

VII. Mechanische Eigenschaften fester Körper

Bisher haben wir die Idealisierung von Punktmassen oder starren Körpern betrachtet. Dabei mussten wir oft Annahmen machen, die in der Realität nicht erfüllt sind. Bei der Energieerhaltung beispielsweise haben wir in der Rechnung stets die Reibung vernachlässigt. Dass die Reibung nicht wirklich zu vernachlässigen ist, zeigten die Abweichungen der Versuchsergebnisse von den errechneten Werten. Punktmassen stellen also eine Idealisierung dar, die sich experimentell nie ganz verwirklichen lässt.

Starre Körper hatten wir beschreiben durch eine Bewegung des Schwerpunktes und Rotation um den Schwerpunkt

Diese Vorgehensweise liefert im Prinzip exakte Beschreibungen mit Hilfe des Grundgesetzes der Mechanik. Reale Körper sind jedoch zusammengesetzt aus sehr vielen Bausteinen ($\sim 10^{19} - 10^{24}$ Atome / Moleküle pro cm^3), zwischen denen sehr komplizierte Wechselwirkungen bestehen. Häufig sind Bewegungen dieser Körper nur noch mit Näherungen (Modellen) lösbar. Man stellt empirische Gesetze mit begrenztem Gültigkeitsbereich auf.

In diesem Kapitel wollen wir einige dieser empirischen Gesetze betrachten und ihre Gültigkeit experimentell überprüfen

VII.1 Aggregatzustände

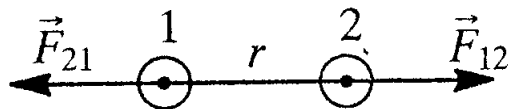


Abbildung VII.1: Schematisches atomares Modell

Um die Vorgänge in einem Körper betrachten zu können, betrachten wir zunächst die Kräfte zwischen zwei Atomen, die sich im Abstand r voneinander befinden. Aufgrund vor allem elektrischer Wechselwirkungen üben die beiden

Atome aufeinander eine Kraft

$$\vec{F} = \vec{F}_{12} (= -\vec{F}_{21}) \quad \text{aus.}$$

Diese Kräfte verursachen eine potentielle Energie

$$\vec{F}(r) = -\text{grad } W_p = -\frac{dW_p}{dr}$$

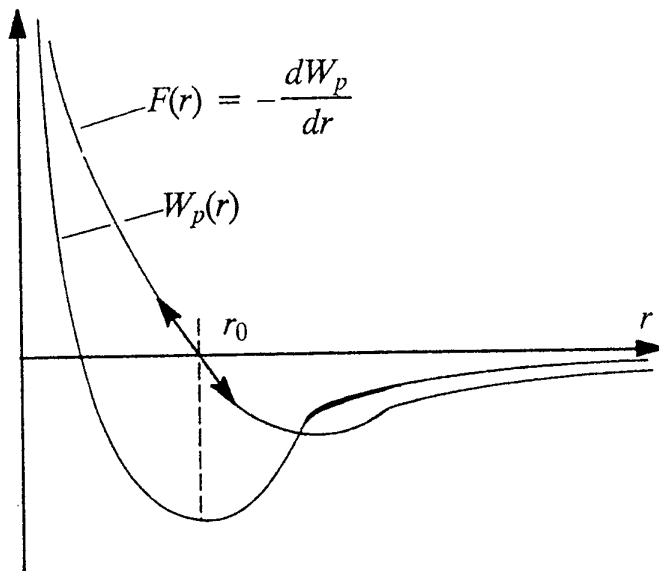


Abbildung VII.2: Quantitativer Verlauf der Kräfte zwischen zwei Atomen

Betrachten wir den Verlauf der wirkenden Kräfte und der potentiellen Energie in Abhängigkeit vom Abstand der Atome. Zunächst befinden die Atome sich in der Gleichgewichtslage. Es wirken also keine Kräfte, wenn der Abstand r_0 beträgt:

$$\vec{F}(r_0) = 0$$

Damit muss die potentielle Energie an dieser Stelle in Minimum haben

$$(F \sim \frac{dW}{dr}), \text{ also}$$

$$W_p(r_0) = \text{Minimum.}$$

Ist die Kraft zwischen den Atomen positiv, befinden sie sich also in einem näheren Abstand als der Gleichgewichtslage, dann muss gelten

$$\vec{F}(r) > 0 \quad \text{für } r < r_0$$

Die Atome stoßen sich ab. Gilt hingegen

$$\vec{F}(r) < 0 \quad \text{für } r > r_0$$

dann ziehen sie sich an. Nur die Lage in r_0 ist folglich stabil.

Für kleine Abweichungen von der Ruhelage r_0 gilt annähernd ein lineares Kraftgesetz.

$$F(r - r_0) = K (r - r_0)$$

Dieses Gesetz ist dem Gesetz für die Federschwingungen und damit dem des harmonischen Oszillators sehr ähnlich. In der Tat wird ein Festkörper im Modell dargestellt als Anordnung von Punktmassen, die durch Federn verbunden sind.

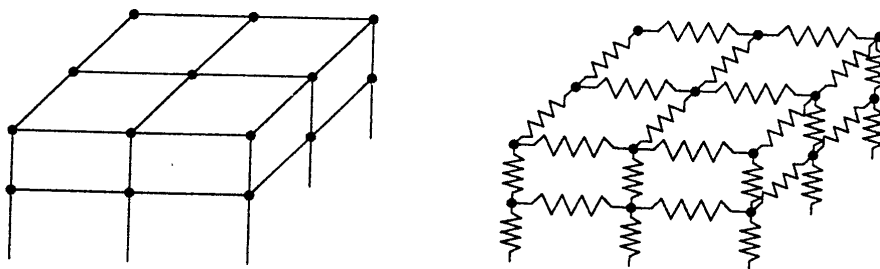


Abbildung VII.3: Federdarstellung eines Festkörpers

Die Atome führen kleine, harmonische Schwingungen um Gleichgewichtslage aus, solange man kleine Auslenkungen voraussetzt.

Bei Festkörpern unterscheidet man zwei verschiedene Arten:

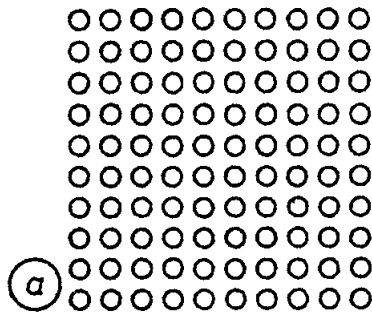


Abbildung VII.4a):
Zweidimensionales Schemata der Ordnungszustände der molekularen Bausteine: Fernordnung in einem Festkörper

a) Festkörper mit makroskopisch regelmäßigen Strukturen.

Sie werden kristalline Festkörper genannt, es besteht eine Fernordnung in diesen Kristallen. Bsp: Metalle

a') Festkörper mit makroskopisch unregelmäßige Strukturen und nur lokalen Regelmäßigkeiten. Sie werden amorphe Festkörper genannt, es besteht keine Fernordnung in diesen Körpern. Bsp: Glas, Zement

Energiezufuhr geschieht in der Regel durch Wärmezufuhr, aber auch andere Energiezufuhren sind möglich, z.b. mit Lasern. Durch Energiezufuhr bei einem Kristall wird die Schwingungsamplitude größer, bis schließlich kristalline Fernordnung aufgehoben wird.

b) Steigt die Temperatur über die Schmelztemperatur, sinkt die Bindenenergie und wird im Mittel so groß wie die kinetische Energie:

$$\langle W_p \rangle \approx \langle W_k \rangle.$$

Es entstehen Flüssigkeiten, deren Atome gegeneinander verschiebbar sind. Eine Nahordnung ist noch vorhanden und auch das Volumen ist konstant, aber der Körper hat keine feste Gestalt. Amorphe Festkörper sind also erstarrte Flüssigkeiten.

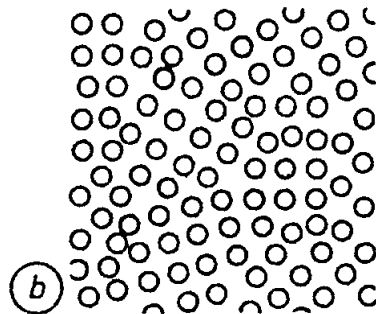


Abbildung VII.4b):
Zweidimensionales Schemata der Ordnungszustände der molekularen Bausteine: Nahordnung in einer Flüssigkeit

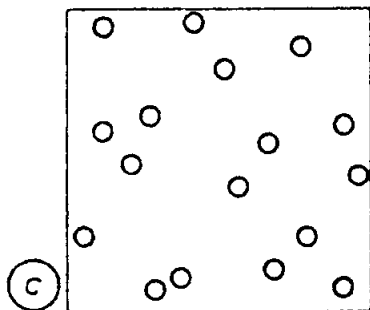


Abbildung VII.4c):
Zweidimensionales Schemata der Ordnungszustände der molekularen Bausteine: Unordnung in einem Gas

c) Durch weitere Wärmezufuhr werden die Bindungskräfte weitgehend aufgehoben. Die Temperatur erreicht die Siedetemperatur und die Bindeenergie und wird im Mittel sehr viel kleiner als die kinetische Energie: $\langle W_p \rangle \ll \langle W_k \rangle$. Es entsteht ein Gas, dessen Atome (Moleküle) ungeordnet aneinander stoßen. Ein Gas hat weder eine feste Gestalt noch ein festes Volumen. Es gibt weder Nah- noch Fernordnung

VII.2 Reibung

Die Existenz einer Reibungskraft haben wir bereits bei zahlreichen Versuchen gesehen und durch verschiedene Anordnungen, z.B. Luftkissen, versucht zu minimieren. Jetzt wollen wir versuchen zu klären, wie Reibung entsteht und wie sie wirkt.

Hierzu betrachten wir zwei beliebige Körper. Diese beiden Körper üben aufeinander Kräfte parallel zu ihrer Bewegungsrichtung aus, die sogenannte äußere Reibung. Sie wurde bisher in den Rechnungen vernachlässigt. Bereits aus dem Alltag ist bekannt, dass die Reibung abhängig ist von der Konstellation der Körper. Ein Motorradreifen auf einem Ölfilm beispielsweise verhält sich anders als auf der trockenen Straße. Entsprechend findet man empirisch verschiedene Reibungsgesetze:

Die **Coulomb-Reibung**, oder trockene Reibung, erfolgt, wenn ein Körper sich ohne Schmiermittel auf einer trockenen Unterlage bewegt. Dieser Fall ist der häufigste im Alltag und soll deshalb hier genauer behandelt werden.

Die **Stokes-Reibung**, oder viskose Reibung, erfährt ein nicht zu großer Körper, der sich mit mäßiger Geschwindigkeit in einem Fluid oder Gas bewegt. Diese Reibung werden wir später getrennt behandeln.

Die **Newton-Reibung** wirkt bei schneller Bewegung eines Körpers durch ein Fluid.

Versuch VII.1: Reibung eines Holzklotzes auf dem Tisch

Bei diesem Versuch soll gezeigt werden, dass Reibungskräfte existieren. Hierzu wird ein einfacher Holzklotz auf einen Tisch gelegt. Am Klotz ist ein Faden mit Federwaage befestigt. Nun wird am Faden so lange gezogen, bis der Klotz sich in Bewegung setzt. Bei einer beliebigen, nicht gemessenen Geschwindigkeit, soll nur noch so fest an dem Faden gezogen werden, dass der Klotz sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Obwohl die Geschwindigkeit konstant ist, zeigt die Federwaage einen Ausschlag an. Die Betrachtung dieses Vorgangs zeigt zwei wesentliche Ergebnisse:

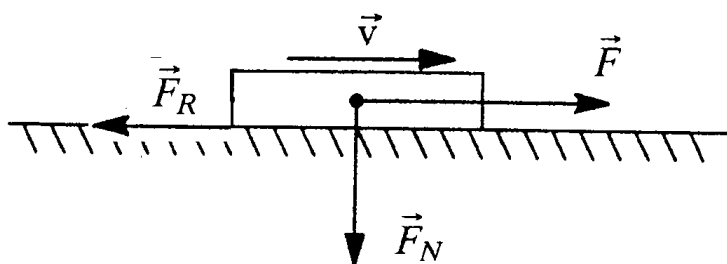


Abbildung VII.5: Die Reibungskraft greift nicht im Schwerpunkt an.

1) Der Holzklotz auf einer Ebene widersetzt sich der Beschleunigung durch eine Kraft \vec{F} so lange, bis diese Kraft größer wird, als die sich ihr widersetzende Reibungskraft. $\vec{F} > \vec{F}_R$ Gäbe es keine Reibungskraft, hätte der

Klotz sich aufgrund der resultierenden Kraft sofort in Bewegung setzen müssen. Die Existenz einer Reibungskraft, die der beschleunigenden Kraft entgegenwirkt, ist damit bewiesen

2) Auch bei konstanter Geschwindigkeit kann an der Federwaage eine Kraft abgelesen werden.

$\vec{F} \neq 0$. Da die Beschleunigung jedoch null ist, muss es im Newtonschen Sinn eine resultierende Kraft geben, für die gilt

$$m\vec{a} = 0$$

Gleichzeitig gilt auch

$$\vec{F}_R + \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_R + \vec{F} = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{F}_R = -\vec{F}$$

Bei konstanter Geschwindigkeit wirkt also der beschleunigenden Kraft eine gleich große Kraft entgegen, die Reibungskraft. Dabei greift die Reibungskraft nicht im Schwerpunkt des Körpers an, sondern an der Auflagefläche. Nach Definition VI.1 wirkt damit ein Kräftepaar. Je nach Krafteinwirkung kann die Reibungskraft also nicht nur zu einer Verzögerung der Bewegung führen, sondern den Körper zum Umkippen bringen.

Bei verschiedenen Versuchen findet man experimentell einige Bedingungen, die für die Coulomb-Reibungskraft gelten:

1) $F_R \sim F_N$: Die Reibungskraft ist bestimmt durch die Normalkraft, mit welcher der Körper auf die Unterlage drückt (Normalkraft \perp Auflage).

2) Die Reibungskraft F_R ist unabhängig von Auflagefläche A .

3) Die Reibungskraft F_R hängt nicht von der Geschwindigkeit ab, wenn die Geschwindigkeit ungleich null ist.

4) Die Reibungskraft F_R ist abhängig von der Oberflächenbeschaffenheit.

Bei anderen Reibungen weicht vor allem Punkt 3 von der Coulomb-Reibung ab. Im freien Fall beispielsweise fällt ein Körper nach anfänglich ungebremster Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit. Die Reibung zwischen geölten Flächen erfolgt nach einem $v^{1/2}$ -Gesetz.

Aus den Punkten 1) - 4) kann ein empirisches Reibungsgesetz aufgestellt werden.

Merke: Das **empirische Reibungsgesetz für die Coulomb-Reibung** lautet:

$$F_R = \mu F_N$$

Es ist jedoch nur in den aufgezeigten begrenzten Bereichen gültig.

Die wichtigste Frage, die sich bei diesem Versuch stellt, ist, warum die Coulomb-Reibung von der Geschwindigkeit unabhängig ist. Diese Frage wollen wir mit einer Plausibilitätserklärung beantworten:

Selbst polierte Oberflächen sind mikroskopisch sehr rau. Deshalb muss bei einer Verschiebung des Körpers um das Stück dx eine Anzahl mikroskopischer Unebenheiten überwunden werden, deren Anzahl proportional zum zurückgelegten Weg dx ist. Die zu dieser Verschiebung erforderliche Arbeit dW ist zu dx proportional und somit ebenfalls zur Anzahl dieser Vorsprünge. Der Proportionalitätsfaktor zwischen Arbeit und Weg ist die Reibung, sie ist also nicht abhängig von der Geschwindigkeit, mit der die Unebenheiten passiert wurden.

Die beiden Flächen berühren sich nur in wenigen Punkten, im Allgemeinen sogar nur in drei Punkten, denn eine Ebene ist bereits mit drei Punkten aufgespannt. Die Beziehungsfläche ist nur durch Verformung in diesen Punkten gegeben. Somit ist die Reibungskraft proportional zu F_N , und unabhängig von A .

Versuch VII.2: Haft- und Gleitreibung

Bei diesem Versuch verwenden wir wieder denselben Aufbau wie zuvor. Diesmal achten wir jedoch auf den genauen Ausschlag der Federwaage. Zunächst befindet sich der Klotz in Ruhe, der Faden sei gespannt aber es wirke noch keine Kraft. Jetzt wird langsam an dem Faden gezogen. Zunächst bleibt der Körper liegen, während wir die Kraft linear erhöhen. Plötzlich reicht die Kraft aus, die Haftreibung zu überwinden und

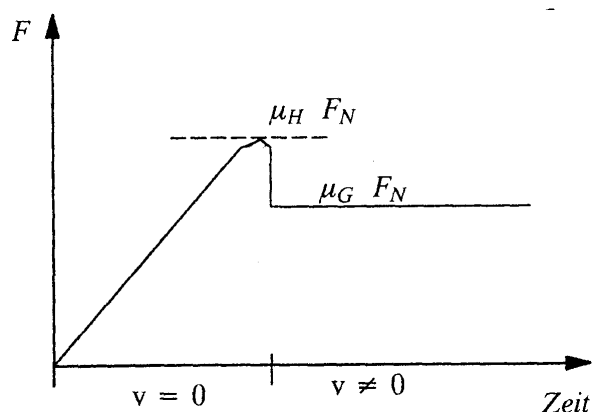


Abbildung VII.6: Reibungskraft in Abhängigkeit von Zeit und Geschwindigkeit

der Klotz bewegt sich. Gleichzeitig schnellte die Federwaage ein gutes Stück zurück und zeigt einen geringeren Ausschlag als kurz vor dem 'Anfahren'.

Dieser Versuch zeigt, dass es verschiedene Reibungskoeffizienten geben muss zwischen zwei Körpern, abhängig vom Bewegungszustand. In der Tat ist die Reibung, die zwischen ruhenden Körpern wirkt, die sogenannte **Haftreibung**, größer als die Reibung zwischen bewegten Körpern, die **Gleitreibung**.

Das oben aufgestellte Gesetz muss nun modifiziert werden je nach Bewegungszustand.

Merke: Das **empirische Reibungsgesetz für die Coulomb-Reibung** zwischen zwei ruhenden Körpern lautet: $F_R = \mu_H F_N$.

Das **empirische Reibungsgesetz für die Coulomb-Reibung** zwischen zwei bewegten Körpern lautet: $F_R = \mu_G F_N$.

Notation VI.1: Die Reibungskoeffizienten werden je nach Bewegungszustand mit einem Index versehen:

Haftreibungskoeffizient μ_H

Gleitreibungskoeffizient μ_G

Rollreibungskoeffizient μ_R .

Das in diesem Versuch ermittelte empirische Gesetz $\mu_H > \mu_G$ kann ebenfalls aus der Mikrostruktur der Oberflächen plausibel begründet werden:

Die Haftreibung ist größer als die Gleitreibung, weil ein ruhender Körper tiefer in die Vertiefungen der Unterlage einrasten kann als ein bewegter. Aus dieser Tatsache sieht man bereits, dass das Gesetz über die Unabhängigkeit von der Geschwindigkeit nur näherungsweise gelten kann. Bei sehr kleinen Geschwindigkeit muss der Körper erst aus den Vertiefungen in die 'Gleitstellung' gehoben werden, der Reibungskoeffizient nimmt also erst langsam den niedrigeren Gleitwert an.

In der folgenden Tabelle werden einige Wert für Haftreibungskoeffizient μ_H und Gleitreibungskoeffizient μ_G angegeben: Das Beispiel Aluminium zeigt, dass die oben erläuterten Gesetze nur begrenzte Gültigkeit haben und es durchaus Ausnahmen gibt.

Typische Werte	μ_H	μ_G	μ_R in cm
Stahl auf Holz	0,5	0,8 - 0,5	
Stahl auf Stahl	0,15	0,05 - 0,1	10^{-4}
Stahl auf Stahl mit Ölfilm	0,08	0,06	
Stahl auf Eis	0,027	0,014	
Alu auf Alu	1,1	1,8 - 1,0	
Autoreifen auf trockener Straße	1,2	1,05	0,7
Autoreifen auf nasser Straße	0,6	0,4	

Tabelle VII.1: Reibungskoeffizienten

Das Reibungsgesetz für Rollreibung soll hier nicht hergeleitet werden. Eine schöne Darstellung findet sich z.B. im Recknagel oder im Gerthsen, Vogel.

Merke: Für die **Rollreibung** gilt $F_R = \frac{\mu_R}{r} F_N$, mit r = Radius des Rades.

Betrachten wir abschließend noch die vektorielle Schreibweise für Gleitreibung. Die Reibungskraft zeigt in Richtung der Geschwindigkeit, deshalb wird die skalare Formel mit dem Einheitsvektor in Richtung der Geschwindigkeit multipliziert:

Merke: Die vektorielle Schreibweise für Gleitreibung lautet

$$\vec{F}_R = -\mu_G F_N \frac{\vec{v}}{v}$$

Die Reibungskraft ist ein Beispiel für eine nicht konservative Kraft. Nach Definition IV.3 muss für eine konservative Kraft gelten:

$$\oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = 0.$$

Für die Reibungskraft

$$\vec{F}_R = -\mu_G F_N \frac{\vec{v}_x}{v_x}$$

gilt jedoch

$$\int_{x_2}^{x_1} \vec{F}_R d\vec{x} = -\mu_G F_N (+1) (x_2 - x_1)$$

und

$$\int_{x_2}^{x_1} \vec{F}_R d\vec{x} = -\mu_G F_N (-1) (x_1 - x_2).$$

Damit folgt

$$\oint \vec{F}_R d\vec{x} = -2\mu_G F_N (x_2 - x_1) \neq 0$$

F_R ist somit nicht konservativ, da sich die Vorzeichen von v und damit von F_R mit einer Richtungsänderung umkehren.

Versuch VII.3: Kurvenfahrt im Auto

Bei der normalen Kurvenfahrt in einem Auto wird die Zentrifugalkraft F_z durch die Haftreibung der Reifen auf dem Asphalt $\mu_H F_N$ kompensiert. Bremsst man mit blockierenden Reifen, so geht die Haftreibung in Gleitreibung $\mu_G F_N$ über. Da $\mu_G F_N < \mu_H F_N$ ist, kann die Reibung die Zentrifugalkraft nicht mehr kompensieren.

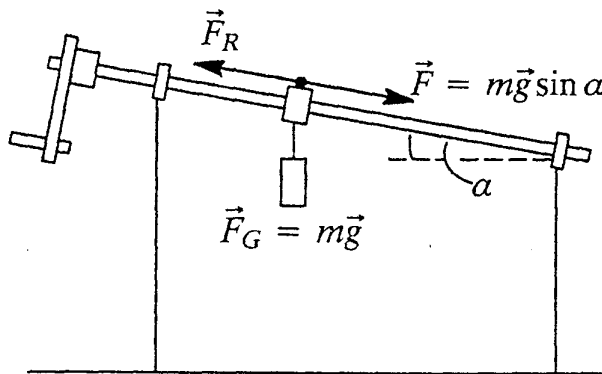


Abbildung VII.7: Versuchsanordnung für Versuch VII.3

Diese Situation wollen wir mit einem anderen Versuchsaufbau zeigen: Eine Masse M hängt an einem glatten Metallstab, der mit dem Boden einen Neigungswinkel α bildet. Der Winkel sei so gewählt, dass das Gewicht grade noch im Stillstand bleibt. Dann ist die Haftreibung größer als die Hangabtriebskraft

$\mu_H G \cos \alpha > Mg \sin \alpha$

$$\mu_H G \cos \alpha > Mg \sin \alpha$$

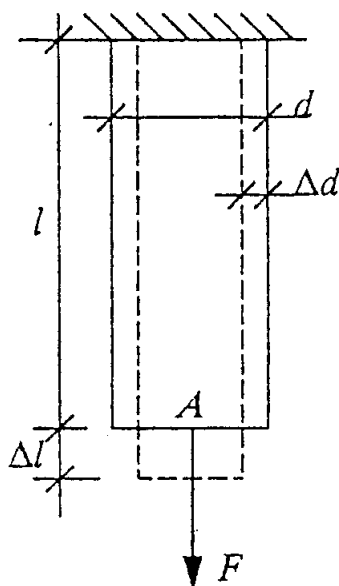
Wird der Stab nun um seine Längsachse gedreht, so beginnt die Masse zu gleiten. Das liegt darin begründet, dass die Haftreibung zu einer Gleitreibung mit geringerem Koeffizienten übergeht. Dann gilt

$$\mu_G G \cos \alpha < Mg \sin \alpha .$$

VII.3 Dehnung und Kompression fester Körper

Zunächst betrachten wir nur elastische Verformungen, d.h. Verformung, die wieder vollständig zurückgehen, wenn keine sie hervorrufende Kraft mehr wirkt. Als Beispiel einer solchen Verformung betrachten wir einen Versuch:

Versuch VII.4: Dehnung eines Stabes



Ein Stab der Länge l und der Querschnittsfläche A wird an einem Ende fest eingespannt, auf einer parallelen Skala wird seine Länge markiert. Dann wird mit einer Kraft am unteren Ende des Stabes gezogen. Die Längenänderung des Stabes wird ebenfalls an der Skala markiert. Nachdem die Kraft nicht mehr wirkt, zieht der Stab sich wieder auf seine ursprüngliche Länge zusammen.

Die markierte Differenz der Länge des Stabes Δl in belastetem und unbelastetem Zustand kann nun abgelesen werden. Führt man diesen Versuch für verschiedene Stäbe und verschiedene Kräfte durch, so findet man experimentell, dass $\Delta l \ll l$ ist. Das

Verhältnis zwischen der ursprünglichen Länge des Stabes und der Längenänderung durch eine

Abbildung VII.8: Dehnung

Krafteinwirkung nennt man seine Dehnung. Die Einheit der Dehnung ist 1:

$$\text{Einheitenbetrachtung: } [\varepsilon] = \frac{[\Delta l]}{[l]} = \frac{\text{m}}{\text{m}} = 1$$

Definition VII.1: Das Verhältnis zwischen der ursprünglichen Länge eines Körpers und der Längenänderung durch eine Krafteinwirkung nennt man Dehnung : $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$

Bei diesem Versuch stellt man ebenfalls fest, dass die Dehnung nicht nur abhängt von der Kraft, mit der gezogen wird, sondern auch von der Querschnittsfläche des Stabes. Man definiert deshalb eine weitere Größe aus einem wichtigen Verhältnis:

Definition VII.2: Das Verhältnis von aufgewendeter Kraft, mit der an einer Fläche A gezogen wird, und der Fläche selbst, nennt man Spannung: $\frac{F}{A} = \sigma$

$$\text{Einheitenbetrachtung: } [\sigma] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Das Verhältnis von Dehnung zu Spannung ist gegeben durch eine Proportionalität

$$\varepsilon \sim \sigma$$

Notation VII.2: Die Proportionalitätskonstante wird **Dehnungskoeffizient genannt und mit α abgekürzt.**

Damit folgt
$$\varepsilon = \alpha \sigma$$

Mit der Definition der Spannung und der Dehnung gilt

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha \frac{F}{A}$$

Statt des Dehnungskoeffizienten α benutzt man häufig das Elastizitätsmodul.

Notation VII.3: Den Umkehrwert des Dehnungskoeffizienten bezeichnet man mit E und nennt ihn **Elastizitätsmodul.**

Damit lautet das Gesetz für die Dehnung

$$\varepsilon E = \sigma.$$

Dieses Gesetz ist analog zum Federgesetz $F_a = K x$.

**Merke: Das Dehnungsgesetz ist eine Form des Hook'schen Gesetzes.
Es lautet: $\varepsilon E = \sigma$**

Einheitenbetrachtung: $[E] = [\sigma] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{N}{m^2}$.

Bei der Dehnung eines Körpers tritt zudem eine Querkontraktion auf. Das zeigen wir in einem weiteren Versuch:

Versuch VII.5: Dehnung eines Kautschukband

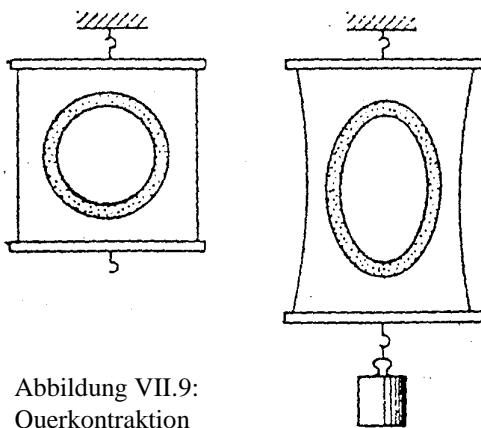


Abbildung VII.9:
Querkontraktion

Der Versuchsaufbau ist derselbe wie zuvor, nur mit dem Unterschied, dass diesmal statt eines Stabes ein Kautschukband der Breite d gedehnt wird. Um die Verformung besser beobachten zu können, ist auf dem Band ein Kreis aufgezeichnet. Dehnt man das Band, so verformt sich der Kreis des Radius r zu einer Ellipse mit einer kleineren Halbachse $< r$. Die Änderung der Breite d wird wieder mit dem Verhältnis angegeben:

$$\frac{\Delta d}{d}$$

Die ganze Verformung wird beschrieben durch das Verhältnis der Dehnung zur Querkontraktion.

$$\mu = - \frac{\Delta d}{d} / \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

Merke: Die Verformung einer Fläche wird beschrieben durch das Verhältnis der Dehnung zur Querkontraktion. $\mu = -$. Das Verhältnis wird angegeben mit der Poissonschen Zahl μ .

Die Poissonschen Zahl μ ist nach dieser Definition immer kleiner eins.

Betrachten wir nun die Volumenänderung anhand eines Quaders mit der quadratischen Fläche

$A = d \cdot d$ und der Länge ℓ :

$$\Delta V = (d + \Delta d)^2 \cdot (\ell + \Delta \ell) - d^2 \ell$$

Vernachlässigt man alle Terme mit Δ^2 , dann gilt

$$\text{mit } (\Delta d)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta V = (d^2 + 2d \Delta d) (\ell + \Delta \ell) - d^2 \ell$$

$$\text{und mit } \Delta d \Delta \ell = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta V = d^2 \Delta \ell + 2 \ell d \Delta d.$$

Für das Verhältnis Volumenänderung zu Volumen gilt dann

$$\text{mit } V = d^3 \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta \ell}{\ell} + 2 \frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta \ell}{\ell} (1 - 2\mu)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta \ell}{\ell} (1 - 2\mu)$$

$$\text{mit } \frac{\Delta \ell}{\ell} = \varepsilon \text{ und } \varepsilon = \frac{1}{E} \sigma \quad \Leftrightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{E} (1 - 2\mu) \sigma$$

Merke: Die **Volumenänderung eines Quaders** durch

$$E \text{ und } \mu \text{ ausgedrückt lautet } \frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{E} (1 - 2\mu) \sigma .$$

Dieser Ausdruck ist positiv, wenn die Poissonsche Zahl größer als 0,5 ist.

Nun betrachten wir die Kompression eines Körpers.

Kompression wird verursacht durch die Einwirkung eines allseitig gleichmäßigen Druckes p auf einen Körper. Definieren wir zunächst den Begriff des Drucks:

Definition VII.3: Der Druck p ist der Betrag der Kraftkomponente F_n normal zur Fläche

$$\text{geteilt durch die Fläche } A, \text{ auf welche die Kraftkomponente wirkt: } p = \frac{F_n}{A} .$$

Die Einheit des Drucks wird in verschiedenen Systemen unterschiedlich angegeben. Offiziell rechnet man im SI mit Pascal, gebräuchlich ist aber immer noch die Einheit Bar. Um die Umrechnung zu erleichtern, folgt hier eine Tabelle mit den gebräuchlichsten Einheitenbezeichnungen:

Einheit	Zeichen	Faktor zur Umrechnung in				
		Pa	bar	at	atm	Torr
Pascal = 1 Nm ⁻²	Pa	1	10 ⁻⁵	1.02 • 10 ⁻⁵	9.87 • 10 ⁻⁶	7.50 • 10 ⁻³
Bar = 10 ⁵ Pa = 0,1 MPa	bar	10 ⁵	1	1.02	0.987	7.5 • 10 ²
Techn. Atmosphäre	at	9.81 • 10 ⁴	0.981	1	0.968	7.36 • 10 ²
Phys. Atmosphäre	atm	1.013 • 10 ⁵	1.013	1.033	1	7.6 • 10 ²

Torr	Torr	$1.333 \cdot 10^2$	$1,333 \cdot 10^{-3}$	$1,36 \cdot 10^{-3}$	$1.32 \cdot 10^{-3}$	1
-------------	------	--------------------	-----------------------	----------------------	----------------------	---

Tabelle VII.2: Druckeinheiten

Merke: 1 bar \approx 1 at und 1 hPa = 1 mbar

Nun betrachten wir einen Würfel, der an drei Seiten festgehalten wird und auf dessen drei freie Seiten der Druck p wirkt.

Die Volumenänderung können wir direkt berechnen aus

$$\frac{\Delta V}{V} = 3 \cdot \frac{1}{E} (1 - 2\mu) \sigma$$

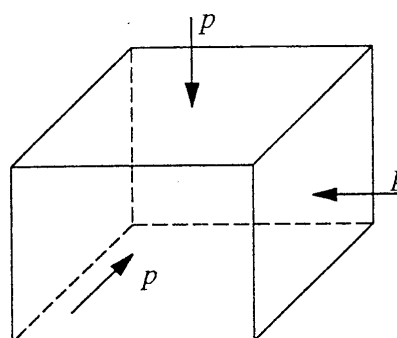


Abbildung VII.10: Kompression

wegen $\sigma = -p$ folgt

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa p$$

mit

$$\kappa = \frac{3(1-2\mu)}{E}$$

Die so ermittelte Proportionalitätskonstante κ wird Kompressibilität genannt. Analog zum Elastizitätsmodul definiert man ein Kompressionsmodul.

Notation VII.4: Den Umkehrwert der Kompressibilität bezeichnet man mit K und nennt ihn **Kompressionsmodul**.

Die Volumenänderung ist also proportional zum Druck. Sie wird angegeben durch das Kompressionsmodul, das zusammenhängt mit E und μ über die Gleichung

$$\kappa = \frac{3(1-2\mu)}{E}$$

Da $\frac{\Delta V}{V} < 0$ ist gilt für positiven Druck $p > 0$: $\kappa > 0$ und $\mu < 0.5$

Nun wollen wir in einem weiteren Versuch untersuchen, was passiert, wenn man einen Draht über die elastische Grenzen hinaus ausdehnt.

Versuch VII.6: Zerreißspannung

Bei diesem Versuch wird ein Kupferdraht an der Wand des Vorlesungssaals befestigt und über eine Umlenkrolle mit einer Federwaage nach unten gezogen. Die Umlenkrolle ist mit einem

Zeiger versehen, der die Umdrehung und damit die Längenänderung des Drahtes anzeigt. Zunächst wird nur leicht am Draht gezogen, bis der Zeiger einen gut ablesbaren Winkel anzeigt. Wir lesen den Winkel und die Kraft ab, die die Längenänderung hervorgerufen hat. Dann lassen wir den Draht los und überprüfen, ob der Zeiger auf den Nullpunkt zurück schwenkt. Wenn dies der Fall ist, war die vorgenommene Verformung elastisch und wir können aus den abgelesenen Daten das E-Modul berechnen.

Danach ziehen wir so lange an dem Draht, bis er reißt. Dabei kann über Zählen der Umdrehungen des Zeigers die Längenänderung ermittelt werden. Analog wird dann das E-Modul berechnet, es gibt jetzt die Zerreißspannung an.

Zwischen Zerreißen und elastischer Verformung liegen natürlich noch andere Bereiche. Von

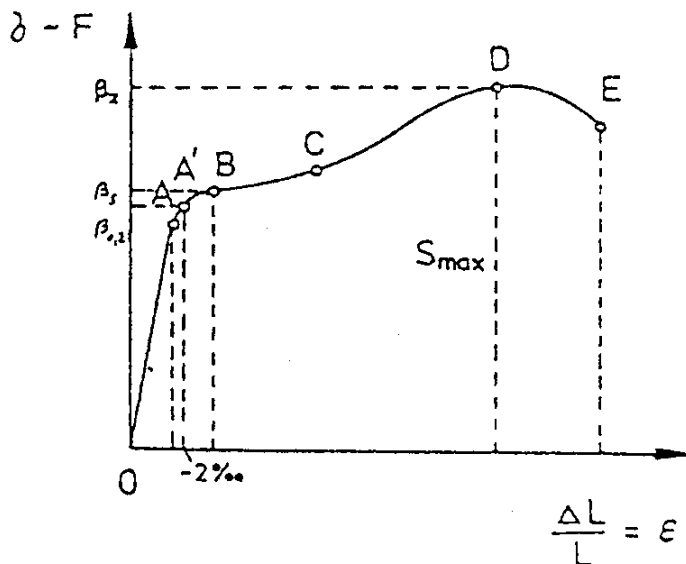


Abbildung VII.11: Spannungs-Dehnungsdiagramm eines Metalls (Kupfer)

einem Gummiband ist uns bekannt, dass man es elastisch spannen kann, und es nimmt seine ursprüngliche Länge wieder an. Zieht man etwas zu fest, so leiert das Gummi aus, und es kehrt nicht wieder in seine Ausgangsform zurück. Zieht man dann fest genug, zerreißt es.

Dieses Verhalten sieht bei Metallen skizziert wie folgt aus:

1. Elastischer Bereich: 0 - A (bzw. A')

Die Abbildung zeigt, dass im Hook'schen Bereich die Verformung bis zur **Proportionalitätsgrenze** (A) rein elastisch ist. Bis zu diesem Punkt sind Spannung und Dehnung proportional ($\epsilon \sim \sigma$) und die Spannungs-Dehnungs-Kurve ist eine Gerade. Aus messtechnischen Gründen wurde die Elastizitätsgrenze ($\beta_{0,2}$) (A') eingeführt, bei der die verbleibende Verformung 0,01 % beträgt. Bis hierher nimmt die Dehnung zwar etwas stärker zu, aber die Verformungen lassen sich in beiden Richtungen identisch durchlaufen.

2. Inelastischer, plastischer Bereich: B - E

Oberhalb $\beta_{0,2}$ knickt die Kurve ab und erreicht bei weiterer Belastung die **Streck- oder Fließgrenze** (β_s) (B). Ab dem Punkt B beginnt das Fließen des Metalls, d.h. ganze Bereiche im Polykristall verschieben sich gegeneinander. Bei einigen Metallen tritt dann wieder eine **Verfestigung** ein, die durch die Gleitmöglichkeit des Stoffes festgelegt ist. Bei weiterer Belastung nimmt dann die elastische Spannung bis zu einem maximalen Wert wieder zu. Die an diesem Punkt (D) wirkende Höchstspannung wird als **Zug- bzw. Zerreißfestigkeit (-spannung)** (β_z) bezeichnet oder auch als **Bruchdehnung** (σ_B).

Die Verformungen, die zwischen der Elastizitsgrenze (A') und der Bruchdehnung (D) auftreten werden als plastische Verformungen bezeichnet. Trotz dieser Verformungen lässt sich

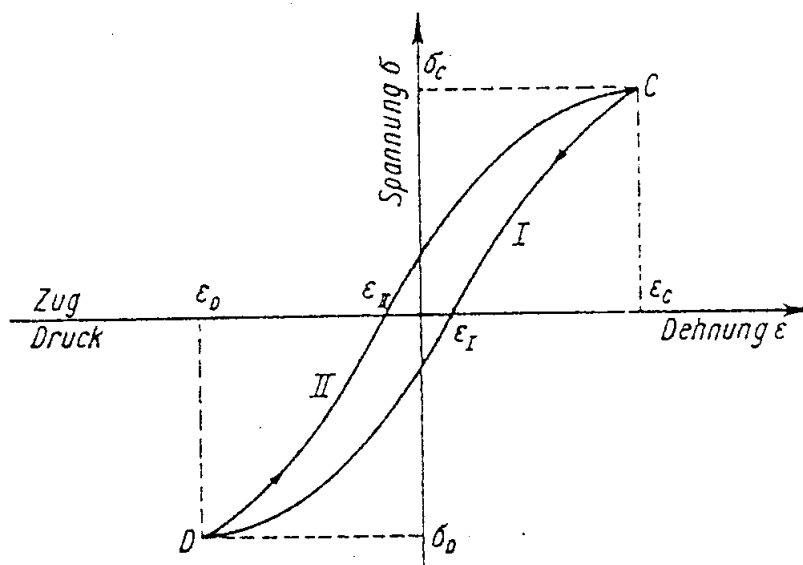


Abbildung VII.12: elastische Hysterese

ungefähr eine Gerade parallel zur ursprünglichen in beide Richtungen durchlaufen, da einzelne Teilbereiche noch elastisch bleiben. Die bei der Be- und Entlastung durchlaufenen Geraden werden als **elastische Hysterese** bezeichnet.

3. Zerreißen: nach E

Bei weiterer Belastung nach der Bruchdehnung (D) schnürt sich der Draht ein, es erfolgt eine Querschnittsverminderung, die Spannungs-Dehnungs-Kurve 'fällt ab' und der Stab reißt an dieser Stelle im Punkt (E).

VII.4 Schub und Torsion

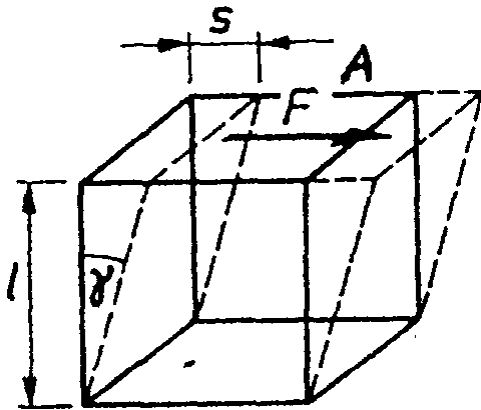


Abbildung VII.13: Scherung

Wir betrachten einen Quader, auf den einseitig eine Kraft wirkt. Dazu denken wir uns einen Klotz, dessen Auflagefläche auf den Tisch befestigt ist. Nun soll eine Kraft \vec{F} tangential an der dazu parallelen Oberfläche A angreifen: Der Körper wird wie in der Abbildung gezeigt in sich verschoben. Die so entstehende Spannung wird deshalb Schubspannung oder Scherspannung genannt.

Notation VII.5: Die durch Verschieben zweier paralleler Oberflächen entstehende Schub- oder Scherspannung wird mit τ bezeichnet.

Analog zur Definition des Druckes wird die Schubspannung τ definiert als Verhältnis von tangential an einer Fläche angreifender Kraft F und der Fläche.

Definition VII.4: Die Schubspannung τ wird definiert als Verhältnis von tangential an einer Fläche angreifender Kraft F und der Fläche: $\tau = \frac{F}{A}$.

Merke: Für die Schubspannung gilt wieder das Hook'sche Gesetz $\tau = G \cdot \alpha$

Die Proportionalitätskonstante G wird Schub- bzw. Torsions-Modul genannt.

Der Zusammenhang des Torsions-Moduls mit dem Elastizitäts-Modul und der Poisson'schen

Zahl ist gegeben durch:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

Diese Formel gilt nur für isotrope Körper, also z.B. Polykristalle. Der Beweis der Formel kann z.B. im Recknagel nachgelesen werden. An dieser Stelle reicht es, festzuhalten, dass die Module alle in derselben Größenordnung liegen und somit gegeneinander abgeschätzt werden können. Wichtig ist die Mechanik fester Körper z.B. für Bauingenieure, die abschätzen müssen, wie sehr ein Balken sich durchbiegt oder welche Belastung er verträgt. Schwierig wird diese Berechnung bei anisotropen Stoffen. Da diese nur in den einfachsten Fällen analytisch berechnet werden können, muss in der Statik zu numerischen Lösungsverfahren gegriffen werden. Man rechnet im Bauwesen zunehmend mit den sogenannten Finiten Elementen.

Abschließend werden noch einige typische Werte der Module angegeben.

Einige typische Werte für Stahl:

M Pa	E 200 000	G 800 000	K 160 000	σ_B ~ 10 000	μ 0.28
bar ⁻¹	$5 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{-7}$	~ 10 000	
	$\alpha = 1/E$	$\gamma = 1/G$	$\kappa = 1/K$	σ_B	

Tabelle VII.3: Module für Stahl