = g_i \exp\left(-\frac{W_i}{kT}\right)$$

Für kontinuierliche Werte der Energie W statt diskreter Zustände i schreibt man

$$p(W) = g(W) \exp\left(-\frac{W}{kT}\right).$$

Mit dieser Gleichung lässt sich die Geschwindigkeitsverteilung von Gasmolekülen berechnen:

XI.4.2 Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung

Ziel der folgenden Berechnung ist es, eine exakte Gleichung für die Geschwindigkeitsverteilung $n(v)$ zu bekommen. Quantitativ hatten wir schon anhand der Abbildung XI. festgestellt, welche Elemente die Gleichung enthalten muss. Nun betrachten wir die mathematische Herleitung:

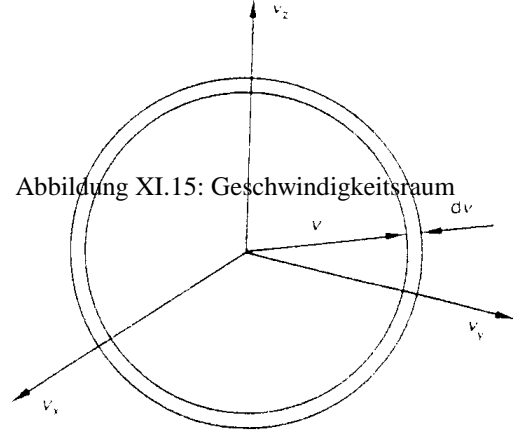
Für die Moleküle der Masse m eines Gases kann man die kinetische Energie angeben mit

$$W_K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Nach Boltzmann nehmen diese Moleküle diese Energie mit einer Wahrscheinlichkeit ein von

$$p_v = g_v \exp\left(-\frac{\frac{1}{2}mv^2}{kT}\right).$$

Der Index $_v$ bezeichnet hier die Abhängigkeit der Energiezustände von der Geschwindigkeit v . Das statistische Gewicht g_v ist in diesem Fall die Zahl der möglichen Zustände mit einer Geschwindigkeit zwischen v und $v + dv$. Bei diesem Ansatz wurde bedacht, dass eine exakte Geschwindigkeit v nicht zu bestimmen ist, sondern immer mit einer Ungenauigkeit dv behaftet ist. Betrachtet man nun den Geschwindigkeitsraum, d.h. den Raum, der durch die Geschwindigkeitskomponenten v_x , v_y und v_z aufgespannt wird, so beschreiben die Vektoren \vec{v} und $\vec{v} + d\vec{v}$ zwei konzentrische Kugelschalen. Das kann man sich mit einer Skizze veranschaulichen: Nur die Länge der Vektoren \vec{v} und $\vec{v} + d\vec{v}$ sind bekannt. Die Zahl der möglichen Zustände mit einer Geschwindigkeit zwischen v und $v + dv$ entspricht also der Anzahl der Punkte zwischen diesen Kugelschalen, also dem eingeschlossenen Volumen.



Also gilt mit

$$g_v = 4\pi v^2 dv$$

$$p_v = 4\pi v^2 dv \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

Für uns ist jedoch nicht die Wahrscheinlichkeit interessant sondern die wirkliche Verteilung, deshalb betrachten wir $N(v)$, wobei $N(v) \sim p_v$ ist.

$$dN(v) \sim 4\pi v^2 dv \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

mit $n(v) = \frac{1}{N} \frac{dN}{dv}$ folgt

$$n(v)Ndv = C \cdot 4\pi v^2 dv \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

mit der Proportionalitätskonstanten C .

Die Gesamtzahl der Teilchen muss erhalten bleiben, also muss gelten:

$$\int_0^{\infty} n(v)dv = 1$$

also folgt

$$\frac{1}{N} \int_0^{\infty} C \cdot 4\pi v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv = 1$$

Die Lösung des Integrals über Substitution ergibt die

Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung:

$$n(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).$$

Die exakte Rechnung kann im Anhang nachgelesen werden.

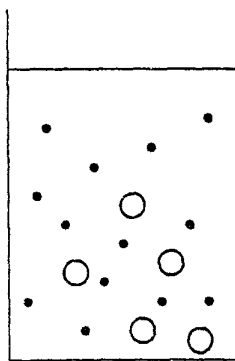
Wichtig an dieser Stelle ist es vor allem, den quadratischen Term und den exponentiellen Term zu erkennen. Diese beiden Faktoren hatten wir aus dem Diagramm bereits abgelesen. Ferner ist wichtig zu wissen, dass der Boltzmannfaktor in dieser Gleichung steht und wie die Gleichung entsteht.

XI.4.3 Brownsche Molekularbewegung

Wir haben festgestellt, dass Teilchen in einem Gas mit der Temperatur T die mittlere kinetische Energie $\frac{3}{2}kT$ haben. Wie groß das Teilchen ist spielt aufgrund der Gleichverteilung keine Rolle. Falls sich also Schwebeteilchen in einem Gas oder auch in einer Flüssigkeit befinden, stellt sich ein Gleichgewicht zwischen der Energie der Gasmoleküle und der Schwebeteilchen ein. Mit derselben kinetische Energie fliegen die schwereren Teilchen aber langsamer. Für ein Teilchen mit $1\mu\text{m}$ Durchmesser und einer Masse von 10^{-15} kg folgt bei Zimmertemperatur $T = 300\text{ K}$ eine mittlere Geschwindigkeit von $\sqrt{v^2} \cong 3\frac{\text{mm}}{\text{s}}$.

Diese Bewegung ist unter einem Mikroskop deutlich zu beobachten. Auf diese Weise stieß der Botaniker Brown², der zunächst aufgrund der regellosen, zuckenden Bewegungen die Schwebeteilchen in Pflanzenzellen für Lebewesen hielt, 1827 auf einen direkten Beweis der kinetischen Gastheorie.

Wir wollen die Brownsche Molekularbewegung anhand unseres Gasmodells und anschließend in einem Film betrachten:



Versuch XI.2: Brownsche Molekularbewegung

Für diese Demonstration geben wir zu den kleinen 'Gasmolekülen' noch größere Schwebeteilchen, in unserem Fall größere Styroporkugeln in den Zylinder. Versetzt man die Moleküle jetzt mit Hilfe der Rüttelplatte in Bewegung, so kann man beobachten, dass die kleinen Kugeln bald zu schnell werden, um sie mit bloßem Auge aufzulösen. Die größeren Kugeln hingegen fliegen so langsam, dass man ihre Bahn mühelos verfolgen kann.

Abbildung XI.16:
schematische Darstellung des
Versuchs XI.2

Eine Filmaufnahme zeigt die Bewegung von Fetttropfen einer Milchemulsion unter dem Mikroskop und die Molekularbewegung von Bakterien.

XI.4.4 Definition der mittleren Geschwindigkeit

In diesem Kapitel wollen wir noch einmal auf die Definition XI.6 zu sprechen kommen. Bisher haben wir einen Mittelwert der Geschwindigkeit definiert und diesen stets als *den* Mittelwert bezeichnet. Tatsächlich unterscheidet man in den Naturwissenschaften zwischen

² Robert Brown, 1773 - 1858, war ein englischer Botaniker.

verschiedenen Mittelwerten. Deshalb muss man genau unterscheiden, um welchen Mittelwert es sich bei einer Rechnung handelt.

Der am häufigsten genutzte Mittelwert, der zudem meist gemeint ist, wenn der Begriff nicht weiter spezifiziert wird, ist der

arithmetische Mittelwert.

Diesen hatten wir definiert als

$$\overline{v^2} = .$$

Ferner wird die wahrscheinlichste, oder häufigste Geschwindigkeit definiert. Diesen Mittelwert der Geschwindigkeit kennzeichnen wir mit dem Index w für „wahrscheinlichster“. Trägt man die Häufigkeit aller möglichen Geschwindigkeiten auf, so ist die wahrscheinlichste die, die am häufigsten vorkommt, also das Maximum der Geschwindigkeitsverteilung. Mit dieser Definition kann man die wahrscheinlichste Geschwindigkeit berechnen, wenn man bedenkt, dass die Geschwindigkeitsverteilung an dieser Stelle ein Maximum und damit deren Ableitung an dieser Stelle einen Nullpunkt hat. Die Geschwindigkeitsverteilung kennen wir

$$n(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right).$$

Die Bedingung

$$\frac{dn(v)}{dv} = 0$$

liefert

$$0 = \frac{\left[4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) \right]}{dv}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{\left[v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) \right]}{dv}$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2v \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) + v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) \cdot \left(-2v \cdot \frac{m}{2kT} \right)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) \left(2v - 2v^3 \cdot \frac{m}{2kT} \right)$$

mit $\exp(u) \neq 0$

$$\Rightarrow 0 = \left(2v - 2v^3 \cdot \frac{m}{2kT} \right)$$

mit $v \neq 0$

$$\Rightarrow 0 = \left(2 - v^2 \cdot \frac{m}{kT} \right)$$

$$\Leftrightarrow v^2 \cdot \frac{m}{kT} = 2$$

$$\Leftrightarrow v^2 = 2 \frac{kT}{m}$$

$$\Rightarrow v_w = \sqrt{2 \frac{kT}{m}}$$

Damit schreibt man die

wahrscheinlichste Geschwindigkeit

als

$$v_w = \sqrt{2 \frac{kT}{m}} .$$

Ein Vergleich der beiden mittleren Geschwindigkeiten zeigt:

mit $\overline{v^2}$ in der Gleichung $\frac{1}{2} m \cdot \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$

und der Gleichung $v_w = \sqrt{2 \frac{kT}{m}}$

folgt $\frac{1}{3} m \cdot \overline{v^2} = kT$

und $\frac{1}{2} m \cdot v_w^2 = kT$

Damit gilt $\frac{1}{2} m \cdot v_w^2 = \frac{1}{3} m \cdot \overline{v^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot v_w^2 = \overline{v^2}$$

$$\Leftrightarrow 1,23 \cdot v_w = \sqrt{\overline{v^2}}$$

Mit dieser Beziehung kann man die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung besser schreiben

als

$$n(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_w^3} \exp\left(\frac{-v^2}{v_w^2}\right)$$

Als dritte Möglichkeit der Mittelwertbildung definiert man die mittlere Geschwindigkeit als Mittelwert der Verteilung $n(v)$. Damit ist die

mittlere Geschwindigkeit

mit $n(v)$ definiert als

$$\overline{v} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} v \cdot n(v) dv}{\int_{-\infty}^{+\infty} n(v) dv} .$$

Mit der bereits eingeführten Normierung $\int_0^{\infty} n(v) dv = 1$

folgt $\bar{v} = \int_0^{\infty} v \cdot n(v) dv$

Eine analoge Rechnung zur Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung und der Vergleich mit der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit v_w führt zu dem Ergebnis

$$\bar{v} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_w \cong 1,13 v_w$$

Die Lage der verschiedenen definierten mittleren Geschwindigkeiten sind in diesem Diagramm aufgetragen:

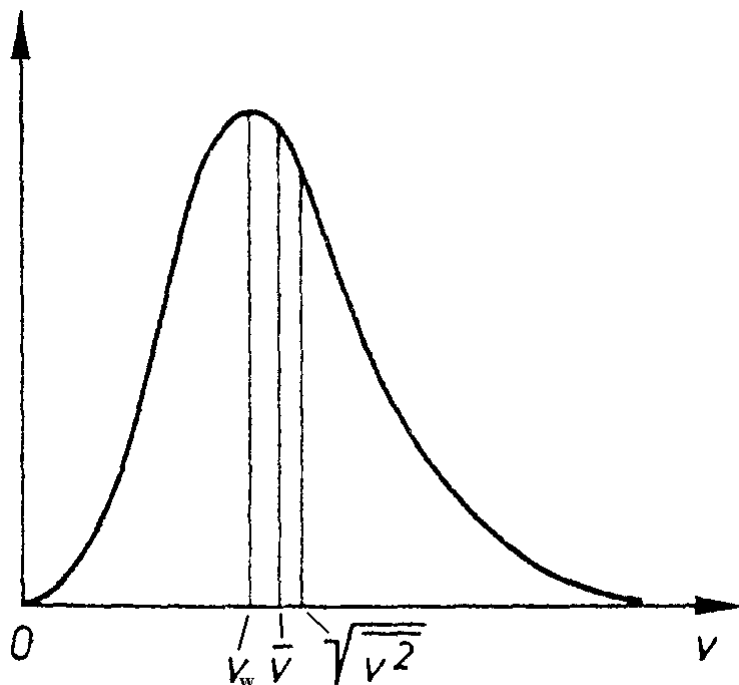


Abbildung XI.17:
Geschwindigkeits-
verteilung $n(v)$ und
die drei mittleren
Geschwindigkeiten.

XII. Reale Gase

In Kapitel XI hatten wir zwei wesentliche Annahmen für ideale Gase gemacht:

1. die Moleküle sind Punktmassen
2. es existieren keine zwischenmolekularen Kräfte

Zudem hatten wir bereits festgestellt, dass man ideale Gase dadurch näherungsweise realisieren kann indem man die Gase verdünnt. Umgekehrt folgt daraus aber, dass Gase bei hohen Drucken und bei tiefen Temperaturen keine idealen Gase sind.

Um diese realen Gase zu beschreiben, sind die bisher hergeleiteten Gesetze nicht anwendbar. In diesem Kapitel wollen wir deshalb versuchen, indem wir uns von diesen beiden Idealisierungen trennen und deren Folgen bedenken, diese Gesetze so umzuformulieren, so dass sie für reale Gase Gültigkeit besitzen. Es wird sich zeigen, dass die so konstruierten Gesetze erstaunlich gut die Eigenschaften realer Gase beschreiben.

XII.1 Van der Waals-Gleichung

Grundlage bei der Betrachtung idealer Gase war die Idealgasgleichung.

$$p \cdot V_m = R \cdot T$$

Wie ändert sich diese Gleichung unter Berücksichtigung der Ausdehnung von Molekülen und der zwischenmolekularen Kräfte?

1) Betrachten wir zunächst die Folgen des Eigenvolumens der Moleküle. Die Tatsache, dass wir ein solches Eigenvolumen nicht unwesentliche Effekte hervorruft, haben wir bereits bei Versuch XI. akzeptiert. Hier haben wir bei unserem Modell nur die Volumendifferenz des Gases in ruhendem und 'geschütteltem' Zustand als Rechnungsgrundlage genutzt. Das Eigenvolumen der Moleküle steht für Bewegungen nicht zur Verfügung. Bezeichnen wir das wegen des Eigenvolumens der Moleküle in einem mol Gas nicht für Bewegungen zur Verfügung stehende Volumen mit b , so bleibt als Restvolumen

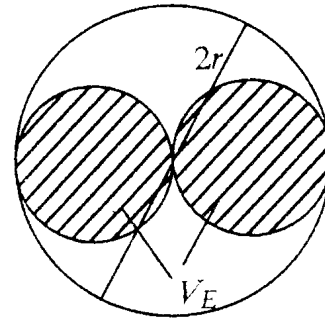
$$V_m' = V_m - b$$

das Volumen b wird Kovolumen genannt.

Dieses Kovolumen entspricht nicht dem Eigenvolumen der Gasmoleküle:

Ein Molekül mit dem Radius r hat ein Volumen von

$$V_i = \frac{4}{3} \pi r^3.$$



Wie die Abbildung XII.1 zeigt, können sich zwei Moleküle eines realen Gases aber nur auf den Abstand $2r$ nähern, bis sie zusammenstoßen. Dem einen Molekülmittelpunkt ist der

Raum einer Kugel vom Radius $2r$ gesperrt. Das bedeutet eine Volumenminderung pro Molekül von

Abbildung XII.1: nicht für Bewegung zur Verfügung stehendes Kovolumen eines Moleküls

$$V_i = 4 \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

Das bedeutet eine Volumendifferenz im Vergleich zum Zusammenstoß zweier Punktmassen von

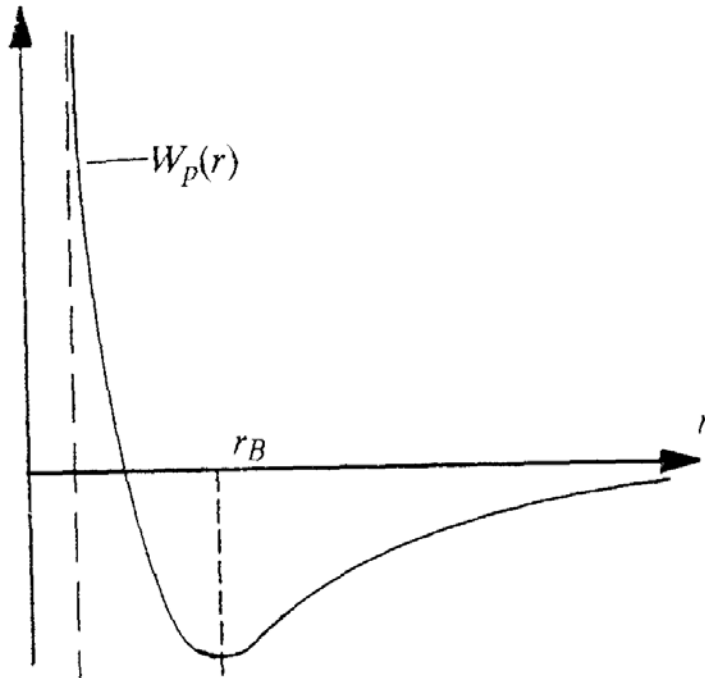
$$\Delta V_i = 4 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

Das Kovolumen b entspricht also dem vierfachen Eigenvolumen V_E der Moleküle. In einem mol muss deshalb insgesamt das Kovolumen

$$b = 4V_E N_A.$$

2) Nun untersuchen wir die Folgen der zwischenmolekularen Kräfte. Obwohl sich die Ladungen des Atomkerns und der Elektronen aufheben, entstehen in der Umgebung von Atomen und Molekülen Kräfte. Diese komplizierten Restkräfte der Coulomb-Anziehung Kern-Elektron sind elektrischer Natur und durch die ungleichmäßige Verteilung positiver und negativer Ladungen in den einzelnen Molekülen bedingt. Es können Dipolkräfte oder Kräfte höherer Ordnung sein. Die auch als *van der Waalsschen Kohäsionskräfte*, bzw. einfach *van der Waals Kräfte*, bezeichneten Kräfte nehmen schnell mit der Entfernung ab.

Das Diagramm, in dem die potentielle Energie eines Moleküls in Abhängigkeit von der



schließlich gegen null.

Abbildung XII.2: Potentialbild eines Moleküls in Abhängigkeit vom Abstand r zu einem weiteren Molekül

Entfernung zu einem zweiten Molekül aufgetragen ist, zeigt, dass die potentielle Energie in der direkten Nähe eines zweiten sehr groß ist. Die potentielle Energie ist im Bindungszustand an niedrigsten, der Abstand der Moleküle im Bindungszustand sei r_B . Entfernt sich das Molekül weiter, so wird die Anziehungskraft der Moleküle schnell kleiner und konvergiert

Diese Anziehungskräfte erzeugen einen zusätzlichen Binnendruck p_B . Dieser Binnendruck erhöht den bei der Idealgasgleichung betrachteten Außendruck p , oder anders ausgedrückt, der Druck auf die Wand wird durch den anziehenden Binnendruck reduziert. Damit kann man den Gesamtdruck p' angeben als

$$p_B + p = p'.$$

Der Binnendruck ist proportional zur Dichte n der stoßenden und gestoßenen Teilchen, denn jedes Teilchen steht in Wechselwirkung mit jedem anderen.

Also ist

$$p_B \sim n^2$$

Mit der Definition der Teilchenzahldichte

$$n = \frac{N_A}{V_m}$$

gilt dann

$$p_B \sim \frac{1}{V_m^2}$$

Die Proportionalitätskonstante a hängt vom Bau der Moleküle ab und ist deshalb charakteristisch für einzelne Gase.

Berücksichtigt man diese beiden Korrekturen, so ergibt sich aus der Idealgasgleichung

$$p \cdot V_m = R \cdot T$$

mit dem Restvolumen

$$V_m' = V_m - b$$

und dem Binnendruck

$$p_B \sim \frac{1}{V_m^2}$$

die Gleichung

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = R \cdot T$$

a und b sind empirische Konstanten mit den oben erläuterten Interpretationen. Diese Gleichung wird van der Waalssche Zustandsgleichung genannt.

Merke: **van der Waalssche Zustandsgleichung**

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = R \cdot T$$

Anhand dieser Gleichung können wir nun z.B. die Isothermen realer Gase bestimmen. Für ideale Gase hatten wir festgestellt, dass bei konstanter Temperatur die Kurven im p/V-Diagramm Hyperbeln sind. Die Gleichung für reale Gase lässt bereits vermuten, dass diese Kurven für reale Gase komplizierter sind. Um sie zu ermitteln multiplizieren wir zunächst die van der Waals Gleichung aus:

$$pV_m + \frac{a}{V_m} - pb - \frac{ab}{V_m^2} = R \cdot T$$

$$\Leftrightarrow pV_m^3 + aV_m - V_m^2pb - ab = R \cdot T \cdot V_m^2$$

$$\Leftrightarrow V_m^3 + \frac{aV_m}{p} - V_m^2 \frac{pb + RT}{p} - \frac{ab}{p} = 0$$

Für eine feste Temperatur T und festen Druck p ergibt sich eine Gleichung dritten Grades für V. Alle Punkte mit derselben Temperatur liegen auf dieser Kurve, sie schneidet die Gerade p = const. in drei Punkten. In Abbildung XII.3 sind die Isothermen verschiedener Temperaturen für CO₂ aufgetragen.

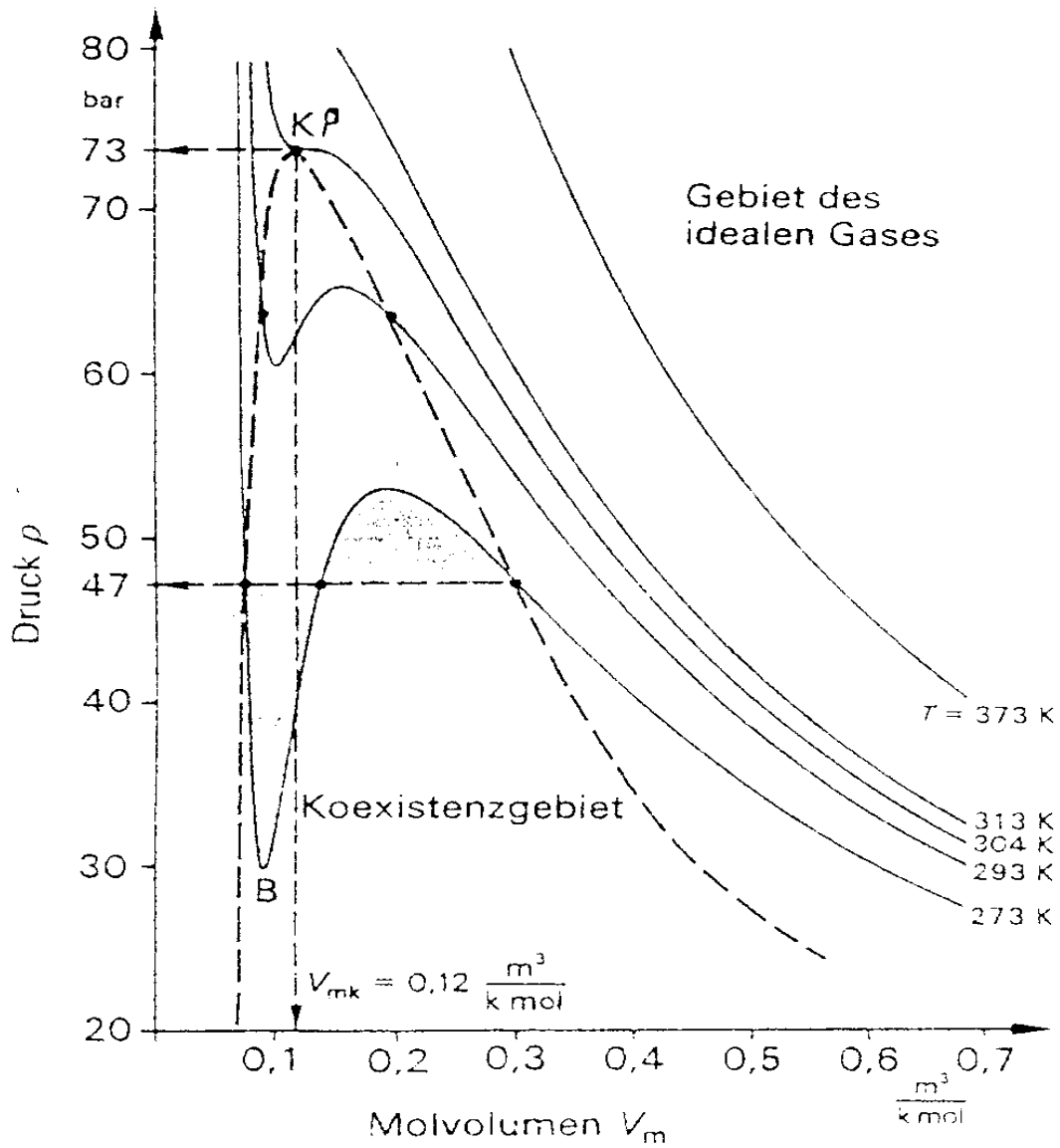


Abbildung XII.3: Isothermen für CO_2

Für hohe Temperaturen T ähneln die Kurven den Hyperbeln des idealen Gases. Das ist einfach zu verstehen, bedenkt man, dass mit steigender Temperatur das reale Gas ein immer größeres Volumen einnimmt und schließlich angenähert ein ideales Gas darstellt.

Betrachten wir diese Isothermen für kleinere T nun systematisch indem wir bei großem Volumen beginnen.

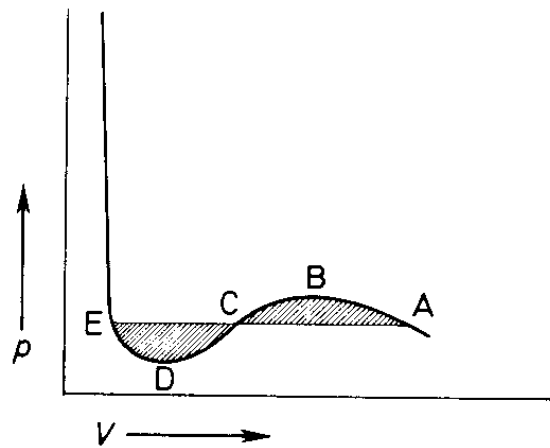
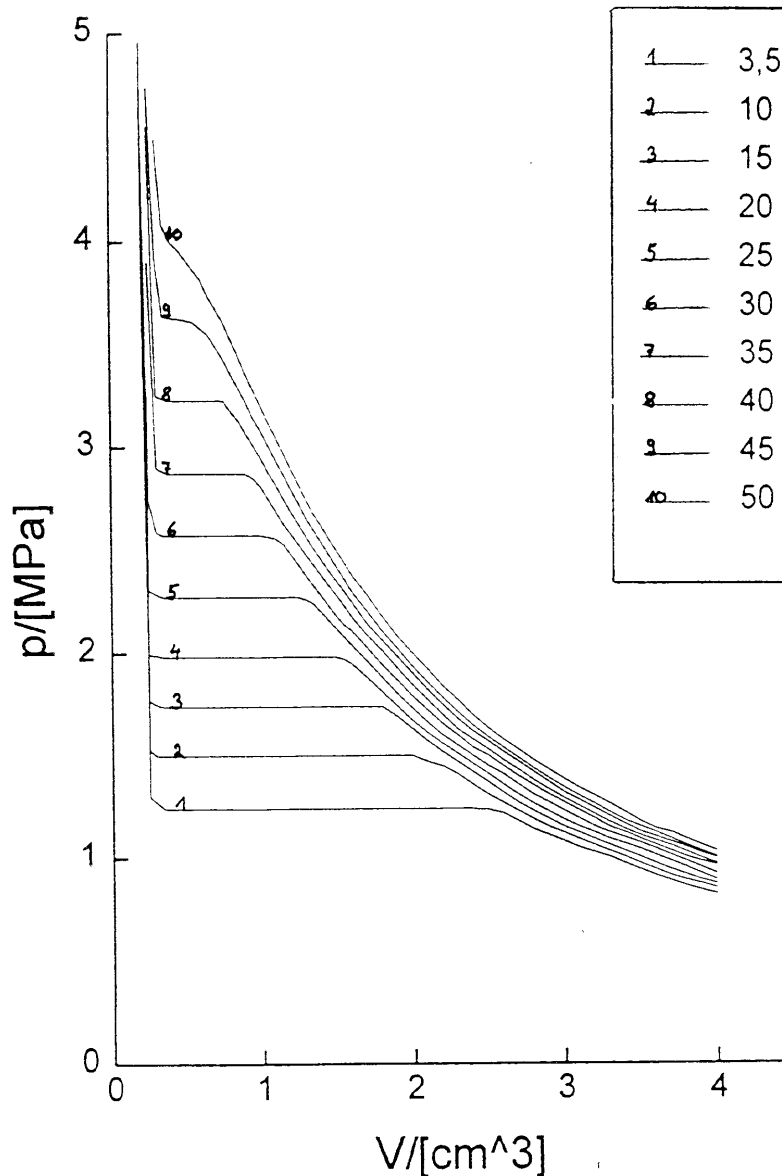


Abbildung XII.4: schematischer Verlauf einer Isotherme



1	3,5 °C
2	10 °C
3	15 °C
4	20 °C
5	25 °C
6	30 °C
7	35 °C
8	40 °C
9	45 °C
10	50 °C

Zunächst steigt mit abnehmendem Volumen der Druck des Gases an, was bei einer Kompression eines Gases ja auch zu erwarten war. Vom Maximum B zum Minimum D der Kurve müsste aber bei abnehmendem Volumen auch der Druck sinken, das entspricht nicht unserer Vorstellung. Bei konstanter Temperatur ist dies nur möglich, wenn die Dichte des Gases sinkt. Das ist tatsächlich der Fall, weil vom Punkt A an

Abbildung XII.5: In einem Versuch gemessene Isothermen für SF_6

das Gas sich teilweise verflüssigt. Während der Verflüssigung bleibt vom Punkt A an der Druck konstant bis Punkt E, an dem das Gas vollständig verflüssigt ist. Die Kurve verläuft also nicht, wie die van der Waalssche Gleichung es angibt, durch ABCDE sondern auf der horizontalen Grade ACD. Diese Korrekturgrade wird Maxwell-Grade genannt. Nachdem sich bei dem zu Punkt E gehörenden Druck das Gas ganz verflüssigt hat, steigt der Druck, den man zur Kompression benötigt, schnell an.

Es zeigt sich, dass weder van der Waals noch Maxwell mit seiner Korrektur der Isotherme die Realität exakt unter jeder Bedingung wiedergeben. In Wirklichkeit ist es durchaus möglich, kurzzeitig trotz sinkendem Drucks das Volumen einer Flüssigkeit zu vergrößern, d.h. einen Verlauf der Kurve ED teilweise zu messen. Dieses Phänomen wird Siedeverzug genannt. Ab einem gewissen Punkt ist das aber nicht mehr möglich, die Flüssigkeit beginnt zu siedern und die Isotherme springt schlagartig auf die Maxwellgrade zurück. Umgekehrt nennt man das Ausbleiben der Kondensation trotz Reduzierung des Volumens über den Punkt A hinaus Kondensationsverzug.

XII.2 Dampfdruckkurve

Die Schleifen im p/V -Diagramm beschreiben den Übergang vom gasförmigen zum flüssigen Aggregatzustand. Die Fläche unterhalb der Maxwell-Graden entspricht der Koexistenz beider Aggregatzustände. Man kann dem Diagramm entnehmen, dass der Phasenübergang von gasförmig zu flüssig einer bestimmten Temperatur einen festen Druck zuordnet. Das Volumen spielt keine Rolle bei diesem Übergang, solange beide Phasen existieren. Deshalb kann man den Druck, bei dem Gas kondensiert in Abhängigkeit von der Temperatur auftragen. Dieses p/T -Diagramm gibt dann an, bei welcher Temperatur und welchem Druck beide Phasen gleichzeitig existieren. Man nennt diese Kurve *Dampfdruckkurve*.

Merke: Die **Dampfdruckkurve** im p/T -Diagramm gibt $p(T)$ an, bei dem die flüssige und die gasförmige Phase koexistieren.

Wir hatten bereits in Kapitel XI den kritischen Punkt besprochen. Bei realen Gasen liegt der kritische Punkt auf der Isothermen, die einen Sattelpunkt hat. Dieser Sattelpunkt gibt an, bei welcher kritischen Temperatur das reale Gas trotz Druckerhöhung nicht mehr verflüssigt werden kann. Die Dampfdruckkurve muss in diesem Punkt enden, da oberhalb der kritischen Temperatur keine Koexistenz mehr möglich ist.

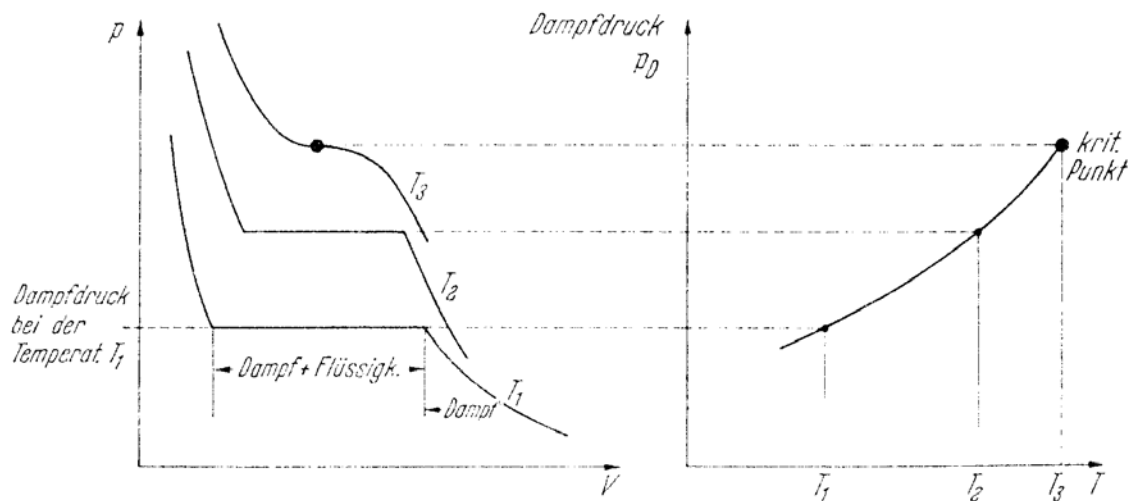


Abbildung XII.6: Übertrag der gemessenen Isothermen zu einer Dampfdruckkurve

Will man eine Dampfdruckkurve messen, so braucht man dazu nur einen geschlossenen Behälter, der teilweise mit Wasser gefüllt ist. Heißt man dieses Wasser nun auf und misst Temperatur und Druck, so erhält man die Dampfdruckkurve.

Wir wollen einen etwas anderen Versuch vorführen:

Versuch XII.1: Aufnahme der Dampfdruckkurve

Wir füllen einen geschlossenen Behälter mit Schwefelhexachlorid und Quecksilber. Der Behälter ist so konstruiert, dass wir das Volumen verringern können; zudem wird der Druck im Innern des Gefäßes gemessen.

Zuerst verringern wir das Volumen des Gases, wie zu erwarten steigt der Druck an. Ab einem bestimmten Druck bildet sich plötzlich eine Flüssigkeitsoberfläche. Verringert man nun das Volumen, so bleibt der Druck konstant, während die Flüssigkeitsoberfläche sich vergrößert. Im p/V - Diagramm befinden wir uns jetzt auf der Maxwellgraden. Der konstante Druck ist der Dampfdruck. Erst wenn das Gas ganz verflüssigt ist, erhöht sich der Druck bei weiterer Volumenverringern.

Die so aufgenommenen Kurve lässt sich durch Volumenverringern und der daraus resultierenden Verdampfung wieder zurückfahren.

In einem zweiten Versuch soll gezeigt werden, dass man den oben skizzierten Verlauf auf der van der Waals-Kurve teilweise auch über die Maxwell-Grade hinaus realisieren kann.

Versuch XII.2: Verzug beim Erstarren

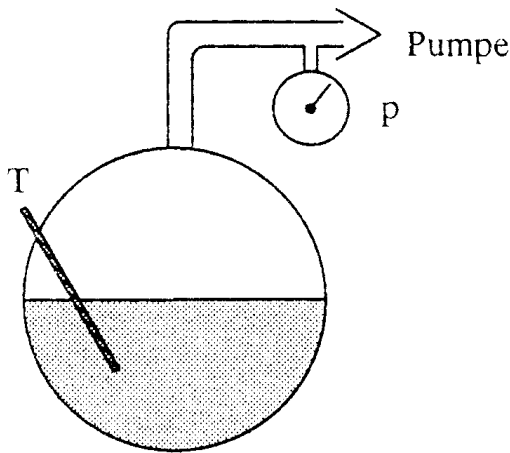


Abbildung XII.7: schematischer Versuchsaufbau zum Nachweis des Verzugs beim Erstarren

Für diese Demonstration wird ein Gefäß mit Wasser teilweise aufgefüllt. Über eine Pumpe kann die darüber befindliche Luft abgesaugt und so der Druck verringert werden. Die durch Verringerung des Drucks sinkende Temperatur des Wassers wird gemessen.

Zunächst können wir beobachten, dass wie erwartet bei Verringerung des Drucks die Temperatur sinkt. Spannend wird der Versuch ab einer Temperatur von knapp 0°C .

Bei dieser Temperatur erwarten wir eigentlich, dass das Wasser anfängt zu gefrieren. Bei unserem Versuch können wir die Temperatur jedoch bis auf -4°C herunterfahren, ohne dass das Wasser erstarrt. Offensichtlich folgen wir in diesem Bereich der van der Waals-Graden statt der korrigierenden Maxwell-Graden. Schüttelt man nun aber am Gefäß, so schlägt der Aggregatzustand schlagartig um und das Wasser erstarrt vollständig. Jetzt sind wir wieder auf die Maxwellgrade zurückgesprungen. Wie vorhergesagt liegt die Temperatur des Eises bei 0°C .

Nach diesen Demonstrationen müssen wir noch die Dampfdruckkurve quantitativ beschreiben: Wir hatten bereits festgestellt, dass Moleküle, wenn sie aus der Flüssigkeit in den Dampf übertreten, Arbeit gegen die Anziehungskräfte leisten müssen. Zum Ersatz dieser Energie muss Wärme zugeführt werden. Die beiden Aggregatzustände fest und flüssig unterscheiden sich als energetisch durch die sogenannte molare Verdampfungswärme Q .

Damit gilt für die Teilchenzahldichten bei einer gegebenen Temperatur T die Boltzmann-

Verteilung
$$\frac{n}{n_0} = \exp\left(-\frac{Q}{N_A kT}\right)$$

und mit $\frac{p}{p_0} = \frac{n}{n_0}$ gilt
$$\frac{p}{p_0} = \exp\left(-\frac{Q}{N_A kT}\right)$$

mit $k = \frac{R}{N_A}$ folgt
$$\frac{p}{p_0} = \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right)$$

$$\Leftrightarrow p = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \quad \neg$$

Dann gilt für $\frac{dp}{dT}$
$$\frac{dp}{dT} = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \cdot \frac{Q}{RT^2}$$

mit \neg
$$\Leftrightarrow \frac{dp}{dT} = p \cdot \frac{Q}{RT^2}$$

umgeformt
$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dp}{p} = \frac{Q}{RT} \frac{dT}{T}}$$

Diese Gleichung gibt die relative Änderung des Drucks mit der Temperaturänderung längs der Dampfdruckkurve an. Wesentlich ist die Proportionalität der Druck- und der Temperaturänderung. Diese Gleichung gilt nur in Näherung zweier Annahmen, die stillschweigend vorausgesetzt wurden:

1. Die Wärmemenge $Q(T)$ ist konstant, also $Q = \text{const.}$
2. Das Volumen der Flüssigkeit ist vernachlässigbar gegenüber dem Gasvolumen. Streng genommen müsste noch die Ausdehnungsarbeit der Flüssigkeit berücksichtigt werden.

Mit $V_g \cdot p = RT$ folgt noch
$$\frac{dp}{dT} = \frac{Q}{V_g} \frac{1}{T}$$

Vernachlässigt man das Volumen der Flüssigkeit V_{fl} nicht, so liefert die genaue Berechnung über den Kreisprozess die Gleichung

$$\frac{dp}{dT} = \left(\frac{Q}{V_g - V_{fl}} \right) \frac{1}{T}$$

Diese Gleichung der Dampfdruckkurve wird Gleichung von Clausius-Clapeyron genannt.

Merke: Die **Dampfdruckkurve** wird beschrieben durch die
Gleichung von Clausius-Clapeyron

$$\frac{dp}{dT} = \left(\frac{Q}{V_g - V_{fl}} \right) \frac{1}{T}$$

Diese Gleichung ist auch für den Übergang von fest zu flüssig, also für die Schmelzwärme gültig.

Merke: Die **Schmelzkurve** wird beschrieben durch die
Gleichung von Clausius-Clapeyron

$$\frac{dp}{dT} = \left(\frac{Q}{V_{fl} - V_{fest}} \right) \frac{1}{T}$$

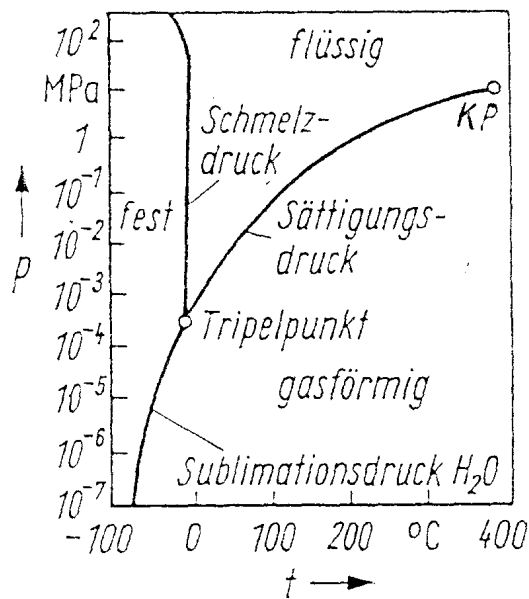


Abbildung XII.8: Die Schmelztemperatur von Eis sinkt mit steigendem Druck

Im Allgemeinen die Änderung des Drucks mit der Temperatur $\frac{dp}{dT} > 0$. Nur Eis und wenige andere Stoffe, Ge, Ga und Bi, zeigen beim Schmelzen eine Dichtezunahme. Bei diesen Stoffen kann man beobachten, dass die Festkörperkristalle in der Flüssigkeit schwimmen. Hier sinkt die Schmelztemperatur mit steigendem Druck.

Zum Abschluss dieses Kapitels betrachten wir noch eine 'historische' Anwendung der Zustandsänderung realer Gase:

Versuch XII.3: Süffi

Süffi ist ein Vogel aus Glas. Er besteht aus einem kugelförmigen Bauch, in dem ein dünner, zu beiden Seiten offener Glaszylinder endet. Am oberen Ende des Glaszylinderhalses sitzt der Kopf, ein kleineres rundes Gefäß, welches direkt mit dem Hals verbunden ist. Vorne am Kopf befindet sich der Schnabel, ein kleines offenes Röhrchen mit Filz überzogen. Der Bauch von Süffi wird soweit mit Wasser gefüllt, dass bei aufrechtem Stand die im Bauch befindliche Halsöffnung im Wasser steht. Bringt man den Vogel in Nähe eines Wassertroges und tippt ihn leicht aus der Gleichgewichtslage an, so neigt er sich immer mehr dem Wasser zu, nimmt schließlich wippend ein paar Schluck und wippt dann wieder höher ohne zu trinken. Bekommt er von dieser Bewegung wieder Durst, beugt er sich mit jedem Wippen weiter runter und trinkt wieder.

Die Erklärung ist folgende:

Durch die Berührung des Schnabels mit gekühltem Wasser zieht sich das Gasvolumen in Süffis Körper zusammen und die Flüssigkeit dehnt sich aus. Der Vogel bekommt Übergewicht und kippt soweit nach vorne, dass das Röhrchen in seinem Bauch nicht mehr im Wasser ist. Das Wasser läuft aus dem Röhrchen, das Gewicht des Kopfes wird kleiner und der Vogel schnellt zurück. Dieses System basiert auf der Temperaturdifferenz zwischen Kopf, der gekühlt wird, und Schwanz, der Zimmertemperatur hat. Deshalb ist diese Bewegung kein *Perpetuum mobile*,

also keine Bewegung die endlos läuft ohne Energie zugeführt zu bekommen. Die Energie wird gewonnen aus der Temperaturdifferenz.

Man erzählt sich, dass frühere Kulturen diese Erklärung noch nicht kannten und deshalb einen Riesensüffi als Gott anbeteten, weil er Maschinen zum Laufen bringen konnte, wenn man ihm ein Wasseropfer darbrachte. Entmythologisiert fristet Süffi heute ein Dasein in Physiksammlungen.

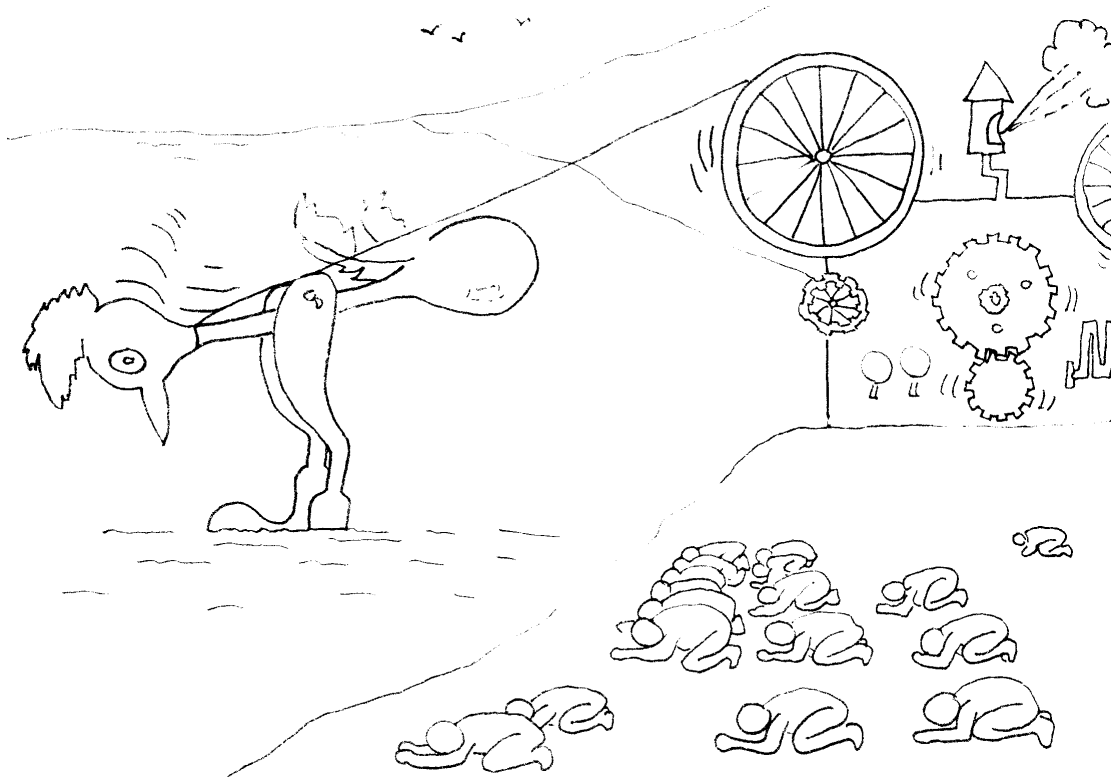


Abbildung XII.9: Tauchvogelanbeter

XII.3 Partialdruck

Zur Einleitung in dieses Kapitel betrachten wir ein Gedankenexperiment:

Ein Gefäß wird mit Wasser gefüllt. Oberhalb des Wassers wird der Druck p gemessen. Dort befinde sich zudem ein anderes Gas, z.B. Luft mit dem Druck p_0 . Misst man nun den Sättigungsdruck p_s , so stellt man fest, dass das Wasser so lange verdampft, bis der Sättigungsdruck von Wasser erreicht ist. Dies bedeutet offensichtlich, dass der Sättigungsdruck von einem Stoff unabhängig davon ist, welche Gase sich noch in dem Volumen befinden. Der Gesamtdruck p oberhalb der Flüssigkeit entspricht dann der Summe des Sättigungsdrucks des Wassers und des Luftdrucks

$$p = p_s + p_0$$

Sind mehrere Flüssigkeiten in einem Gefäß, so stellt sich für jeden Stoff der Sättigungsdruck unabhängig von den anderen ein. Es gilt das Daltonsche Gesetz:

Merke: Der Gesamtdruck oder Sättigungsdruck eines Gasgemischs entspricht der Summe der einzelnen Sättigungsdrücke:

Daltonsches Gesetz $p = p_0 + p_s^1 + p_s^2 + \dots + p_s^i$

Es gilt die Addition der Partialdrücke: Der Gasdruck über einem Flüssigkeitsgemisch ist gleich der Summe der Partialdrücke, wobei der Partialdruck p_s^i der Sättigungsdruck der Flüssigkeit i bei der Abwesenheit der anderen Komponenten ist. Gase können unabhängig von einander diffundieren und haben damit auch unabhängige Partialdrücke.

Versuch XII.4: Partialdruck

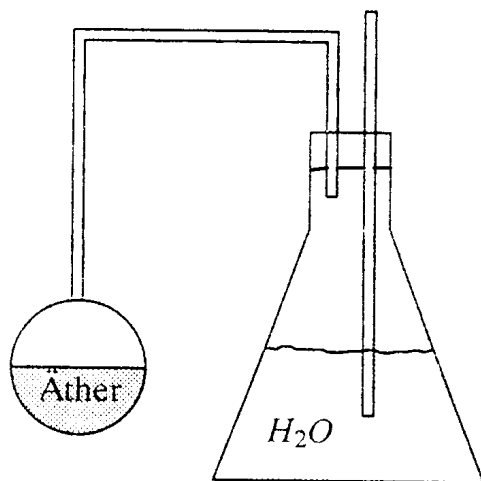


Abbildung XII.10: Nachweis des Daltonschen Gesetzes

Bei diesem Versuch wird ein Gefäß teilweise mit Wasser gefüllt. Durch den Stopfen, der das Gefäß verschließt führt ein Röhren, dessen eines Ende im Wasser steht, nach außen.

Zunächst wird der Dampfdruck des Wassers bei geschlossenem Gefäß gemessen. Danach führt man ein weiteres Röhren durch den Stopfen ein. Durch dieses Röhren wird Ätherdampf aus einem zweiten Gefäß, das mit Äther gefüllt wurde, zu dem Wasserdampf geführt. Man kann beobachten, dass diese Verbindung zusätzlichen Druck in das Gefäß führt, denn das Wasser wird komprimiert und spritzt aus dem offenen Glasröhren.

XIII. Transportphänomene

Aus dem Alltag ist bekannt, daß Wärmeenergie auf verschiedene Weisen transportiert werden kann. Wärmeenergie kann durch Strahlung, Leitung oder Strömung (Konvektion) transportiert werden. Zuzüglich zu diesen drei Phänomenen gibt es noch die Diffusion. Das bedeutet anschaulich, dass ein Gas aus einem Volumen diffundiert, also sich verteilt, wenn das Volumen geöffnet wird. Obwohl die Phänomene Leitung, Konvektion und Diffusion zunächst unterschiedlich zu sein scheinen, haben sie alle etwas gemeinsam:

Der Zusammenhang mit der kinetischen Gastheorie zeigt, daß bei allen dreien räumliche Inhomogenität einer gewissen Größe den Transport einer anderen Größe auslöst.

Transportphänomen	transportierte Größe	transportierende Größe
Diffusion	Strömen von Masse	Konzentrationsgradient
Wärmeleitung	Strömen von Wärmeenergie	Temperaturgradient
Viskosität	Strömen von Impuls	Geschwindigkeitsgradient

Wie die Tabelle bereits zeigt, lassen sich alle drei Phänomene formal sehr ähnlich behandeln. Sie werden Transportphänomene genannt.

Diese drei Phänomene und die Wärmestrahlung wollen wir nun im einzelnen untersuchen und im Anschluß die Parallelitäten aufzeigen.

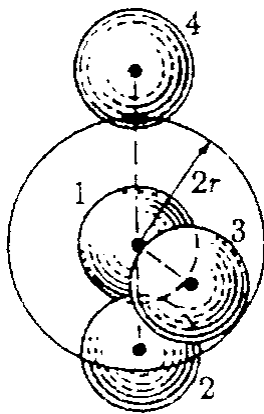
Um diese Phänomene zu untersuchen brauchen wir neben den bereits gewonnenen Ergebnissen aus der kinetischen Gastheorie noch einen weiteren wichtigen Begriff:

XIII.1 Mittlere freie Weglänge

Bisher sind wir in der kinetischen Gastheorie immer davon ausgegangen, daß ein Molekül auf eine Gefäßwand trifft und dort einen Stoß ausführt. In unseren Modellversuchen haben wir aber bereits gesehen, dass sich die Moleküle auch untereinander stoßen. Diese Stöße untereinander sind der Grund für das Gleichgewicht eines Gases. Durch den Austausch von Impulsen wird eine im Mittel gleiche Geschwindigkeit der Gasmoleküle erzielt.

Welchen Weg legt ein Molekül also zwischen zwei Stößen zurück ?

Um diese Frage zu beantworten müssen wir zunächst die Annahme fallen lassen, die Moleküle seien Massepunkte. In Wirklichkeit hat ein Molekül eine räumliche Ausdehnung, in unserem



Fall sei sein Radius r . Dann treten Stöße auf, wenn der Mittelpunkt einer Kugel näher als $2r$ an den Mittelpunkt einer anderen Kugel herankommt. Diesen Abstand nennt man Stoßparameter und bezeichnet ihn mit b . Also erfolgt ein Stoß genau dann, wenn

$$b \leq 2r .$$

Die gedachte Fläche um die Kugel, in die ein Eindringen einen Stoß zur Folge hätte, nennt man den Wirkungsquerschnitt σ

$$\sigma = \pi(2r)^2$$

Abbildung XIII.1: Wirkungsquerschnitt eines Moleküls des Radius r .

Merke: Der **Wirkungsquerschnitt** eines Moleküls des Radius r beträgt

$$\sigma = \pi(2r)^2 .$$

Der Wirkungsquerschnitt, manchmal auch Stoßquerschnitt genannt, ist ein zentraler Begriff der Physik. In diesem Beispiel ist er anschaulich zu verstehen als die Fläche, die das Molekül gegenüber dem stoßenden Molekül bietet. Sie wird im Allgemeinen verstanden als die Fläche, die den Stoß charakterisiert.

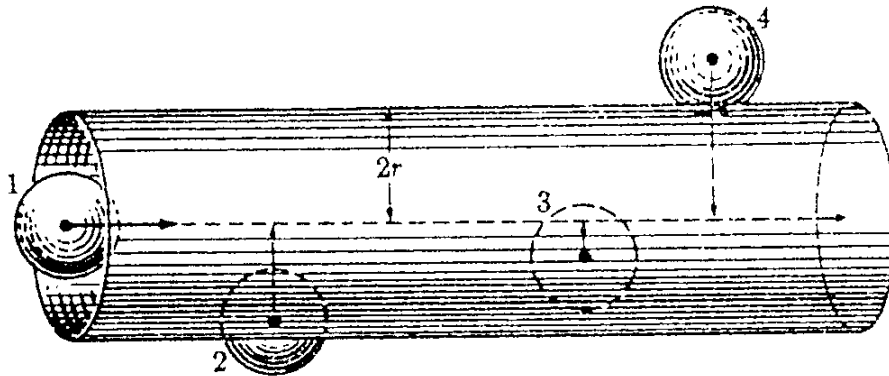


Abbildung XIII.2: Der Wirkungsquerschnitt überstreicht ein Volumen.

Betrachten wir nun ein Gas der Dichte n . Wenn ein Molekül dieses Gases den Weg s zurücklegt, dann überstreicht sein Wirkungsquerschnitt das Volumen V_s

$$V_s = \sigma \cdot s .$$

Dabei trifft es auf N_s Teilchen

$$N_s = nV_s$$

$$\Rightarrow N_s = n \cdot \sigma \cdot s$$

Nun definiert man den Weg, den das Teilchen im Mittel zurücklegen kann, bis es auf ein anderes Teilchen trifft als mittlere Weglänge. Für

$$N_s = 1,$$

d.h. den Weg bis zum ersten Stoß gilt dann

$$l = n \cdot \sigma \cdot s$$

Definition XIII.1a): Die mittlere freie Weglänge l bezeichnet den Weg, den ein Teilchen in einem Gas der Dichte n zurücklegen kann, bis im Mittel ein Stoß mit einem anderen, ruhenden Teilchen auftritt: $l = \frac{1}{n\sigma}$.

Diese Formel gilt nur, wenn man davon ausgeht, daß das zweite Teilchen ruht. Man spricht von dem Stoß mit einem ruhenden Target. In Wirklichkeit bewegt sich das zweite Teilchen ebenfalls. Dann ergibt die Rechnung

Definition XIII.1b): Die mittlere freie Weglänge l bezeichnet den Weg, den ein Teilchen in einem Gas der Dichte n zurücklegen kann, bis im Mittel ein Stoß mit einem anderen bewegten Teilchen auftritt: $l = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{n\sigma}$.

Bei festem Druck p und konstanter Teilchendichte n ergibt sich eine Abhängigkeit vom Druck p :

$$n = \frac{N}{V} \sim \rho \sim p$$

Damit folgt

$$l \sim \frac{1}{p}$$

Um ein Verständnis für die Größenordnung der mittleren freien Weglänge zu bekommen berechnen wir sie am Beispiel Luft:

Luft besteht aus N_2 , O_2 mit einem Radius von $r \cong 10^{-10}$ m. Die Anzahl der Moleküle in einem Kubikmeter Luft unter Normalbedingungen wird durch die sogenannte **Loschmidtsche Zahl** angegeben:

$$N_L = \frac{N_A}{V_m} = 2,687 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

Dann beträgt der Wirkungsquerschnitt $\sigma = \pi(2r)^2$

$$\Rightarrow \sigma = 1,3 \cdot 10^{-19} \text{ m}^2$$

mit

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{n\sigma}$$

$$\Rightarrow \ell = 2 \cdot 10^{-7} \text{ m.}$$

Anschaulicher als diese Größe ist das Verhältnis der mittleren freien Weglänge zur Größe des

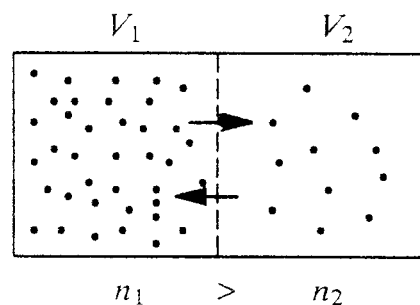
Moleküls selber $\frac{\ell}{2r} \cong 1000$ bei dem Druck

p_0 . Mit steigendem Druck und damit steigender Dichte nimmt das Verhältnis mit $\frac{1}{p}$ ab.

XIII.2 Diffusion

Um die Diffusion zu verstehen, betrachten wir ein Gedankenexperiment:

Zwei Gasvolumen seien durch eine Wand voneinander getrennt. In Gas 1 herrsche die Teilchenzahldichte n_1 . Sie sei größer als die Dichte n_2 in Gas 2.



$$n_1 > n_2$$

Abbildung XIII.3: Diffusion

Nun entfernen wir die Trennwand: Die Konzentration der Teilchen, sprich die Teilchenzahldichte gleicht sich aus, bis

$$n_1 = n_2.$$

Dabei fließt ein Teilchenstrom von Volumen 1 zu Volumen 2. Beschrieben wird dieser Fluß durch die Teilchenstromdichte j . Diese ist definiert als:

Definition XIII.2: Die Teilchenstromdichte j ist der Quotient aus der

Zahl der Teilchen und dem Produkt aus Zeit und Fläche:

$$j = \frac{\text{Zahl der Teilchen}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}.$$

Da trotz der geringeren Konzentration in Gas 2 auch Teilchen von Gas 2 zu Gas 1 strömen, müssen wir den sogenannten Nettoteilchenstrom berechnen, d.h. den Teilchenstrom, der die

endgültige Verschiebung der Teilchen angibt. Dieser ist immer positiv in Richtung des Konzentrationsgefälles:

Nettoteilchenstrom
$$j = j(1 \rightarrow 2) - j(2 \rightarrow 1)$$

mit der Definition des Teilchenstroms und gleicher Zeit und Fläche für die Strömung in beide Richtungen gilt
$$j = \Delta n$$

Allgemein gilt für die Diffusion das 1. Ficksche Gesetz:

1. Ficksches Gesetz:
$$j = -D \cdot \frac{dn}{dx}$$

Wobei das Vorzeichen die Diffusion in Richtung des Konzentrationsgefälles beschreibt. D wird Diffusionskoeffizient genannt¹.

Vektoriell geschrieben lautet das 1. Ficksche Gesetz:

1. Ficksches Gesetz:
$$\vec{j} = -D \cdot \text{grad } n.$$

Dieses Gesetz besagt, daß ein Teilchen in Richtung des Konzentrationsgefälles grad n fließt. Die kinetische Gastheorie liefert für D

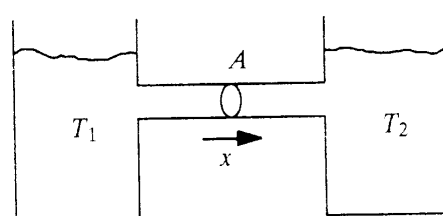
Diffusionskoeffizient
$$D = \frac{1}{3} v \ell$$

Anschaulich ist zumindest die Proportionalität verständlich: Die Teilchenstromdichte ist proportional zur mittleren Geschwindigkeit und zur mittleren freien Weglänge. Aus der kinetischen Gastheorie wissen wir, dass sie damit auch proportional zur Wurzel aus der Temperatur ($v \sim \sqrt{T}$) und mit der Überlegung aus XIII.1 proportional zu dem Kehrwert des Druckes ist ($\ell \sim \frac{1}{p}$).
$$j \sim \sqrt{T} \cdot \frac{1}{p}$$

Der Faktor 1/3 rührt von den drei Dimensionen her.

XIII.3 Wärmeleitung

Auch zum Einstieg in dieses Kapitel betrachten wir ein Gedankenexperiment:



¹ Zur Herleitung dieses Gesetzes siehe Demtröder oder Gerthsen/ Vogel.

Zwei Behälter mit Wasser der Temperatur T_1 und T_2 werden durch einen Schlauch verbunden. Die Wärme strömt entlang des Temperaturgefälles. Zur Beschreibung dieses Vorgang definiert man den Begriff des Wärmestroms:

Abbildung XIII.4:
Temperaturdifferenzen führen zu Wärmeleitung.

Definition XIII.3: Der Wärmestrom ist der Quotient aus Änderung der Wärme und der dafür benötigten Zeit: $\frac{dQ}{dt}$.

Beschrieben wird der Wärmestrom in Abhängigkeit von der Zeit durch eine Gleichung, die proportional sein muss zu der Fläche A , durch welche die Wärme strömen kann, und die proportional sein muß zur Temperaturdifferenz dT pro Weg dx . Die Proportionalitätskonstante wird Wärmeleitfähigkeit genannt und mit λ bezeichnet. Dann gilt

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dx}$$

Definiert man nun die Wärmestromdichte

Definition XIII.4: Die Wärmestromdichte j_Q ist der Quotient aus Wärmestrom und der Fläche, über die der Wärmestrom erfolgt:

$$j_Q = \frac{1}{A} \frac{dQ}{dt}$$

Damit folgt

$$\Leftrightarrow j_Q = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

Allgemein gilt das Fouriersche Gesetz:

Fouriersches Gesetz: $\vec{j}_Q = -\lambda \cdot \text{grad } T$

Aus Erfahrung weiß man, daß verschiedene Materialien verschiedene Wärmeleitfähigkeiten haben. Das zeigen wir kurz in einem Versuch:

Versuch XIII.1: Wärmeleitfähigkeit verschiedener Materialien

Vier gleich lange Stäbe unterschiedlichen Materials werden parallel in eine Halterung eingespannt. Nun werden die Stäbe gleich tief in flüssigen Stickstoff getaucht. Nach einigen Minuten, die zum Temperatenausgleich dienen, kann durch Anhauchen der Stäbe gezeigt

werden, bis zu welcher Höhe deren Temperatur unter dem Gefrierpunkt liegt. Man beobachtet, daß Kupfer die Wärme viel besser leitet als Eisen oder Glas.

Die folgende Tabelle gibt die Wärmeleitfähigkeit für einige Materialien wieder:

Stoff	Wärmeleitfähigkeit in $\frac{W}{mK}$
Silber	421
Kupfer	384
Eisen	40
Glas	0,7
Wasser	0,6
Luft	0,03

Tabelle XIII.1: Wärmeleitfähigkeit verschiedener Materialien

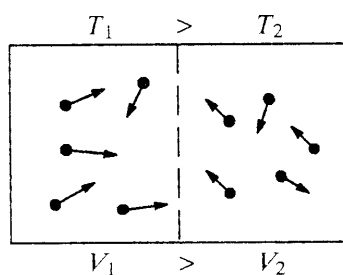


Abbildung XIII.5: Impulse der bewegten Teilchen

Die Erklärung der Wärmeleitung über das gaskinetische Bild macht das Phänomen der Wärmeleitung verständlich: Die kinetische Energie der Teilchen wird durch Stöße ausgeglichen. Die Rechnung² liefert die Beziehung

$$\lambda = \frac{1}{2} k n \bar{v} \ell$$

d.h. die Wärmeleitfähigkeit ist um so größer, je mehr Teilchen in dem Volumen sind und je schneller diese sich bewegen. Das

Verhältnis $v \sim \sqrt{T}$ zeigt zudem, dass die Wärmeleitfähigkeit mit der Temperatur ansteigt.

In Metallen funktioniert die Wärmeleitung durch die Wärmeleitung der Elektronen. Die Anzahl der freien Elektronen ist damit nicht nur ein Maß der elektrischen Leitfähigkeit, sondern zudem ein Maß für die Wärmeleitfähigkeit.

XIII.4 Viskosität und Konvektionsstrom

Konvektion nennt man die Mitführung von Energie durch strömende Flüssigkeiten und Gase aufgrund eines Temperaturunterschiedes von einem Ort zum anderen. Im Gegensatz zur Wärmeleitung, die mikroskopischer Natur ist, ist die Konvektion makroskopisch. Sie überlagert deshalb häufig die Wärmeleitung. Durch Temperatur- oder Dichtunterschiede bilden sich sehr

² nachzulesen z.B. im Demtröder oder Gerthsen/Vogel

komplizierte Strömungsfelder, deren Beschreibung Aufgabe der Strömungslehre ist. Mit unseren Erkenntnissen aus Kapitel IX können wir ein Gesetz herleiten:

Für die innere Reibung galt
$$F_R = A \cdot \eta \cdot \frac{dv}{dx}$$

mit $F = \dot{p}$ kann man
$$\frac{F_R}{A} = \eta \cdot \frac{dv}{dx}$$

als Impulsstromdichte auffassen. Bezeichnet man die Impulsstromdichte mit j_p , so gilt

$$j_p = -\eta \cdot \frac{dv}{dx}$$

wobei das Vorzeichen wieder den Strom in Richtung des Geschwindigkeitsgefälles wiedergibt. Vektoriell:

Impulsstromdichte $\vec{j}_p = -\eta \cdot \text{grad } v$

Gaskinetisch kann man diese Gleichung deuten als Beschleunigung der Gasmoleküle quer zur Bewegungsrichtung zwischen fester und bewegter Fläche.

Nachdem wir die drei Transportphänomene besprochen haben, betrachten wir noch einmal die eingangs angesprochene Parallelität. Die Gesetze lauteten:

1. Ficksches Gesetz: $\vec{j} = -D \cdot \text{grad } n$

Fouriersches Gesetz: $\vec{j}_Q = -\lambda \cdot \text{grad } T$

Impulsstromdichte $\vec{j}_p = -\eta \cdot \text{grad } v$

Diese Gesetze haben alle die Form

$$\vec{j}_i = -c \cdot \text{grad } \varphi$$

wobei c eine Konstante und φ die transportierte Größe ist. Man kann diese Gesetze zusammenfassen in einer Tabelle:

$\vec{j}_i = -c \cdot \text{grad } \varphi$			
	Diffusion	Wärmeleitung	Konvektion
\vec{j}_i	Teilchenstrom	Wärmestrom	Impulsstrom
φ	Teilchenzahldichte n	Temperatur T	Strömungsgeschwindigkeit v
c	Diffusionskoeffizient D	Wärmeleitfähigkeit λ	Viskosität η

XIII.5 Wärmestrahlung

Wie angekündigt wollen wir zum Schluß des Kapitels noch ein Phänomen betrachten, daß kein Transportphänomen in dem oben bezeichneten Sinn ist. In Abschnitt XIII.3 haben wir festgestellt, daß die Wärmeleitfähigkeit proportional zur Teilchendichte ist. Das bedeutet, daß Vakuum nicht leitet. Vor dem Hintergrund dieser Überlegung müssen wir uns fragen, warum dann unser Kaffee in der Thermoskanne, die einen Vakuummantel enthält, trotzdem abkühlt. Offensichtlich muß es noch ein anderes Phänomen geben, das Wärmeenergie transportiert. Dieses Phänomen ist die Wärmestrahlung: Auch im Vakuum wird Wärme durch elektromagnetische Strahlung transportiert. Für einen schwarzen Körper gilt dabei das

$$\text{Stefan-Boltzmann-Gesetz} \quad \frac{\text{Strahlungsleistung } S}{\text{Fläche } F} = \sigma \cdot T^4.$$

σ bezeichnet hier nicht den Wirkungsquerschnitt sondern eine Konstante:

$$\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{J}{m^2 s K^4}.$$

Genauere Messungen um die Jahrhundertwende führten zu der Entwicklung der Quantenmechanik. Ein Stichwort hier ist die Hohlraumstrahlung von Planck. Genaueres wird in Experimentalphysik III und IV besprochen.

An dieser Stelle sei nur der Zusammenhang zwischen der Wellenlänge der Strahlung und der Temperatur T angegeben:

$$\text{Wiensches Gesetz:} \quad \lambda_{\max} \cdot T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ mK}$$

Der am besten ausgemessene Hohlraumstrahler ist die Hintergrundstrahlung unseres Alls. Bei einer Temperatur von $T = 2,7 \text{ K}$ ist die Wellenlänge des Strahlenmaximums $\lambda_{\max} \cong 1 \text{ mm}$. Die Sonne hat eine Temperatur von $T = 6000 \text{ K}$ und ein Strahlenmaximums $\lambda_{\max} \cong 500 \text{ nm}$. Das entspricht der Wellenlänge des grünen Lichts.

Nun betrachten wir noch zwei Versuche zur Wärmestrahlung:

Versuch XIII.2: Wunderkerzenanzünder

Bei diesem Versuch wird die Wärmestrahlung einer Heizsonne mittels eines Hohlspiegels fokussiert. In den Brennpunkt der Strahlung stellt man eine Wunderkerze. Die Wärme der Strahlung reicht aus, um die Wunderkerze zu entzünden.

Versuch XIII.3: Radiometer oder Lichtmühle

Eine Lichtmühle besteht aus einem kugelförmigen Gefäß, in dessen Mitte eine Achse steht. Auf dieser Achse sind vier quadratische Metallblättchen jeweils im rechten Winkel zueinander angebracht. Eine Seite der silbernen Blättchen ist geschwärzt, so dass sich je silberne und schwarze Flächen gegenüberstehen. Stahlt man nun mit einer Lampe auf diese Flügel, so beginnt die Mühle sich zu drehen und stoppt erst dann langsam wieder, wenn das Licht erlischt. Diese Drehung wird nicht durch den Strahlungsdruck erzeugt. Wie bekannt ist, heizt sich eine schwarze Fläche durch die Wärmestrahlung stärker auf als eine helle. Somit werden die auf der schwarzen Fläche auftreffenden Moleküle stärker reflektiert als die auf einer hellen auftreffenden. Deshalb ist der Betrag der Impulsänderung der auf die schwarze Seite treffenden Moleküle größer. Es entsteht ein unterschiedlicher Kraftstoß, der einen Druckunterschied erzeugt. Die Flügel drehen sich so, daß die schwarze Seite sich von der Lichtquelle wegdreht.

Abschließend befassen wir uns noch einmal mit einer historischen Anwendung der Wärmestrahlung:

Archimedes, der bedeutendste griechische Physiker und Mathematiker, lebte von 285 v. Chr. bis 212 v. Chr. in Syrakus. Er ersetzte die statische Denkweise der Mathematik durch die dynamische und wurde so zum Begründer der Integralrechnung. Neben dem bereits besprochenen Archimedischen Prinzip fand der Grieche noch andere praktisch anwendbare Gesetzmäßigkeiten der Natur wie beispielsweise das Prinzip des Flaschenzugs. Eine dieser praktischen Anwendungen verhalf Archimedes einer Sage nach, die Belagerung der Hafenstadt von feindlichen römischen Schiffen niederzuschlagen. Hierzu soll er die feindlichen Schiffe mit riesigen Spiegeln in Brand gesteckt haben. Eine Rechnung mit den heute bekannten

Gesetzmäßigkeiten der Wärmestrahlung zeigt, dass dies trotz vieler Zweifel wirklich passiert sein könnte:

Die Solarkonstante beträgt $S = 1,37 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$.

Wenn Archimedes 100 Spiegel mit je 1 m^2 Fläche auf 1 m^2 Schiffswand fokussierte, so schaffte er einen Energiefluss auf die Schiffswand von $\frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} = 137 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$.

Der Temperaturgradient in der Schiffswand errechnet sich dann mit

$$\frac{dQ}{dt} = \lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dx}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dQ}{dt} \frac{1}{\lambda \cdot A} = \frac{dT}{dx}$$

mit einer Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 0,1 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$ und der Fläche von $A = 1 \text{ m}^2$ folgt

$$\frac{dT}{dx} \cong 10^6 \frac{\text{K}}{\text{m}}$$

Für eine Oberflächentemperatur von 1000°C , also $\Delta T \cong 1000\text{K}$ ergibt sich $\Delta x = 1 \text{ mm}$

Schätzt man also die Eindringtiefe der Strahlung auf 1 mm ab, so ergibt sich aus

$$\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T$$

und dem Wert $c = 1,5 \frac{\text{J}}{\text{gK}}$

eine Temperaturdifferenz von $\Delta T = 2 \cdot 10^2 \Delta t$

In einer Zeit von 5 Sekunden kann damit eine Temperaturdifferenz von 1000 K erreicht werden: Genug um ein Schiff in Brand zu setzen.

Selbst wenn die Geschichte also stimmt, genützt hat der Trick Archimedes nichts: Der Mathematiker und Physiker starb 212 v. Chr., als er bei der Einnahme von Syrakus von einem römischen Soldaten erschlagen wurde.

XIV. Hauptsätze der Wärmelehre

Wie in der Einleitung angekündigt, wollen wir neben der mikroskopischen Beschreibung, die wir in der statistischen Physik bzw. der kinetischen Gastheorie kurz beleuchtet haben, auch den makroskopischen Aspekt der Wärmelehre behandeln: die Thermodynamik. Diese beschäftigt sich mit der Untersuchung von Zustandsparametern, deren Charakter wir im Laufe des Kapitels noch genauer definieren müssen. Zunächst betrachten wir einen Zustandsparameter, den wir schon kennen gelernt haben: die Wärme.

Was genau ist Wärme ?

Bis Mitte des 19. Jahrhunderts hielt man die Wärme für einen besonderen unerschaffbaren und unzerstörbaren Stoff. Die Temperatur eines Körpers, so vermutete man, wird von der Menge des gespeicherten Wärmestoffs bestimmt. Eine schöne Darstellung des damaligen Forschungsstands findet man häufig in alten Enzyklopädien, wie diese aus dem Brockhaus von 1837:

„Wärmestoff“

Wärme (die), deren Wirkung wir z.B. empfinden, wenn wir uns der Sonne aussetzen, in ein geheiztes Zimmer treten oder am Zerfließen von über glühende Kohlen gebrachtem Wachse, Blei, sowie bei vielen anderen allgemein bekannten Erscheinungen täglich wahrnehmen, ist ihrer eigentlichen Beschaffenheit nach zur Zeit n[o]ch nicht ergründet. Der jetzt gewöhnlichen Annahme zufolge liegt ihren Wirkungen ein ähnlicher feiner Stoff oder eine Materie wie denen des Lichts zum Grunde, der daher als Wärmestoff oder Wärmematerie bezeichnet worden ist. Dieser muthmaßliche Stoff ist so feiner Art, dass er nicht ins Gewicht fällt und daher ein Körper kalt und warm gleichviel wiegt. Auch nicht eingeschlossen kann er erhalten werden, indem kein Körper für die Wärme undurchdringlich ist. Alle Körper werden durch sie ausgedehnt, am meisten die luftförmigen. Sie kann feste Körper in tropfbarflüssigen Zustand, tropfbarflüssige in luftförmige verwandeln, wobei nicht

blos ihre ausdehnende Kraft wird, indem manche Körper im festen Zustand umfänglicher als im tropfbaren sind, und bringt in Bezug auf Beförderung und Behinderung chemischer Vorgänge eine Menge bemerkenswerte Wirkungen hervor...

Einige Phänomene, z.B. Mischversuche, ließen sich mit dieser Theorie gut erklären, andere hingegen, wie z.B. die Änderung des Aggregatzustandes bei konstanter Temperatur, warfen Zweifel an dieser Theorie auf.

Die Folge dieser Annahme bis Mitte des vorherigen Jahrhunderts waren zwei Erhaltungssätze: Wärmemenge und Energie in einem abgeschlossenen System wurden als konstant angenommen.

Erhaltungssatz für Wärmestoff Q	$Q = \text{const}$
Erhaltungssatz für mechanische Energie W	$W_p + W_k = W = \text{const}$

Den Durchbruch auf diesem Gebiet der Wissenschaft verdanken wir der Kriegsindustrie: **Graf Rumford** stellte im Jahr 1798 bei Ausbohren von Kanonenrohren fest, dass erhebliche Wärmemengen entstehen. Daraus folgerte er, dass die postulierte Nichterschaffbarkeit des Wärmestoffs nicht richtig sein kann und dass vielmehr Wärme durch mechanische Arbeit erzeugt werden kann. Nachdem die ersten Überlegungen existierten, dass Wärme kein Stoff sein könne, fand der Heilbronner **Arzt J.R. Mayer** (1817 - 1878) bald heraus, dass Wärme eine Form von Energie sein muss. 1842 bestimmte er erstmalig aus den bekannten Gasgesetzen das Umrechnungsverhalten zwischen mechanischer Energie und Wärmeenergie.

Unabhängig von dieser Überlegung fand der Engländer **J.P. Joule** (1818 - 1889) durch eine Versuchsreihe in den Jahren 1840 - 1849 verschiedene gesetzmäßige Beziehungen zwischen Mechanik und Wärme.

Ebenfalls in Eigenleistung fand nahezu zeitgleich **H.v.Helmholtz** (1821 - 1894), dass mechanische Arbeit W und Wärme Q ineinander umwandelbar sind.

XIV.1 I. Hauptsatz der Thermodynamik

Mit diesen Betrachtungen fanden die Wissenschaftler die grundlegende Gesetzmäßigkeit für die Thermodynamik. Bekannt ist der Aspekt der Umwandelbarkeit von Arbeit in Wärme und umgekehrt deshalb als 1. Hauptsatz der Thermodynamik.

1. Hauptsatz der Thermodynamik:
Wärme ist eine andere Form von Energie.
Die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems ist erhalten.

Dieser Satz ist nach der mechanischen Deutung der Wärme durch die kinetische Gastheorie fast selbstverständlich. Als Ausgangslage der statistischen Mechanik hatten wir bereits postuliert, dass Wärme eine andere Form der Energie sein muss.

Der zweite Teil des Hauptsatzes ist für alle Bereiche der Physik über die Mechanik und die Thermodynamik heraus gültig:

Die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems ist erhalten.

Das gilt für alle uns bisher bekannten mechanischen Energien, für Wärme und für noch nicht besprochene Energien, z.B. Gravitationsenergie als Verallgemeinerung der potentiellen Energie, elektromagnetische Energie, insbesondere auch chemische Energie, Kernenergie und andere.

Eine grundlegende Erweiterung des ersten Hauptsatzes fand noch einmal durch **A. Einstein** statt, der in seiner viel zitierten Formel $E = mc^2$ festhielt, dass auch die Masse nur eine andere Form von Energie ist. Damit wurden erneut zwei bis dahin als getrennt angesehene Erhaltungssätze verknüpft:

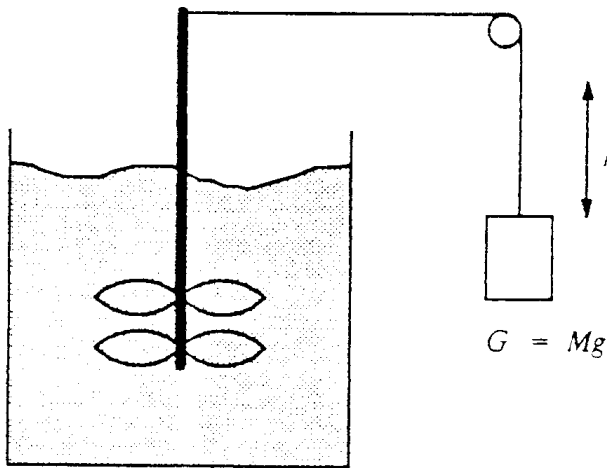
Erhaltungssatz für Energie E	}	$E = mc^2$
Erhaltungssatz für Masse m		

Masse ist eine andere Form der Energie.

Anschaulich ist der erste Hauptsatz der Wärmelehre also klar. Nun müssen wir versuchen, diesen Satz auch quantitativ zu konkretisieren.

XIV.1.1 Mechanisches Wärmeäquivalent

Die Umwandlung von Wärmeenergie in mechanische Arbeit wurde in einem einfachen Versuch nachgewiesen:



Über eine Umlenkrolle wird ein Gewicht M mit einem Seil an einem Rührwerk befestigt. Das Rührwerk mit großer Reibung wird über die Gewichtskraft G angetrieben, die auf die Masse M wirkt, sobald man das Gewicht fallen lässt. Zunächst beweist die Bewegung des Rührwerkes, dass eine Umwandlung existiert: Zudem kann man mit diesem historischen Versuch den Umrechnungsfaktor der mechanischen

Abbildung XIV.1: Schematischer Versuchsaufbau zum mechanischen Wärmeäquivalent
Arbeit in Wärme berechnen:

Fällt die Masse M um eine Höhendifferenz h , so wird an ihr die Arbeit

$$\Delta W = M g h \quad \text{geleistet.}$$

Durch die Reibung des Rührwerkes im Wasser wird das Wasser erhitzt. Eine Temperaturdifferenz von ΔT bedeutet bei Wasser der Masse m eine Wärmeänderung von

$$\Delta Q = c m \Delta T$$

Die Umwandlung von W nach Q kann aus diesen beiden Beziehungen berechnet werden.

Einen ähnlichen Versuch wollen wir in der Vorlesung betrachten:

Versuch XIV.1: mechanisches Wärmeäquivalent

In diesem Versuch wird statt des Wärmebads eine Kupferscheibe erwärmt. Dazu wird eine Kupferscheibe zwischen Bremsbelägen und einem Thermoelement eingespannt. Nun wird über eine Umlenkrolle mittels eines fallenden Gewichts die Kupferscheibe gegen die Bremsbeläge in Rotation versetzt. Durch die so entstehende Reibungsenergie erwärmt sich das Kupfer. Das Thermoelement misst diese Temperaturänderung und gibt sie direkt an ein Computerauswertungsprogramm weiter.

Mit einer am Seil hängenden Masse von $M = 10 \text{ kg}$, einer Fallhöhe von $h = 1 \text{ m}$, der spezifischen Wärmekapazität von Kupfer $c_{\text{Cu}} = 0,092 \text{ cal/g} \cdot \text{K}$ und der Masse der angetriebenen Kupferscheibe von $m = 150 \text{ g}$ ergibt die Messung eine Temperaturänderung $\Delta T = 1,7 \text{ K}$.

Das Verhältnis von geleisteter Arbeit und erzeugter Wärme ist damit $\Delta W/\Delta Q = 4,18 \text{ J/cal}$.

Versuche mit anderen Materialien und variiertem Versuchsaufbau zeigen, dass dieser Umwandlungsfaktor konstant ist. Er wird mechanisches Wärmeäquivalent genannt. Der Theoriewert beträgt:

$$\text{mechanisches Wärmeäquivalent:}$$
$$\Delta W / \Delta Q = 4.185 \text{ J/cal}$$

Aufgrund der allgemeinen Proportionalität von Q und W ist es empfehlenswert, beide Größen in einer Einheit anzugeben. Man einigte sich auf die Konvention, beide Größen in Nm, also in Joule, anzugeben.

Mit dem mechanischem Wärmeäquivalent als Umrechnung gilt dann

In einem abgeschlossenen System gilt $\Delta W = \Delta Q$
mit dem mechanischem Wärmeäquivalent als Umrechnung.

Jetzt haben wir gesehen und bewiesen, dass Wärme eine andere Form von Energie ist. In den früheren Kapiteln hingegen haben wir Wärme beschrieben durch Zusammenhänge, z.B. das Idealgasgesetz $pV = nRT$, mit anderen Größen. Was aber haben nun die anderen Größen aus der Wärmelehre, also Druck p , Volumen V und Temperatur T mit dieser Form der Energie zu tun ?

Um diese Frage mathematisch beantworten zu können, reflektieren wir noch einmal den Charakter dieser Größen:

p , V , T sind Zustandsgrößen: Diese Größen sind unabhängig von der Vorgeschichte eines Systems eindeutig messbar. Sie beschreiben also den Zustand eines Systems zu einer festen Zeit.

Zustandsgrößen sind Größen die unabhängig
von der Vorgeschichte eines Systems eindeutig messbar sind.

Die in einem System gespeicherte Wärmemenge hingegen ist keine Zustandsgröße: Eindeutig messbar ist nur die Temperaturänderung eines Systems, und diese muss nicht ausschließlich durch Zuführen von Wärme erzeugt werden, sondern kann z.B. durch Kompression erzielt werden.

Wir unterscheiden im Folgenden Zustandsgrößen und andere Größen. Um nun die Zustandsgrößen und die anderen Größen unterscheiden zu können, wird eine neue Schreibweise benutzt:

Notation XIV.1: Änderung von Zustandsgrößen: dp, dT, dV, dU, \dots
 Änderung anderer Größen: $\delta W, \delta Q, \dots$

Bevor wir neue Zusammenhänge für die Energie eines Systems herleiten, sind hier noch einmal stichwortartig die wichtigsten Ergebnisse über die Energie eines Systems aus den vorherigen Kapiteln zusammengestellt:

Durch die Zurückführung der Gesetze auf Mechanik hatten wir in der kinetischen Gastheorie folgende Gesetze festgehalten:

$$p V = \frac{1}{3} N m \overline{v^2}$$

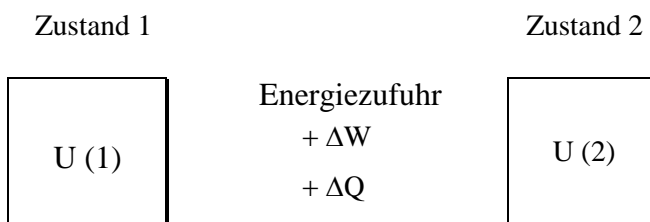
$$\overline{W_K} = \frac{3}{2} k T \quad \text{mit } k = \text{Boltzmann-Konstante}$$

Die Temperatur T ist proportional zur mittleren kinetischen Energie der Moleküle

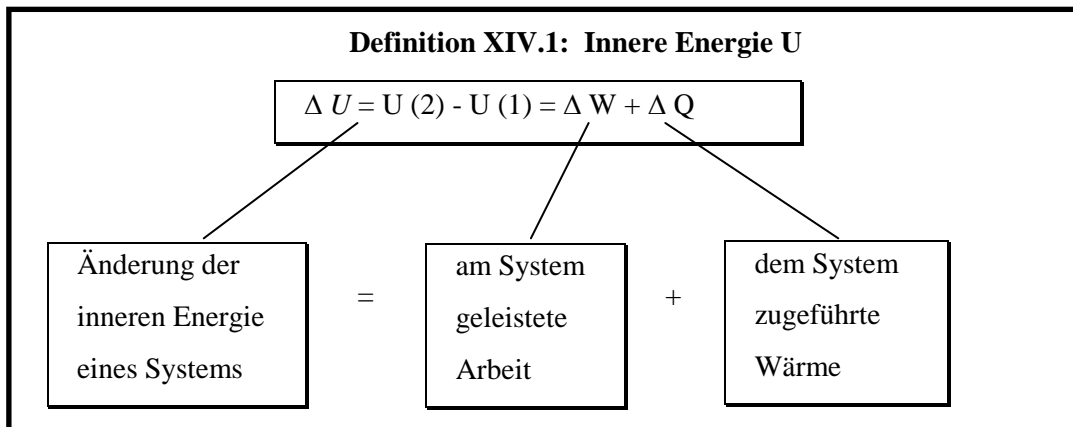
XIV.1.2 Innere Energie

Ziel dieser Überlegungen ist es, eine Zustandsgröße zu finden, die anders als die Wärme oder Arbeit den Zustand eines Systems charakterisiert.

Um den Begriff der 'inneren Energie' verständlich zu machen, betrachten wir zunächst ein abgeschlossenes System. Ein solches System kann realisiert werden durch z.B. ein Gas- oder Flüssigkeitsvolumen. Das System befinde sich zu einer festen Zeit in einem Zustand 1. Dann werde diesem System Energie zugeführt. Das ist möglich entweder durch Leisten mechanischer Arbeit, Zuführen von Wärme oder einer Kombination von beidem. Dieser Vorgang ist dann z.B. das Aufheizen eines Gasvolumens mit gleichzeitiger Kompression. Im Zustand 2 hat das System nun eine andere Energie:



Zur Beschreibung der Zustände führen wir die innere Energie U ein. Dabei wird die Änderung folgendermaßen definiert:



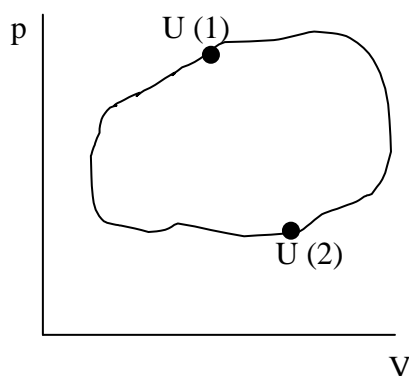
Bei dieser Definition muss eine wichtige Vorzeichenkonvention beachtet werden:

Zugeführte Energie (Arbeit oder Wärme) ist positiv,
 abgegebene Energie (Arbeit oder Wärme) ist negativ.

In vielen Büchern wird eine andere Vorzeichenkonvention gemacht und $dU = dQ - dW$ geschrieben. Dann ist dW die vom System geleistete, d.h. abgegebene Arbeit.

Wie können wir Definition XIV.1 anwenden, um eine Formulierung des 1. Hauptsatzes zu bekommen, mit der wir konkret rechnen können ?

Zunächst betrachten wir hierfür den Übergang eines Systems vom Zustand 1 in einen anderen Zustand 2 in Abhängigkeit der bekannten Zustandsgrößen. Im p/V -Diagramm beispielsweise kann ein solcher Übergang so aussehen:



$U(1) = \text{const}$
 $U(2) = \text{const}$

Nach der Ausführung eines beliebigen Prozesses, bei dem Anfangs- und Endzustand eines Arbeitsstoffes gleich sind, z.B. einem Kreisprozess im p/V -Diagramm, sind definitionsgemäß p , V und T gleich. Ohne weitere Zusatzkenntnisse können über die geleistete Arbeit W oder die zugeführte Wärme Q jedoch keine Aussagen gemacht werden.

Abbildung XIV.2: Kreisprozess im p/V -Diagramm

Da nach dem ersten Hauptsatz jedoch ΔW und ΔQ äquivalent sind, führt die Summe immer zum gleichen Ergebnis ΔU .

Die Innere Energie U ist also anders als die Wärme Q oder die Arbeit W eine Zustandsgröße. Damit haben wir eine Größe definiert, die unabhängig von den vorherigen Änderungen eines Systems jederzeit bestimmt werden kann. Mit einer solchen Zustandsgröße können wir Systeme charakterisieren.

Die Änderung der Inneren Energie $\Delta U = U(2) - U(1)$ ist nur vom Anfangs- und Endzustand abhängig und nicht vom 'Weg', d.h. von der Art, wie die Innere Energie verändert wurde.

Mathematisch können wir diese Größen, die unabhängig vom Weg sind, schreiben als¹

Die innere Energie U ist eine Zustandsgröße, so dass gilt:

$$\oint dU = 0$$

Mit $dU = (\delta Q + \delta W)$ gilt für die Summe der Nicht-Zustandsgrößen

$$\text{Wärme und Arbeit } \oint (\delta Q + \delta W) = 0$$

Aus diesen Sätzen ergeben sich zwei neue Formulierungen des 1. Hauptsatzes:

1. Hauptsatz der Thermodynamik:

Die innere Energie U ist eine Zustandsgröße

$$\oint dU = 0$$

Äquivalent ist die Aussage, dass die Summe aus zugeführter Wärme und geleisteter Arbeit null sein muß, wird das System in einen Endzustand gleicher innerer Energie transferiert. Das bedeutet, dass man kein System erzeugen kann, welches Arbeit leistet ohne die entsprechende Menge Wärme aufzunehmen. Eine solche Maschine wird Perpetuum mobile 1. Art genannt.

1. Hauptsatz der Thermodynamik:

Perpetuum mobile 1. Art

$$\oint (\delta Q + \delta W) = 0$$

Diese zweite Formulierung des Hauptsatzes sagt nicht notwendig, dass die Änderung der Wärme null sein muss ($\oint \delta Q = 0$) und keine Wärme aufgenommen oder abgegeben werden darf

¹ vgl. die Definition konservativer Kräfte, **Def. IV.3** S.56

($\oint \delta W = 0$). Wärme und Arbeit sind keine Zustandsgrößen es sind vielmehr Formen in denen Energie transportiert werden kann.

XIV.2 Innere Energie von Gasen

In diesem Kapitel werden die allgemein für beliebige Systeme hergeleiteten Gesetzmäßigkeiten auf Systeme idealer Gase übertragen. Dazu hatten wir bereits die Zusammenhänge der einzelnen Größen eines Systems benannt.

Bei einem Gas sind die Zustandsgrößen U , p , V , T nicht unabhängig voneinander, im allgemeinen ist $U = U(p, V, T)$ z.B. für ein reales Gas. Die innere Energie ist die Summe aller in einem System (Gas, Festkörper,...) enthaltenen Energien (potentielle und kinetische Energie). Der Sonderfall, den wir behandeln wollen, ist das ideale Gas. Laut Definition gibt es in einem idealen Gas keine Anziehungskräfte, also keine potentielle Energie, sondern nur kinetische Energie.

Um die innere Energie idealer Gase genauer zu untersuchen, überlegte J. Gay-Lussac (1778 - 1850) sich einem Versuch. Diesen Versuch wollen wir als Gedankenexperiment nachvollziehen und auswerten:

Versuch von Gay-Lussac

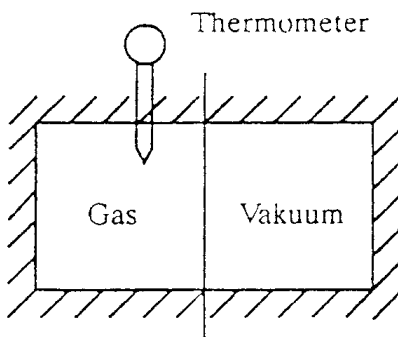


Abbildung XIV.3: schematischer Aufbau des Versuchs von Gay-Lussac

Lussac untersuchte die freie Expansion eines idealen Gases. Bei dem Versuch wird ein thermisch isoliertes Gefäß durch eine Trennwand geteilt. Das Gas befindet sich in einem Teilraum, in dem anderen Teilraum sei Vakuum. Der Zustand des Gases wird gemessen, im Speziellen wird mit einem Thermometer die Temperatur des Gases bestimmt.

Danach wird die Trennwand entfernt. Das Gas kann sich jetzt im gesamten Volumen ausbreiten. Misst man nach einiger Zeit, wenn sich ein Gleichgewicht eingestellt hat, erneut die Temperatur, so kann man keinen Unterschied zu der ursprünglichen Temperatur finden.

$$\Delta T = 0$$

Aus dem vorherigen Kapitel wissen wir, dass die Änderung der inneren Energie zwischen den beiden Zuständen

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W$$

ist. Da bei dem Versuch eine freie Expansion erfolgt ist, d.h. keine Arbeit aufgewendet wurde, gilt

$$\Delta W = 0$$

Das Gefäß soll thermisch isoliert sein, es kann dann weder Wärme nach außen gelangen noch von außen in das Volumen eindringen:

$$\Delta Q = 0$$

Damit gilt für die innere Energie $\Delta U = 0$

Bei diesem Versuch wurde damit ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der inneren Energie U und der Temperatur T hergeleitet $U \leftrightarrow T$

Zusammenfassend können wir schreiben:

In einem idealen Gas
hängt die innere Energie nur von T ab:

$$U = U(T).$$

Das gilt für beliebige Drucke und Volumen.

Die Erklärung aus der kinetischen Gastheorie greift auf die eingangs zusammengefassten

Formeln

$$U = N_A \overline{W_K} = N_A \frac{3}{2} k T = \frac{3}{2} RT$$

zurück:

Der Energieinhalt eines idealen Gases wird durch kinetische Energie der Moleküle bestimmt:

$$W_k = \frac{3}{2} k T$$

Für ein Mol eines idealen Gases gilt daher

$$U = \frac{3}{2} RT$$

Für **ideale Gase** ist die innere Energie

$$U = \frac{3}{2} RT, \quad \text{also } U \equiv U(T)$$

Und entsprechend gilt für n Mol:

$$U = nN_A \overline{W_K} = nN_A \frac{3}{2} k T = \frac{3}{2} nRT$$

Der Übergang zum realen Gas ist schwieriger.

Generell könnte U bei realen Gasen von allen anderen Zustandsgrößen abhängig sein.

$$U = U(p, V, T)$$

Die innere Energie ist dann eine Funktion von zwei Zustandsgrößen, da die Gasgleichung für reale Gase die drei Variablen verbindet:

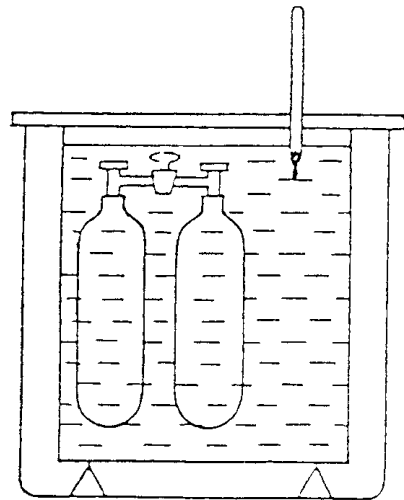
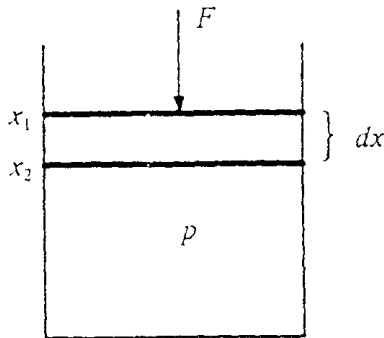


Abbildung XIV.4: Experimenteller Aufbau des Versuchs von Gay-Lussac

Für **reale Gase** ist die innere Energie eine Funktion zweier Zustandsgrößen

$$U \equiv U(p, V) \text{ oder } (p, T) \text{ oder } (V, T)$$

Nun wollen wir ein Beispiel betrachten für die Änderung innerer Energie eines Systems durch mechanische Arbeit. Hierzu betrachten wir erneut ein Gedankenexperiment:



Ein Gasvolumen V sei in einem zylinderförmigen Gefäß mit konstantem Druck p und einer Temperatur T . Durch einen beweglichen Stempel, der um eine Strecke dx nach unten verschoben wird, werde dieses Volumen nun verringert.

Allgemein kennen wir aus der Mechanik die Definition der Arbeit als Produkt aus zurückgelegtem Weg und dafür benötigter Kraft

Abbildung XIV.5: Kompression eines Gases um $\Delta V = A(x_2 - x_1)$

$$\delta W = F dx$$

Nach der Definition des Drucks als Kraft pro Fläche wird durch diese Kraft F auf die Fläche A des Stempels ein Druck ausgeübt, so dass gilt

$$\delta W = - p A dx$$

Das veränderte Volumen berechnet sich aus Grundfläche A mal Höhe dx . Dann folgt für die mechanische Arbeit

$$\delta W = - p dV$$

Nach unserer Vorzeichenkonvention wurde das Vorzeichen so gewählt, dass die am System geleistete Arbeit, also die zugeführte Energie positiv wird. Arbeit wird dem System zugeführt, wenn das Volumen verkleinert wird, d.h. $\Delta V = A(x_2 - x_1) = V_2 - V_1$ negativ ist. Dann ist die Arbeit δW positiv. Falls sich das Gas ausdehnt, also Arbeit nach außen abgibt, ist die Volumenänderung dV positiv und $\delta W = - p dV$ ist negativ, wie vereinbart.

Als nächstes Beispiel betrachten wir einen Kreisprozess:

Die Berechnung der Arbeit für eine Änderung des Volumens von V_1 auf V_2 auf dem Weg a erfolgt durch das Integral:

$$\delta W_a = - \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV$$

Aus der Analysis ist bekannt, dass ein solches Integral die Fläche angibt, die der Graph im p/V -Diagramm mit der Abszisse einschließt.

Verändert man das Volumen anschließend auf einem beliebigen Weg b von V_2 nach V_1 , so

muss dafür die Arbeit

$$\delta W_b = - \int_{V_2}^{V_1} p(V) dV$$

aufgewandt werden. Es ist offensichtlich für $a = b$ $\delta W (2 \rightarrow 1) = - \delta W (1 \rightarrow 2)$

Das gilt z. B. speziell für einen isothermen Kreisprozess

$$\oint \delta W = 0$$

für ein ideales Gas mit konstanter Temperatur.

Im allgemeinen aber gilt diese Beziehung nicht, also

$$\oint \delta W \neq 0$$

im allgemeinen Fall.

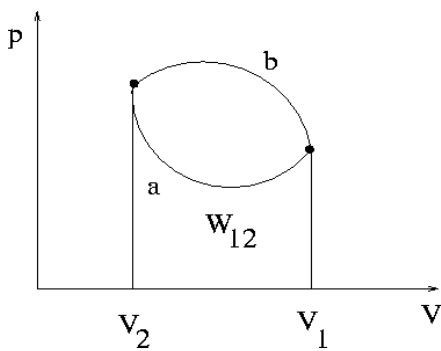


Abbildung XIV.6: Arbeit als Fläche im p/V-Diagramm

Im pV-Diagramm ist in diesem Fall die Differenz der Arbeit δW die Fläche zwischen den Kurven von Punkt 1 nach Punkt 2 und zurück. Die gesamte Arbeit bei diesem Kreisprozess die von den beiden Kurven (a,b) eingeschlossene Fläche. Obwohl wir zum Anfangszustand (1) zurückkehren, kann $\oint \delta W \neq 0$ sein.

Das zeigt noch einmal, dass die Arbeit vom Weg abhängt und keine Zustandsgröße ist. $\oint dU$ ist dagegen, wie wir wissen, immer gleich Null.

XIV.3 Spezifische Wärme idealer Gase

Wie gezeigt, hängt die innere Energie U bei idealen Gasen nicht vom Volumen V und Druck p ab, sondern nur von der Temperatur T . Wir schrieben deshalb für ideale Gase die innere Energie als $U(T)$. Bei idealen Gasen kann man jedoch die spezifische Wärme für konstantes Volumen oder konstanten Druck bestimmen. In Kapitel X auf Seite 262 hatten wir den Begriff der spezifischen Wärme eingeführt:

Wir hatten definiert, dass die Proportionalitätskonstante zwischen Wärmemenge δQ und Temperaturänderung dT einer Masse m spezifische Wärme genannt wird:

Der Quotient aus Wärmemenge δQ und dem Produkt aus Temperaturänderung dT und der Masse m des erwärmten Körpers wird **spezifische Wärme c** genannt:

$$c = \frac{1}{m} \cdot \frac{\delta Q}{dT}$$

Die Einheit der spezifischen Wärme ist $[c] = \frac{\text{J}}{\text{gK}}$

Im allgemeinen Fall verändert sich bei der Zustandsänderung eines idealen Gases sowohl sein Volumen als auch der Druck. Diese Fälle sind schwer zu berechnen. Einfacher hingegen berechnet man die innere Energie idealer Gase, wenn eine der beiden Größe Druck oder Volumen konstant bleiben. Diese beiden Fälle untersuchen wir nun genauer:

XIV.3.1 spezifische Wärme bei konstantem Volumen

In diesem Kapitel betrachten wir den Fall:

1. Fall: $V = \text{const.}$

Um zu verdeutlichen, dass diese Rechnung nur für konstante Volumen gilt, wird die spezifische Wärme mit dem Index v gekennzeichnet: spezifische Wärme c_v .

$$\boxed{dU} \xrightarrow{\delta Q} \\ V = \text{constant}$$

Dann schreiben wir für die spezifische Wärme

$$c_v = \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_{V=\text{const.}} \quad \rightarrow$$

Es gilt der 1. Hauptsatz

$$dU = \delta Q + \delta W$$

und mit $\delta W = -p dV$ folgt

$$dU = \delta Q - p dV$$

Mit der Grundannahme, das Volumen sei konstant, also $dV = 0$ folgt dann

$$dU = \delta Q$$

In \rightarrow eingesetzt ergibt

$$c_v = \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{dU}{dT} \right)_{V=\text{const.}}$$

$$\Leftrightarrow dU = m c_v dT$$

Im Einklang mit der kinetischen Gastheorie steht die Annahme, dass die spezifische Wärme c_v konstant ist. Die innere Energie U ist proportional zur Temperatur T : $U = U(T)$. Auch daraus folgt direkt, dass c_v konstant ist:

Aus

$$dU = m c_v dT$$

folgt durch Integration

$$\int_1^2 dU = m c_v \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$\Leftrightarrow U_2 - U_1 = m c_v (T_2 - T_1).$$

Bezeichnen wir die innere Energie des Gases im Anfangszustand mit U_0 und die Temperaturdifferenz mit T , so gilt die 'kalorische Zustandsgleichung'

kalorische Zustandsgleichung idealer Gase

$$U = m c_v T + U_0$$

Als wichtigstes Ergebnis ist festzuhalten, dass die innere Energie des idealen Gases linear mit der Temperatur ansteigt. Die unbestimmte Konstante U_0 ist aufzufassen als der Teil der inneren Energie, der bei thermodynamischen Prozessen keine Rolle spielt. Mit Hilfe der Thermodynamik können über U_0 keine Aussagen gemacht werden. Da jedoch zwischen zwei Zuständen nur Energieunterschiede auftreten, ist es möglich $U_0 = 0$ zu wählen. Diese Wahl vereinfacht die kalorische Zustandsgleichung auf die Form

Die kalorische Zustandsgleichung idealer Gase lautet

$$U = m c_v T \text{ mit } U_0 = 0$$

Aus dem 1. Hauptsatz

$$dU = \delta Q - p dV$$

folgt mit der Idealgasgleichung

$$p V = n R T$$

und der kalorischen Zustandsgleichung

$$dU = m c_v dT$$

$$m c_v dT = \delta Q - \frac{n R T}{V} dV$$

$$\Leftrightarrow \delta Q = m c_v dT + \frac{n R T}{V} dV$$

Diese Gleichung wird Energiesatz für ideale Gase genannt:

Der **Energiesatz für ideale Gase** lautet:

$$\delta Q = m c_v dT + \frac{n R T}{V} dV.$$

Wie bereits in Kapitel X eingeführt, wird bei Gasen oft nicht die Masse m betrachtet sondern die Anzahl der Teilchen, also die molaren Größen. Deshalb definieren wir die molare Wärmekapazität bezogen auf ein Mol:

Definition XIV.2: Die Molwärme oder molare Wärmekapazität C_v wird definiert als

$$C_v = M \cdot c_v = \left(\frac{dU_m}{dT} \right)_{\text{bei } V_m = \text{const}} \quad \text{mit } U_m = \left(\frac{U}{n} \right) \text{ für } n \text{ mol und } M = \frac{m}{n}.$$

Die Einheit der molaren Wärme ist $[C_V] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$.

Betrachten wir nun den 2. Fall:

XIV.3.2 spezifische Wärme bei konstantem Druck

In diesem Fall sei der Druck konstant:

2. Fall: $p = \text{const.}$

Analog zu dem ersten Fall bezeichnen wir die spezifische Wärme bei konstantem Druck mit c_p .

Die Zustandsänderung eines Gases mit gleichbleibenden Druck muss andere Auswirkungen haben, als die bei konstantem Volumen: Zusätzlich zur Erwärmung muss nun auch Ausdehnungsarbeit geleistet werden. Zur Berechnung betrachten wir ein Gedankenexperiment:

Gas wird erhitzt, dehnt sich dabei aus und leistet Arbeit.

Zunächst gilt der 1. Hauptsatz $dU = \delta Q + \delta W$

Nach unserer Vorzeichenkonvention gilt damit

$$\delta Q = dU + p dV$$

mit $p = \text{const.}$ $\Leftrightarrow \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU}{dT} + p \frac{dV}{dT}$

Mit der Definition der Wärmekapazität angewandt auf konstanten Druck

$$c_p = \frac{1}{m} \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)$$

folgt

$$m c_p = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU}{dT} + p \frac{dV}{dT}$$

bezogen auf ein Mol schreiben wir mit $V_m = \frac{V}{n}$ als Volumen pro Mol und $U_m = \frac{U}{n}$ als innere

Energie pro Mol $C_p = \frac{dU_m}{dT} + p \frac{dV_m}{dT} \quad \neg$

Der Term $\frac{dU_m}{dT}$ ist bereits aus dem 1. Fall bekannt. Er bezeichnet die molare Wärmekapazität

bei konstantem Volumen, also $\frac{dU_m}{dT} = C_V$.

Nun müssen wir versuchen, den zweiten Term $p \frac{dV_m}{dT}$ zu interpretieren. Hierfür betrachten wir

noch einmal die Idealgasgleichung $p V = n R T$.

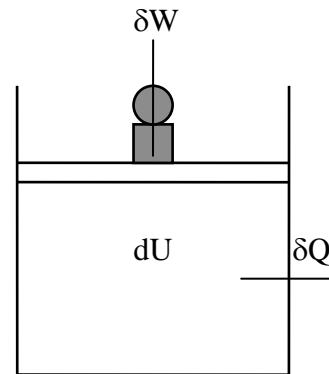


Abbildung XIV.7:
Gedankenexperiment zur Herleitung der spezifischen Wärme c_p

Die Ableitung der Idealgasgleichung für ein Mol

$$p V_m = R T$$

nach T ergibt:

$$\frac{d(p V_m)}{dT} = R$$

Mit der Kettenregel gilt

$$\frac{d(p V_m)}{dT} = p \frac{dV_m}{dT} + V_m \frac{dp}{dT}$$

Für $p = \text{constant}$ gilt schließlich

$$p \frac{dV_m}{dT} = R$$

Damit folgt aus \rightarrow

$$C_p = \frac{dU_m}{dT} + p \frac{dV_m}{dT}$$

$$C_p = C_v + R$$

Für die molaren Wärmekapazitäten
gilt die Beziehung $C_p = C_v + R$.

Diese Gleichung zeigt, dass die molare Wärmekapazität bei konstantem Druck größer ist als bei konstantem Volumen. Dieses Ergebnis ist aufgrund der Ausdehnungsarbeit anschaulich verständlich.

Für die Molwärmen gilt:

$$C_v < C_p$$

XIV.3.3 Theoretische Bestimmung der Molwärme

Wie groß ist nun die Molwärme C_v bei konstantem Volumen?

Um diese Frage zu beantworten, müssen wir die innere Energie U kennen. Aus Kapitel XIV.2

wissen wir, dass für ein ideales Gas, d.h. Moleküle ohne Ausdehnung, gilt $U = \frac{3}{2} RT$.

Dabei gingen wir davon aus, dass ideale Gasmoleküle Punktmassen sind und deshalb nur drei Freiheitsgrade der Translation besitzen. In Kapitel XI hatten wir den Begriff der Freiheitsgrade eingeführt:

Wir hatten in der kinetischen Gastheorie festgestellt, dass bei der regellosen Bewegung eines Gasmoleküls keine Raumrichtung bevorzugt wird. Deshalb besitzt jedes Teilchen entsprechend den drei räumlichen Richtungen drei voneinander unabhängige Bewegungsmöglichkeiten. Wir drückten das so aus: jedes Teilchen besitzt drei Freiheitsgrade der Translation.

Besteht das Molekül nicht nur aus einem Atom, so hat es zusätzlich die Bewegungsfreiheit, sich um bestimmte Achsen zu drehen. Ein solches Molekül kann zusätzlich bis zu drei Freiheitsgrade der Rotation besitzen, je nachdem, um wie viele unabhängige Drehachsen es

rotieren kann. Diese Überlegung wird weiter unten wieder aufgegriffen und zu einem späteren Zeitpunkt in der Experimentalphysik (Physik IV) vertieft.

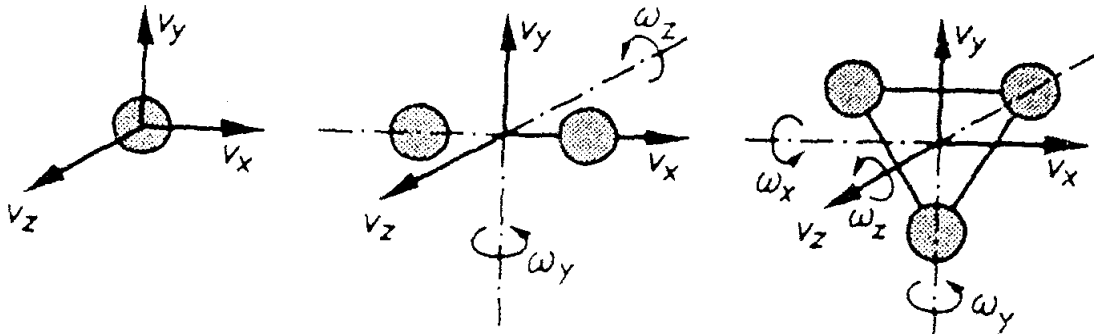


Abbildung XI.10 Freiheitsgrade ein-, zwei- und dreiatomiger Moleküle:

- a) 3 Freiheitsgrade der Translation
- b) 3 Freiheitsgrade der Translation und 2 der Rotation
- c) 3 Freiheitsgrade der Translation und 3 der Rotation

Allgemein hatten wir die innere Energie U eingeführt als mittlere kinetische Energie aller Gasmoleküle:

$$U = \sum_{\text{Moleküle}} \overline{W_{\text{kin}}}$$

mit der Anzahl f der Freiheitsgrade gilt allgemein für 1 Mol

Die innere Energie pro mol U_m ist die Summe aus der mittleren kinetischen Energie von N_A Molekülen, also

$$U_m = N_A \overline{W_{\text{Molekül}}}$$

Die mittlere kinetische Energie eines Moleküls berechnet man nach Kapitel X als

$$\overline{W_{\text{Molekül}}} = \frac{f}{2} k T$$

Dann gilt

$$U_m = N_A \frac{f}{2} k T.$$

Mit $N_A k = R$ folgt

$$U_m = \frac{f}{2} R T.$$

Aus der Gleichung

$$C_v = \left(\frac{dU_m}{dT} \right)_{V=\text{const}}$$

folgt durch Differentiation

$$C_v = \frac{f}{2} R.$$

Aus $C_p = C_v + R$ folgt $C_p = \frac{f}{2} R + R$

Für die Molwärme idealer Gase gilt

$$C_v = \frac{f}{2} R \quad C_p = \left(1 + \frac{f}{2}\right) R$$

Das Verhältnis von Molwärme bei konstantem Volumen und bei konstantem Druck berechnet sich dann als

$$\frac{C_p}{C_v} = \frac{2+f}{f}.$$

Da $C_v < C_p$ ist, ist dieses Verhältnis immer größer 1. Man nennt dieses Verhältnis Adiabatenkoeffizient.

Definition XIV.3: Der Adiabatenkoeffizient κ ist das Verhältnis der Molwärme bei konstantem Druck zur Molwärme bei konstantem Volumen:

$$\frac{C_p}{C_v} = \kappa = \frac{2+f}{f}$$

Im Bezug auf die Anzahl der Freiheitsgrade f unterscheidet man vier Fälle:

1. 1-atomige Gase

Beispiele für 1-atomige Gase sind die Edelgase Helium (He), Neon (Ne), Argon (Ar), aber auch Natrium- oder Quecksilber-Dampf (Na- oder Hg-Dampf)

Diese Gase haben wie bereits erläutert nur 3 Translationsrichtungen und damit drei Freiheitsgrade

$$f = 3$$

Dann gilt

$$C_v = \frac{3}{2} R \quad \text{und} \quad C_p = \frac{5}{2} R$$

Der Adiabatenkoeffizient κ ist

$$\kappa = \frac{5}{3} = 1,667.$$

Für 1-atomige Gase gilt

$$C_v = \frac{3}{2} R, \quad C_p = \frac{5}{2} R \quad \text{und} \quad \kappa = \frac{5}{3}.$$

2. 2-atomige Gase

Hier können als Beispiele H_2 , N_2 , O_2 oder HCl aufgezählt werden.

Beschrieben werden diese Moleküle durch ein mechanisches Modell, das sogenannte Hantelmodell. Eine Hantel kann sich in drei Raumrichtungen bewegen, hat also 3 Freiheitsgrade der Translation.

$$f = 3 \quad \text{für Translation}$$

Bei mehratomigen Molekülen muss man zudem Freiheitsgrade der Rotation betrachten: Das Molekül kann bei einer frei im Raum beweglichen Drehachse zusätzlich drei Freiheitsgrade der Rotation besitzen. Bei linearen Molekülen, zu denen z.B. die zweiatomigen Moleküle gehören, fällt bei Energiebetrachtungen ein Freiheitsgrad weg: Das Trägheitsmoment bezüglich der Hantelachse ist ebenso vernachlässigbar wie bei einatomigen Gasen. Die Energie, die nötig wäre um ein Molekül um diese Achse in Rotation zu versetzen ist so groß, dass sie quantenmechanisch nicht angeregt werden kann.

$$f = 2 \quad \text{für Rotation}$$

Für lineare, speziell 2-atomige Gase gilt:

$$C_V = \frac{5}{2} R, \quad C_P = \frac{7}{2} R \quad \text{und} \quad \kappa = \frac{7}{5}$$

3. 3-atomige Gase

Beispiele hierfür sind H₂O-Dampf oder NH₃. Bei diesen Atomen können alle drei Rotationsrichtungen angeregt werden. Deshalb besitzen sie

$$f = 3 \quad \text{für Translation}$$

$$f = 3 \quad \text{für Rotation}$$

Für 3-atomige Gase gilt:

$$C_V = 3R, \quad C_P = 4R \quad \text{und} \quad \kappa = \frac{4}{3}$$

4. Schwingung

Bei höheren Temperaturen sind Schwingungen der Atome gegeneinander möglich. Mit Schwingung ist die Zahl der Freiheitsgrade für ein zweiatomiges Gas $f = 7$. Der Schwingung entsprechen zwei Freiheitsgrade, da im Mittel die Hälfte der Energie in potentieller, die andere Hälfte in kinetischer Energie steckt. Für die Temperatur ist nur die kinetische Energie entscheidend, aber diese kann nicht erhöht werden, ohne dass auch die potentielle Energie erhöht wird.

XIV.3.4 Experimentelle Bestimmung der Molwärme

Die Messung der Molwärme C_V ist praktisch sehr schwierig, da alle Gefäßwände im Vergleich zum Gas eine sehr große Masse haben. Durch den Wärmetransport wird deshalb die Messung erheblich verfälscht.

Ein Verfahren zur Bestimmung der molaren Wärmekapazitäten ist der Versuch nach Pohl:

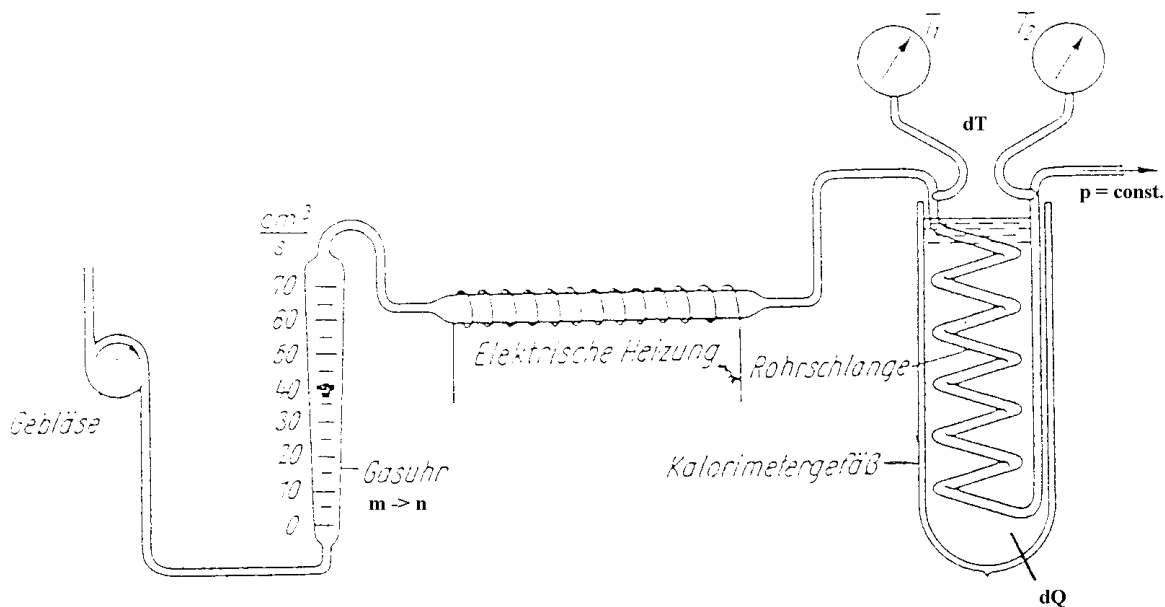


Abbildung XIV.8: Versuch nach Pohl zur Bestimmung der Molwärme

C_p lässt sich im strömenden Gas mit einem Versuch nach Pohl messen, indem man es erhitzt und durch eine Rohrwindel in ein Kalorimeter fließen lässt. Aus der Temperaturdifferenz, aus der durchflossenen Gasmenge und aus der im Kalorimeter abgegebenen Energie wird die Molwärme C_p bestimmt. Die Berechnung ergibt die Formel

$$C_p = \frac{1}{n} \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_{p = \text{const}}$$

Da dieser Versuch für die Vorlesung zu kompliziert ist, wollen wir einen anderen Versuch zeigen:

Versuch XIV.2: Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten

Bei diesem Versuch wird ein Glaskolben mit Gas gefüllt und anschließend mit einem frei beweglichen Stopfen verschlossen. Im Ruhezustand wird die Stellung des Stopfens markiert.

Sie werde mit x bezeichnet und sei $x = 0$. Drückt der Stopfen nun mit seiner Masse m auf das Gasvolumen, so wird das Gas komprimiert. Es entsteht ein Druck, der den Stopfen zurücktreibt über die Ruhelage hinaus. So entsteht ein Unterdruck und der Kolben wird wieder nach unten gedrückt. Die so entstehende Schwingung ist leider durch Reibung des Stopfens am Glaskolben gedämpft. Um diese Dämpfung zu umgehen, wird der Stopfen periodisch durch einen Gasstrom angetrieben. So entsteht eine erzwungene Schwingung mit gleichbleibender Amplitude.

Bevor wir die Schwingungsgleichung aufstellen und mit Hilfe der Kenntnisse aus der Mechanik lösen, muss kurz ein neuer Begriff eingeführt werden:

Wir hatten in Kapitel XI den Begriff der Isothermen kennen gelernt. Die Isothermen ($T = \text{const.}$) sind im p/V -Diagramm als Hyperbeln darstellbar. Es gilt

$$pV = \text{constant.}$$

Analog zu den Isothermen nennt man die Kurven im p/V - Diagramm ohne Wärmeaustausch ($\delta Q = 0$) Adiabaten. Aufgrund einer Gleichung, die wir später herleiten werden,

$$pV^\kappa = \text{constant,}$$

sind diese Hyperbeln steiler als die Isothermen.

Mit Kenntnis dieser neuen Gleichung können wir die Schwingungsgleichung aufstellen:

Auf den Korken wird die Kraft $F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2}$ ausgeübt.

Diese Kraft erzeugt einen Druck mit $F_x = A \cdot dp$ mit der Grundfläche A des Korkens. Die Druckdifferenz ist für positive Volumenänderungen negativ, denn die Kraft wirkt der Volumenvergrößerung entgegen.

Mithilfe der neuen Gleichung $pV^\kappa = \text{constant}$ können wir dp berechnen.

Es gilt $\frac{dp}{dV} = \text{const.} \cdot (-\kappa) \cdot V^{-\kappa-1}$

$$\Leftrightarrow \frac{dp}{dV} = -\kappa \cdot p \cdot V^{-\kappa+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dp}{dV} = -\kappa \cdot p \cdot V^{-1}$$

$$\Leftrightarrow dp = -\kappa \cdot p \cdot V^{-1} dV$$

Dann folgt aus $m \frac{d^2 x}{dt^2} = A \cdot dp$

$$\Leftrightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{A \cdot \kappa \cdot p \cdot dV}{V}$$

mit $dV = Ax$ gilt $\Leftrightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{A^2 \cdot \kappa \cdot p \cdot x}{V}$

Aus dieser Schwingungsgleichung kann man die Winkelgeschwindigkeit ablesen:

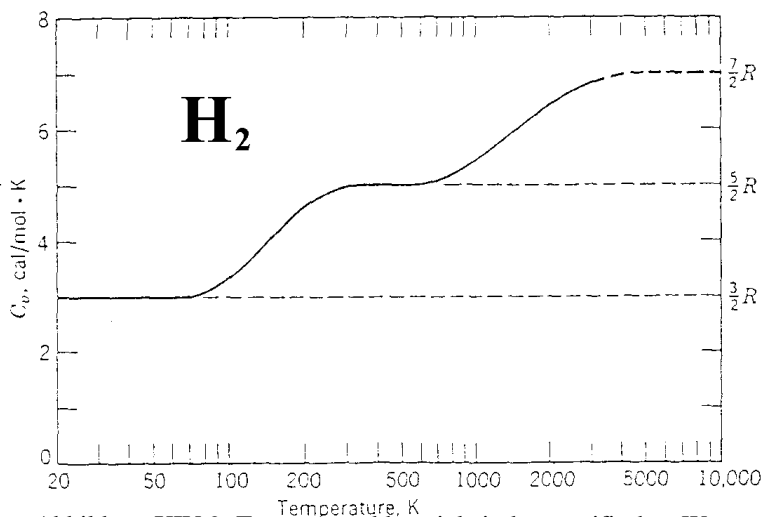
$$\omega^2 = \frac{\pi^2 \cdot \kappa \cdot p \cdot r^4}{mV}$$

mit $A = \pi r^2$.

Durch Messen der Frequenz kann man den Adiabatenkoeffizient bestimmen, da m , p , r und V durch den Versuchsaufbau vorgegeben sind.

XIV.3.5 Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme von Gasen

Aus der Quantenmechanik folgt, dass Rotationen und Schwingungen erst ab einer Mindestenergie der Moleküle angeregt werden, während die Translationsbewegung immer möglich ist. Dementsprechend werden die zusätzlichen Freiheitsgrade erst ab einer Temperatur T_r (Rotation) und T_s (Schwingung) angeregt.



Variation of the molar heat C_v of hydrogen with temperature. Note that T is drawn on a logarithmic scale. Hydrogen dissociates before 3200 K is reached. The dashed curve is for a diatomic molecule that does not dissociate before 10.000 K is reached.

Abbildung XIV.9: Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme von H_2

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die spezifischen Wärmekapazitäten einiger Stoffe bei einem Druck von 1 bar und einer Temperatur von 25°C. Die erste Gruppe bilden die idealen, 1-atomigen Gase, für die wir einen theoretischen Wert von $\kappa = 1,6$ berechnet hatten. In der zweiten Gruppe stehen die 2-atomigen Gase mit einem Theoriewert von $\kappa = 1,4$. Für die letzte Gruppe, die 3-atomigen Gase hatten wir $\kappa = 1,333$ errechnet.

Stoff	C_P in J/kg K	C_P in J/mol K	C_V in J/mol K	C_P / C_V κ	$C_P - C_V$ in J/mol K
He	5233	20,95	12,62	1,66	8,33
Ar	523	20,90	12,47	1,676	8,43
Kr	248	20,78	12,30	1,69	8,48
Xe	160	21,00	12,65	1,66	8,35
Hg- Dampf	104	20,80	12,46	1,67	8,34
H ₂	14300	28,83	20,45	1,41	8,38
Cl ₂	473	33,54	24,84	1,35	8,70
N ₂	1041	29,16	20,81	1,401	8,35
O ₂	917	29,34	21,12	1,389	8,22
CO ₂	837	36,84	28,49	1,239	8,35
CH ₄	2219	35,60	27,22	1,308	8,38
SO ₂	641	41,04	32,31	1,27	8,73
NH ₃	2160	36,80	28,20	1,305	8,60

Tabelle XIV.1: Spezifische Wärmekapazitäten von Gasen bei 25⁰ und 1 bar

XIV.4 Enthalpie und Joule-Thomson-Effekt

In diesem Kapitel wird eine neue Zustandsgröße, die Enthalpie, eingeführt. Dieser relativ unbekanntes Zustandsgröße wird in Analogie zur inneren Energie U definiert.

XIV.4.1 Definition der Enthalpie

Wir haben festgestellt, dass die innere Energie U proportional ist zur spezifischen Wärme eines Stoffes bei konstantem Volumen. Nun überlegen wir, ob man eine ähnliche Größe definieren kann, die direkt proportional zur spezifischen Wärme eines Stoffes bei konstantem Druck ist. Eine so eingeführte Größe hilft, Zustandsänderungen mit konstantem Druck zu berechnen, denn die innere Energie ist anschaulich, aber technisch oft nicht verwendbar, da häufig nicht das Volumen V , sondern der Druck konstant ist. In dieser Größe, so wissen wir, muss die innere Energie um die Volumenarbeit pV vermehrt sein.

Zunächst berechnen wir die Wärme also statt mit $C_V = \text{const}$ mit $C_P = \text{const}$.

Dann gilt

$$\delta Q = m c_p dT$$

Analog zu U ist damit die gesuchte neue Zustandsgröße definierbar:

Wir setzen mit $c_p = \text{const}$ für ideales Gas $dH = m c_p dT$

Die neue Zustandsgröße wird Enthalpie genannt und mit H bezeichnet.

Diese Gleichung heißt 'Gibbsche Wärmefunktion' ($\theta\alpha\lambda\pi\sigma = \text{Wärme}$).

Berechnen wir nun mithilfe dieser Definition die Enthalpie eines Systems:

Es gilt
$$\frac{d(pV)}{dT} = p \frac{dV}{dT} + V \frac{dp}{dT}$$

$$\Rightarrow d(pV) = p dV + V dp$$

Erweitern wir nun den ersten Hauptsatz $\delta Q = dU + p dV$

um $V dp - V dp$, so folgt $\delta Q = dU + p dV + V dp - V dp$

Fassen wir $p dV + V dp$ zusammen zu $p dV + V dp = d(pV)$

so folgt $\delta Q = dU + d(pV) - V dp$

Mit der Grundannahme $p = \text{const}$ folgt $V dp = 0$

und damit gilt $\delta Q = dU + d(pV)$.

$$\Leftrightarrow \delta Q = d(U + pV)$$

wegen $\delta Q = dH$ folgt

$$H = U + pV$$

Diese Gleichung ist die allgemeine Definition der Zustandsgröße H:

Definition XIV.4: Die Enthalpie H ist definiert als

$$H = U + pV.$$

Die Enthalpie ist eine Zustandsgröße.

Wie bereits vermutet, ist die Enthalpie eines Stoffes die innere Energie erweitert um die Volumenarbeit, die bei einer Zustandsänderung mit konstantem Druck zusätzlich aufgewandt werden muss.

Für ein ideales Gas ergibt sich

mit $U = m c_v T$ und $pV = nRT$

$$H = m c_v T + n R T,$$

und mit $m c_v = n C_v$ folgt

$$H = n C_v T + n R T.$$

$$\Leftrightarrow H = n (C_v + R) T$$

$$\Leftrightarrow H = n C_p T$$

Für ideales Gas berechnet sich die Enthalpie als

$$H = n C_p T$$

XIV.4.2 Joule-Thomson-Effekt

Den Joule-Thomson-Effekt haben wir quantitativ bereits diskutiert, als wir die Entspannung eines Gases von einem Druck in einen niedrigeren Druck betrachtet haben. Im Prinzip stellt er einen stationären Gay-Lussacschen Überströmungsversuch dar². Bei diesem Versuch wird eine adiabatische Expansion ohne Arbeitsleistung ausgeführt, d.h. weder Wärme wird mit der Umgebung ausgetauscht ($\delta Q = 0$) noch wird Arbeit am System geleistet ($\delta W = 0$). Diese Art der Expansion nennt man freie Expansion.

Bei idealen Gasen bleibt wegen

$$dU = \delta Q + \delta W$$

mit $\delta Q = 0$ und $\delta W = 0$

$$dU = 0,$$

also die innere Energie konstant.

Deshalb gilt mit

$$U = n \frac{f}{2} R T,$$

dass die Temperatur konstant bleibt

$$T = \text{const.}$$

Was passiert bei realen Gasen ?

In einem Gedankenexperiment betrachten wir eine gedrosselte Expansion. Dabei tritt der Joule-Thomson-Effekt auf, bei dem ein stationärer Gasstrom aus einem Raum mit konstantem höherem Druck durch eine Drosselstelle, z.B. einen Wattlebausch, langsam in einen Raum

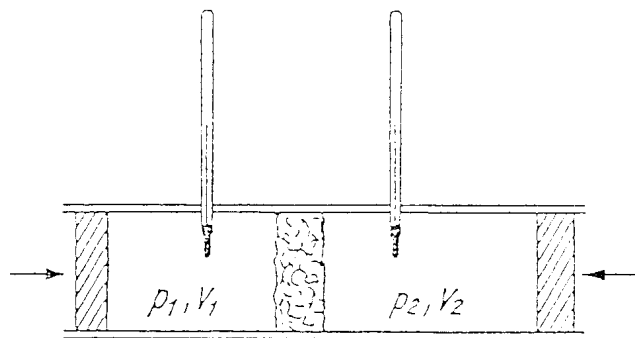


Abbildung XIV.10: schematischer Aufbau des Gedankenexperimentes

konstanten niederen Drucks strömt. Zur Vermeidung von Störungen durch Wirbelbildungen des Gases oder zusätzlicher Geschwindigkeit, was eine Erhöhung der kinetischen Energie bedeuten würde, wird dieser Prozess genügend langsam durchgeführt. Deshalb strömt das Gas langsam durch den Wattlebausch. Es wird vorausgesetzt, dass dieser Prozess adiabatisch, d.h.

² vgl. Versuch von Gay-Lussac in Kapitel XIV.2

wärmeisoliert, abläuft. Zur Beantwortung unserer Frage interessieren uns bei diesem Versuch vor allem die Temperaturen vor und hinter der Drosselstelle.

Die bei der Strömung umgesetzte Energie kann man erfassen, indem man sich vorstellt, dass ein bestimmtes Volumen V_1 vor der Drosselstelle durch einen Kolben 1 durch diese hindurchgeschoben wird, wobei der Druck p_1 konstant gehalten wird. Der Kolben 2 hinter der Drosselstelle wird dann mit dem konstanten Druck p_2 vom Gas vor sich hergeschoben. Ist das Gas vollständig durch die Drosselstelle geschoben, nimmt es das Volumen V_2 ein.

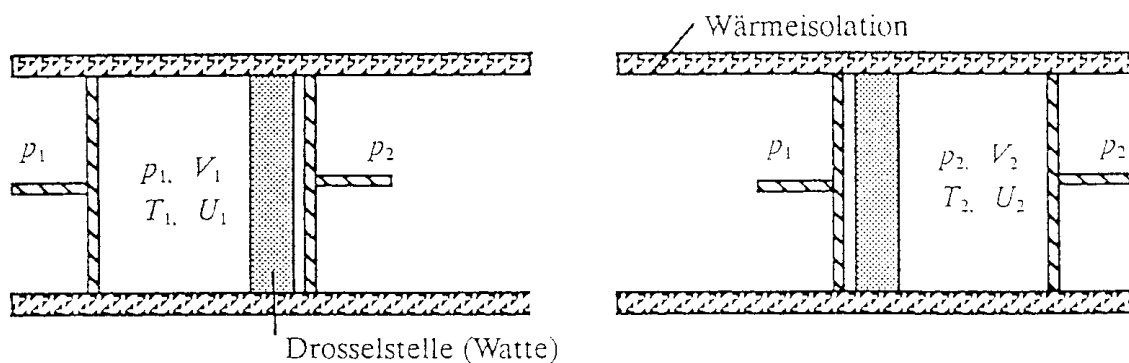


Abbildung XIV.11: Das Gas ist vollständig durch die Drosselstelle geschoben

Welche Arbeit wird dabei an Volumen 1 geleistet ?

Für die Expansion des Gases von $p_1 \rightarrow p_2$ bzw. $V_1 \rightarrow V_2$ gilt nun

mit $\delta W_1 = - p_1 dV_1$

integriert über $p = \text{const.}$ gilt $W_1 = p_1 V_1$

W_1 ist die am Volumen 1 geleistete Arbeit.

Analog gilt mit $\delta W_2 = p_2 dV_2$

integriert über $p = \text{const.}$ gilt $W_2 = - p_2 V_2$

W_2 ist von Volumen 2 aufgenommene Arbeit. Aufgrund unserer Vorzeichenkonvention ist die aufgenommene Arbeit W_2 negativ.

Mit dem 1. Hauptsatz $\Delta U = \Delta Q + \Delta W$

und $\Delta W = W_1 + W_2$

folgt dann $\Delta U = \Delta Q + W_1 + W_2$

$$\Rightarrow \Delta U = \Delta Q + p_1 V_1 - p_2 V_2$$

Da der Prozeß adiabatisch verläuft gilt $\Delta Q = 0$

und damit $\Delta U = p_1 V_1 - p_2 V_2$

$$\Leftrightarrow U_2 - U_1 = p_1 V_1 - p_2 V_2$$

$$\Leftrightarrow U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2$$

mit $H = U + pV$ folgt

$$H_1 = H_2$$

Bei einem idealen Gas mit

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

$$\Rightarrow U_1 = U_2$$

oder

$$T_1 = T_2$$

Wie bereits berechnet, bleibt bei einem idealen Gas die Temperatur konstant. Dagegen zeigt der Joule-Thomson-Effekt für ein reales Gas, dass die innere Energie nicht nur von der Temperatur abhängig ist, sondern $U = U(p, T)$ oder $U = U(V, T)$. Bei realem Gas bleibt die Enthalpie erhalten. Die Enthalpie als Erhaltungsgröße bei der sogenannten 'isenthalpischen Entspannung' zeigt, dass es sinnvoll ist, eine Größe so zu definieren.

Bei einer **isenthalpischen Entspannung** bleibt bei einem idealen Gas die Temperatur, bei einem realen Gas die Enthalpie erhalten.

Nun müssen wir die Enthalpie H für ein reales Gas bestimmen:

Allgemein gilt

$$H = U + pV$$

Um H zu bestimmen müssen wir also den Druck p und die innere Energie U bestimmen.

Der Zusammenhang zwischen diesen Zustandsgrößen wird durch die *Van-der-Waals-Gleichung*

beschrieben:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right) (V_m - b) = RT$$

$$\Leftrightarrow p_{\text{real}} = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2} \quad (a > 0)$$

Eingesetzt in $H = U + pV$ folgt

$$H = U + \left(\frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2}\right) V_m$$

Die innere Energie U eines idealen Gases

$$U(T) = \frac{f}{2} RT$$

muss für ein reales Gas erweitert werden um einen Korrekturglied W_p , das aus der Anziehung

der Moleküle resultiert. Mit

$$P_{\text{innen}} = \frac{a}{V_m^2}$$

$$\Leftrightarrow W_p = \int \frac{a}{V_m^2} dV$$

folgt

$$W_p = -\frac{a}{V_m}$$

Dann folgt für die innere Energie

$$U(T, V) = \frac{f}{2} RT - \frac{a}{V_m}$$

Eingesetzt in

$$H = U + \left(\frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2} \right) V_m$$

folgt

$$H = \frac{f}{2} RT - \frac{a}{V_m} + \left(\frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2} \right) V_m$$

Bei einer isenthalpischen Entspannung ist

$$H = \text{const.}$$

und folglich

$$dH = 0.$$

Um die erste Ableitung dieser Gleichung zu berechnen, führen wir den Begriff der totalen Differentialen ein:

Definition XIV.5: Totales oder vollständiges Differential einer Funktion f von zwei Variablen an der Stelle (x_0, y_0) nennt man den Ausdruck

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) dy$$

Dabei sind dx und dy als Variable aufzufassen, df ist also selbst eine lineare Funktion zweier Variablen.

Bildet man nun das totale Differential dH erhält man:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial V} dV + \frac{\partial H}{\partial T} dT = 0$$

Partielle Differentiation liefert ³:

$$\frac{dT}{dV} \cong \frac{bRT - 2a}{C_p V_m^2}$$

Es gibt jetzt die zwei Möglichkeiten:

1. Abkühlung:

$$\frac{dT}{dV} < 0 \quad \text{falls} \quad T < T_{\text{inv}} = \text{Inversionstemperatur}$$

2. Erwärmung

$$\frac{dT}{dV} > 0 \quad \text{falls} \quad T > T_{\text{inv}}$$

$$T_{\text{inv}} = \frac{2a}{Rb} \text{ ergibt sich durch Lösen der Gleichung } \frac{dT}{dV} = 0.$$

³ siehe z.B. Demtröder, Band 1

Häufig definiert man auch $\frac{dT}{dp} = \mu$, wofür gilt (Umrechnung aus *Van-der-Waals-Gleichung*)

$$\frac{dT}{dp} = \frac{dT}{dV} \frac{dV}{dp} \cong \frac{dT}{dV} \left(-\frac{V_m^2}{RT} \right) = \frac{\frac{2a}{RT} - b}{C_p} = \mu$$

μ wird als Joule-Thomson-Koeffizient bezeichnet.

Die Einheit des Joule-Thomson-Koeffizienten ist $[\mu] = \text{K}/10^5 \text{ Pa}$

Definition XIV.6: Die Inversionstemperatur ist durch $\mu = 0$ definiert:

$$T_{\text{inv}} = \frac{2a}{Rb} \approx 6,75 T_k$$

$$\text{mit der kritischen Temperatur } T_k = \frac{8a}{27Rb}.$$

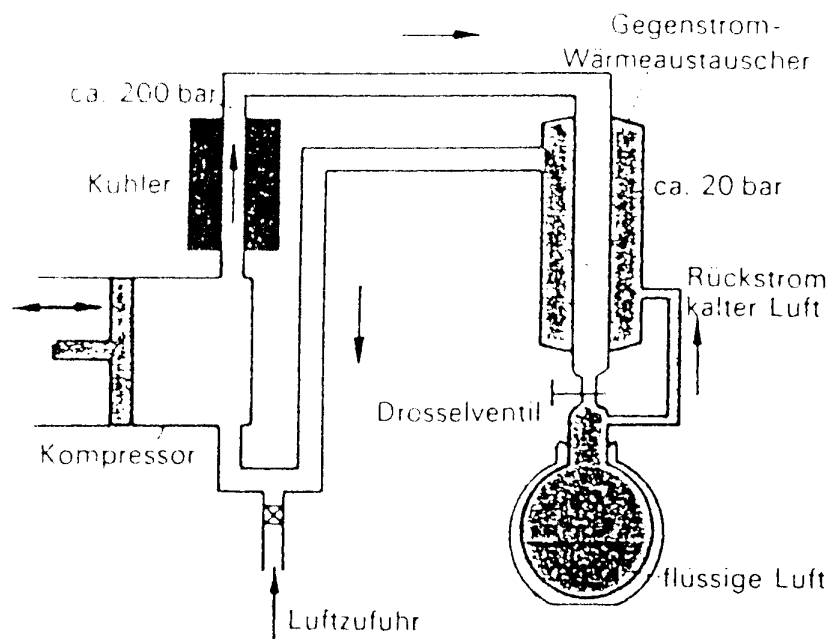
Experimentell wird dieser Wert auf $10 \div 30 \%$ bestätigt.

Für jedes Gas gibt es eine bestimmte Inversionstemperatur T_{inv} mit der Eigenschaft, dass sich bei

- $T < T_{\text{inv}}$ ein Gas bei Entspannung abkühlt, bei
- $T > T_{\text{inv}}$ dagegen erwärmt.

Die Inversionstemperatur T_{inv} gibt an, wann bei einer Druckänderung, d.h. einer Abstandsänderung der Moleküle, abstoßende oder anziehende Kräfte überwiegen. Einmal wird die Temperatur und die kinetische Energie erhöht, im anderen Fall erniedrigt.

Im Verfahren von Linde⁴ wird z.B. der Joule-Thomson-Effekt zur Verflüssigung von Gasen ausgenutzt. Hier wird mittels



⁴ C. von Linde, 1842 - 1934

Abbildung XIV.12: Luftverflüssigung nach Linde

Kompression Arbeit in das Gas gesteckt und durch einen Kreislauf werden ausreichend niedrige Temperaturen erreicht.

Anschaulich wird die obige Rechnung für Spezialfälle:

1) Die Gasmoleküle besitzen kein Eigenvolumen, es wirken nur Anziehungskräfte. Gegen diese Anziehungskräfte muß Arbeit geleistet werden, die Temperatur sinkt.

Rechnerisch zeigt sich mit	$b \approx 0$
ist aufgrund der Anziehung	$p_{\text{real}} < p_{\text{ideal}}$
Für großes V_2	$\Rightarrow p_2 V_2 \approx (pV)_{\text{ideal}}$
	$\Rightarrow p_1 V_1 < p_2 V_2$
wegen	$U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2$
	$\Rightarrow U_1 > U_2$
	<u>Abkühlung</u>

2) Im zweiten Fall werden die Anziehungskräfte vernachlässigt, die Eigenvolumina hingegen nicht. Realisierbar ist dieser Fall z.B. mit Edelgas

Mit	$a \approx 0$
folgt wegen des Kovolumens	$p_{\text{real}} > p_{\text{ideal}}$
	$\Rightarrow p_1 V_1 > p_2 V_2$
wegen	$U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2$
	$\Rightarrow U_1 < U_2$
	<u>Erwärmung</u>

Die Änderung der Temperatur eines Gases wollen wir in einem kleinen Versuch demonstrieren:

Versuch XIV.3: Schnee im Hörsaal

Bei diesem Versuch wird eine Flasche mit CO_2 auf Zimmertemperatur aufgedreht. Durch eine kleine Öffnung entweicht das Gas. Dabei sinkt die Temperatur des Gases hinter der Drosselstele so weit ab, dass Schnee entsteht.

Die folgende Tabelle zeigt die Inversionstemperaturen einiger Stoffe:

Stoff	Inversionstemperatur in K
Helium	34
Wasserstoff	220
Deuterium	260
Neon	300
Stickstoff	850
Luft	890
Sauerstoff	1000
Argon	1000
Kohlendioxid	2000
Acetylen	2100
Ammoniak	2700

Tabelle XIV.2: Inversionstemperaturen

Wasserstoff kann erst durch Vorkühlen unterhalb T_{inv} verflüssigt werden.

Das bedeutet aber auch, dass Wasserstoff sich bei einem Leck bei Zimmertemperatur erhitzen kann. **Explosionsgefahr !**

XIV.5 Zustandsänderung idealer Gase

Allgemein unterscheidet man umkehrbare oder reversible Prozesse und irreversible Prozesse. Irreversibel ist ein Prozess dann, wenn er auf keine Weise vollständig rückgängig gemacht werden kann. Reversibel ist ein Prozess folglich dann, wenn man ein System dadurch in den Anfangszustand zurückversetzen kann, dass man alle Zustände in umgekehrter Reihenfolge durchläuft.

Reversible Prozesse sind idealisierte Prozesse: es darf weder Reibung existieren, noch darf Wärme an die Umgebung abgegeben werden. Das ist nur möglich, wenn die Zustandsänderung sehr langsam erfolgt.

Reversibel oder umkehrbare **Prozesse** sind Prozesse, bei denen die vorgenommene Zustandsänderung zurückgenommen werden kann, ohne dass eine Veränderung bleibt. Reversible Prozesse sind idealisiert.

Irreversible Prozesse sind alle realen Prozesse. Die Umwandlung erfolgt nicht umkehrbar, z.B. die Expansion eines Gases in Vakuum oder Wärmeaustausch zwischen zwei Körpern.

In Kapitel IX haben wir bereits drei einfache Prozesse, bei denen jeweils eine Variable konstant ist, kennen gelernt. Zusätzlich sprachen wir bereits von adiabatischen Zustandsänderungen. Fassen wir noch einmal kurz zusammen:

1. **T = const.**

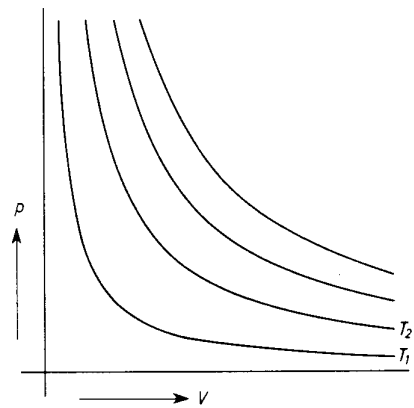
Dann folgt aus

$$\frac{p \cdot V}{T} = R \cdot n$$

$$\Leftrightarrow p \cdot V = R \cdot n \cdot T$$

$$\Leftrightarrow p \cdot V = \text{const}$$

Boyle-Mariott'sche Gesetz



Der **hyperbelförmige** Graph im p/V-Diagramm wird **Isotherme** genannt.

2. **p = const.**

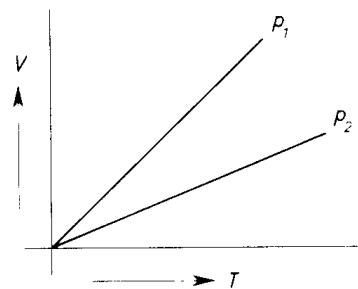
Dann folgt aus

$$\frac{p \cdot V}{T} = R \cdot n$$

$$\Leftrightarrow \frac{V}{T} = R \cdot n \frac{1}{p}$$

$$\Leftrightarrow \frac{V}{T} = \text{const}$$

1. Gesetz von Gay-Lussac



Der **lineare** Graph im V/T-Diagramm wird **Isobare** genannt.

3. **V = const.**

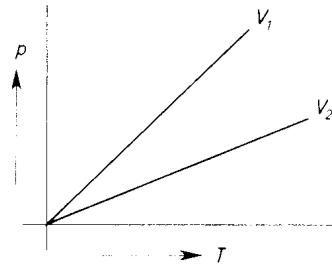
Dann folgt aus

$$\frac{p \cdot V}{T} = R \cdot n$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{T} = R \cdot n \cdot \frac{1}{V}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{T} = \text{const}$$

2. Gesetz von Gay-Lussac



Der **lineare** Graph im p/T-Diagramm wird **Isochore** genannt.

4. **Q = const.**

$$pV^\kappa = \text{constant}$$

Der **hyperbelförmige** Graph im p/V-Diagramm wird **Adiabate** genannt (Genaueres s. u.).

T = const.	Isotherme	⇒	dU = 0
V = const.	Isochore	⇒	δW = 0
p = const.	Isobare	⇒	δW = -pdV
Q = const.	Adiabate	⇒	δQ = 0

Als Beispiele werden im Folgenden isotherme und adiabatische Zustandsänderung berechnet.

XIV.5.1 Isotherme Zustandsänderungen eines idealen Gases: T = const

Für isotherme Prozesse gilt

$$T = \text{const.} \quad \text{Isotherme} \quad \Rightarrow \quad dU = 0$$

Wegen $pV = \text{const}$ sind die Isothermen

Hyperbeln ($T' > T$ in Abb. XIV.13).

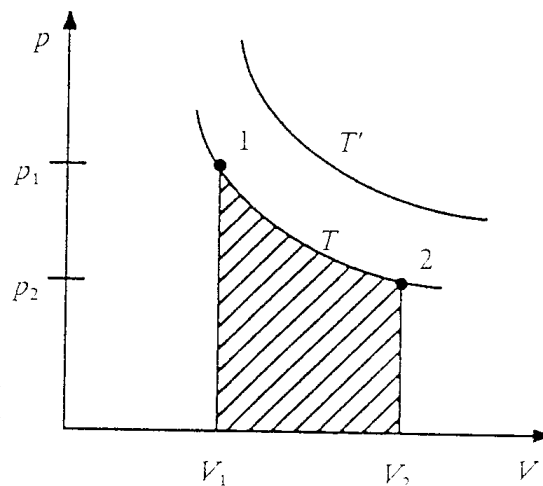


Abbildung XIV.13: Isotherme im p/V-Diagramm

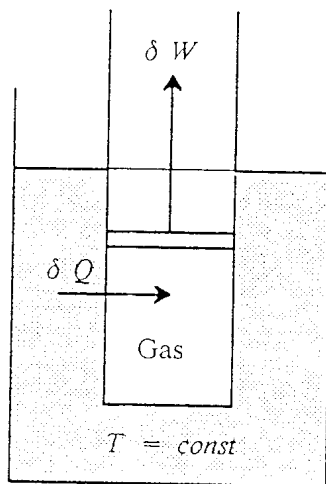


Abbildung. XIV.14: isotherme Expansion realisiert durch Zuführen von Wärme

Als Beispiel eines isothermen Prozesses betrachten wir einen Zylinder mit Kolben im Wasserbad. Die Bewegung des Kolbens erfolgt so langsam, dass sich das Gas immer auf der Temperatur des Wasserbades befindet.

Die zugeführte Wärme ΔQ , die für die Vergrößerung des Volumens benötigt wird, lässt sich mit dem Energiesatz oder dem I. Hauptsatz berechnen:

Aus dem 1. Hauptsatz $dU = \delta Q - p dV$

folgt mit der Idealgasgleichung $p V = n R T$

und der kalorischen Zustandsgleichung

$$dU = m c_v dT$$

$$\Rightarrow m c_v dT = \delta Q - \frac{n R T}{V} dV$$

$$\Leftrightarrow \delta Q = m c_v dT + \frac{n R T}{V} dV$$

Diese Gleichung hatten wir Energiesatz für ideale Gase genannt. Mit $T = \text{const.}$ und folglich $dT = 0$ folgt für isotherme Prozesse

$$\delta Q = n R T \frac{dV}{V}$$

Dann gilt für die gesamte zugeführte Wärme ΔQ :

$$\Delta Q = n R T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$$\Leftrightarrow \Delta Q = n R T (\ln V_2 - \ln V_1)$$

$$\Leftrightarrow \Delta Q = n R T \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Da der Druck p umgekehrt proportional ist zum Volumen V gilt

mit $p \sim 1/V$

$$\Delta Q = n R T \ln \frac{P_1}{P_2}$$

Die zugeführte Wärme ΔQ erhöht das Volumen und erniedrigt den Druck. Sie wird als Arbeit $p dV$ abgegeben.

$$\Delta W = - \Delta Q .$$

XIV.5.2 Adiabatische Zustandsänderungen eines idealen Gases: $\delta Q = 0$

Für adiabatische Zustandsänderungen hatten wir festgehalten:

$Q = \text{const.}$ Adiabate $\Rightarrow \delta Q = 0$

Hier bedeutet adiabatisch thermisch isoliert.

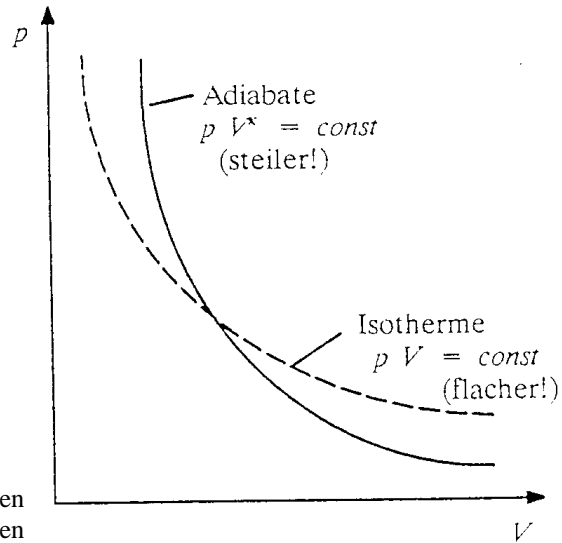


Abbildung XIV.15: Adiabaten und Isothermen

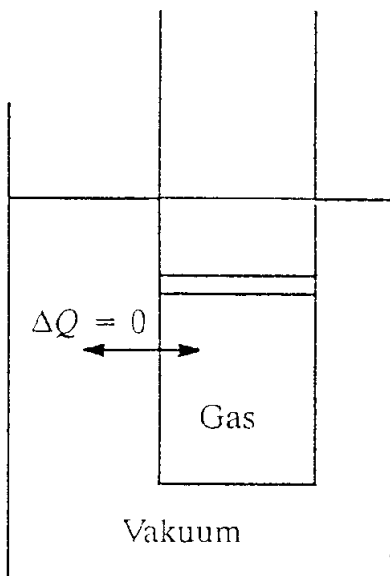


Abbildung XIV.16: adiabatische Zustandsänderung

Der Begriff der adiabatischen Zustandsänderung wird häufig auch für Prozesse gebraucht, die beliebig schnell sind, z.B. Schallwellen, und keine Zeit für Wärmeaustausch mit Umgebung haben, oder hinreichend langsam vor sich gehen, so dass keine Verwirbelung und damit kein Reibungsverlust entsteht.

Jetzt folgt aus dem Energiesatz:

$$\delta Q = m c_v dT + \frac{n R T}{V} dV$$

mit $\delta Q = 0$

$$m c_v dT = - n R T \frac{dV}{V}$$

Für 1 Mol, also $n = 1$ gilt

$$m c_v = C_v$$

Damit folgt aus dem Energiesatz für adiabatische Prozesse

$$C_v dT = - R T \frac{dV}{V}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dT}{T} = - \frac{R}{C_v} \frac{dV}{V}$$

Mit $R = C_p - C_v$ und $\kappa = \frac{C_p}{C_v}$ gilt

$$\frac{R}{C_v} = \frac{C_p - C_v}{C_v} = \kappa - 1;$$

Damit folgt

$$\frac{dT}{T} = -(\kappa - 1) \frac{dV}{V}$$

$$\Leftrightarrow \ln T = -(\kappa - 1) \ln V + \ln \text{const}$$

$$\Leftrightarrow \ln T + \ln V^{(\kappa-1)} = \ln \text{const}$$

$$\Leftrightarrow \ln (T \cdot V^{(\kappa-1)}) = \ln \text{const}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{T V^{(\kappa-1)} = \text{const} .}$$

Mit $T \sim p V$ für ideale Gase gilt dann auch

$$\boxed{p V^\kappa = \text{const} .}$$

Diese Gleichung wird Adiabatengleichung genannt. Zur Erinnerung sei noch einmal erwähnt, dass der Adiabatenkoeffizient κ immer größer eins ist. Werte von κ sind $\kappa = 1,667$; $\kappa = 1,4$ usw.

Für adiabatische Zustandsänderungen gilt die Adiabatengleichung

$$p V^\kappa = \text{const} \quad \text{mit} \quad \kappa > 1.$$

Bei Schallwellen, als Beispiel für adiabatische Zustandsänderung, ergibt sich für die Schallgeschwindigkeit

$$v_{\text{schall}} = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}$$

mit der Gasdichte ρ . Diese Beziehung kann genutzt werden zur Messung von $\frac{C_P}{C_V}$.

Abschließend betrachten wir einen Versuch:

Versuch XIV.4: Adiabatische und isotherme Zustandsänderung

Bei diesem Versuch wird ein Gasvolumen in einem Glaszylinder mit einem beweglichen Kolben verändert. Auf einer sehr empfindliche Temperaturanzeige kann die momentane Temperatur des Gases abgelesen werden. Zunächst komprimieren wir das Volumen V . Man beobachtet, dass die Temperatur ansteigt.

Wartet man nun bis die Temperatur wieder sinkt, ehe man weiter komprimiert, d.h. bewegt man den Kolben nur sehr langsam, dann pendelt die Temperaturanzeige immer um die Ausgangstemperatur. So kann ein isothermer Prozess näherungsweise vorgeführt werden.

Bei schneller Bewegung des Kolbens steigt die Temperatur hingegen steil an. Der Wärmeaustausch mit der Umgebung kann so schnell nicht stattfinden, deshalb ist dieser Vorgang adiabatisch.

XIV.6 Kreisprozesse und Wärmekraftmaschinen

Bei den bisherigen Betrachtungen von Kreisprozessen in Kapitel XIV.5 stellten wir uns die Frage der Umwandlung von Wärme in mechanische Arbeit und umgekehrt. Dazu wurden am Anfang des Kapitels zwei neue Begriffe eingeführt:

Reversibel oder umkehrbare **Prozesse** nannten wir jene Prozesse, bei denen die vorgenommene Zustandsänderung zurückgenommen werden kann, ohne dass eine Veränderung bleibt. Reversible Prozesse sind idealisiert.

Irreversible Prozesse nannten wir alle realen Prozesse. Die Umwandlung erfolgt nicht umkehrbar, z. B. die Expansion eines Gases in Vakuum oder Wärmeaustausch zwischen zwei Körpern.

In diesem Kapitel wollen wir die Umkehrung des Prozesses von Joule (mechanisches Wärmeäquivalent) betrachten. Wir fragen uns also, wie Wärme in mechanische Arbeit umgewandelt werden kann. Der Idealfall wäre ein Prozess, der reversibel verläuft, bei dem folglich Wärme in Arbeit umgewandelt wird ohne Verlust.

Aber wie am Besten? Was wäre eine ideale Maschine zur Umwandlung von Wärme in Arbeit ohne Verlust? Wie wäre ihr Wirkungsgrad?

XIV.6.1 Carnot-Prozess

S. Carnot (1796 - 1832), ein Offizier und Lehrer an der Ecole Polytechnique, entwickelte einen Prozess, mit dessen Hilfe Arbeit gewonnen werden kann. Der nach ihm benannte Carnot-Prozess ist ein idealisierter reversibler Prozess. Es wird sich später zeigen, dass dieser und andere reversible Prozesse den maximal möglichen Wirkungsgrad einer periodischen Maschine haben.

XIV.6.1.1 Prinzip des Carnot-Prozesses

Wir betrachten einen Carnotprozess, bei dem ein ideales Gas durch zwei adiabatische und zwei isotherme Arbeitstakte zunächst expandiert und dann komprimiert wird:

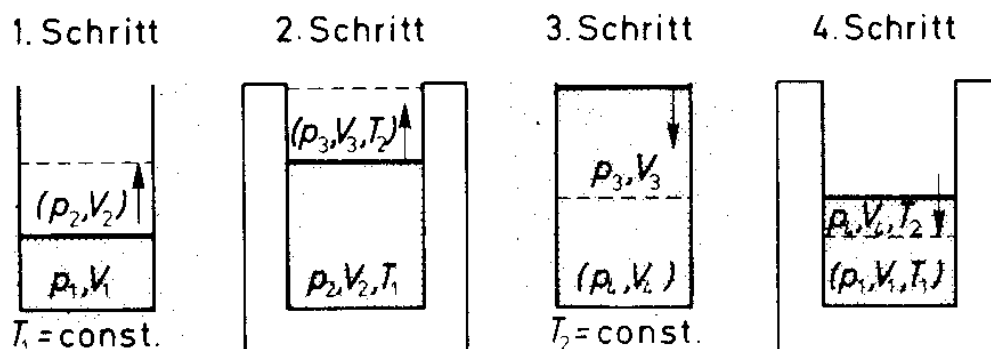
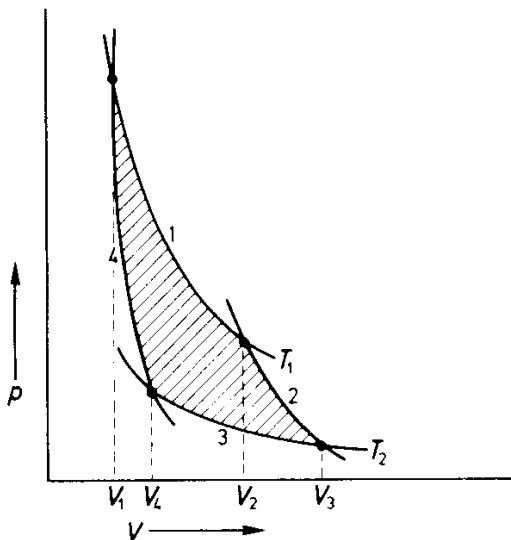


Abbildung XIV.17: vier Schritte des Carnot-Prozesses. $T_A = T_1$ und $T_B = T_2$

Zunächst befinde das Gas sich in einem Zustand mit dem Volumen V_1 und der Temperatur $T_A=T_1$.

1. In einem Wärmebad wird das Gas durch isotherme Expansion vom Volumen V_1 auf ein Volumen V_2 vergrößert.
2. Im zweiten Schritt wird das Gas isoliert und adiabatisch auf ein Volumen V_3 vergrößert. Dadurch sinkt die Temperatur des Gases auf $T_B=T_2$.
3. Anschließend wird das Gas in einem Wärmebad der Temperatur T_B komprimiert auf ein Volumen V_4 .
4. Um wieder zum Anfangszustand zurück zu gelangen, wird im vierten Schritt das Gas wärmeisoliert und dann adiabatisch auf das Anfangsvolumen V_1 verkleinert. Dabei steigt die Temperatur wieder auf T_A an.



Das Arbeitsdiagramm zeigt die Änderung der Zustandsgrößen der Arbeitssubstanz. Meist ist es ein Druck-Volumen-Diagramm. Die Abbildung zeigt das Temperatur-Volumen-Diagramm des vorgestellten Carnot-Prozesses. Beim Kreisprozess sind es geschlossene Kurven, d.h. der Endzustand des einen Zyklus ist der Anfangszustand des nächsten Zyklus'. Hierbei ist die Nettoarbeit beim Kreisprozess

$$W = \oint p \, dV$$

Abbildung XIV.18: Die vier Schritte des Carnot-Prozesses im p/V -Diagramm

Wird das Arbeitsdiagramm im Uhrzeigersinn durchlaufen, so gibt der Wandler Arbeit ab ($W < 0$), wird es umgekehrt durchlaufen, so nimmt der Wandler Arbeit auf ($W > 0$).

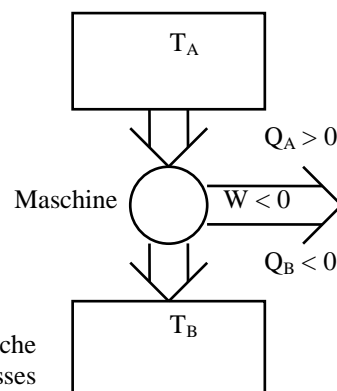


Abbildung XIV.19: Schematische Darstellung des Carnot-Prozesses

Für die vier Schritte des Kreisprozesses gilt:

- | | | | |
|----|---------------------------|-----------------------|------------------|
| 1. | isotherme Expansion bei | T_A | $\Delta Q = Q_A$ |
| 2. | adiabatische Expansion | $T_A \rightarrow T_B$ | $\Delta Q = 0$ |
| 3. | isotherme Kompression bei | T_B | $\Delta Q = Q_B$ |
| 4. | adiabatische Kompression | $T_B \rightarrow T_A$ | $\Delta Q = 0$ |

Um die Schreibweise bei der nun folgenden Berechnung des Carnot-Kreisprozesses abzukürzen, schreiben wir $\Delta U (1 \rightarrow 2) = U_{12}$, usw., und $\Delta W (1 \rightarrow 2) = W_{12}$, usw.

XIV.6.1.2 Berechnung des Carnot-Prozesses für n Mole eines idealen Gases

Für die Berechnung des Carnot-Prozesses betrachten wir die vier Schritte einzeln. Dabei werden für jeden Schritt die gewonnene oder geleistete Arbeit und die Änderung der inneren Energie berechnet.

- | | |
|-----------------------------------|---------------------------|
| 1. isotherme Expansion bei | $T = T_A$ |
| und | $\Delta Q = Q_A$ |
| Nach dem 1. Hauptsatz gilt | $U_{12} = Q_A + W_{12}$. |
| Mit | $U = U(T)$ |
| folgt aus $T = \text{const}$ | $U_{12} = 0.$ \neg |
| Dann gilt | $Q_A = -W_{12}$ |

Die Arbeit wird berechnet als

$$W_{12} = - \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

$$\Leftrightarrow W_{12} = -nRT_A \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$$\Leftrightarrow W_{12} = -nRT_A \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Damit gilt

$Q_A = nRT_A \ln \frac{V_2}{V_1} > 0$	\neg ,
---------------------------------------	----------

2. adiabatische Expansion mit

und

Nach dem 1. Hauptsatz gilt

Mit $\delta Q = 0$ gilt

Nach Kapitel XIV.5 folgt

$$\delta Q = 0$$

$$T_A \rightarrow T_B.$$

$$U_{23} = \delta Q + W_{23}.$$

$$U_{23} = W_{23} \quad -$$

$$\boxed{U_{23} = n C_V (T_B - T_A)} \quad - ,$$

$$T_A V_2^{\kappa-1} = T_B V_3^{\kappa-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{V_3}{V_2} \right)^{\kappa-1} \hat{=}$$

3. isotherme Kompression bei

und

Nach dem 1. Hauptsatz gilt

Mit

folgt aus $T = \text{const}$

Dann gilt

Die Arbeit wird berechnet als

$$T_B$$

$$\Delta Q = Q_B.$$

$$U_{34} = Q_B + W_{34}.$$

$$U = U(T)$$

$$U_{34} = 0. \quad \textcircled{R}$$

$$Q_B = -W_{34}$$

$$W_{12} = - \int_{V_3}^{V_4} p \, dV$$

$$\Leftrightarrow W_{12} = -nRT_B \int_{V_3}^{V_4} \frac{dV}{V}$$

$$\Leftrightarrow W_{12} = -nRT_B \ln \frac{V_4}{V_3}$$

$$\boxed{Q_B = nRT_B \ln \frac{V_4}{V_3} < 0} \quad \textcircled{R}'$$

4. adiabatische Kompression:

und

Nach dem 1. Hauptsatz gilt

Mit $\delta Q = 0$ gilt

Nach Kapitel XIV.5 folgt

$$\delta Q = 0$$

$$T_B \rightarrow T_A$$

$$U_{41} = \delta Q + W_{41}.$$

$$U_{41} = W_{41} \quad -$$

$$\boxed{U_{41} = n C_V (T_A - T_B)} \quad - ,$$

$$T_B V_4^{\kappa-1} = T_A V_1^{\kappa-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\kappa-1} \ddot{E}$$

Aus 2. und 4. folgt mit \hat{E} und \ddot{E}

$$\frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\kappa-1} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\kappa-1}$$

$$\Rightarrow \frac{V_4}{V_1} = \frac{V_3}{V_2} \quad \text{oder} \quad \boxed{\frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1}{V_2}}$$

Die Energiebilanz des Kreisprozesses ergibt sich aus dem 1. Hauptsatz:

Aus	$\oint dU = 0$
folgt	$U_{12} + U_{23} + U_{34} + U_{41} = 0$
Mit	$U_{12} = 0. \quad \neg$
	$U_{23} = W_{23} \quad -$
	$U_{34} = 0. \quad \textcircled{R}$
und	$U_{41} = W_{41} \quad -$
folgt daraus	$U_{23} + U_{41} = W_{23} + W_{41} = 0$

Die Arbeitsbilanz gibt an, wie viel Arbeit gewonnen wurde. Die Gesamtarbeit entspricht dabei der Summe der in den einzelnen Schritten berechneten Arbeit.

Aus	$W = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41}$
folgt mit	$-W_{12} = n R T_A \ln \frac{V_2}{V_1} > 0 \quad \neg'$
	$W_{23} = n C_V (T_B - T_A) \quad -'$
	$-W_{34} = n R T_B \ln \frac{V_4}{V_3} < 0 \quad \textcircled{R}'$
	$W_{41} = n C_V (T_A - T_B) \quad -'$
und $W_{23} = -W_{41}$	$\Rightarrow W = -n R T_A \ln \frac{V_2}{V_1} - n R T_B \ln \frac{V_4}{V_3}$

Aus $\frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1}{V_2}$ folgt $\ln \frac{V_4}{V_3} = \ln \frac{V_1}{V_2} = -\ln \frac{V_2}{V_1}$.

Damit ergibt sich

$$\boxed{W = -n R \ln \frac{V_2}{V_1} (T_A - T_B)} \quad \text{ì}$$

Die Arbeit W ist negativ, d.h. sie wird abgegeben, falls $T_A > T_B$ ist.

XIV.6.1.3 Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses

Als Wirkungsgrad einer Maschine wird das Verhältnis von nutzbarer Energie oder Arbeit und der zu deren Gewinnung aufgewandten Energie oder Arbeit definiert. Nach dem 1. Hauptsatz ist der Wirkungsgrad einer solchen Maschine maximal 100 %. In der Realität kann dieser Wert jedoch nicht erreicht werden. Im nächsten Kapitel werden wir einen Satz formulieren, der diese Tatsache beschreibt.

Definition XIV.6: Der Wirkungsgrad η ist definiert als

$$\eta = \frac{\text{nutzbare Energie oder Arbeit}}{\text{aufgewandte Energie oder Arbeit}}$$

In unserem Beispiel des Carnot-Prozesses wurde die Arbeit dadurch gewonnen, dass einem Wärmebad Wärme entzogen wurde. Der Wirkungsgrad ist also das Verhältnis von zugeführter Wärme und nutzbarer Arbeit

$$\eta = \frac{\text{geleistete Arbeit}}{\text{zugeführte Wärme}} = \frac{-W}{Q_A}$$

Die Arbeit wird hier negativ angesetzt, da die errechnete Arbeit negativ ist und letztendlich der Betrag der geleisteten Arbeit entscheidend ist.

Für den von uns berechneten Carnot-Prozess folgt:

Aus Gleichung 1',
$$Q_A = n R T_A \ln \frac{V_2}{V_1}$$

und Gleichung 1
$$W = - n R \ln \frac{V_2}{V_1} (T_A - T_B)$$

folgt:
$$\eta = \frac{T_A - T_B}{T_A}$$

$$\Leftrightarrow \eta = 1 - \frac{T_B}{T_A}$$

Dies ist der Wirkungsgrad des Carnot Prozesses. Für $T_B \neq 0$ ist η immer kleiner als eins, d.h. der Wirkungsgrad liegt unter 100%. Er ist jedoch um so höher, je größer $T_A - T_B$ ist. Für eine unendlich große Temperatur T_A , also für $T_A \rightarrow \infty$ strebt der Wirkungsgrad gegen eins. So ist

beispielsweise der Wirkungsgrad eines Dieselmotors deshalb höher als der eines Benzinmotors, weil die Temperaturdifferenz $T_A - T_B$ größer ist.

Dass der Carnot-Prozess so wichtig ist liegt daran, dass alle reversiblen Kreisprozesse den gleichen Wirkungsgrad haben wie der Carnot-Prozess. Der Beweis dieser Aussage kann Kapitel XIV.6.3 und Kapitel XIV.8.2 entnommen werden. Dort wird sich auch zeigen, dass alle irreversiblen Kreisprozesse einen kleineren Wirkungsgrad haben.

Da alle irreversiblen Kreisprozesse einen kleineren Wirkungsgrad haben als reversible und alle reversiblen Kreisprozesse denselben Wirkungsgrad (den des Carnot-Prozesses) haben, gibt uns

die Formel $\eta = \frac{T_A - T_B}{T_A}$ den maximalen Wirkungsgrad einer periodisch arbeitenden Maschine an.

Der **maximale Wirkungsgrad** einer periodisch arbeitenden Maschine ist

$$\text{gegeben durch den Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses: } \eta = \frac{T_A - T_B}{T_A}$$

Aufgrund dieser Tatsache gibt die Formel auch die oberste Grenze des Wirkungsgrads für andere periodisch arbeitende Maschinen oder Kreisprozesse an. Dass die realen Maschinen einen geringeren Wirkungsgrad haben liegt an den Reibungs- und Wärmeverlusten. Hierzu betrachten wir ein Beispiel:

Eine Dampfmaschine hat im Kessel eine Temperatur von etwa $T_A = 800$ K. Die Kühlwassertemperatur ist etwa $T_B = 300$ K. Dann liegt die theoretische Obergrenze des Wirkungsgrades einer solchen Maschine bei

$$\eta_{\max} \approx \frac{T_A - T_B}{T_A}$$

$$\Leftrightarrow \eta_{\max} \approx 1 - \frac{300}{800}$$

$$\Leftrightarrow \eta_{\max} \approx 0,62 = 62 \%$$

Tatsächlich werden jedoch nur Werte um 30 % erreicht wegen der großen Reibungs- und Wärmeleitungsverluste sowie nicht reversibler (quasistatischer) Prozessführung.

Die Obergrenze für den Wirkungsgrad eines Verbrennungsmotors liegt bei etwa 70 %. Realisiert werden hier Wirkungsgrade von etwa 40 %. Hierbei sind die Reibungsverluste durch den Luftwiderstand und die Rollreibung des angetriebenen Fahrzeugs noch nicht berücksichtigt.

XIV.6.2 Kraftwärmemaschinen und Wärmekraftmaschinen

Jede Carnot-Maschine hat wie jede reversible Maschine zwei mögliche Laufrichtungen: In der Berechneten entnimmt sie einem Speicher der Temperatur T_2 Wärmeenergie, erzeugt Arbeit und führt einem anderen Speicher bei T_1 die Differenzwärme zu. In der umgekehrten Laufrichtung muß man die Arbeit W aufwenden, um dem Speicher 2 mehr Wärme zuzuführen, als dem ersten Speicher entnommen wurde.

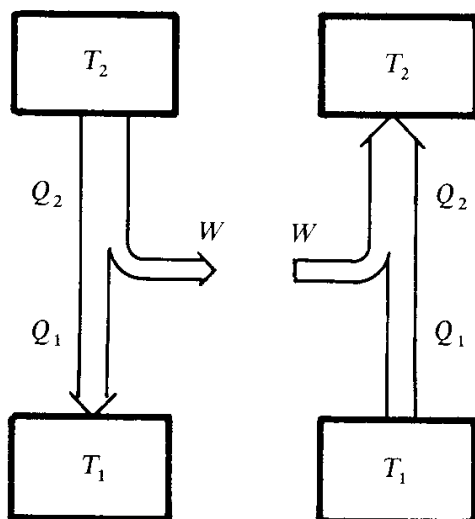
Die Entscheidung, welcher Maschinentyp vorliegt, hängt also davon ab, wie der Kreisprozess durchlaufen wird:

Man spricht von einer **Wärmekraftmaschine**, wenn Wärmeenergie in mechanische Energie umgewandelt wird; der Kreisprozess wird im Uhrzeigersinn durchlaufen. Dies ist der oben beschriebene Carnot-Prozess. Angewandt wird dieser Prozess z.B. in Verbrennungsmaschinen und Gasturbinen.

Eine **Wärmekraftmaschine** ist ein Maschine, bei der Wärmeenergie in mechanische Energie umgewandelt wird.

Kraftwärmemaschinen wandeln umgekehrt mechanische Energie in Wärmeenergie um; sie durchlaufen den Carnot-Prozess entgegen dem Uhrzeigersinn. Hierbei kann die Maschine heizen oder kühlen und man spricht dann von einer **Wärmepumpe** bzw. von einem **Kühlschrank**.

Eine **Kraftwärmemaschine** ist ein Maschine, bei der mechanische Energie in Wärmeenergie umgewandelt wird.



Es sei noch einmal erwähnt, dass diese beiden Maschinentypen sich lediglich in ihrer Arbeitsrichtung unterscheiden, wie die folgende Abbildung zeigt.

Abbildung XIV.20: Wärmekraft- und Kraftwärmemaschine

XIV.6.2.1 Wärmepumpe

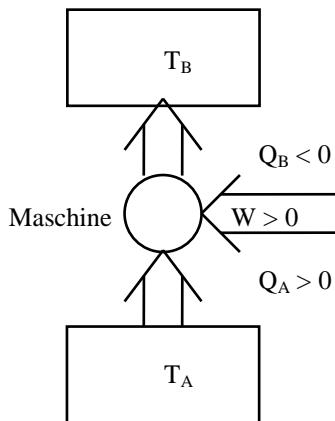


Abbildung XIV.21: Wärmepumpe

Bei der Wärmepumpe ist die Wärmequelle die Umgebung, z. B. Grundwasser oder Erdreich, der die Wärme bei tiefer Temperatur entzogen und dem System, z.B. einer Warmwasserheizung, zugeführt wird. Man transportiert Wärme von T_A nach T_B .

Der Nutzen bei der Wärmepumpe liegt somit in der bei hoher Temperatur abgegebenen Wärme Q_B , d.h. die nutzbare Energie ist $|Q_B| = Q_A + W$. Der Arbeitsaufwand ist W .

Im Gegensatz zum Wirkungsgrad beim rechtsläufigen Carnot-Prozess spricht man beim Verhältnis von Nutzen zu Aufwand beim linksläufigen Prozess von der Leistungszahl ε , sie ist im Grunde genauso definiert wie η :

Definition XIV.7: Die Leistungszahl ε einer Wärmekraftmaschine ist definiert als

$$\text{Leistungszahl } \varepsilon = \frac{\text{nutzbare Energie}}{\text{aufgewandte Energie}}$$

Bei der Wärmepumpe versteht man unter der aufgewandten Energie den Arbeitsaufwand W , nicht die Wärme Q_A . Die Wärme Q_A erhält man gratis (!) aus dem Reservoir bei T_A . Die nutzbare Energie ist

$$|Q_B| = Q_A + W$$

mit der Arbeit

$$W = -(Q_A + Q_B)$$

folgt aus Definition XIV.7 für die Leistungszahl einer Wärmekraftmaschine

$$\varepsilon = \frac{-Q_B}{W}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon = \frac{T_B}{T_B - T_A}$$

Die Leistungszahl der Wärmepumpe nach Carnot ist immer größer als eins, und zwar um so größer, je schlechter der Wirkungsgrad eines rechtsläufigen Carnot-Prozesses zwischen denselben Temperaturgrenzen ist, d.h. je kleiner die Temperaturdifferenz $T_B - T_A$ ist. Dies bedeutet, dass man mit wenig Aufwand viel Wärme verschieben kann, wenn man ein ausreichendes Wärmereservoir bei T_A zur Verfügung hat. Dieses Modell beschreibt eine günstige Heizung. Die gewonnene Wärme ist größer als die benötigte Arbeit. Dies ist jedoch

keine Verletzung des Energiesatzes, denn man pumpt nur die Wärme von T_A nach T_B . Man muß sie nicht erzeugen.

Als Beispiel betrachten wir das Freibad Hangeweier:

Die Temperatur T_B ist gleich 295 K; T_A ist 285 K. Dann ist die Leistungszahl $\varepsilon = 30$.

Eine Wärmepumpe sollte mit einer Fußbodenheizung ($T_B = 30\text{--}35^\circ\text{C}$) kombiniert werden, weil dann ΔT relativ klein und damit ε groß ist.

XIV.6.2.2 Kühlschranks

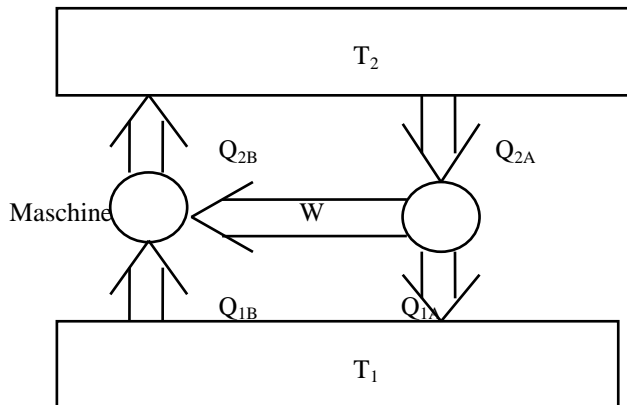
Beim Kühlschrank ist die Wärmequelle der zu kühlende Raum. Ihm wird bei der Temperatur T_A , die niedriger ist als die Umgebungstemperatur T_B , die Wärme Q_A entzogen und dem System zugeführt. Hier ist die Leistungszahl ε gegeben durch

$$\varepsilon = \frac{Q_A}{W}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon = \frac{T_A}{T_B - T_A}$$

Auch hier gilt wie bei der Wärmepumpe, dass die Kühlung um so besser ist, je kleiner die Temperaturdifferenz $T_B - T_A$ ist.

XIV.6.3 Perpetuum mobile II. Art



Wie oben bereits behauptet wurde, ist der Wirkungsgrad eines Carnot-Prozesses der bestmögliche Wirkungsgrad einer periodisch arbeitenden Maschine. Dies lässt sich anhand der bereits bekannten Abbildung leicht durch einen Widerspruchsbeweis zeigen:

Abbildung XIV.22: Alle reversiblen Kreisprozesse haben denselben Wirkungsgrad. Andernfalls würde die hier dargestellte Kombination zweier Maschinen Arbeit liefern ohne etwas anderes zu tun, als das kalte Reservoir noch weiter abzukühlen.

Zwei Carnotmaschinen werden so hintereinander geschaltet, dass eine Wärmekraftmaschine und eine Wärmepumpe kombiniert sind. Dann gilt für den Wirkungsgrad der

Wärmekraftmaschine

$$\eta_{\text{Carnot}} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$$

Für die Leistungszahl der Wärmepumpe gilt

$$\varepsilon_{\text{Carnot}} = \frac{T_2}{T_2 - T_1} .$$

Der Vergleich zeigt, dass gilt

$$\varepsilon_{\text{Carnot}} = \frac{1}{\eta_{\text{Carnot}}}$$

Wenn es nun einen Wirkungsgrad größer als den Wirkungsgrad vom Carnot-Prozess gibt, d.h. angenommen es existiere ein η mit $\eta > \eta_{\text{Carnot}}$

Dann gilt mit

$$\eta = \left| \frac{W}{Q_2} \right|$$
$$\left| \frac{W}{Q_2} \right| > \eta_{\text{Carnot}}$$
$$\Rightarrow \left| \frac{W}{Q_2} \right| > \left| \frac{W_{\text{Carnot}}}{Q_2} \right|$$

Die von der Wärmekraftmaschine erzeugte Arbeit W müsste also größer sein als die von der Wärmepumpe verbrauchte Arbeit W_{Carnot} . Damit würde eine Netto-Arbeitsleistung $|W| - |W_{\text{Carnot}}| > 0$ möglich. Die Energie dafür müsste nach dem I. Hauptsatz aus dem Wärmereservoir mit T_1 kommen (falls aus T_2 , würde die Maschine zum Stehen kommen, wenn sich die Temperaturen angeglichen haben).

Im Ergebnis wäre also diese Hintereinanderschaltung eine periodisch arbeitende Maschine, die Arbeit leistet und die notwendige Energie dafür vollständig aus einem Wärmereservoir bezieht, ohne dass sich sonst etwas ändert. Eine solche Maschine nennt man ein Perpetuum mobile 2. Art. Die Erfahrung zeigt:

Es gibt kein Perpetuum mobile 2. Art.

Als Perpetuum mobile 2. Art wird eine periodisch arbeitende Maschine bezeichnet, die nichts weiter bewirkt als Arbeitsleistung und Abkühlung eines Wärmereservoirs.

Ein Perpetuum mobile 2. Art ist eine periodisch arbeitende Maschine,
die nichts weiter bewirkt als Arbeitsleistung und Abkühlung eines Wärmereservoirs.

Es gibt kein Perpetuum mobile 2. Art.

Eine mögliche Anwendung eines Perpetuum mobile 2. Art wäre ein Ozeandampfer, der seine Antriebsenergie aus der gespeicherten Wärmeenergie des Ozeans entnimmt und dabei lediglich das Wasser abkühlt.

XIV.6.4 Demonstration eines Heißluftmotors

Ein Heißluftmotor arbeitet nach einem Prozess, der nach seinem Erfinder R. Stirling (1790 - 1878) Stirling-Prozess genannt wird.

XIV.6.4.1 Prinzip des Stirling-Prozesses

Das Arbeitsmedium bei diesem Prozess ist ein ideales Gas. Der Stirling-Prozess kombiniert isotherme und isochore Prozesse:

T	$=$	const.
Isotherme	\Rightarrow	$dU = 0$

V	$=$	const.
Isochore	\Rightarrow	$\delta W = 0$

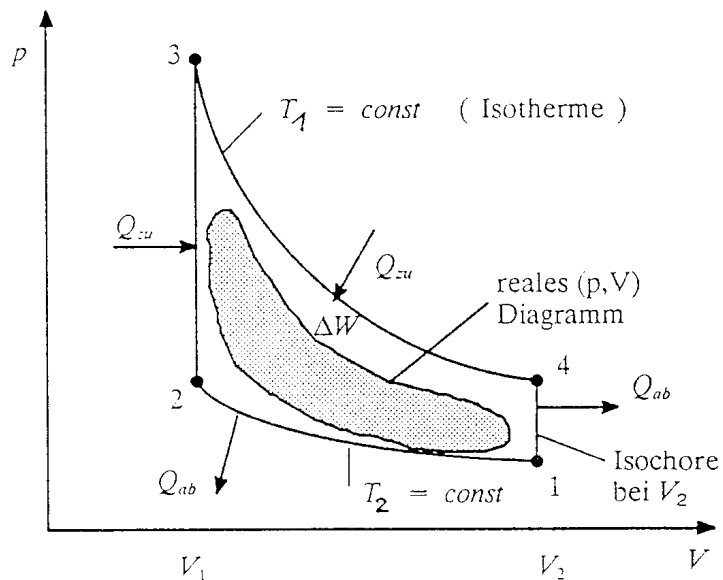


Abbildung XIV.23: p/V-Diagramm des Stirling-Prozesses

In der Realität treten keine reinen Isothermen und Isochoren auf. Deshalb wird das pV-Diagramm abgerundet.

Beim Stirling-Prozess werden die folgenden vier Schritte durchlaufen:

1. Durch eine isotherme Kompression wird bei konstanter Temperatur T_2 dem Gas Arbeit zugeführt. Ein Arbeitskolben drückt das Gas von V_2 zu V_1 zusammen.
2. Bei konstantem Volumen V wird das Gas erwärmt auf eine Temperatur T_1 .
3. In diesem Schritt wird das Gas wieder auf das größere Volumen V_2 erweitert, die Temperatur wird konstant auf T_1 gehalten.
4. Der Kreislauf schließt sich, indem das Gas nun bei gleichbleibendem Volumen V_2 auf die Temperatur T_2 abgekühlt wird.

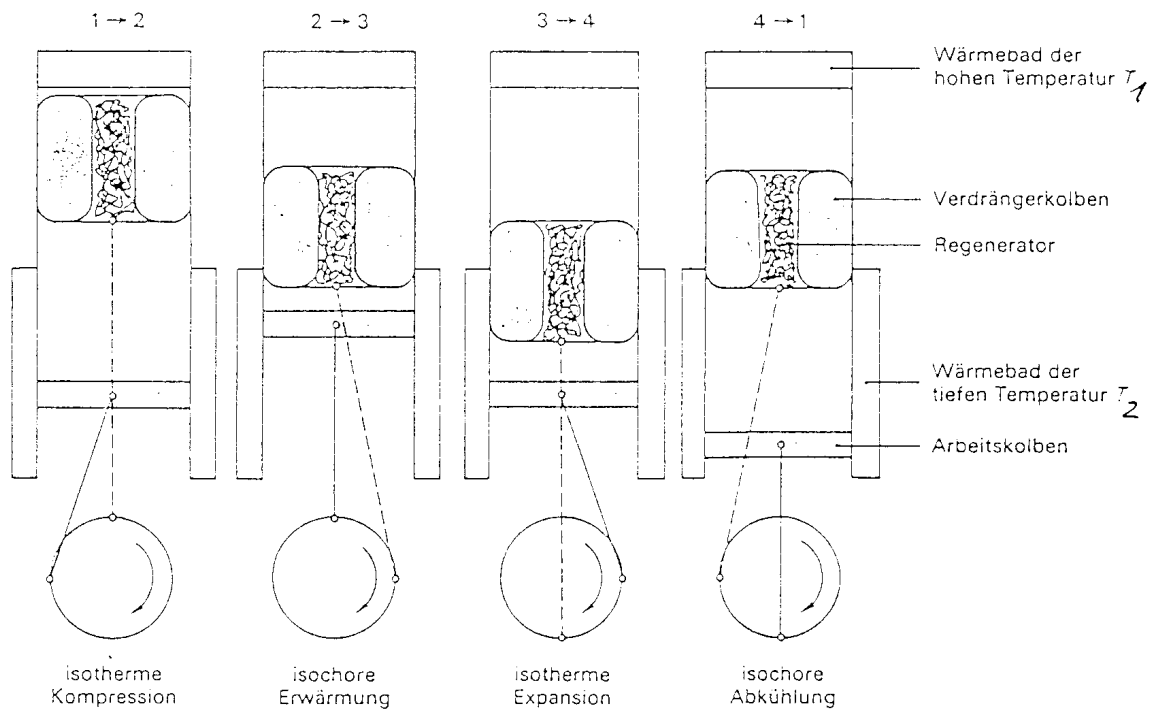


Abbildung XIV.24: Vier Schritte des Stirling-Prozesses

Die Wärmezufuhr erfolgt bei der isochoren Erwärmung und bei der isothermen Expansion. Die bei der isochoren Abkühlung abgegebene Wärme ist betragsmäßig genauso groß wie die bei der isochoren Erwärmung zugeführte Wärme: $Q_{23} = -Q_{41}$. Gelingt es, die abgegebene Wärme Q_{41} zwischenzuspeichern und bei der isochoren Erwärmung wieder an das System zurückzuführen, dann muß von außen her nur noch die Wärme Q_{34} zugeführt werden, und der Wirkungsgrad erreicht den Wert des Carnot-Prozesses.

Der Stirling-Prozess kann wie in Abbildung XIV.24 gezeigt näherungsweise so realisiert werden, dass der Verdrängerkolben und der Arbeitskolben, um 90° phasenverschoben, auf der Kurbelwelle arbeiten. Der Verdrängerkolben schiebt die Luft im Zylinder des Motors hin und her. Dabei bringt er die Luft abwechselnd mit dem heißen und kalten Teil der Maschine in Kontakt. Der Verdränger ist wegen des Regenerators, der aus Metallspänen besteht, gleichzeitig Wärmespeicher, d.h. dass der Regenerator beim Durchströmen der heißen Luft Wärme aufnimmt und diese nachher wieder an die durchströmende kalte Luft abgibt.

Bei dem im Demonstrationsversuch verwendeten Demonstrationsmodell des Heißluftmotors, dient eine Glühwendel, die oben im Deckel eingebaut ist, als Wärmequelle. Der doppelwandige Zylinder im unteren Teil des Motors dient als Wärmesenke, indem Kühlwasser durch ihn hindurchfließt. Der Wirkungsgrad des Heißluftmotors kann bislang nicht mit dem von Verbrennungsmotoren konkurrieren, weil die interne Wärmeübertragung ($Q_{41} \rightarrow Q_{23}$) nur unvollkommen gelingt. Der linksläufige Stirling-Prozess hat seine Anwendung z.B. bei der Philips-Gaskältemaschine gefunden. Hier dient als Arbeitsmedium Helium oder Wasserstoff bei der Luftverflüssigung.

Die Realisation der einzelnen Phasen kann wie folgt zusammengefasst werden:

1. **isotherme Kompression:**

Der größere Teil des Arbeitsgases wird gekühlt
→ der Arbeitskolben drückt das Gas zusammen.

2. **isochore Erwärmung:**

Die Luft wird im oberen Zylinderteil erwärmt
→ der Arbeitskolben ist am oberen Totpunkt
→ das Gestänge treibt den Verdränger in den Kühlraum

3. **isotherme Expansion:**

Im Prinzip wie 2., aber ein Teil des Arbeitsgases wird jetzt gekühlt
→ der Arbeitskolben wird nach außen getrieben
→ das Gestänge treibt den Verdränger in den Heizraum

4. **isochore Abkühlung:**

Der größere Teil des Arbeitsgases wird gekühlt
→ der Arbeitskolben drückt das Gas zusammen
→ eine Kurbelwelle hilft, den toten Punkt zu überwinden.

XIV.6.4.2 Berechnung des Stirling-Prozesses für n Mole eines idealen Gases

Um die Schreibweise bei der nun folgenden Berechnung des Stirling-Kreisprozesses abzukürzen, schreiben wir wie bereits beim Carnot-Prozess eingeführt $\Delta U (1 \rightarrow 2) = U_{12}$, usw., und $\Delta W (1 \rightarrow 2) = W_{12}$, usw. und $\Delta Q (1 \rightarrow 2) = Q_{12}$

1. isotherme Kompression bei

Nach dem 1. Hauptsatz gilt

Mit

folgt aus $T = \text{const}$

Dann gilt

Die Arbeit wird berechnet als

$$T = T_2$$

$$U_{12} = Q_{12} + W_{12}$$

$$U = U(T)$$

$$U_{12} = 0$$

$$Q_{12} = -W_{12}$$

$$W_{12} = - \int_{V_2}^{V_1} p \, dV$$

$$\Leftrightarrow W_{12} = -nRT_2 \int_{V_2}^{V_1} \frac{dV}{V}$$

$$\Leftrightarrow W_{12} = -nRT_2 \ln \frac{V_1}{V_2}$$

$W_{12} = nRT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} > 0$	↖
Zufuhr der Arbeit	

Für isotherme Zustandsänderungen dann

$Q_{12} = -nRT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} < 0$	↖
äquivalente Wärmeabgabe	

2. isochore Erwärmung bei

Aus

folgt dann

Aus dem 1. Hauptsatz

folgt damit

Nach Kapitel XIV.3 gilt dann

$$V = V_1$$

$$W = - \int_{V_1}^{V_1} p \, dV$$

$W_{23} = 0$	-
--------------	---

$$U_{23} = Q_{23} + W_{23}$$

$$U_{23} = Q_{23}$$

$Q_{23} = n C_V (T_1 - T_2)$	- '↖
Zufuhr der Wärme	

3. isotherme Expansion bei

Nach dem 1. Hauptsatz gilt

Mit

folgt aus $T = \text{const}$

Dann gilt

$$T = T_1$$

$$U_{34} = Q_{34} + W_{34}$$

$$U = U(T)$$

$$U_{34} = 0$$

$$Q_{34} = -W_{34}$$

Die Arbeit wird berechnet als

$$W_{34} = - \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

$$\Leftrightarrow W_{34} = -nRT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$$\Leftrightarrow W_{34} = -nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\Leftrightarrow W_{34} = -nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} < 0 \quad \textcircled{R}$$

Abgabe von Arbeit

Für isotherme Zustandsänderungen dann

$$Q_{34} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} > 0 \textcircled{R}'$$

äquivalente Wärmeaufnahme

4. **isochore Erwärmung** bei

$$V = V_2$$

Aus

$$W = - \int_{V_2}^{V_2} p dV$$

folgt dann

$$W_{41} = 0$$

Aus dem 1. Hauptsatz

$$U_{41} = Q_{41} + W_{41}$$

folgt damit

$$U_{41} = Q_{41}$$

Nach Kapitel XIV.3 gilt dann

$$Q_{41} = n C_V (T_2 - T_1)$$

Abgabe der Wärmemenge

Die Arbeitsbilanz errechnet sich dann als

$$W = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41}$$

Mit

$$W_{12} = nRT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} > 0 \quad \neg$$

$$W_{23} = 0 \quad -$$

$$W_{34} = nRT_1 \ln \frac{V_1}{V_2} < 0 \quad \textcircled{R}$$

und

$$W_{41} = 0 \quad -$$

folgt

$$W = W_{12} + W_{34}$$

$$\Leftrightarrow W = -n R \ln \frac{V_2}{V_1} (T_1 - T_2) < 0$$

Arbeit wird also nach außen abgegeben.

Die zugeführte Wärme kann in Schritt 3. direkt abgelesen werden:

$$Q_{34} = n R \ln \frac{V_2}{V_1} T_1 \quad \textcircled{R}$$

Dann berechnet sich der Wirkungsgrad der Stirling-Prozesses als

$$\eta = -\frac{W}{Q_1} = -\frac{W}{Q_{34}}$$

$$\eta = \frac{n R \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) (T_1 - T_2)}{n R T_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)}$$

$$\eta = -\frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ $\eta = \eta_{\text{Carnot}}$
--

In der Realität tritt kein isochorer Prozess auf. Das Volumen des Heißluftmotors ändert sich aber am Umkehrpunkt des Kolbens so langsam, dass angenähert $V = \text{const}$ ist.

Die abgegebene Leistung des Modellmotors beträgt 12 W, die Heizleistung 250 W. Die vom Kühlwasser auf der Isochore (V_2) entzogene Wärme geht verloren.

Drei Betriebsarten sind mit diesem Modell möglich:

- a) Heizung bei T_1 und Kühlung bei T_2 . Dann leistet der Motor Arbeit.
- b) Antrieb durch Elektromotor linksläufig.
- c) Antrieb durch Elektromotor rechtsläufig.

Der Antrieb durch einen Elektromotor wird wie folgt genutzt:

Wird die Temperatur durch das fließende Wasser im Kühlmantel festgehalten, so wird der ungekühlte Teil des Zylinders je nach Drehsinn erwärmt oder gekühlt. Entscheidend für die Verwendung als Wärmepumpe oder Kühlschränk ist nur der Drehsinn des Motors.

XIV.7 Thermodynamische Temperatur

Bei der Herleitung des Wirkungsgrades des Carnot-Prozesses hatten wir festgestellt, dass der Wirkungsgrad nur von der Temperatur der beteiligten Wärmebäder abhängig ist, aber nicht vom

Arbeitsmedium:
$$\eta_{\text{Carnot}} = \frac{T_A - T_B}{T_A}.$$

Somit ist eine Temperaturdefinition möglich, die unabhängig von speziellen Thermometereigenschaften ist, z.B. Gasthermometer bei tiefen Temperaturen. Betrachten wir hierzu beim Carnot-Prozess die isothermen Zustandsänderungen

1. isotherme Expansion

$$Q_A = n R T_A \ln \frac{V_2}{V_1} > 0 \quad \text{①'}$$

und

3. isotherme Kompression

$$Q_B = n R T_B \ln \frac{V_4}{V_3} < 0 \quad \text{③'}$$

so erhalten wir die Beziehung zwischen den umgesetzten Wärmemengen und den Temperaturen

$$\frac{Q_A}{Q_B} = \frac{n R T_A \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)}{n R T_B \ln \left(\frac{V_4}{V_3} \right)}$$

Mit der in der Berechnung der Arbeitsbilanz (vgl. Kapitel XIV.1.3) hergeleiteten Beziehung

ergibt sich:

$$\frac{Q_A}{Q_B} = \frac{n R T_A \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)}{-n R T_B \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Q_A}{Q_B} = \frac{T_A}{-T_B}$$

$$\Leftrightarrow T_B = -\frac{Q_B}{Q_A} T_A$$

$$\Leftrightarrow \frac{Q_A}{T_A} + \frac{Q_B}{T_B} = 0$$

Diese Gleichungen definieren nach William Lord Kelvin¹ die thermodynamische Temperatur. Die bereits kennen gelernte Definition der Temperatur über eine Quecksilbersäule oder ein Gasthermometer hat den Nachteil, dass sie von den Eigenschaften der Thermometersubstanz abhängig sind. Dieser Nachteil kann nun mit Hilfe dieses Ergebnisses aus dem Carnot-Prozess vermieden werden. Aus dem Wirkungsgrad kann man mit dieser Gleichung unmittelbar das Verhältnis der absoluten Temperaturen der beiden Wärmespeicher berechnen. Dann ist die Temperaturskala eindeutig festgelegt, wenn man einen absoluten Fixpunkt definiert. Dazu hat man wie bereits erläutert den Tripelpunkt des Wasser genutzt. Die so festgelegte Temperaturskala nennt man thermodynamisch definierte Temperatur. Sie stimmt praktisch mit der durch ein Gasthermometer festgelegten Temperatur überein.

Des Weiteren erlauben diese Beziehungen die Definition einer neuen Zustandsgröße, der Entropie S , die wir im nächsten Kapitel einführen werden.

XIV.8 II. Hauptsatz der Wärmelehre und Entropie

Die Mannigfaltigkeit der möglichen thermodynamischen Prozesse wird durch den I. Hauptsatz beschränkt, weil dort nur solche Prozesse zugelassen sind, die dem Prinzip der Erhaltung der Energie unterliegen. In solchen Prozessen kann Energie weder erzeugt noch vernichtet werden, sondern nur von einer Form in die andere umgewandelt werden. Wir hatten bereits angesprochen, dass ein daraus resultierender Wirkungsgrad einer periodisch arbeitenden Maschine von 100% in der Realität jedoch nicht zu bewerkstelligen ist. Betrachtet man noch andere in der Natur und in den technischen Anlagen ablaufenden Prozesse, so sieht man, dass viele Prozesse nicht vorkommen, obwohl sie mit dem I. Hauptsatz verträglich sind. Hier einige Beispiele:

Es werden zwei Körper (Systeme) von verschiedener Temperatur in thermischen Kontakt gebracht. Dann fließt eine Wärmemenge solange vom wärmeren Körper zum kälteren, bis sich die Temperaturen beider Körper angeglichen haben. Die innere Energie des kälteren Körpers erhöht sich dabei um die Wärmemenge, die von dem wärmeren zugeflossen ist. Um diesen Betrag erniedrigt sich die innere Energie des wärmeren Körpers. Der umgekehrte Prozess, bei dem vom kälteren Körper eine Wärmemenge zum wärmeren fließt und somit die Temperaturdifferenz erhöht, oder dass nach dem Temperatenausgleich sich von selbst wieder

¹ William Lord Kelvin of Larges ist der offizielle Titel, den Sir William Thomson seit 1892 tragen durfte. Der britische Physiker, geboren in Belfast am 26. Juni 1824, war unter anderem Professor in Glasgow. Bekannt wurde er durch seine Arbeiten zur Thermodynamik und Elektrizitätslehre. Er entwickelte zeitgleich mit R.J.E. Clausius den zweiten Hauptsatz der Wärmelehre und erstellte die nach ihm benannte Temperaturskala. Am 17. Dezember 1907 starb Lord Kelvin in Netherhall bei Largs (Ayr).

ein Temperaturunterschied zwischen den beiden Körpern einstellen würde, steht im Einklang mit dem I. Hauptsatz. Diese Prozesse sind aber noch nie beobachtet worden.

Ein weiteres Beispiel soll der Versuch von Gay-Lussac sein. Bei diesem Versuch, den wir bereits betrachtet haben, expandiert Gas frei in einen größeren Raum bzw. größeres Volumen. Hierbei wird keine Arbeit verrichtet und es findet auch kein Wärmeaustausch mit der Umgebung statt, so dass die innere Energie konstant bleibt. Die Umkehrung dieses Prozesses, d.h. dass sich das Gas von selbst wieder auf das Ausgangsvolumen zurückzieht und somit den Anfangszustand einnehmen würde, steht nicht im Widerspruch zum I. Hauptsatz. Ein solcher Vorgang tritt aber ebenfalls nie auf. Ähnliches gilt auch für die Diffusion von zwei unterschiedlichen Gasen.

Diese Beispiele zeigen, dass der I. Hauptsatz keineswegs ausreicht, um die in der Natur wirklich vorkommenden Prozesse eindeutig zu bestimmen und deren Richtung festzulegen. Die hierfür erforderlichen Bedingungen sind Inhalt des II. Hauptsatzes der Thermodynamik.

XIV.8.1 Formulierungen des II. Hauptsatzes und Definition der Entropie

Bei Behandlung der Frage, ob es eine periodisch arbeitende Maschine geben kann, deren Wirkungsquerschnitt größer ist als der einer Carnot-Maschine, hatten wir den Begriff des Perpetuum mobile 2. Art genannt. Als Perpetuum mobile 2. Art bezeichneten wir eine periodisch arbeitende Maschine, die nichts weiter bewirkt als Arbeitsleistung und Abkühlung eines Wärmereservoirs. Wir hatten festgestellt:

Es gibt kein Perpetuum mobile 2. Art.

Diese vorweggenommene Aussage ist bereits eine Formulierung des II. Hauptsatzes:

**0. Formulierung des II. Hauptsatzes
Es gibt kein Perpetuum mobile 2. Art.**

Eine ausführliche Formulierung, welche die Definition eines Perpetuum mobile 2. Art mit einschließt, wurde von z.B. Lord Kelvin, R. Clausius (1822 - 1888) und M. Planck (1858 - 1947) aufgestellt. Als Beispiel geben wir Oswalds Formulierung an:

**I. Formulierung des II. Hauptsatzes: Oswalds Formulierung
„Es gibt keine periodisch arbeitende Maschine, die nichts anderes bewirkt
als Erzeugung mechanischer Arbeit und Abkühlung eines Wärmereservoirs.“**

Eine weitere Formulierung des II. Hauptsatzes bedarf zunächst der Einführung einer neuen, bereits angekündigten Größe, der Entropie:

Entropiesatz:

„Jedes thermodynamische System besitzt eine Zustandsgröße, die Entropie S. Man berechnet sie, indem man das System aus einem willkürlich gewählten Anfangszustand in den jeweiligen Zustand des Systems durch eine Folge von Gleichgewichtszuständen überführt, die hierbei schrittweise reversibel zugeführte Wärme δQ_{rev} bestimmt, letztere durch die absolute Temperatur dividiert und sämtliche Quotienten aufsummiert. Bei wirklichen Zustandsänderungen eines abgeschlossenen Systems kann die Entropie nur zunehmen (irreversible Änderung) oder konstant bleiben (reversible Änderung).“

Kurz formuliert wird die Entropie damit definiert als:

Definition XIV.8: Die Entropieänderung ΔS eines Körpers (Systems) beim Übergang von einem Zustand in einen anderen ist gegeben durch das Integral

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} \geq 0.$$

Der Index $_{\text{rev}}$ besagt, dass der Weg zwischen den Zuständen reversibel durchlaufbar sein muß.

Die Entropie S ist ein Maß für vergeudete Arbeit oder erreichte Irreversibilität eines Zustandes.

Mit dieser neu definierten Größe können wir den II. Hauptsatz formulieren als:

II. Formulierung des II. Hauptsatzes:

Die Entropie eines Systems kann bei beliebigen Vorgängen

immer nur zunehmen:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} \geq 0.$$

Zusammenfassend können wir aus diesen Beispielen festhalten, dass es Prozesse gibt, die nicht umkehrbar sind. Noch einige weitere Beispiele auch aus dem Bereich der Mechanik für reversible und irreversible Prozesse sind in der folgenden Tabelle aufgeführt:

Reversible Prozesse	Irreversible Prozesse
Pendel	Wärmeleitung
Stahlkugel-Platte	Diffusion
quasistatische Prozesse mit kleinem Δp und ΔT	Drosselung Reibung
Eine Umkehr ohne Energiezufuhr ist möglich	Es wird Arbeit vergeudet. Statt nutzbarer Arbeit wird Wärme erzeugt.
$\Delta S = 0$	$\Delta S > 0$ Der alte Zustand ist nur durch Änderung außerhalb des betrachteten Systems wieder herstellbar.

Tabelle XIV.3: Gegenüberstellung reversible - irreversible Prozesse

XIV.8.2 Beweis der Äquivalenz der Formulierungen des II. Hauptsatzes

Mit der Definition eines Perpetuum mobile 2. Art ergibt sich aus der 0. Formulierung direkt die 1. Formulierung des II. Hauptsatzes. So einfach ist der Beweis für die beiden Formulierungen 1. und 2. jedoch nicht. In diesem Kapitel wollen wir deshalb zeigen, dass die von uns angegebene Definition der Entropie eine andere, äquivalente Formulierung des II. Hauptsatzes der Thermodynamik bedeutet.

Diesen Beweis führen wir in zwei Schritten:

1. Schritt: Die Entropie ist eine Zustandsgröße

Bei der Definition der thermodynamischen Temperatur hatten wir errechnet, dass bei einem

Carnot-Prozess die Beziehung gilt

$$\frac{Q_A}{Q_B} = \frac{T_A}{-T_B}$$

$$\Leftrightarrow T_B = -\frac{Q_B}{Q_A} T_A$$

$$\Leftrightarrow \frac{Q_A}{T_A} + \frac{Q_B}{T_B} = 0$$

Im Prinzip kann jeder beliebige reversible Kreisprozess durch unendlich viele differentiell schmale Carnot-Prozesse ersetzt werden.

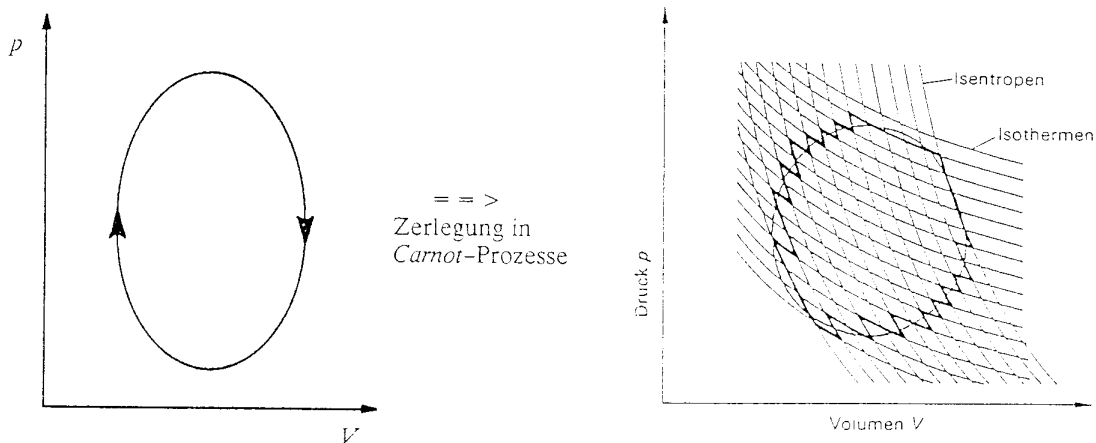


Abbildung XIV.25: Zerlegung eines beliebigen Kreisprozesses in n Carnot-Prozesse

Dann muß bei einer Zerlegung in n Teilprozesse gelten:

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_{\text{rev},i}}{T_i} = 0,$$

da bei reversiblen Prozessen die Änderung der Entropie $\Delta S = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = 0$ ist.

Gehen wir zu einer beliebig feinen Zerlegung über, die den betrachteten Gesamtprozess beliebig genau annähert, dann müssen wir die Summe durch ein Ringintegral ersetzen, d.h. wir

machen den Grenzübergang:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{Q_{\text{rev},i}}{T_i} = \oint \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = 0$$

Der Index _{rev} soll daran erinnern, dass die Beziehung nur für reversible Prozesse gilt. Da die obige Beziehung über eine geschlossene Kurve Null ist, deutet sie auf eine neue Zustandsgröße hin. Diese Zustandsgröße bezeichnet man nach R. Claudius als Entropie S. Ihr Differential ist definiert als:

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T}$$

Entropiedifferenz

Dies ist die bereits bekannte thermodynamische Definition der Entropie. Man nennt sie auch Änderung der Entropie.

Aus dem Ergebnis für einen reversiblen Kreisprozess

$$\oint \frac{Q_{\text{rev}}}{T} = 0$$

folgt nun, daß

$$\delta Q_{\text{rev}} / T$$

das Differential einer Größe ist, die nur vom Zustand des betreffenden Systems abhängt, also eine Zustandsgröße ist. Das obige Integral kann man auch als Summe zweier Teilintegrale darstellen, die die Integralwerte bei Integration vom Zustand 1 über den Prozessweg (a) bis zum Zustand 2, und von 2 über den Weg (b) zurück nach 1 wiedergeben.

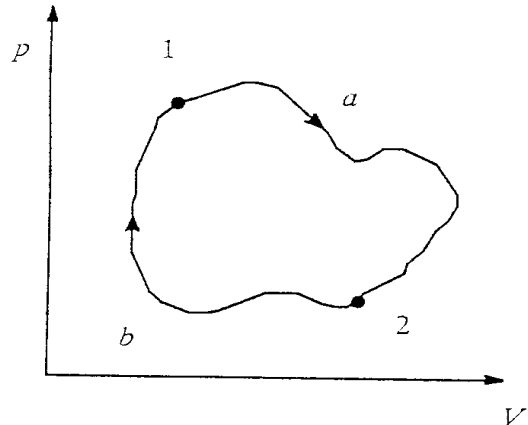


Abbildung XIV.26: Prozessweg eines beliebigen Kreisprozesses

Dann gilt mit

$$\Delta S(a) = \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} ,$$

$$\Delta S(b) = \int_2^1 \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T}$$

und

$$\Delta S = \Delta S(a) + \Delta S(b) = 0$$

$$\int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} + \int_2^1 \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = \oint \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = - \int_2^1 \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T}$$

$$\Leftrightarrow (a) \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = (b) \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T}$$

Damit ist bewiesen, dass es sich bei der Entropie um eine Zustandsgröße handelt, da eine Zustandsänderung unabhängig vom Weg ist. Bei der reversiblen Zustandsänderung vom Zustand 1 zum Zustand 2 gilt somit für die Änderung der Entropie des Systems

$$\Leftrightarrow \Delta S_{12} = \int_1^2 dS$$

$$\Leftrightarrow \Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta S_{12} = S_2 - S_1}$$

Die Entropie S ist neben der inneren Energie U die wichtigste Zustandsfunktion eines Systems. Diese beiden Zustandsgrößen bestimmen zusammen das thermodynamische Verhalten des Systems. Wie bei der inneren Energie ist die Definition der Entropie nur bis auf eine additive Konstante festgelegt, da hier ebenfalls nur Aussagen über die Änderung der Entropie bei einer Zustandsänderung gemacht werden.

Der Nullpunkt ist somit willkürlich definierbar.

Bei der Berechnung der Entropieänderung muß immer ein im Prinzip realisierbarer reversibler Weg beschritten werden. Bei adiabatischen Zustandsänderungen, die reversibel ablaufen, ist $\delta Q_{\text{rev}} = 0$. Somit gibt es keine Entropieänderung ($S_1 = S_2$).

Bei adiabatischen Zustandsänderungen, die reversibel ablaufen, ist $\delta Q_{\text{rev}} = 0$.

Es gibt keine Entropieänderung: $S_1 = S_2$.

Bei einer Zustandsänderung eines idealen Gases läßt sich die Entropieänderung mit Hilfe des I. Hauptsatzes berechnen:

Aus
$$dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T}$$

folgt mit dem I. Hauptsatz
$$dU = \delta Q + \delta W$$

$$dS = \frac{dU - \delta W}{T} .$$

Mit
$$\delta W = -p dV$$

folgt dann
$$dS = \frac{dU + p dV}{T}$$

Mit
$$dU = n C_V dT$$

folgt
$$dS = \frac{n C_V dT + p dV}{T}$$

$$\Leftrightarrow dS = n C_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV$$

und mit
$$\frac{p}{T} = n \frac{R}{V}$$

gilt schließlich
$$dS = n C_V \frac{dT}{T} + n R \frac{dV}{V} .$$

Setzt man nun voraus, dass die molare Wärmekapazität $C_V = \text{const}$ kann integriert werden kann,

so errechnet man durch Integration

$$\Delta S = n C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + n R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Wird die innere Energie U durch die Enthalpie H ausgedrückt, erhält man

$$dU = dH - p dV - V dp$$

damit folgt

$$dS = \frac{dH - V dp}{T}$$

$$\Leftrightarrow dS = n C_P \frac{dT}{T} - n R \frac{dp}{p}$$

$$\Leftrightarrow \Delta S = n C_P \ln \frac{T_2}{T_1} - n R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Vorsicht: Diese Formeln kann man nur anwenden, wenn der Prozess reversibel ist, aber nicht

bei irreversiblen Prozessen. Dort ist

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} > \frac{\delta Q}{T}$$

2. Schritt: Wie berechnet man die Entropieänderung dS bei einem irreversiblen Prozess ?

Wie sieht also der Zusammenhang zwischen ΔS und irreversiblen Prozessen aus? Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir einen Carnotschen Kreisprozess, der irreversible Anteile hat. Diese können z.B. Wärmeverluste sein.

Dann ist der Wirkungsgrad geringer als bei vollkommener reversibler Prozessführung:

$$\eta_{\text{irrev}} < \eta_{\text{rev}}$$

Analog zu XVI.6.1 gilt dann für die mit zwei Reservoirs T_1 und T_2 ausgetauschten Wärmemengen

$$Q_{34} = Q_2 (T_2)$$

und

$$Q_{12} = Q_1 (T_1)$$

und den Wirkungsgrad η_{irrev}

$$\eta_{\text{irrev}} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1}$$

folgt daraus

$$\frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

für irreversible Prozesse

$$\Leftrightarrow T_1 Q_1 + T_1 Q_2 < T_1 Q_1 - T_2 Q_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{Q_2}{T_2} < - \frac{Q_1}{T_1}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0} \quad \text{für } Q_{\text{irrev}}$$

Somit gilt für beliebige irreversible Kreisprozesse mit der gleichen Beweisführung wie für reversible Prozesse:

$$\oint \frac{\delta Q_{\text{irrev}}}{T} < 0$$

Allgemein gilt dann für beliebige Kreisprozesse

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

Das Gleichheitszeichen bezieht sich hierbei nur auf reversible Kreisprozesse.

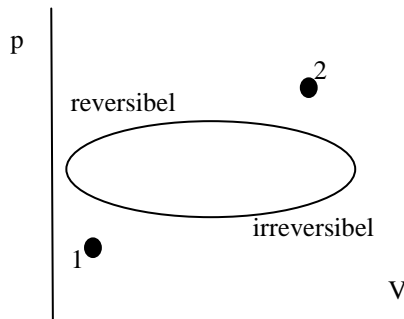


Abbildung XIV.27: Kreisprozess mit reversiblen und irreversiblen Weg

Um allgemeine Aussagen über Entropieänderungen zu bekommen, betrachten wir nun einen Kreisprozess, der aus einem irreversiblen ($1 \rightarrow 2$) und einem reversiblen ($2 \rightarrow 1$) Weg besteht. Der gesamte Prozess ist damit irreversibel.

Dann gilt

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{irrev}}}{T} + \int_2^1 \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} < 0$$

Mit

$$S_1 - S_2 = \int_2^1 \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T}$$

folgt

$$\int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + S_1 - S_2 < 0 .$$

Damit gilt

$$\Delta S = S_2 - S_1 > \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{irrev}}}{T}$$

Für den allgemeinen Fall (Q_{rev} oder Q_{irrev}) folgt:

$$\boxed{\Delta S = S_2 - S_1 \geq \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}}$$

Das Gleichheitszeichen trifft dabei nur bei reversiblen Prozessen zu.

Für ein abgeschlossenes System ergibt sich

mit

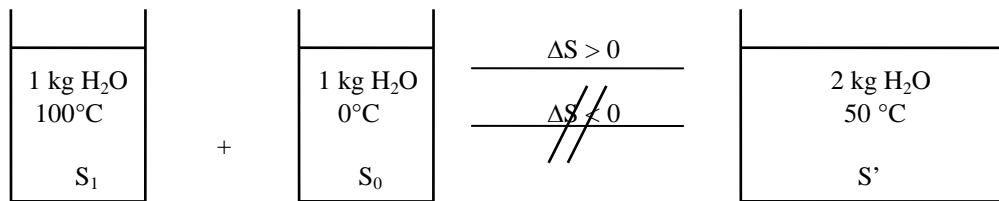
$$\Delta Q = 0$$

$$\boxed{\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} \geq 0 \quad \text{q.e.d.}}$$

XIV.8.3 Beispiele der Berechnung von ΔS für irreversible Prozesse

1) Mischen von Wasser

In diesem Beispiel berechnen wir die Entropiedifferenz der folgenden Situation: Je ein Kilogramm 100°C und 0°C warmes Wasser werden gemischt. Die Temperatur des gemischten Wasser beträgt dann 50°C . Es ist jedoch ohne Eingriff von außen nicht möglich, zwei Kilogramm 50°C warmes Wasser in je ein Kilogramm 100°C und 0°C warmes Wasser zu trennen.



Nach der Definition der Entropie gilt
$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$$

mit $\delta Q = m c_p dT$ folgt
$$\Delta S = m c_p \int_1^2 \frac{dT}{T}$$

$$\Leftrightarrow \Delta S = m c_p \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Nun definieren wir den Nullpunkt
$$S_0 (0^\circ\text{C}) = 0$$

Mit
$$c_p = 1 \frac{\text{kcal}}{\text{g K}}$$

folgt
$$S' (50^\circ\text{C}) = 2 \cdot \ln \frac{323}{273} \frac{\text{kcal}}{\text{K}}$$

und
$$S_1 (100^\circ\text{C}) = 1 \cdot \ln \frac{373}{273} \frac{\text{kcal}}{\text{K}}$$

Dann folgt aus
$$\Delta S = S' - S_1 - S_0$$

$$\Delta S = 0.336 - 0.312 = 0.024 \frac{\text{Kcal}}{\text{K}} > 0$$

2) Freie, adiabatische Expansion eines idealen Gases

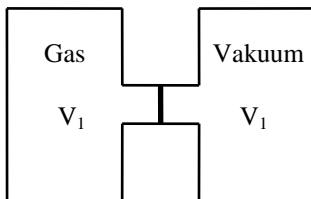
In diesem Beispiel berechnen wir die Entropiedifferenz bei einer freien adiabatischen Expansion eines idealen Gases von V_1 auf V_2 . Dabei werde das Volumen verdoppelt, d.h. es gelte

$$V_2 = 2 V_1.$$

Mit dem Attribut „frei“ bezeichnen wir wieder eine Expansion, bei der weder Wärme zugeführt, noch Arbeit am System geleistet wird

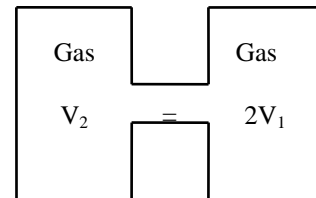
$$\delta Q = 0$$

$$\delta W = 0.$$



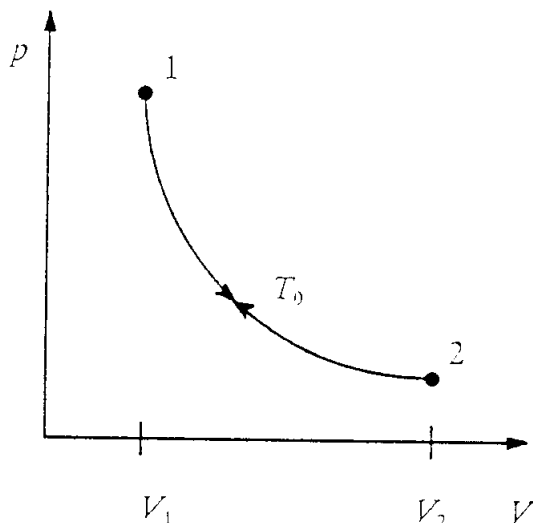
Als Gedankenexperiment zu dieser Rechnung betrachte man zwei gleich große Volumina V_1 und V_2 , von denen eins mit einem idealen Gas, das andere hingegen mit Vakuum gefüllt sei. Durch ein Ventil, das im Grundzustand geschlossen sei, können die beiden Volumina verbunden werden. Dann expandiert das Gas frei in ein

Volumen $V_2 = 2 V_1$.



Wie groß ist nun ΔS ?

Zur Berechnung der Entropieänderung können wir nicht die Formel $dS = \delta Q / T$ verwenden, da es sich um einen irreversiblen Prozess handelt, denn nur durch zusätzliche Arbeitsleistung kann dieser Prozess rückgängig gemacht werden.



Als Ausweg suchen wir wie oben einen reversiblen Weg, der die Expansion wieder rückgängig macht. Hierzu wählen wir einen isothermen Prozess. Dann erreichen wir den Anfangszustand wieder, denn der erste Prozess war ebenfalls bei idealem Gas isotherm.

Abbildung XIV.28: isotherme Prozesse

Die Zustandsänderung besteht dann aus zwei Schritten:

1. Adiabatische (isotherme) Expansion von V_1 auf $2V_1$ bei $T_0 = \text{const.}$
2. Isotherme Kompression von $2V_1$ auf V_1 bei $T_0 = \text{const.}$

Die Entropie über den Gesamtweg beträgt dann null:

$$\oint dS = 0 = \Delta S_{12} + \Delta S_{21}$$

Mit der bereits üblichen Notation folgt daraus

$$0 = \Delta S_{12} + \Delta S_{21}$$

$$\Leftrightarrow \Delta S_{12} = -\Delta S_{21}$$

Da die Zustandsänderung isotherm bei T_0 verläuft, gilt ebenfalls

$$\Delta S_{21} = \frac{Q_{21}}{T_0}$$

Mit der für isotherme Zustandsänderungen hergeleiteten Formel

$$Q_{21} = n R T_0 \ln \frac{V_1}{V_2}$$

gilt dann

$$\Delta S_{21} = n R \ln \frac{V_1}{V_2}$$

Mit

$$V_2 = 2 V_1$$

folgt

$$\Delta S_{21} = -n R \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \int_2^1 \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = -n R \ln 2$$

Für ΔS_{12} folgt mit $\Delta S_{12} = -\Delta S_{21}$

$$\Delta S_{12} = n R \ln 2$$

Entropieerhöhung bei freier Expansion

Wir halten fest, dass bei freier Expansion und anschließender isothermer Kompression gilt:

$$\Delta S_{12} + \Delta S_{21} = 0$$

aber für

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{irrev}}}{T} + \int_2^1 \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T}$$

gilt mit $\delta Q = 0$

$$\int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{irrev}}}{T} = 0$$

und mit

$$\int_2^1 \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = -n R \ln 2$$

gilt

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = -n R \ln 2$$

Damit ist

$$\oint \frac{\delta Q}{T} < 0,$$

im Einklang mit dem II. Hauptsatz der Wärmelehre.

Also gilt

$$\oint \frac{\delta Q}{T} < 0 \text{ aber } \oint dS = 0.$$

XIV.8.4 Wärmeschaubild und thermodynamisches Gleichgewicht

Bereits bei der Betrachtung der einzelnen Zustandsänderungen idealer Gase hatten wir Diagramme betrachtet, welche die Abhängigkeit zwischen zwei Zustandsgrößen der Arbeitssubstanz zeigen. Den Graphen im p/V-Diagramm hatten wir Namen zugeordnet. Dieses p/V-Diagramm ist deshalb am anschaulichsten, weil die Arbeit, die am System verrichtet wird, direkt als Fläche unter dem Graphen abgelesen werden kann. Aus der Mathematik wissen wir, dass die Fläche unterhalb eines Graphen durch das Integral berechnet wird. Für die Arbeit gilt deshalb

$$W = -\int p dV.$$

Bei einem Kreisprozess kann die geleistete Arbeit pro Zyklus abgelesen werden als Differenz der 'Arbeitsflächen' der einzelnen Schritte.

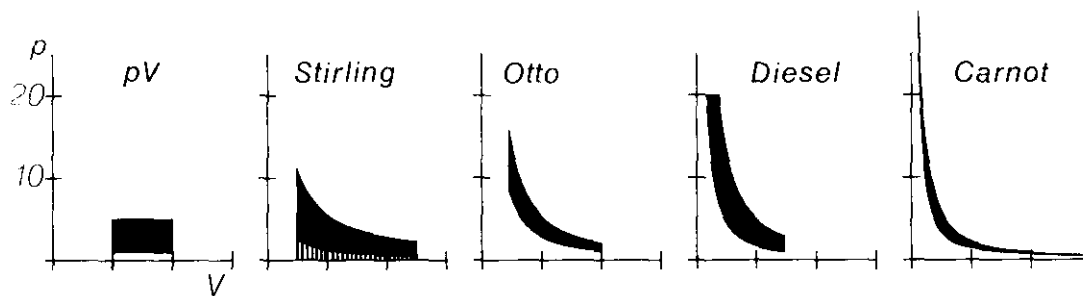


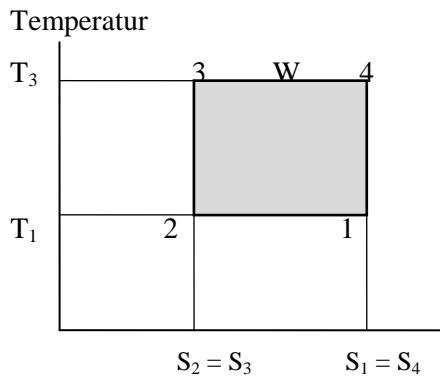
Abbildung XIV.29: Arbeitsdiagramme von Wärmekraftmaschinen

Analog kann man ein T/S-Diagramm betrachten. Aus der Definitionsgleichung der Entropiedifferenz

$$dS = \delta Q_{\text{rev}} / T$$

$$\Leftrightarrow Q_{\text{rev}} = \int T dS$$

folgt, dass in einem T/S-Diagramm die reversibel umgesetzte Wärmemenge als Fläche unter der Kurve einer Zustandsänderung abgelesen werden kann. Auch hier wird die nach Durchlaufen eines Kreisprozesses erzeugte Wärme angegeben durch die Differenz der 'Wärmeflächen' in den einzelnen Schritten.



Diese Abbildung zeigt das Wärmeschaubild des Carnot-Prozesses. Hierbei entspricht die zugeführte Wärme der Fläche unterhalb der Geraden $T_3 = \text{const.}$ Die abgegebene Wärme ist sichtbar unter der Geraden $T_1 = \text{const.}$ Die Nutzarbeit entspricht wie beim p,V -Diagramm dem Flächeninhalt der umfahrenen Figur.

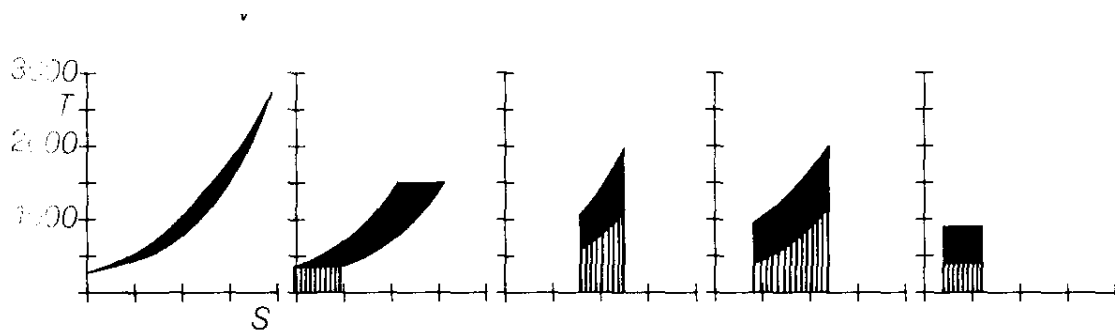


Abbildung XIV.30: Arbeitsdiagramme im T/S-Diagramm: pV, Stirling, Otto, Diesel, Carnot

Die Entropieänderung ergibt somit die Größe der mechanischen Arbeit, die sich bei isothermer Ausdehnung bestenfalls gewinnen lässt. Für das ideale Gas ergibt der Energiesatz $Q = W$.

Mit dem II. Hauptsatz
$$\frac{Q}{T} \leq \Delta S$$

folgt

$$W \leq T \Delta S.$$

Das Gleichheitszeichen für nur für reversible Ausdehnung.

Die maximale Arbeit, die sich gewinnen lässt ist gegeben durch

$$W \leq T \Delta S.$$

Mit den bisherigen Betrachtungen zum I. und II. Hauptsatz der Thermodynamik lässt sich folgendes Fazit ziehen:

Der I. Hauptsatz bestimmt, welche Prozesse in einem isolierten System möglich sind.

Der II. Hauptsatz gibt an, in welcher Richtung diese Prozesse ablaufen.

Bei jeder Zustandsänderung eines isolierten Systems nimmt die Entropie S zu oder bleibt bestenfalls konstant.

Mit dieser Aussage läßt sich nun in Analogie zur Mechanik ein thermodynamisches Gleichgewicht formulieren:

Isolierte Systeme befinden sich im stabilen **thermodynamischen Gleichgewicht**, wenn ihre Entropie ein Maximum aufweist. Wird also das System gestört, so entwickelt es innere Mechanismen, die es wieder in Richtung maximaler Entropie treiben.

Es gelten folgende Gleichgewichtsbedingungen:

$$S = \text{Maximum}$$

$$\Delta S_{\text{gesamt}} = 0,$$

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$$

ΔS bezeichnet dabei die Änderung im betrachteten System und ΔQ bezeichnet den Wärmeaustausch mit der Umgebung.

Äquivalent sind die Aussagen

$$\Delta S = \frac{\Delta U - \Delta W}{T}$$

und

$$0 = \Delta U - \Delta W - T \Delta S$$

Die **Gleichgewichtsbedingung für ein thermodynamisches Gleichgewicht** ist

$$0 = \Delta U - \Delta W - T \Delta S .$$

XIV.8.5 Statistische Deutung der Entropie

In diesem Kapitel soll kurz aufgezeigt werden, dass es einen Zusammenhang der Entropie mit der Wahrscheinlichkeit gibt.

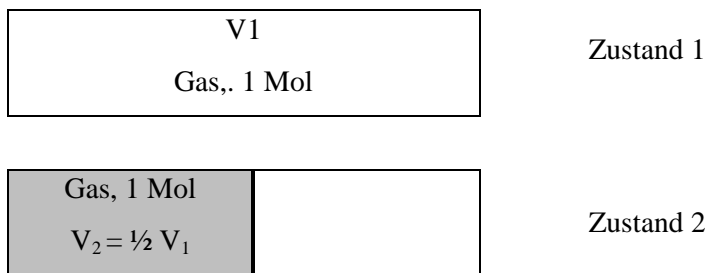
Was genau die Entropie S aussagt und welche Bedeutung dem Entropiebegriff in der Thermodynamik zukommt, wurde vor allem von L. Boltzmann (1844 - 1906) aufgeklärt. Die Erkenntnisse, die hierbei von ihm gewonnen wurden, zeigen erst die eigentliche Bedeutung der Entropiebegriffes, der im Rahmen der phänomenologischen Wärmelehre zunächst als recht abstrakte Größe erscheint.

Um den Begriff der Entropie zu erläutern, betrachten wir wieder die freie Expansion eines Gases von V_2 auf V_1 in einem abgeschlossenen System. Dieser Prozess ist selbstablaufend und nach dem II. Hauptsatz nimmt die Entropie des Gases wie in XIV.8.3 berechnet zu, bis die Entropie den unter den neuen Bedingungen möglichen Maximalwert erlangt hat. Das Gas liegt dann nach Kapitel XIV.8.4 wieder in einem Gleichgewichtszustand vor.

Ein Gleichgewichtszustand bedeutet eine gleichmäßige Verteilung der Moleküle auf das Volumen V_1 . Gehen wir hierbei von einem idealen Gas aus, so hat sich die Entropie bei diesem

Prozess insgesamt um
$$\Delta S = n R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

vergrößert. Das Gas kann von selbst nicht mehr aus diesem Gleichgewichtszustand in andere Zustände übergehen, da dies eine Entropieverminderung zur Folge hätte. Das ist nach dem II. Hauptsatz für ein abgeschlossenes System unmöglich.



Ziel dieses Kapitels ist es nun, den Zusammenhang zwischen Entropie und der Wahrscheinlichkeit quantitativ zu erfassen. Hierbei ist jedoch nicht die statistische Wahrscheinlichkeit w_1 gemeint, sondern die in der Thermodynamik zur Kennzeichnung der Zustandswahrscheinlichkeit benutzte Größe P_i , die thermodynamische Wahrscheinlichkeit genannt wird.

Hierzu wollen wir nun eine Erklärung mit Hilfe von statistischen Betrachtungen geben und nehmen dazu ein Gas mit

$$N = n \cdot N_A$$

Moleküle in V_1 , das sich im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, d.h. die Moleküle sind im Zustand 1 gleichmäßig auf das Volumen V_1 verteilt.

Wir zeigen nun, dass es extrem unwahrscheinlich ist, dass sich alle Moleküle zufällig wieder in $V_2 < V_1$ befinden (Zustand 2). Die Wahrscheinlichkeit \bar{w} , sich im Volumen V_2 aufzuhalten, ist für jedes Teilchen gleich groß, und zwar

$$\bar{w} = V_2 / V_1.$$

Somit ist die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Teilchen in V_2 anzutreffen

$$w(1) = \bar{w} = \frac{V_2}{V_1}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei unabhängige Teilchen sich gleichzeitig in V_2 befinden, ist dann gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten, also

$$w(2) = \bar{w} \cdot \bar{w}$$

$$\Leftrightarrow w(2) = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2.$$

Bei drei Teilchen ist

$$w(3) = \bar{w}^3$$

$$\Leftrightarrow w(3) = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^3$$

usw., d.h. die Wahrscheinlichkeit dafür, alle N Teilchen in V_2 anzutreffen ist

$$w(N) = \bar{w}^N$$

$$\Leftrightarrow w(N) = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^N.$$

Ist nun P_1 die thermodynamische Wahrscheinlichkeit für den Zustand 1, dann gilt für die thermodynamische Wahrscheinlichkeit des Zustandes 2

$$P_2 = P_1 \cdot w(N)$$

$$\Leftrightarrow P_2 = P_1 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^N.$$

Das thermodynamische Wahrscheinlichkeitsverhältnis W ist dann

$$W = \frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^N$$

Dieses Verhältnis gibt an, um wie viel der Zustand 1 wahrscheinlicher ist als der Zustand 2.

Das **thermodynamische Wahrscheinlichkeitsverhältnis** ist

$$W = \frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^N.$$

Da $V_1/V_2 > 1$

und N immer eine sehr große Zahl ist, z.B. bei n = 1 Mol

$$N \approx 6 \cdot 10^{23}$$

ist $P_1 \gg P_2$

Es ist also äußerst unwahrscheinlich, dass sich das Gas irgendwann von selbst auf ein kleineres Volumen zurückzieht.

Um zu Zahlen vernünftiger Größenordnung zu gelangen, bestimmt man den natürlichen Logarithmus des Wahrscheinlichkeitsverhältnisses:

$$\ln W = N \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)$$

Soll nun die Entropie ein Maß für die Zustandswahrscheinlichkeit darstellen, so muß ein funktionaler Zusammenhang

$$S = f(W)$$

existieren, d.h. ein Zusammenhang mit der Entropiedifferenz zwischen den Zuständen 1 und 2.

Die Änderung der Entropie vom Zustand 1 zum Zustand 2 kann mit Hilfe eines reversiblen Ersatzprozesses berechnet werden, der z.B. isotherm abläuft. Die Entropieänderung ist dann

$$\Delta S = S_1 - S_2 = n R \ln \frac{V_1}{V_2}.$$

Für n = 1 Mol gilt mit

$$N = N_A = \frac{R}{k}$$

$$\Delta S = k N \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right).$$

Mit $\ln W = N \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)$ folgt

$$\Delta S = k \ln(W)$$

Dieser Vergleich zeigt den von L. Boltzmann gefundenen Zusammenhang zwischen Entropieänderung und thermodynamischem Wahrscheinlichkeitsverhältnis

$$\ln W = \frac{1}{k} \Delta S.$$

Für die Entropie selbst gilt

$$S = k \ln W.$$

Der **Zusammenhang zwischen Entropie und Wahrscheinlichkeit** ist gegeben durch

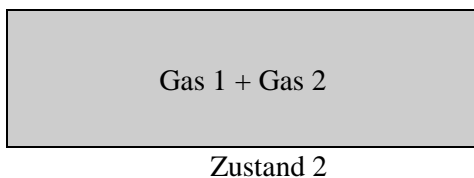
$$\ln W = \frac{1}{k} \Delta S .$$

Die Entropie eines Systems um so höher ist, je größer die Wahrscheinlichkeit ist, mit welcher der Zustand des Systems realisiert werden kann.

Die Entropie eines Systemzustandes ist proportional dem Logarithmus seiner Wahrscheinlichkeit.

Dieser fundamentale Zusammenhang gilt ganz allgemein. Er verknüpft den II. Hauptsatz der Wärmelehre mit der kinetischen Wärmetheorie. Die Aussage, dass ein System nur von dem unwahrscheinlicheren Zustand in den wahrscheinlicheren übergeht, ist gleichbedeutend mit dem Prinzip von der Vermehrung der Entropie.

Um abschließend noch einen weiteren Aspekt der Entropie darzustellen, betrachten wir folgendes Beispiel:

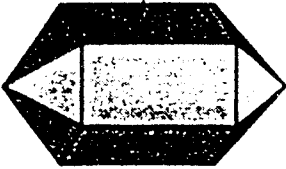
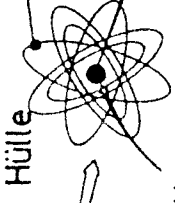

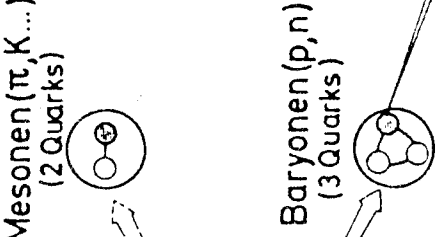



In einem Behälter befinden sich zwei Gase (Zustand 1), die durch eine Trennwand voneinander getrennt sind. Entfernt man die Trennwand, diffundieren die Gase (Zustand 2). Dieser typische irreversible Mischvorgang kann vom Standpunkt der Wahrscheinlichkeitsrechnung so interpretiert werden, dass das System vom unwahrscheinlichen Zustand hoher Ordnung (Zustand 1) in den wahrscheinlicheren Zustand

großer Unordnung (Zustand 2) übergeht, d.h., dass von selbst ablaufende Vorgänge stets von geordneten Zuständen in Richtung größerer Unordnung gehen. Da sie stets mit einem Entropieanstieg verbunden sind, folgt:

Die Entropie ist ein Maß für den **Grad der Unordnung** eines Systems.

Abbildung I.1

KRISTALLE MOLEKÜLE, BIOMOLEKÜLE Chemische Grundstoffe bestehen aus Molekülen und Atomen	ATOME bestehen aus Hülle und Kern	ATOMKERNE bestehen aus Kernteilchen (Nukleonen) = Protonen (p, +) Neutronen (n)	HADRONEN sind Teilchen die der starken Wechselwirkung unterliegen	LEPTONEN QUARKS (elementar?) sind Teilchen die nur der schwachen Wechsel- wirkung unterliegen
 <p>Kristall</p>	 <p>Hülle Kern</p>	 <p>Atomkern</p>	 <p>Mesonen (π, K, \dots) (2 Quarks) Baryonen (p, n) (3 Quarks) Proton Neutron</p>	 <p>Leptonen ($e^-, \mu^-, \tau^-, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$) Quarks (u, d, s, b, t)</p>
1 cm einige Elektronenvolt (eV)	10^{-8} cm ~1000 eV	10^{-12} cm Millionen eV (MeV)	$\sim 10^{-13}$ cm Milliarden eV (GeV)	punktförmig $\leq 10^{-15}$ cm
Mikroskop Elektronenmikroskop	van de Graaff-Generator, Synchrotron Zyklotron, Betatron		Großbeschleuniger (CERN, DESY, SLAC) Speicherringe (DORIS, PETRA)	

SI-Einheiten

Größe	Einheit	Zeichen	Definition
Länge	Meter	m	Ursprünglich 1/10 000stel eines Erdmeridians, dann Definition über das Urmeter. Im SI die Strecke die Licht im Vakuum in 1/299 792 458 Sekunden zurücklegt
Masse	Kilogramm	kg	Masse des Internationalen Kilogrammprototyps
Zeit	Sekunde	s	9 192 631 770 Schwingungen der elektromagnetischen Strahlung des Hyperfeinstrukturübergangs des Grundzustands von Cäsium 133. Ursprünglich der 86400ste Teil eines Sonnentags (24 • 60 • 60).
elektrischer Strom	Ampere	A	Ein Ampere ist die Stärke eines elektrischen Stromes, der durch zwei geradlinige parallele Leiter mit einem Abstand von einem Meter fließt und der zwischen den Leitern je Meter Länge eine Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ N hervorruft.
Temperatur	Kelvin	K	Ein Kelvin ist der 273,16te Teil der Temperaturdifferenz zwischen dem Tripelpunkt von Wasser und dem absoluten Nullpunkt
Substanzmenge	Mol	mol	1 mol ist die Stoffmenge, die genauso viele Teilchen enthält wie in 0,012 kg des Nuklids ^{12}C vorhanden sind.
Lichtstärke	Candela	cd	Eine Candela ist die Lichtstärke, mit der ein schwarzer Strahler senkrecht zu einer Oberfläche von $1/60 \text{ cm}^2$ leuchtet, bei einer Temperatur von 2042,5 K (Erstarrungstemperatur des Platin bei Normaldruck).

In der Mechanik und der Wärmelehre haben wir nur die fünf SI-Einheiten

Länge	Definition I.3	S.4
Masse	Notation III.2 und Notation III.3	S.36 ff.
Zeit		
Temperatur	Definition X.1	S.262
Stoffmenge	Definition XI.1	S.269

benutzt.

Aus dem SI abgeleitete Größen

Größe	Einheit	Zeichen	Definition
Kraft	Newton	N	$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$
Energie, Arbeit	Joule	J	$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{Nm}$
Leistung	Watt	W	$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3} = \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = \frac{\text{J}}{\text{s}}$
Frequenz	Hertz	Hz	$\frac{1}{\text{s}}$
Druck	Pascal	Pa	$\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

Die Definition der Größen stehen in

Kraft F	Kapitel II.2	S.35 ff.
Energie, Arbeit	W Kapitel IV.1	S.50
Leistung	Kapitel IV.4	S. 61
Frequenz ν	Kapitel IV.8	S.78
Druck	Kapitel VII.3	S.202

Verwendete Konstanten der Physik

Konstante	Zeichen	Wert
Erdbeschleunigung (Standardwert)	g	9,80665 m s ⁻²
Gravitationskonstante	G	6,672 10 ⁻¹¹ m ³ kg ⁻¹ s ⁻²
absoluter Nullpunkt	0K	- 273,16°C
Avoadro-Konstante	N _A	6,0220 10 ²³ mol ⁻¹
molare Gaskonstante	R	8,314 J mol ⁻¹ K ⁻¹
Boltzmann-Konstante	k = R N _A ⁻¹	1,3807 10 ⁻²³ JK ⁻¹

Druckeinheiten

Einheit	Zeichen	Faktor zur Umrechnung in				
		Pa	bar	at	atm	Torr
Pascal = 1 Nm ⁻²	Pa	1	10 ⁻⁵	1.02 • 10 ⁻⁵	9.87 • 10 ⁻⁶	7.50 • 10 ⁻³
Bar = 10 ⁵ Pa = 0,1 MPa	bar	10 ⁵	1	1.02	0.987	7.5 • 10 ²
Techn. Atmosphäre	at	9.81 • 10 ⁴	0.981	1	0.968	7.36 • 10 ²
Phys. Atmosphäre	atm	1.013 • 10 ⁵	1.013	1.033	1	7.6 • 10 ²
Torr	Torr	1.333 • 10 ²	1,333 • 10 ⁻³	1,36 • 10 ⁻³	1.32 • 10 ⁻³	1

Arbeits- und Energieeinheiten

Einheit	Zeichen	Faktor zur Umrechnung in				
		J	kWh	kpm	kcal	eV
Joule = 1 Nm	J	1	2,78 • 10 ⁻⁷	0,102	2,39 • 10 ⁻⁴	6,24 • 10 ¹⁸
Kilowattstunde	kWh	3,6 • 10 ⁶	1	3,67 • 10 ⁵	8,6 • 10 ²	2,25 • 10 ²⁵
Kilopondmeter	kpm	9,81	2,72 • 10 ⁻⁶	1	2,34 • 10 ⁻³	6,12 • 10 ¹⁹
Kilokalorie	kcal	4,19 • 10 ³	1,16 • 10 ⁻³	4,27 • 10 ²	1	2,61 • 10 ²²
Elektronenvolt	eV	1,6 • 10 ⁻¹⁹	4,45 • 10 ⁻²⁶	1,63 • 10 ⁻²⁰	3,83 • 10 ⁻²³	1

Mega, Giga, Tera - was kommt danach?

Von den Einheiten des SI werden Vielfache und Teile in 10er Einheiten gebildet, wobei die sprachliche Bezeichnung in 1000er Schritten vorgenommen wird. Die folgende Aufstellung gibt die Namen der einzelnen Zehnerpotenzen wieder:

Potenz	Abkürzung	Bezeichnung	Erklärung
10^{18}	Exa E	Trillionen	gr. exa: über alles
10^{15}	Peta P	Billiarden	gr. petanünnein: alles umfassen
10^{12}	Tera T	Billionen	gr. to teras: ungeheuer groß
10^9	Giga G	Milliarden	gr. ho gigas: riesige Zahl
10^6	Mega M	Millionen	gr. megas: große Zahl
10^3	Kilo k	Tausend	gr. chilioi: tausend
10^0			
10^{-3}	Milli m	Tausendstel	lat. millesimus: der tausendste Teil
10^{-6}	Mikro μ	Millionstel	gr. mikros: klein, unbedeutend
10^{-9}	Nano n	Milliardstel	gr. ho nanos: zwerghaft klein
10^{-12}	Piko p	Billionstel	ital. pico: sehr klein
10^{-15}	Femto f	Billiardstel	dän.-norw. femten: 15
10^{-18}	Atto a	Trillionstel	dän.-norw. atten: 18

Im Bereich der menschlichen Sinneswahrnehmung und täglichen Erfahrung, also von 10^{-3} bis 10^3 der Basiseinheiten, wird noch feiner unterschieden. So gibt es

Potenz	Abkürzung	Bezeichnung	Erklärung
10^2	Hekto	Hundert	gr. hekaton: hundert
10^1	Deka	Zehn	gr. deka: zehn
10^{-1}	Dezi	Zehntel	lat. decem: zehn
10^{-2}	Zenti	Hundertstel	lat. centum: hundert

**Berechnung der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung
aus dem zentralen Theorem der statistischen Mechanik**

Das zentrale Theorem der statistischen Mechanik besagt für unser Beispiel

$$p_v = 4\pi v^2 dv \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

Für uns ist jedoch nicht die Wahrscheinlichkeit interessant sondern die wirkliche Verteilung, deshalb betrachten wir $N(v)$, wobei $N(v) \sim p_v$ ist.

$$dN(v) \sim 4\pi v^2 dv \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

mit $n(v) = \frac{1}{N} \frac{dN}{dv}$ folgt

$$n(v)Ndv \sim 4\pi v^2 dv \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

$$\Leftrightarrow n(v)dv \sim 4\pi v^2 \frac{1}{N} \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv$$

die Proportionalitätskonstante sei C , dann gilt

$$\Leftrightarrow n(v)dv = C \cdot 4\pi v^2 \frac{1}{N} \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv$$

Die Gesamtzahl der Teilchen muß erhalten bleiben, also muß gelten:

$$\int_0^{\infty} n(v)dv = 1$$

also folgt

$$\frac{1}{N} \int_0^{\infty} C \cdot 4\pi v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv = 1$$

$$\Leftrightarrow C4\pi \int_0^{\infty} v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv = N$$

Um dieses Integral lösen zu können, substituiert man

$$x = \left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{1}{2}} v$$

dann folgt

$$v^2 = \frac{2kT}{m} x^2$$

und

$$dv = \sqrt{\frac{2kT}{m}} dx$$

eingesetzt in
$$\int_0^{\infty} v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv = \frac{N}{4\pi C}$$

ergibt
$$\int_0^{\infty} x^2 \left(\frac{2kT}{m}\right) \cdot \left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(-x^2) dx = \frac{N}{4\pi C}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} x^2 \cdot \exp(-x^2) dx = \frac{N}{4\pi C}$$

mit
$$\int_0^{\infty} x^2 \cdot \exp(-ax^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{\frac{3}{2}}}$$
 (in unserem Fall $a = -1$)

folgt
$$\left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{N}{4\pi C}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \pi^{\frac{1}{2}} \cdot \pi = \frac{N}{C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{N} \left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{C}$$

$$\Leftrightarrow N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} = C$$

Diese Konstante eingesetzt in
$$n(v)dv = C \cdot 4\pi v^2 \frac{1}{N} \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv$$

ergibt
$$n(v)dv = N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 4\pi v^2 \frac{1}{N} \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv$$

$$\Leftrightarrow n(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 4\pi v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

Damit ergibt sich die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung

$$n(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

¹ Diese Formel kann z.B. im Taschenbuch der Mathematik von Bronstein-Semendjajew nachgeschlagen werden.

Empfohlene Literatur zur Vorlesung²

- Alonso, Marcelo / Finn, Edward J.:** Physik. [Übers.: Anneliese Schimpl].- Bonn, München, Reading; Mass.: Addison-Wesley 1988
- Bergmann, Ludwig: Lehrbuch der Experimentalphysik/ **Bergmann, Schäfer.** 10., bearb. u. erw. Aufl. Berlin; New York, de Gruyter 1990 (Band 1 Mechanik, Akustik, Wärme)
- Gerthsen, Christian:** Physik: ein Lehrbuch zum Gebrauch neben Vorlesungen [...]. Hg: Christian Gerthsen; Helmut Vogel.- 17., verb. und erw. Aufl. Berlin, Heidelberg, [...]: Springer 1993
- Kittel, Charles: Mechanik. Hg: Charles Kittel, Walter D. Knight, Malvin A. Rudermann, A.Carl Helmholtz, Burton j. Moyer.- 4.durchges. Aufl. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg 1986 (= **Berkley-Physik-Kurs, Band 1**)
- Tipler, Paul A.:** Physik/ Paul A. Tipler.[...] Hrsg. der dt. Ausgabe: Dieter Gerlich und Götz Jerke. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum Akad. Verlag 1994

Weitere Literatur zur Mechanik und Thermodynamik

- Bartels, Julius (Hg.): Geophysik.- Frankfurt am Main: Fischer Bücherei 1960
(= Das Fischer Lexikon 20)
- Böhm, Albrecht/ Bethke, Siegfried: Physik I für Physiker und Lehramtskandidaten. Manuskript zur Vorlesung im WS 1993/94.- RWTH-Aachen: 1993
- Brandt, S. / Dahmen, H.D.:** Physik. Eine Einführung in Experiment und Theorie. Band 1 Mechanik.- Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1977
- Bronstein, I.N./ Semendjajew, K.A.:** Taschenbuch der Mathematik.- 7. durchges. und verb. Aufl. Zürich; Frankfurt a.M.: Verlag Harry Deutsch 1967
- Crawford, Frank S.: Schwingungen und Wellen.- 4.durchges. Aufl. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg 1984 (= **Berkley-Physik-Kurs, Band 3**)
- Deutschmann, Martin: Kursvorlesung Physik I für Physiker und Lehramtskandidaten. Manuskript zur Vorlesung.- RWTH-Aachen: 1973
- Dorn, Friedrich/ Bader, Franz (Hg.):** Physik - Oberstufe. Band MS.- Hannover: Schroedel Schulbuchverlag 1976
- Flügge, Günter:** Physik I (für Physiker und Lehramtskandidaten). Manuskript zur Vorlesung im WS 1996/97.- RWTH-Aachen: 1996

² Die im Umgangssprachlichen geläufigen Bezeichnungen der Bücher sind fett hervorgehoben. Mit diesen Bezeichnungen sind die Werke auch im Abbildungsverzeichnis bibliographiert.

- Flügge, Günter/ Braunschweig, Wolfgang: Physik II für Physiker und Lehramtskandidaten. Manuskript zur Vorlesung im SS 1995.- RWTH-Aachen: 1995³
- Grehn, Joachim (Hg): **Vieweg Physik** für den kursorientierten Unterricht der gymnasialen Oberstufe.- Düsseldorf, Braunschweig: Vieweg Schulverlag 1978 (Teil 1: Mechanik)
- Grehn, Joachim (Hg): Vieweg Physik für den kursorientierten Unterricht der gymnasialen Oberstufe.- Düsseldorf, Braunschweig: Vieweg Schulverlag 1978 (Teil 2: Gravitation, Mechanische Schwingungen und Wellen, Elemente der Wärmelehre)
- Hammer**, Karl: Grundkurs der Physik / von Karl Hammer. 1. Mechanik-Wärmelehre: mit 25 Tabellen.- 6., verb. Auflage, München, Wien: Oldenbourg 1991
- Orear**, Jay: Physics.[Übers. aus dem Amerikanischen von Jürgen Häger...].- München; Wien: Carl Hanser Verlag 1982
- Recknagel**, Alfred: Physik. Mechanik.- 16.Auflage, Berlin: VEB Verlag Technik 1986
- Stuart, Herbert A.: Kurzes Lehrbuch der Physik. Hg: H.A. **Stuart**, G. **Klages**. 10.,neubearb. Auflage, Berlin, Heidelberg, [...]: Springer 1984

³ abgekürzt als FlüggeT

Namen- und Sachregister

A

abgeplatteter Kreisel	VI.12	180
absoluter Nullpunkt	X.1	260
Addition von Vektoren	II.1	6
Adiabate	XIV.5	351
Adiabatengleichung	XIV.5	353
Adiabatenkoeffizient	XIV.3	335
Aerostatik	IX.	232
Aggregatzustand	X.3	263
Aggregatzustände	VII.1	190
amorphe Festkörper	VII.1	192
aperiodischer Grenzfall	IX.5	253
Aphel	V.4	108
Äquipotentiallinien	V.6	129
Arbeit	IV.1	49
Archimedisches Prinzip	IIX.4	214
arithmetischer Mittelwert	XI.4	290
Atwood	III.4	38
Auftrieb	IIX.4	213
Auftriebskraft	IIX.4	213
Avogadrosche Zahl	XI.1	270

B

Bahn	II.2	12
Bahnkurve	II.2	12
Bahnlinien	IX.1	233
Ballistisches Pendel	IV.6	68
Basiseinheiten SI	I.1	3
Bernoullische Gleichung	IX.2	236
Beschleunigung	II.4	16
Beschleunigungsarbeit	IV.1	52
Bezugspunkt	II.2	11
Bezugssystem	II.2	11
Bindeenergie	VII.1	192
Boltzmann-Konstante	XI.2	279
Boltzmann-Verteilung	XI.4	285
Boyle-Mariotte	IIX.5	217
Bruchdehnung	VII.3	204

C

Calorie	X.2	262
Cavendish Drehwaage	V.4	113
Carnot-Prozess	XIV.6	350
Celsius-Skala	X.1	258
Clausius-Clapeyron	XII.2	301
Coriolisbeschleunigung	VI.14	184
Corioliskraft	VI.14	182
Cosinussatz	II.1.1	7
Coulomb-Reibung	VII.2	193

D

d'Alembertsches Prinzip	III.7	47
Daltonsches Gesetz	XII.3	305
Dampfdruckkurve	XII.2	298
Dämpfungsfaktor	IX.5	253
Dehnung	VII.3	198
Dehnungsgesetz	VII.3	199
Dehnungskoeffizient	VII.3	199
Deviationsmoment	VI.10	174
Differentialgleichung	IV.8	75
Diffusion	XIII	306
Diffusionskoeffizient	XIII.2	310
Doppelstern	V.5	120
Drehbewegung	V	91
Drehimpuls	V.3	103
Drehimpulserhaltung	V.3	104
Drehimpulserhaltung	VI.4	151
Drehmoment	V.3	102
Drehschwingung	VI.1	181
Drehwaage	V.4	113
Druck	VII.3	201
Druckausbreitung	IIX.2	208
Druckmesssonden	IX.2	240
Dynamik	III	33
dynamische Zähigkeit	IX.3	243

E			Freiheitsgrad	XI.2	280
Einheitsvektor	II.1.2	8	Frequenz	IV.8	77
elastische Hysterese	VII.3	204	G		
elastische Verformung	VII.3	198	Galilei-Transformation	II.6	30
Elastischer Bereich	III.2	34	Gangpolkegel	VI.12	180
elastischer Stoß	IV.6	62	Gaskonstante	XI.1	272
Elastizitätsgrenze	VII.3	203	Gay-Lussac	X.1	260
Elastizitätsmodul	VII.3	199	gedämpfte Schwingung	IX.5	250
Elongation	IV.8	77	Gegenwirkungsprinzip	III.7	44
Endenergie	XIV.9	391	geozentrisches Weltbild	V.4	106
Energieerhaltung	IV.4	57	Geschwindigkeit	II.3	12
Energie-Maßeinheiten	XIV.9	391	Geschwindigkeitsraum	XI.4	288
Enthalpie	XIV.4	340	Gewicht G	III.2	35
Entropie	XIV.8	369	Gezeiten	V.4	117
Eötvös'sche Drehwaage	III.5	41	gleichf. Kreisbewegung	V.1	92
Erdbeschleunigung	II.5	21	Gleitreibung	VII.2	195
Erdmasse	V.4	119	Gleitreibungskoeffizient	VII.2	196
erg	IV.1	50	grad	V.6	128
Erstarren	X.3	263	Gradlinige Bewegung	II.5	20
Exergie	XIV.9	389	Gravitation	V.4	112
Exergiewirkungsgrad	XIV.9	390	Gravitationsfeld	V.6	123
F			Gravitationsfeldstärke	V.6	130
Federkonstante	IV.1	55	Gravitationsgesetz	V.4	113
Federschwingung	IV.8	74	Gravitationskonstante	V.4	116
Fernkräfte	V.5	120	Gravitationspotential	V.6	129
Fernordnung	VII.1	192	Gravitationswelle	V.5	120
Festkörper	VII.1	191	Gravitonen	V.5	120
Ficksches Gesetz	XIII.2	310	Grenzflächenspannung	II.8	225
Figurenachse	VI.9	167	Größengleichung	II.3	14
Flächensatz	V.4	108	H		
Flächenvektor	V.4	110	Haftreibung	VII.2	195
Fliehkraft	V.2	97	Haftreibungskoeffizient	VII.2	196
Fliehkraftregler	V.2	100	Hagen-Poiseuille	IX.3	247
Fließgrenze	VII.3	203	harmonischer Oszillator	IV.8	84
Fluidität	IX.3	244	Hauptträgheitsachsen	VI.11	177
Flüssigkeiten	VII.1	192	Hebelgesetz	V.3	101
Foucaultsches Pendel	VI.14	188	Heißluftmotor	XIV.6	361
Fouriersches Gesetz	XIII.3	311	heliocentrisches Weltbild	V.4.1	107
Freier Fall	II.5	21	Helmholtz, H.v.	XIV	318

Höhenformel	IIX.6	219	kardanische Aufhängung	VI.9	165
Hook'sches Gesetz	IV.1	55	Kelvin	X.1	260
Horizontaler Wurf	II.5	26	Kepler'sche Gesetze	V.4	108
Hubarbeit	IV.1	53	Kinematik	II	5
hydraulische Presse	IIX.2	209	kinetische Energie	IV.3	56
hydrodynamischer Druck	IX.2	238	Kleinwinkelnäherung	IV.8	82
Hydrostatik	IX.	232	Kohäsionskräfte	XII.1	294
hydrostatischer Druck	IX.2	238	Kompressibilität	VII.3	202
hydrostatisches Paradox	IIX.3	211	Kompression	VII.3	201
I			Kompressionsmodul	VII.3	202
ideales Gas	IIX.5	217	Kondensationsverzug	XII.1	298
Idealgasgesetz	XI.1	272	Kondensieren	X.3	263
Impuls	IV.5	60	konservative Kraft	IV.I.4	55
Impulsachse	VI.12	179	Kontinuitätsgleichung	IX.1	234
Impulserhaltung	IV.5	61	Konvektion	XIII	306
Impulsstromdichte	XIII.4	312	Koordinaten	IV.8	81
inelastische Verformung	VII.3	203	Koordinatendarstellung	V.1	91
Inertialsystem	II.6	30	Kraft	III.1	34
Inkompressibilität	IIX.1	207	Kräftepaar	VI.2	146
Innere Energie	XIV.1	322	Kraftstoß	IV.6	65
Integration von Vektoren	II.1	10	Kraftwärmemaschine	XIV.6	357
Interferometer	V.5	122	Kreisbewegung	V	91
Inversionstemperatur	XIV.4	346	Kreisbogen	IV.8	82
irreversible Prozesse	XIV.5	349	Kreisel	VI.9	165
Isobare	XI.1	273	Kreiselkompass	VI.9	165
Isochore	XI.1	274	Kreisfrequenz	IV.8	77
Isotherme	XI.1	273	Kreisprozess	XIV.1	324
J			Kreuzprodukt	II.1.3	9
Jojo	VI.6	159	Kriechfall	IX.5	253
Jollysche Federwaage	IIX.4	214	kristalline Festkörper	VII.1	192
Joule	IV.1	50	kritische Temperatur	X.3	265
Joule, J.P.	XIV	318	Kugelkreisel	VI.9	169
Joule-Thomson-Effekt	XIV.4	340	Kühlschrank	XIV.6	359
K			L		
Kalorimeter	X.2	262	Längenausdehnung	X.1	259
kalorische Zustandsgl.	XIV.3	330	Leistung	IV.4	60
Kapillargesetz	IIX.8	228	Leistungszahl	XIV.6	359
Kappillarität	IIX.8	227	Loschmidtsche Zahl	XIII.1	308

M				Pendel	IV.8	80
Magdeburger Halbkugeln	IIX.5	218		Periode	IV.8	77
Maßeinheit	I.1	2		Periphel	V.4	108
Massepunkt	II	5		perpetuum mobile 1.Art	XIV.1	325
Maßzahl	I.1	2		perpetuum mobile 2.Art	XIV.6	360
mathematisches Pendel	IV.8	80		Phase	IV.8	85
Maxwellsche Scheibe	VI.6	159		Phasenverschiebung	IV.8	85
Mayer, J.R.	XIV	318		physikalische Größe	I.1	2
mechan. Wärmeäquivalent	XIV.1	320		Pilot Rohr	IX.2	241
Meter	I.1	4		Planetenbewegung	V.4	106
mittlere Geschwindigkeit	II.3	13		plastische Verformung	VII.3	203
mol	XI.1	269		Poise	IX.3	244
molare Wärmekapazität	XIV.3	331		Poissonsche Zahl	VII.3	200
molares Normvolumen	XI.1	271		Polarkoordinaten	V.1	91
Molekularbewegung	XI.4	289		potentielle Energie	IV.2	56
Molmasse	XI.1	270		Prandlt'sches Staurohr	IX.2	241
Molwärme	XI.1	270		Präzession	VI.9	168
momentane Drehachse	VI.2	145		Präzessionsfrequenz	VI.9	168
Momentangeschwindigkeit	II.3	14		Primärenergie	XIV.9	390
N				Proportionalitätsgrenze	VII.3	203
Nabla	V.6	128		ptolomäisches Weltbild	V.4.1	106
Nahordnung	VII.1	192		Pulsare	VI	134
Newton	III.4	40		Q		
Newton-Reibung	VII.2,	193		quasistationär	IV.1	52
Newtonsche Axiome	III.1	33		Querkontraktion	VII.3	200
Nichtlineare Bewegung	II.5.3	26		R		
Normalkraft	VII.2	194		Radialkomponente	V.1	95
Nutation	VI.11	177		radiant	IV.8	82
Nutationskegel	VI.12	180		Rakete	IV.7	72
Nutzenergie	XIV.9	391		Rastpolkegel	VI.12	180
O				reale Flüssigkeiten	IX.3	243
Oberflächenenergie	IIX.7	222		reale Gase	XII	293
Oberflächenspannung	IIX.7	221		reale Körper	VII	190
Ortsvektor	II.2	11		rechtwinklige Koordin.	V.1.1	91
Ort-Zeit-Diagramm	II.3	12		Reibung	VII.2	193
P				Relativbewegung	II.6	28
Partialdruck	XII.3	303		relative Molekülmasse	XI.1	270
partielle Ableitung	V.6	128		reversible Prozesse	XIV.5	349

Reynold'sche Zahl	IX.4	249	stationäre Strömung	IX.1	232
Ringintegral	IV.I	55	statistische Mechanik	X	255
Rollreibung	VII.2	197	Staudruck	IX.2	238
Rollreibungskoeffizient	VII.2	196	Streckgrenze	VII.3	203
Rotation	VI	133	Stefan-Boltzmann-Gesetz	XIII.5	313
Rotationsenergie	VI.3	150	Steinerscher Satz	VI.7	161
S			Stern, Otto	XI.3	282
Scheinkraft	III.7	47	Stirling-Prozess	XIV.6	362
Scherspannung	VII.4	204	Stokes-Reibung	VII.2	193
schiefe Ebene	II.5	25	Stoßgesetze	IV.6	61
schiefen Stoß	IV.6	70	Stoßparameter	IV.6	/0
Schmelzen	X.3	263	Strahlung	XIII	306
Schmelzkurve	XII.2	301	Strombahnen	IX.1	233
Schub	VII.4	204	Stromlinien	IX.1	233
Schubkraft	IV.7	74	Strömung	XIII	306
Schubmodul	VII.4	205	Strömungsgeschwindigkeit	IX.3	247
Schubspannung	VII.4	204	Strömungswiderstand	IX.4	249
Schweben	II.4	215	Sublimation	X.3	264
Schwere Masse	III.2	35	T		
Schweredruck	II.3	210	Teilchenstromdichte	XIII.2	309
Schwerpunkt	VI.1	141	Teilchenzahldichte	XI.4	286
Schwerpunktsatz	VI.1	143	Temperatur	X.1	257
Schwimmen	XII.4	216	Thompson, B.	XIV	318
Schwingung	IV.8	74	Torsion	VII.4	204
Schwingungsamplitude	IV.8	78	Torsionsmodul	VII.4	205
Schwingungsdauer	IV.8	77	totales Differential	XIV.4	345
Schwingungsfrequenz	IV.8	78	Träge Masse	III.3	37
Schwingungsgleichung	IV.8	76	Trägheitsgesetz	III.1	33
Seitenhalbierende	VI.1	141	Trägheitskraft	III.7	46
Sekundärenergie	XIV.9	391	Trägheitsmoment	VI.3	149
Siedeverzug	XII.1	298	Trajektorie	II.2	12
Sinken	II.4	215	Translation	VI	133
Skalar	II.1	6	Translationsenergie	VI.3	150
Skalarprodukt	II.1.3	9	Tripelpunkt	X.3	264
Spannarbeit	IV.1	55	turbulente Strömungen	IX.4	249
Spannung	VII.3	199	U		
spezifische Wärme	X.2	262	Überdruck	II.7	224
spezifische Wärme	XIV.3	329	Überkopf-Kreisel	VI.9	165
starrer Körper	VI	133	unelastischer Stoß	IV.6	66

ungedämpfte Schwingung	IX.5	250
V		
Van der Waals-Gleichung	XII.1	293
Vektor	II.1	6
Vektordifferentiation	II.1	10
Vektorprodukt	II.1.3	9, 140
Venturi-Düse	IX.2	240
Verdampfen	X.3	263
Verfestigung	VII.3	203
verlängerter Kreisel	VI.12	180
Verschiebung	II.1	6
viskose Reibung	VII.2	193
Viskosität	IX.3	243
vollständiges Differential	XIV.4	345
Vollzylinder	VI.6	157
W		
Wärmekapazität	X.2	262
Wärmekraftmaschine	XIV.6	350
Wärmeleitfähigkeit	XIII.3	311
Wärmeleitung	XIII	306
Wärmemenge	X	256
Wärmepumpe	XIV.6	358
Wärmeschaubild	XIV.8	382
Wärmestoff	XIV	318
Wärmestrom	XIII.3	311
Wärmestromdichte	XIII.3	311
Wasserstrahlpumpe	IX.2	242
Wasserteufel	II.4	215
Watt	IV.4	60
Weglänge	XIII.1	306
Widerstandsbeiwert	IX.4	249
Wiensches Gesetz	XIII.5	313
Winkelbeschleunigung	V.1	96
Winkelgeschwindigkeit	V.1	92
Wirkungsgrad	XIV.6	355
Wirkungsquerschnitt	XIII.1	307
Wurfparabel	II.5	28

Z		
zeitlicher Mittelwert	IV.8	89
zentraler Stoß	IV.6	62
Zentralkraft	V.4	109
Zentrifugalkraft	V.2	97
Zentripetalkraft	V.2	97
Zerreiβfestigkeit	VII.3	204
Zerreiβspannung	VII.3	203
Zerstäuber	IX.2	242
Zugfestigkeit	VII.3	204
Zustandsänderung	XIV.5	351
Zustandsparameter	X	255
Zwangskraft	III.7	48

Abbildungsnachweis

II. Kapitel: Kinematik

Abbildung II.1	Galileo Galilei	Hammer S. 23
Abbildung II.2	Einheitsvektoren	Brandt, Dahmen S.18
Abbildung II.3	komponentenweise Addition von Vektoren	ebd. S.22
Abbildung II.4	Kreuzprodukt	Flügge o.A.
Abbildung II.5	Bahnkurve	Brandt, Dahmen S.27
Abbildung II.6	Ort-Zeit-Diagramm	Flügge S.8
Abbildung II.7	Momentangeschwindigkeit als Tangente ...	ebd.
Abbildung II.8	Freier Fall	Vieweg Physik S.29
Abbildung II.9	schiefe Ebene	Flügge S.14
Abbildung II.10	Stroboskopische Aufnahme zweier Kugeln ...	Dorn, Bader S.69
Abbildung II.11	Kreisbewegung in einem ruhenden System	ebd. S. 29
Abbildung II.12	Kreisbewegung von einem...	Dorn, Bader S. 29
Abbildung II.13	Inertialsysteme	Hammer S.72
Abbildung II.14	Versuchsskizze zum Abschlußversuch	Flügge S.16

III. Kapitel: Dynamik

Abbildung III.1	Federwaage	ebd. S. 19
Abbildung III.2	Kordel reißt	Flügge o.A.
Abbildung III.3	Nachweis des 2.NG	Brandt, Dahmen S.66
Abbildung III.4	Versuchsprinzip der Eötvös'schen Drehwaage	Flügge. S.25
Abbildung III.5	Massenabweichung bei verschiedenen Materialien	ebd. S.26
Abbildung III.6	Actio = Reactio	Hammer S.39
Abbildung III.7	Nachweis für beliebige Körper	ebd.
Abbildung III.8	Kräftegleichgewicht bei der schiefen Ebene	ebd. S.29

VI. Kapitel: Erhaltungsgrößen

Abbildung VI.1	Verformung bei einem springenden Ball	Recknagel S.124
Abbildung IV.2	Zum Begriff der Arbeit	Flügge S. 30
Abbildung IV.3	Kraft-Weg-Diagramm für konstante Kraft F_s ...	Hammer S.46
Abbildung IV.4	Kraft-Weg-Diagramm für variable Kraft F_s ...	ebd. S.46
Abbildung IV.5	Wegintegral der Arbeit	Flügge S.31
Abbildung IV.6	Hubarbeit bei beliebigem Hubweg	Hammer S.48
Abbildung IV.6b	Hubarbeit bei beliebigem Hubweg	Flügge S.32
Abbildung IV.7	geometrische Betrachtung zur Hubarbeit	ebd.
Abbildung IV.8	Dieses Kraftwerk ...	Flügge o.A.
Abbildung IV.9	Energieerhaltung	Flügge S.35
Abbildung IV.10	elastischer Stoß auf der Luftkissenbahn	ebd. S.37
Abbildung IV.11	Kraftstoß	ebd. S.39
Abbildung IV.12	Schiefer Stoß	ebd. S.42
Abbildung IV.13	Schematischer Versuchsaufbau	ebd.
Abbildung IV.14	Stoßparameter	nach Recknagel S.142
Abbildung IV.15	Thaleskreis	Flügge S.42
Abbildung IV.16	unelastischer Stoß	ebd. S.43
Abbildung IV.17	Federschwingung	ebd. S.44
Abbildung IV.18	Schwingung	ebd. S.46
Abbildung IV.19	Versuchsaufbau zur Federschwingung	ebd.
Abbildung IV.20a	Versuchsaufbau zum Nachweis ...	ebd.
Abbildung IV.20b	Versuchsaufbau zum Nachweis...	ebd.
Abbildung IV.21	mathematisches Pendel	ebd. S.47

Abbildung IV.22	Energie und Auslenkung...	ebd. S.50
Abbildung IV.23	Gesamtenergie	ebd. S.51

V. Kapitel: Drehbewegungen

Abbildung V.1	Rechtwinklige Koordinaten x, y	Flügge S.52
Abbildung V.2	Polarkoordinaten Koordinaten r, φ	ebd.
Abbildung V.3	Überlagerung von Pendel...	ebd. S.53
Abbildung V.4	geometrische Überlegung zu $\vec{v} \perp \vec{r}$	ebd.
Abbildung V.5	tangentieller Funkenflug an einem Schleifstein	Dorn, Bader S.118
Abbildung V.6	Richtungsbetrachtung bei Kreisbewegungen	Flügge S.55
Abbildung V.7	Versuchsaufbau des Versuchs V.4...	ebd.
Abbildung V.8	Fliehkraftregler	ebd. S.56
Abbildung V.9	Hebelgesetz	ebd.
Abbildung V.10	Drehmoment	ebd. S.57
Abbildung V.11	Drehimpuls	ebd.
Abbildung V.12	Zusammenfassende Darstellung...	ebd. S.60
Abbildung V.13	Rückläufige Bahn des Mars	ebd. S.61
Abbildung V.14	Aristotelischer Kosmos	ebd.
Abbildung V.15	Ptolemäische Vorstellung...	ebd.
Abbildung V.16	Heliozentrischer Kosmos	ebd.
Abbildung V.17	2.KG: Flächensatz	Brandt, Dahmen S.119
Abbildung V.18	Planeten liegen auf einer Graden...	Flügge S.62
Abbildung V.19	Zentralkraft	ebd. S.63
Abbildung V.20	Geometrische Betrachtung zum 2.KG	ebd.
Abbildung V.21	Schema der Cavendish-Drehwaage	ebd. S.65
Abbildung V.22	Aufsicht	ebd.
Abbildung V.23	Geometrische Betrachtungen	ebd. S.65a
Abbildung V.24	Im Film gezeigte Drehwaage von Leybold	Dorn, Bader S.143
Abbildung V.25	Mond und Erde dürfen nicht ...	Flügge o.A.
Abbildung V.26	Mond-Erde-System und dessen Schwerpunkt	Flügge o.A.
Abbildung V.27	Kräfte, die auf Wasserteilchen wirken	Flügge o.A.
Abbildung V.28	mögliche Quellen von Gravitationswellen	nach Flügge S.67
Abbildung V.29	Raumverformungen zum Nachweis...	ebd.
Abbildung V.30	Interferenzexperimente	ebd.
Abbildung V.31	Kompensationskraft	nach Flügge S.69
Abbildung V.32	äußere Kraft gegen das Gravitationsfeld	ebd. S.68
Abbildung V.33	Geometrische Überlegungen	ebd.
Abbildung V.34	Raketenbahnen	Hammer S.69
Abbildung V.35	Höhenlinien als Äquipotentiallinien	Flügge S.72
Abbildung V.36	Gravitationsfeldlinien ...	ebd. S.73
Abbildung V.37	Feldstärke einer Vollkugel	ebd.
Abbildung V.38	Die Astronauten...	Flügge o.A.

VI. Kapitel: Drehbewegung starrer Körper

Abbildung VI.1	Rotation und Translation bei Tauben	Gerthsen S.66
Abbildung VI.2	Erste Meßprotokolle von Radiosignalen der Pulsare	SA 219, 1968
Abbildung VI.3	Betrachtung der Winkelgeschwindigkeit	Flügge S.79
Abbildung VI.4	Versuch VI.1	ebd. S.76
Abbildung VI.5	Der Zusammenhang der Drehrichtung...	ebd.
Abbildung VI.6	Nicht-Kommutativität bei Raumdrehungen	nach Flügge S.77
Abbildung VI.7	Ermittlung des Schwerpunktes	Flügge o.A.
Abbildung VI.8	Schwerpunkt eines Zweikörpersystems	Flügge o.A.
Abbildung VI.9	Schwerpunkt eines Hantelmodells	Flügge S.82

Abbildung VI.10	Versuch VI.3 Fadenrolle	ebd. S.83
Abbildung VI.11	Ein auf dem Rad markierter Punkt...	ebd. S.85
Abbildung VI.12	Zylinder rollt eine schiefe Ebene hinab	ebd.
Abbildung VI.13	Kräftepaar bei rollendem Zylinder	ebd. S.86
Abbildung VI.14	geometrische Betrachtung	ebd.
Abbildung VI.15	Massepunkte eines starren Körpers	ebd. S.87
Abbildung VI.16	Schemazeichnung Versuch VI.5	Hammer S.89
Abbildung VI.17	Pirouette	ebd.
Abbildung VI.18	Turmspringer	Flügge S.102
Abbildung VI.19	Massepunkt m, der bei einer Kreisbewegung ...	ebd. S.103
Abbildung VI.20	Leistung eines Motors	Recknagel S.183
Abbildung VI.21	Symmetriebetrachtung bei einem Zylinder	Flügge o.A.
Abbildung VI.22	Maxwellsche Scheibe	Flügge S.91
Abbildung VI.23	Zum Steinerschen Satz	ebd. S.89
Abbildung VI.24	Kreisel im Schwerpunkt unterstützt	Hammer S.94
Abbildung VI.25	Prinzip des Kreiselkompass	ebd.
Abbildung VI.26	Kardanisch aufgehängter Kreisel	Dorn, Bader
S.174		
Abbildung VI.27	Teilchen auf Kreisbahn...	Flügge o.A.
Abbildung VI.28	Drehimpuls bezogen auf ...	ebd.
Abbildung VI.29	zeigt einen Kreisel, der sich mit ω ...	Flügge S.94
Abbildung VI.30	Versuch VI.14 Präzession einer Fahrradfelge	ebd. S.96
Abbildung VI.31a)	Teilchen auf Kreisbahn	Flügge o.A.
Abbildung VI.31b)	Drehimpuls bezogen auf...	ebd.
Abbildung VI.32	Geometrische Betrachtung...	Flügge S.97
Abbildung VI.33	Rotationssymmetrisches Hantelmodell	ebd. S.98
Abbildung VI.34	Beispiel eines unsymmetrischen Drehkörpers...	ebd. S.99
Abbildung VI.35	rotierender zylindrischer Stab	ebd.
Abbildung VI.36	Drehbewegung eines ...Ringes	Hammer S.94
Abbildung VI.37	Drehbewegung einer ...Kette	ebd.
Abbildung VI.38	Drehbewegung eines ...Stabs	ebd.
Abbildung VI.39	Hauptträgheitsachsen eines Quaders	Recknagel S.206
Abbildung VI.40	Auf seiner Spitze gelagerter Kreisel ...	Gerthsen S.79
Abbildung VI.41	Winkelgeschwindigkeit des Kreisels	ebd.
Abbildung VI.42	Kardanisch aufgehängter Kreisel	Recknagel S.213
Abbildung VI.43	Ein kurzer Schlag verursacht...	Flügge S.106
Abbildung VI.44	Rastpol-, Nutations- und Gangpolkegel	Recknagel S.207
Abbildung VI.45	Verlängerter und abgeplatteter Kreisel	ebd. S.185
Abbildung VI.46	Drehschwingung	ebd. S.193
Abbildung VI.47	Rotierendes Bezugssystem	Flügge o.A.
Abbildung VI.48	Versuch zur Erläuterung der Corioliskraft	Flügge S.110
Abbildung VI.49	Geometrische Überlegung zum Versuch	ebd. S.111
Abbildung VI.50	Ablenkung von Winden	Tipler S.118
Abbildung VI.51	Zerlegung der Winkelgeschwindigkeit der Erde	Flügge S.113
Abbildung VI.52	Modellversuch zur Drehung...	ebd. S.114
Abbildung VI.53	Drehung der Pendelebene	ebd.

VII. Kapitel: Mechanische Eigenschaften fester Körper

Abbildung VII.1	Schematisches atomares Modell	Flügge S.116a
Abbildung VII.2	Quantitativer Verlauf der Kräfte ...	ebd.
Abbildung VII.3	Federdarstellung eines Festkörpers	ebd. S.116b
Abbildung VII.4a)	Zweidimensionales Schemata...	ebd.
Abbildung VII.4b)	Zweidimensionales Schemata ...	ebd.
Abbildung VII.4c)	Zweidimensionales Schemata...	ebd.

Abbildung VII.5	Die Reibungskraft greift nicht im Schwerpunkt an	ebd. S.116c
Abbildung VII.6	Reibungskraft in Abhängigkeit...	ebd. S.116d
Abbildung VII.7	Versuchsordnung für Versuch VII.3	ebd. S.116e
Abbildung VII.8	Dehnung	ebd. S.116f
Abbildung VII.9	Querkontraktion	Recknagel S.253
Abbildung VII.10	Kompression	Flügge S.116g
Abbildung VII.11	Spannungs-Dehnungsdiagramm eines Metalls	ebd.
Abbildung VII.12	elastische Hysterese	ebd. S.116h
Abbildung VII.13	Scherung	ebd. S.118

IX. Kapitel: Ruhende Flüssigkeiten und Gase

Abbildung IIX.1	Modell der Moleküle in einer Flüssigkeit	Flügge S.119
Abbildung IIX.2	Schematische Darstellung...	Recknagel S.271
Abbildung IIX.3	Hydraulische Presse	Flügge S.120
Abbildung IIX.4	Infinitesimale Scheibe einer Flüssigkeit ...	ebd. S.121
Abbildung IIX.5	Hydrostatisches Paradox	Recknagel S.273
Abbildung IIX.6	Kommunizierende Röhren	Flügge S.122
Abbildung IIX.7	Weinheber - der Flüssigkeitsspiegel gleicht sich aus	ebd.
Abbildung IIX.8	Welche Kräfte wirken auf einen tauchenden Körper ?	ebd.
Abbildung IIX.9	Jollysche Federwaage	Recknagel S.280
Abbildung IIX.10	Wasserteufelchen	Flügge S.124
Abbildung IIX.11	auf einen schwimmenden Körper...	ebd.
Abbildung IIX.12	a) Stabile Schwimmelage b)...c)...	ebd.
Abbildung IIX.13	Modellversuch zum Gasdruck	ebd. S.125
Abbildung IIX.14	Statistische Schwankungen der Verteilung...	Recknagel S.286
Abbildung IIX.15	geometrische Betrachtung...	Flügge S.127
Abbildung IIX.16	Verlauf des Schweredruckes...	ebd. S.128
Abbildung IIX.17	Flüssigkeitsmoleküle im Innern...	ebd.
Abbildung IIX.18	geschlossene Seifenlamelle in einem Drahttring...	ebd. S.129
Abbildung IIX.19	Um die Oberfläche zu minimieren...	ebd.
Abbildung IIX.20	Drahtbügel mit Flüssigkeitshaut	ebd.
Abbildung IIX.21	die große Blase saugt die kleine auf	ebd. S.130
Abbildung IIX.22	Vergrößerung der Blase um dr	ebd.
Abbildung IIX.23	Oberflächenspannung, die auf eine Oberfläche...	ebd. S.131
Abbildung IIX.24a	$\sigma_{12} < \sigma_{13}$, $\varphi < 90^0$, benetzend	ebd.
Abbildung IIX.24b	$\sigma_{12} > \sigma_{13}$, $\varphi > 90^0$, nicht benetzend	ebd.
Abbildung IIX.25	Kapillarität	ebd. S.132
Abbildung IIX.26	Kapillardepression	ebd. S.133
Abbildung IIX.27	Die Steighöhe in Kapillaren ist umgekehrt...	ebd.
Abbildung IIX.28a	Wasser im Keilglas	ebd.
Abbildung IIX.28b	Quecksilber im Keilglas	ebd.

IX. Kapitel: Strömende Flüssigkeiten und Gase

Abbildung IX.1	Im Alltag begegnet man oft...	Gerthsen S.98
Abbildung IX.2	Stromröhre	Flügge S.134
Abbildung IX.3	Strombahnen bei einer laminaren Strömung	ebd.
Abbildung IX.4	laminare Strömung durch ein Rohr...	ebd.
Abbildung IX.5	laminare Strömung durch ein ansteigendes Rohr...	ebd. S.135
Abbildung IX.6a	Je weiter die Röhren in Strömungsrichtung	Gerthsen S.109
Abbildung IX.6b	Druckverteilung in einem durchströmten Rohr	ebd.
Abbildung IX.7 a-d	Druckmesssonden	Flügge S.137
Abbildung IX.8	Zerstäuber als ein Anwendungsbeispiel	ebd. S.138

Abbildung IX.9	Wasserstrahlpumpe	ebd.
Abbildung IX.10	Ein leichter Ball kann in einem Luftstrom schweben.	ebd.
Abbildung IX.11	Die Flüssigkeitsschichten gleiten mit Reibung...	Recknagel S.311
Abbildung IX.12	zylindrisches Flüssigkeitselement...	Flügge S.139
Abbildung IX.13	parabolische Geschwindigkeitsverteilung	Gerthsen S.102
Abbildung IX.14	Reibung einer Kugel...	Flügge S.140
Abbildung IX.15	turbulente Strömung hinter einem Hindernis	ebd. S.141
Abbildung IX.16	Schwingfall: die Einhüllende der maximalen...	ebd. S.144
Abbildung IX.17	Kriechfall, die Abklingzeit...	ebd.
Abbildung IX.18	aperiodischer Grenzfall mit minimaler...	ebd.

Kapitel X: Grundlagen der Wärmelehre

Abbildung X.1	Fixpunkte der Celsius-Skala	Vogel S.194
Abbildung X.2	Volumenausdehnungskoeffizienten verschiedener...	Flügge S.146
Abbildung X.3	Die Messung von $V(t)$ wird nach $V = 0$ extrapoliert.	ebd. S.147
Abbildung X.4	Messung der spezifischen Wärmekapazität	ebd. S.149
Abbildung X.5	Q/T -Diagramm von H_2O	ebd. S.150
Abbildung X.6	Zustandsdiagramm von H_2O	ebd. S.151
Abbildung X.7	Zustandsdiagramm von CO_2	ebd.

Kapitel XI: Kinetische Gastheorie

Abbildung XI.1	schematischer Versuchsaufbau zum...	ebd. S.152
Abbildung XI.2	Misst man das molare Volumen...	ebd. S.153
Abbildung XI.3	Isotherme	Hammer S.181
Abbildung XI.4	Isobare	ebd.
Abbildung XI.5	Isochore	ebd.
Abbildung XI.6	Quaderförmiges Gasvolumen	ebd. S.275
Abbildung XI.7	In diesem Quader bewegen sich die Moleküle...	Vogel S.200
Abbildung XI.8	Stoßvorgang eines Moleküls	flügge S.155
Abbildung XI.9	Flugbahn eines Moleküls	ebd.
Abbildung XI.10	Freiheitsgrade	ebd. S.156
Abbildung XI.11	Schematischer Aufbau des Versuchs von Stern	ebd. S.157
Abbildung XI.12	Geschwindigkeitsverteilung der Moleküle	ebd.
Abbildung XI.13	Geschwindigkeitsverteilung...	ebd. S.158
Abbildung XI.14	Geschwindigkeitsverteilung...	ebd.
Abbildung XI.15	Geschwindigkeitsraum	ebd. S.159
Abbildung XI.16	schematische Darstellung des Versuchs...	ebd. S.160
Abbildung XI.17	Geschwindigkeitsverteilung $n(v)$	ebd. S.161

Kapitel XII: Reale Gase

Abbildung XII.1	nicht für Bewegung zur Verfügung...	ebd.S.163
Abbildung XII.2	Potentialbild eines Moleküls	ebd. S.162
Abbildung XII.3	Isothermen für CO_2	ebd. S.164
Abbildung XII.4	schematischer Verlauf einer Isotherme	Hammer S.194
Abbildung XII.5	In einem Versuch gemessene Isothermen	Flügge o.A.
Abbildung XII.6	Übertrag der gemessenen Isothermen	ebd. S.164
Abbildung XII.7	schematischer Versuchsaufbau zum Nachweis...	ebd. S.166
Abbildung XII.8	Die Schmelztemperatur von Eis...	Flügge o.A.
Abbildung XII.9	Tauchvogelanbeter	ebd.
Abbildung XII.10	Nachweis des Daltonschen Gesetzes	Flügge S.167

Kapitel XIII: Transportphänomene

Abbildung XIII.1	Wirkungsquerschnitt eines Moleküls...	ebd. S.169
Abbildung XIII.2	Der Wirkungsquerschnitt...	ebd.
Abbildung XIII.3	Diffusion	ebd. S.170
Abbildung XIII.4	Temperaturdifferenzen führen zu Wärmeleitung	ebd. S.171
Abbildung XIII.5	Impulse der bewegten Teilchen	ebd.

Kapitel XIV: Hauptsätze der Wärmelehre

Abbildung XIV.1	Schematischer Versuchsaufbau...	FlüggeT S.2
Abbildung XIV.2	Kreisprozess im p/V-Diagramm	
Abbildung XIV.3	schematischer Aufbau des Versuchs...	FlüggeT S.4
Abbildung XIV.4	Experimenteller Aufbau des Versuchs...	ebd.
Abbildung XIV.5	Kompression eines Gases um $\Delta V = A(x_2 - x_1)$	ebd. S.5
Abbildung XIV.6	Arbeit als Fläche im p/V-Diagramm	
Abbildung XIV.7	Gedankenexperiment zur Herleitung der...	
Abbildung XIV.8	Versuch nach Pohl zur Bestimmung der Molwärme	FlüggeT S.9
Abbildung XIV.9	Temperaturabhängigkeit...	ebd.
Abbildung XIV.10	schematischer Aufbau des Gedankenexperimentes	ebd. S.11
Abbildung XIV.11	Das Gas ist vollständig...	ebd.
Abbildung XIV.12	Luftverflüssigung nach Linde	ebd. S.13
Abbildung XIV.13	Isotherme im p/V-Diagramm	ebd. S.14
Abbildung XIV.14	Isotherme Expansion...	ebd.
Abbildung XIV.15	Adiabaten und Isothermen	ebd.
Abbildung XIV.16	Adiabatische Zustandsänderung	ebd.
Abbildung XIV.17	vier Schritte des Carnot-Prozesses...	Hammer S.187
Abbildung XIV.18	Die vier Schritte des Carnot-Prozesses...	Hammer S.186
Abbildung XIV.19	Schematische Darstellung des Carnot-Prozesses	
Abbildung XIV.20	Wärmekraft- und Kraftwärmemaschine	Gerthsen S.210
Abbildung XIV.21	Wärmepumpe	
Abbildung XIV.22	Alle reversiblen Kreisprozesse haben ...	Gerthsen S.231
Abbildung XIV.23	p/V-Diagramm des Stirling-Prozesses	FlüggeT S.20
Abbildung XIV.24	Vier Schritte des Stirling-Prozesses	ebd.
Abbildung XIV.25	Zerlegung eines beliebigen Kreisprozesses...	FlüggeT S.25
Abbildung XIV.26	Prozeßweg eines beliebigen Kreisprozesses	ebd.
Abbildung XIV.27	Kreisprozess mit reversiblen und irreversiblen Weg	
Abbildung XIV.28	isotherme Prozesse	FlüggeT S.29
Abbildung XIV.29	Arbeitsdiagramme von Wärmekraftmaschinen	Gerthsen S.211
Abbildung XIV.30	Arbeitsdiagramme im T/S-Diagramm	ebd.