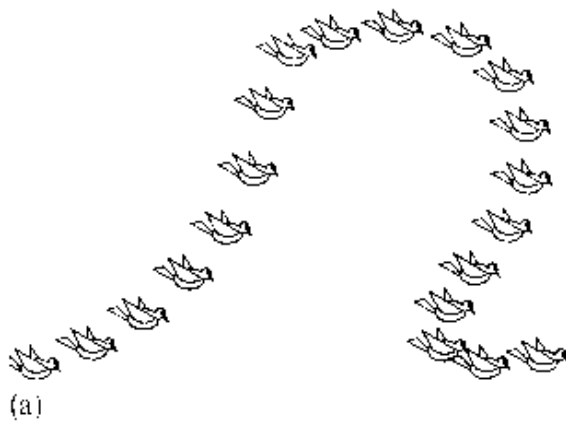


## VI. Dynamik des starren Körpers

Wenn man von der Ausdehnung eines Körpers absehen kann, d.h. ihn als Massenpunkt betrachtet, wie wir das bisher getan haben, läßt sich seine Lage durch einen einzigen Ortsvektor  $\vec{r}$  darstellen, seine Bewegung durch die Zeitabhängigkeit  $\vec{r}(t)$  dieses Ortsvektors.

Für einen ausgedehnten Körper braucht man eigentlich unendlich viele Ortsvektoren- einen für jeden seiner Punkte.

Zum Glück können sich diese Vektoren nicht alle unabhängig voneinander ändern, selbst dann nicht, wenn der Körper deformierbar ist. Diesen Fall behandeln wir in Kapitel VII. Wenn der Körper nicht deformierbar ist, sondern starr, kann man jede seiner Bewegungen in eine Translation und eine Rotation zerlegen.



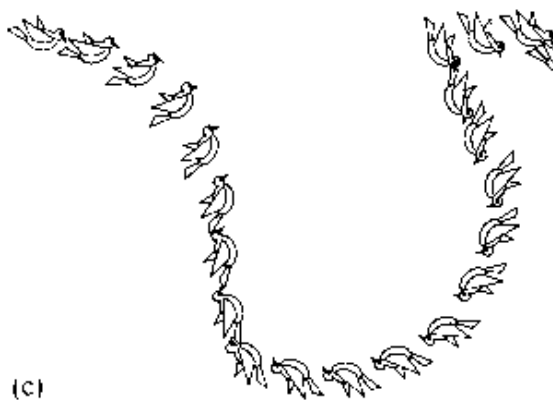
Eine **Translation** ist eine Bewegung, bei der alle Punkte des Körpers kongruente Bahnen beschreiben. Diese Bahnen dürfen durchaus gekrümmt sein.

Die Richtung der Körperachsen dieser Tauben, die eine reine Translation ausführen, bleibt erhalten.

Abbildung VI.1 (a)

Bei einer **Rotation** beschreiben alle Punkte konzentrische Kreise um eine bestimmte Gerade, die Drehachse.

Abbildung VI.1 (b)



Diese Tauben führen eine Translation kombiniert mit einer Rotation aus.

Die Körperachsen ändern ihre Richtung.

Abbildung VI.1 (c)

Die Gesetze der Translation eines starren Körpers unterscheiden sich nicht von denen, die wir vom Massenpunkt her kennen. Für die Rotation müssen wir einen neuen Satz von Begriffen entwickeln.

Wie wichtig gerade die Rotation starrer Körper ist, haben wir bereits an einigen Beispielen zur Gravitation gesehen:

Besonders die Eigenrotation von Körpern ist in der Natur besonders wichtig. Als Beispiel betrachte man die Erde und die bereits diskutierten Auswirkungen der Rotation

Rotation der Erde → Wechsel von Tag und Nacht.

Auch andere Himmelskörper drehen sich um eine eigene Achse. Das liegt an in der Entstehung der Planeten und der Erhaltung der Drehimpulse begründet. Das wohl populärste Beispiel ist die Sonne

Himmelskörper: Die Sonne dreht sich in 25 Tagen einmal um sich selbst.

Extreme Beispiele sind die sogenannten Pulsare. Sie emittieren - wie Leuchtfeuer - gerichtete, gepulste Strahlung. Junge Pulsare haben eine Frequenz von 30 Hz, d.h., sie drehen sich 30 mal pro Sekunde um die eigene Achse. Alte Pulsare haben 'nur' noch 1 Hz. Die Masse entspricht der Masse von Sterne, Pulsare sind aber sehr klein; sie haben einen Durchmesser von nur 1 - 10 km. Sie entstehen nach Supernova-Explosionen (Neutronensterne). Große Sterne würden bei dieser Eigenrotationsfrequenz auseinanderfliegen.<sup>1</sup>

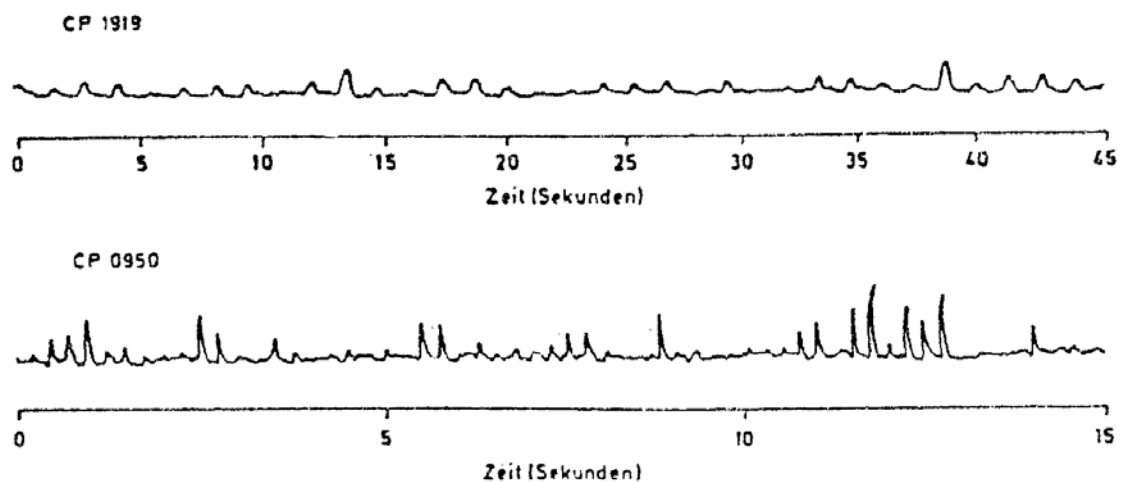


Abbildung VI.2: Erste Meßprotokolle von Radiosignalen der Pulsare CP 1919 und CP 0950 (1967). Die sehr schwachen Signale schwanken durch den Einfluß interstellarer Wolken geladener Teilchen in ihrer Intensität. Trotzdem ist der konstante Pulsabstand der Signale deutlich zu erkennen, der für CP 1919 etwa 1,3 sec, für CP 0950 etwa 0,25 sec beträgt. (Aus Scientific American 219, 1968)

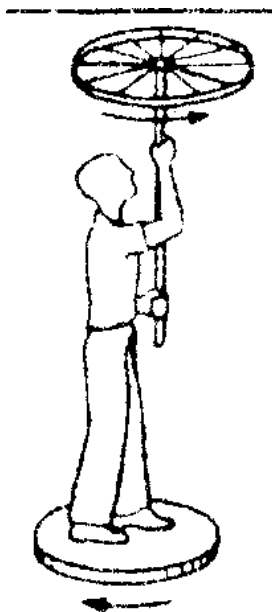
<sup>1</sup> Anschauliche Literatur zu diesem Thema findet man im Piper Verlag: Rudolf Kippenhahn, 100 Milliarden Sonnen.

## Winkelgeschwindigkeit als axialer Vektor

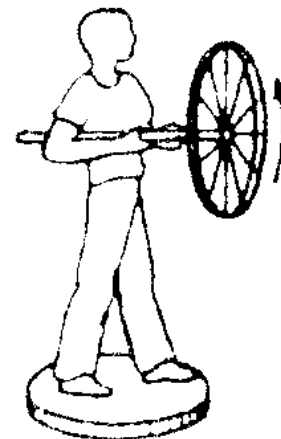
Uns ist bereits bekannt, daß sowohl der Ort, als auch die Geschwindigkeit von einer Richtung abhängen, also Vektoren sind. Nun muß man sich fragen, ob auch die Winkelgeschwindigkeit als Vektor behandelt werden muß. Um diese Frage zu klären, soll ein einfacher Versuch durchgeführt werden:

### Versuch VI.1: Drehendes Rad

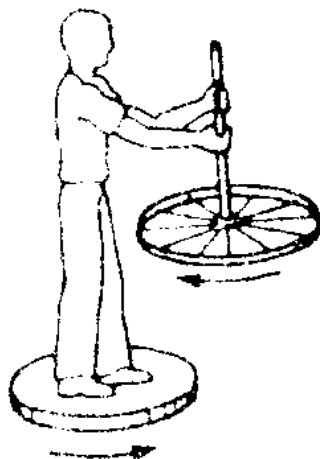
Bei diesem Versuch wird eine Testperson auf einen frei drehbaren Schemel gesetzt. In der Hand hält sie eine Achse, an deren Ende ein Rad mit Speichen montiert ist. Mit einer Bohrmaschine wird nun das Rad zu einer Rotation angetrieben, während die Achse parallel zum Boden ausgerichtet ist..



Zunächst hält die Person das Rad senkrecht nach oben, d.h. mit der Achse parallel zum Oberkörper. Das Rad dreht sich weiter, die Person beginnt jedoch, sich auf dem Schemel entgegen der Drehrichtung des Rades zu drehen.



Danach wird das Rad gesenkt, bis die Achse parallel zum Boden steht. Der Schemel hält an und dreht sich nicht weiter.



Wird das Rad nach unten gehalten, dreht der Schemel sich wieder, nun entgegengesetzt zum ersten mal. Rad und Schemel drehen sich also wieder entgegengesetzt.

Offensichtlich ist die Richtung eine wichtige Größe bei der Betrachtung der Rotation: Die Winkelgeschwindigkeit muß also ebenfalls als Vektor eingeführt werden.

Abbildung VI.3: Versuch VI.1

Dabei muß einmal eine Konvention gefunden werden, in welche Richtung die Winkelgeschwindigkeit positiv definiert wird. Man einigte sich hier darauf, daß die Drehrichtung und der Vektor der Winkelgeschwindigkeit eine Rechtsschraube bilden:

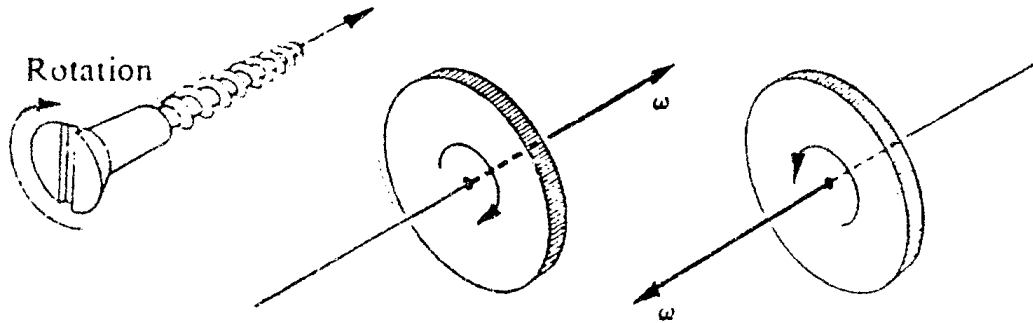


Abbildung VI.4: Der Zusammenhang der Drehrichtung und der Richtung des Vektors  $\vec{\omega}$  wird durch eine Rechtsschraube gegeben.

Um den Zusammenhang zwischen,  $\vec{v}$  und  $\vec{r}$  zu bestimmen, betrachten wir noch einmal die bereits in Kapitel V gewonnenen Erkenntnisse über Kreisbewegungen:

Beschreibt ein Massenpunkt bei einer Drehung einen Kreis mit dem Radius, so hat der Vektor der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  die

Richtung der Normalen zur Kreisbahnebene mit der Pfeilspitze so, daß sich eine Rechtsschraube ergibt. Ist  $\vec{r}$  der Ortsvektor des Massenpunktes von 0 aus, so gilt:

$$v = \omega r = \omega r \sin \alpha$$

Damit kann das Vektorprodukt in vektorieller Form angegeben werden:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} .$$

Der Betrag ist, wie oben errechnet

$$v = \omega r = \omega r \sin \alpha$$

Der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  steht senkrecht auf der durch  $\vec{\omega}$  und  $\vec{r}$  gebildeten Ebene.

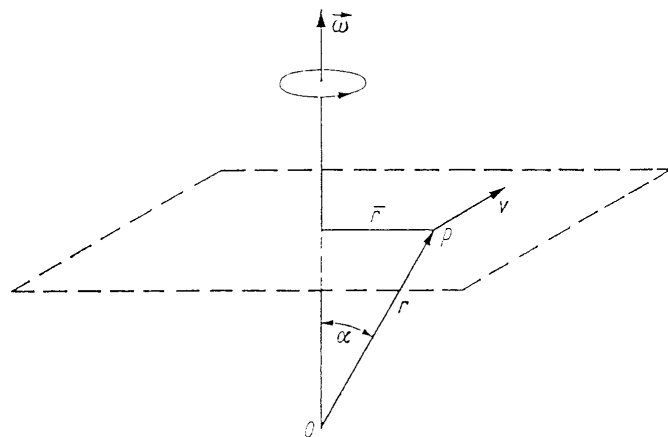


Abbildung VI.5: Betrachtung der Winkelgeschwindigkeit

Man beachte, daß beim Vektorprodukt die Faktoren nicht vertauscht werden dürfen; denn es ist:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = -\vec{r} \times \vec{\omega}$$

Es ist natürlich nur dann sinnvoll, eine Größe als Vektor einzuführen, wenn für sie die Gesetze der Vektorrechnung gelten. Insbesondere muß man zwei derartige Größen vektoriell addieren können. Das ist bei der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  der Fall, wie folgende Überlegung zeigt:

Erfährt ein Massenpunkt, der die Masse  $m$  und den Ortsvektor  $\vec{r}$  hat, gleichzeitig zwei Winkelgeschwindigkeiten  $\vec{\omega}_1$  und, so ist:

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}$$

und

$$\vec{v}_2 = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}$$

Da

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

ist, folgt:

$$\vec{v} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}$$

und daraus

$$\vec{v} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}$$

und aus

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

schließlich:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 .$$

Ähnlich kann man auch die Richtigkeit der andern Rechenregeln für Vektoren nachweisen. Daß solche Überlegungen notwendig sind, zeigt folgender Sachverhalt:

Man könnte daran denken, auch den Drehwinkel  $\vec{\varphi}$  als axialen Vektor einzuführen. Das ist aber nicht sinnvoll, da sich zwei Drehungen um die Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  um beliebige Achsen nicht vektoriell addieren. Die Zusammensetzung zweier solcher Drehungen um endliche Winkel ist komplizierter. Nur bei Drehungen um die gleiche feste Achse kann man die Drehwinkel addieren.

Merke: Zwei Drehungen um beliebige Achsen addieren sich nur dann vektoriell, wenn die Winkel unendlich klein sind.

Beweis:

Dies ergibt sich aus

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 .$$

Wenn man schreibt

$$\frac{d\vec{\varphi}_1}{dt} + \frac{d\vec{\varphi}_2}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

und

$$d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2 = d\vec{\varphi}$$

Die Verhältnisse liegen ähnlich wie beim Weg. Nur der geradlinige Weg  $\vec{s}$  ist ein Vektor, entsprechend gilt dies für den Drehwinkel  $\vec{\varphi}$  um eine feste Achse. Im Fall eines beliebigen krummen Wegs kann man nur unendlich kleine Wegelemente addieren:

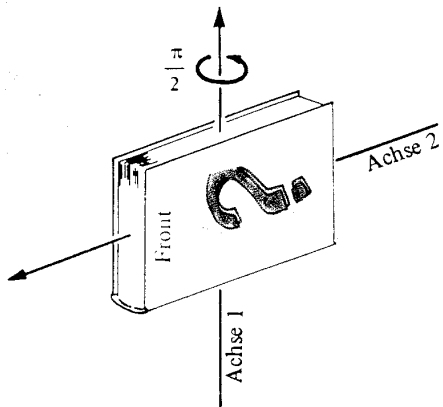
$$d\vec{s}_1 + d\vec{s}_2 = d\vec{s}$$

ebenso wie bei beliebigen Drehachsen nur unendlich kleine Drehwinkel.

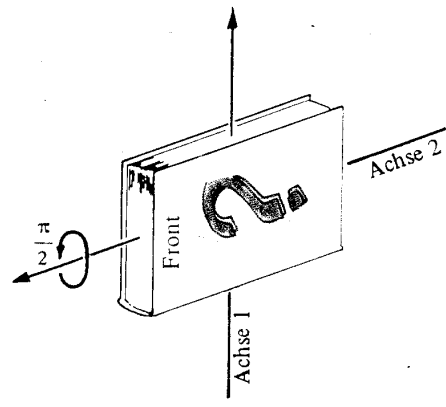
Anschaulich ist einleuchtend, warum nur sehr kleine Drehwinkel sich einfach addieren lassen, größere hingegen nicht, wenn die Achsen nicht parallel sind:

Das Ergebnis der Drehungen hängt von der Reihenfolge der Drehungen ab, diese sind nicht kommutativ. Das liegt daran, daß wir von körpereigenen Drehachsen sprechen. Die erste Drehung ändert selbst die Lage der zweiten Drehachse.

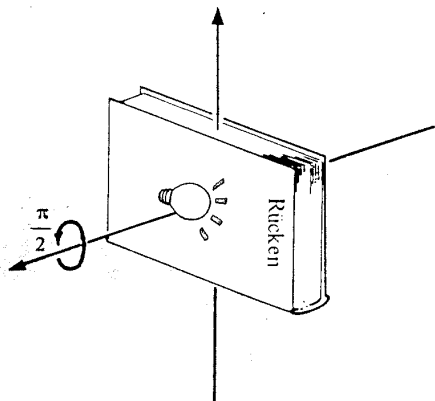
Anschaulich kann man die Änderung der Drehachsen mit der Drehung und das unterschiedliche Ergebnis nach einander ausgeführter Drehungen um  $90^\circ$  an einem Buch betrachten:



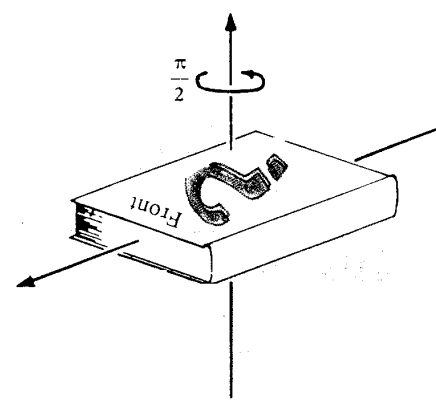
Ursprüngliche Lage des Buches, es wird jetzt um  $90^\circ$  um Achse 1 gedreht:



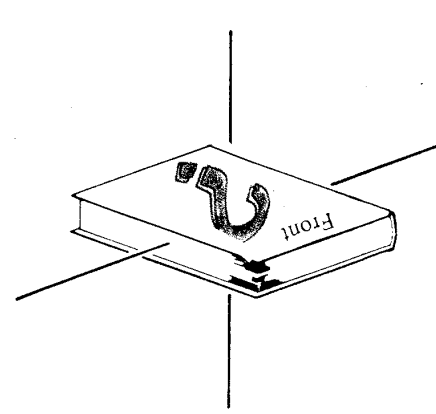
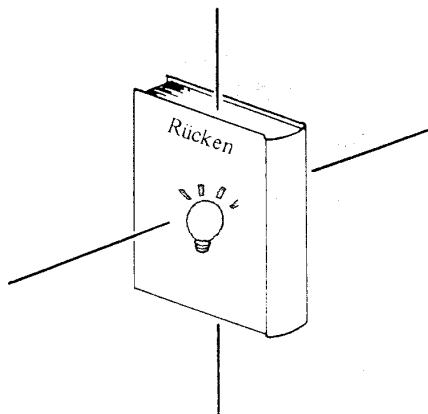
Ursprüngliche Lage des Buches, es wird jetzt um  $90^\circ$  um Achse 2 gedreht:



Lage nach der ersten Drehung um Achse 1. Es wird jetzt um  $90^\circ$  um Achse 2 gedreht:



Lage nach der ersten Drehung um Achse 2. Es wird jetzt um  $90^\circ$  um Achse 1 gedreht:



Die beiden Endlagen sind unterschiedlich, obwohl bei beiden Büchern um je  $90^\circ$  in Richtung der 1. und der 2. Achse gedreht wurde, in unterschiedlicher Reihenfolge!

Abbildung VI.6: Nicht-Kommutativität bei Raumdrehungen

Unentbehrlich für das Verständnis dieses Kapitels ist die Sicherheit im Umgang mit dem Kreuz- bzw. Vektorprodukt. Deshalb werden noch einmal seine wichtigsten Eigenschaften und Rechenregeln zusammengestellt.

Die Definition des Vektorproduktes hatten wir so angegeben:

$$\text{Vektorprodukt: } \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} .$$

Mit der Konvention über die Richtung ist gilt diese Gleichung, wenn

$\vec{a}$  auf dem kürzesten Weg in  $\vec{b}$  überführt wird

und  $\vec{c}$  für den dadurch gegebenen Drehsinn die Richtung einer Rechtsschraube bekommt.

Da bei Vertauschung von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  im Sinne dieser Definition der Drehsinn umgekehrt wird, muß gelten:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Das Kommutativ-Gesetz gilt nicht!

Stellt man die Vektorgrößen als Pfeile dar, dann entspricht der Betrag des Vektorproduktes dem Flächeninhalt des von beiden Pfeilen aufgespannten Parallelogramms.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} = & (a_y b_z - a_z b_y) \vec{u}_x \\ & + (a_z b_x - b_z a_x) \vec{u}_y \\ & + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{u}_z \end{aligned}$$

Diese komponentenweise Darstellung kann auch in kompakter Form als Determinante geschrieben werden, wobei

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

denn es gilt die Regel

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$



Alles weitere (z.B. Differentiation von Vektoren) in Standardbüchern über die mathematischen Hilfsmittel des Physikers.<sup>2</sup>

## VI.1 Schwerpunktsatz

Wie bereits eingehend erläutert, kann die Bewegung eines Körpers sehr kompliziert sein. Sie läßt sich jedoch immer als Überlagerung von Translation des Schwerpunktes und Rotation um den Schwerpunkt beschreiben. Die Translation eines Massepunktes, hier des Schwerpunktes, ist uns schon bekannt; sie ist einfach zu beschreiben, vorausgesetzt, man kennt den Schwerpunkt eines Körpers.

Die einfachste Figur, deren Schwerpunkt schon in der Mittelstufe berechnet wurde, ist ein Dreieck.

### Versuch VI.2: Schwerpunkt eines Dreiecks

Um den Schwerpunkt einer dreieckigen Platte zu ermitteln, kann man sie nacheinander frei beweglich an den drei Ecken aufhängen und jeweils einen Faden vom Eckpunkt aus senkrecht hinunter hängen lassen. Der Verlauf des Fadens wird markiert. Diese drei Geraden schneiden sich in einem Punkt, dem Schwerpunkt.



Aus der Geometrie ist bekannt, daß die aufgezeichneten Geraden die Seitenhalbierenden, auch Schwerlinien genannt, des Dreiecks sind.<sup>3</sup> Unterstützt man

diese Schwerlinien, so balanciert der Körper auf einem Stab. Unterstützt man die Scheibe im Schwerpunkt, so balanciert sie auf einem Punkt. Analog kann man für beliebige (flache) Körper verfahren.

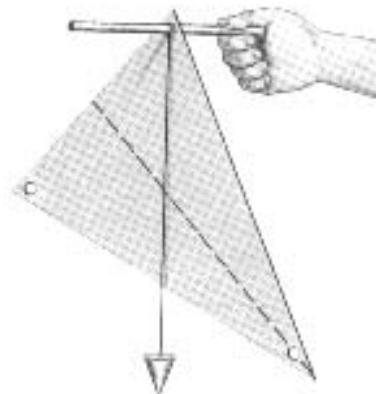


Abbildung VI.7: Ermittlung des Schwerpunktes



<sup>7</sup> Einige Standarddarstellungen sind:

S. Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik.- Teubner-Verlag, Stud. Bücher

Berendt-Weime: Mathematik für Physiker.- Physikverlag, Weinheim

Karl Rottmann: Mathematische Formelsammlung.- BI Hochschultaschenbücher

Bronstein [et. al.]: Taschenbuch der Mathematik.- Verlag Harry Deutsch

<sup>3</sup> Zudem teilt der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden so, daß die Teilstrecken zu der Ecke doppelt so lang wie zur gegenüberliegenden Seite ist.

Wie berechnet man nun den Schwerpunkt eines beliebigen, ausgedehnten Körpers?

Bei zwei Massepunkten A und B gleicher Masse ist sofort einsichtig, daß der Schwerpunkt auf der Verbindungsgraden genau in der Mitte der Strecke von A nach B liegt. Bei zwei Massepunkten A und B verschiedener Massen liegt der Schwerpunkt ebenfalls auf der Verbindungslinie, jedoch näher an der schwereren Masse. Diese Überlegung haben wir schon bei der Betrachtung des Erde- Mond- Systems genutzt. Man kann leicht nachvollziehen, daß der Schwerpunkt die Verbindungslinie im umgekehrten Verhältnis der

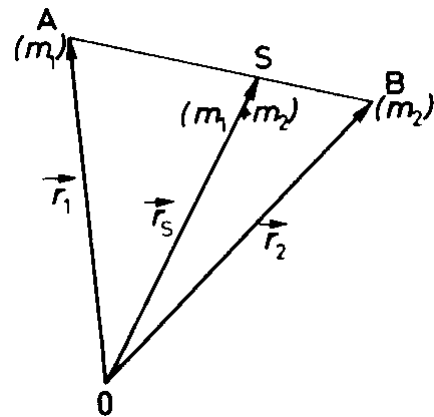


Abbildung VI.8: Schwerpunkt eines Zweikörpersystems

Massen teilt.

$$\overline{AS} = \frac{m_2}{m_1} \overline{SB}.$$

Betrachtet man noch die Ortsvektoren von einem beliebigen Nullpunkt zu den Massen, dann kann man aus der Abbildung die Beziehung ablesen:

$$\begin{aligned} \vec{r}_s - \vec{r}_1 &= \frac{m_2}{m_1} (\vec{r}_2 - \vec{r}_s) \\ \Leftrightarrow \vec{r}_s &= \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Nimmt man nun mit derselben Überlegung einen dritten, vierten ... bis n-ten Körper hinzu, erhält man als Formel für den Schwerpunkt:

$$\begin{aligned} \vec{r}_s &= \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \\ \Leftrightarrow \vec{r}_s &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \end{aligned}$$

Im karthesischen Koordinatensystem hat der Schwerpunkt die Koordinaten

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad z_s = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Für kontinuierliche Masseverteilungen muß über infinitesimal kleine Massen integriert werden. Mit der Gesamtmasse M berechnet sich der Schwerpunkt

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm.$$

Mit der Dichte  $\rho = \frac{M}{V}$   $\Rightarrow \vec{r}_s = \frac{1}{M} \int \vec{r} \rho(\vec{r}) dV.$

Mit diesem Ergebnis können wir den Schwerpunktsatz formulieren:

**Schwerpunktsatz: Der Massenschwerpunkt eines Systems von Massen  $m_i$  bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse  $M$  im Schwerpunkt  $S$  vereinigt wäre und dort die Summe aller äußeren Kräfte  $\vec{F}_i^{ex}$  angreifen würde.**

Der Spezialfall  $\vec{F}^{ex} = 0$  kam schon beim Impulssatz vor: Wirken nur innere Kräfte, so bewegt sich der Schwerpunkt (Massenmittelpunkt) mit konstanter Geschwindigkeit auf gerader Linie, für ihn gilt also das Trägheitsgesetz.

Im Folgenden wollen wir den Schwerpunktsatz anhand eines Beispiels verifizieren:

Eine Hantel mit masseloser Stange fliege durch die Luft.

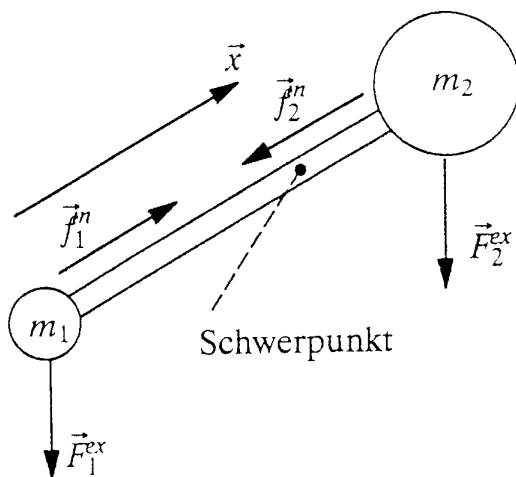


Abbildung VI.9: Schwerpunkt eines Hantelmodells

Zunächst wirken auf die beiden Massen der Hantel,  $m_1$  und  $m_2$ , die Gewichtskräfte  $\vec{F}_i^{ex}$ .

Dabei seien die Kugeln idealisiert als Massepunkte in den einzelnen Schwerpunkten. Die Richtung der Verbindungstange sei  $\vec{x}$ . Durch die Stange gehalten, wirken auf die Massen die Zwangskräfte der Stange  $f_i^{in}$ .

Aus der Formel für den Schwerpunkt des Hantelsystems:

$$x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

mit  $M = m_1 + m_2$

$\Leftrightarrow M x_s = m_1 x_1 + m_2 x_2$

Durch Differentiation nach der Zeit erhalten wir den Ausdruck für die Gesamtkraft, denn

aus  $a = \frac{d^2 x}{dt^2}$  folgt

$M \ddot{x}_s = m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 \quad \neg$

Für jede einzelne Kugel gilt das Grundgesetz der Mechanik: Die Summe der wirkenden Kräfte

$$\vec{F}_i^{\text{ex}} \text{ und } f_i^{\text{in}} \text{ ist gleich der Kraft } \vec{F}_i = m_i \ddot{x}_i$$

$$\Rightarrow m_1 \ddot{x}_1 = (F_1^{\text{ex}})_x + f_1^{\text{in}}$$

und

$$m_2 \ddot{x}_2 = (F_2^{\text{ex}})_x + f_2^{\text{in}}.$$

eingesetzt in  $\neg$

$$\Rightarrow M \ddot{x}_s = (F_1^{\text{ex}})_x + f_1^{\text{in}} + (F_2^{\text{ex}})_x + f_2^{\text{in}}$$

Das Reaktionsprinzip besagt

$$f_1^{\text{in}} = - f_2^{\text{in}} \quad -$$

$$\Rightarrow M \ddot{x}_s = (F_1^{\text{ex}})_x + (F_2^{\text{ex}})_x$$

$$\Leftrightarrow M \ddot{x}_s = \sum_{i=1}^2 (F_i^{\text{ex}})_x$$

Die Verallgemeinerung für 3 Dimensionen lautet dann

$$M \vec{a}_s = \sum_{i=1}^2 (\vec{F}_i^{\text{ex}})$$

Das Reaktionsprinzip gilt auch, wenn keine starre Verbindung vorliegt. Als Verbindung könnte z.B. eine Feder fungieren.  $x_1$  und  $x_2$  wären dann zeitabhängig.

**Schlußfolgerung:** Bei der Abwesenheit von äußeren Kräften bewegt sich der Massenschwerpunkt gradlinig und gleichförmig. Ein Massensystem oder ein Körper kann sich dann nur um Achsen drehen, die durch seinen Schwerpunkt gehen. Das gilt auch noch, wenn der Körper sich in einem homogenen Kraftfeld befindet. Es gilt nicht mehr, wenn der Körper an beliebiger Stelle fest gelagert wird und damit die Drehachse im Raum festgehalten wird. Es gilt nur für freie Achsen.

## VI.2 Drehmoment eines starren Körpers

Auf Seite 103 hatten wir das Drehmoment definiert als

Definition V.6:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Das Drehmoment war die Übertragung des Kraftbegriffes auf die Rotation. Nun wollen wir dieses Drehmoment für starre Körper genauer untersuchen. Dazu zunächst ein Versuch:

### Versuch VI.3: Fadenrolle:

Bei diesem Versuch wird eine überdimensionale Garnrolle an einem Fadenende gezogen. Die Beobachtung zeigt: Je nach Winkel, unter dem an der Rolle gezogen wird, rollt die Rolle nach vorne, nach hinten oder sie bleibt in Ruhe.

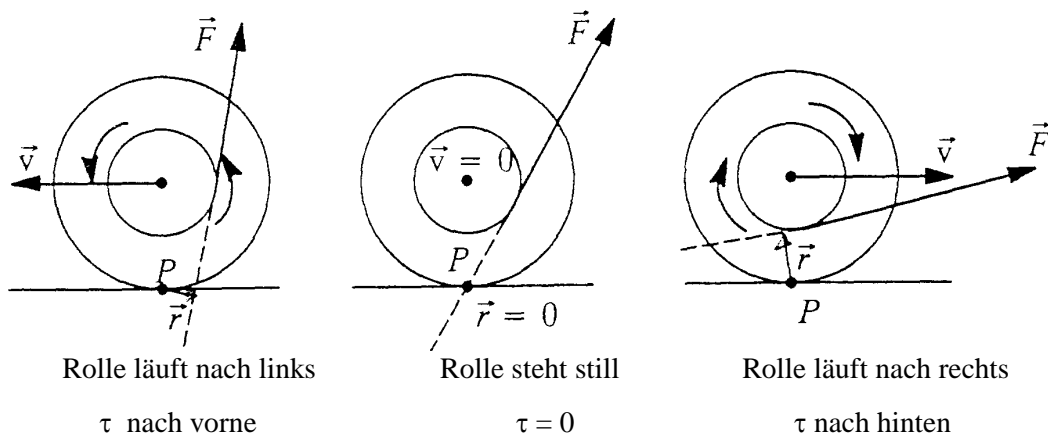


Abbildung VI.10: Versuch VI.3 Fadenrolle

Dieses Phänomen kann man sich so erklären, daß das Drehmoment am Auflagepunkt  $P$  angreift, nicht am Schwerpunkt. Die Rolle dreht sich also um den Auflagepunkt. Nach dieser Beobachtung müssen wir uns fragen, wie man eine solche Bewegung mathematisch günstig beschreiben kann. Anders ausgedrückt: Es geht um die Festlegung der momentanen Drehachse.

Die erste Möglichkeit besteht darin, einen Punkt auszuwählen, z.B. den Auflagepunkt  $P$  am Anfang des Versuches, und dessen Verlauf zu beschreiben. Markiert man diesen Punkt und zeichnet dessen räumlichen Verlauf auf, so erhält man eine komplizierte Bahn, eine Zykloide. Der Punkt  $P$  steht bei der Berührung mit dem Boden momentan still.

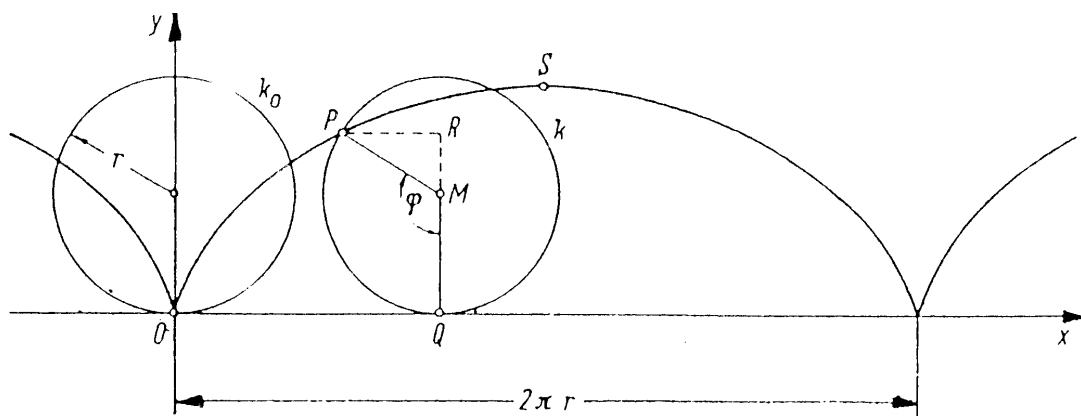


Abbildung VI.11: Ein auf dem Rad markierter Punkt beschreibt im Raum eine Zykloide

Um diese Bewegung zu beschreiben müßte das Kräftegesetz für diesen Punkt gefunden werden. Das ist nicht so ohne weiteres aufzustellen, wir wollen deshalb versuchen, eine günstigere Beschreibung zu finden:

Um die zweite Möglichkeit zu finden, betrachten wir den Versuch in etwas abgewandelter Form noch einmal. Statt selbst an der Rolle zu ziehen, legen wir sie auf eine schiefe Ebene.

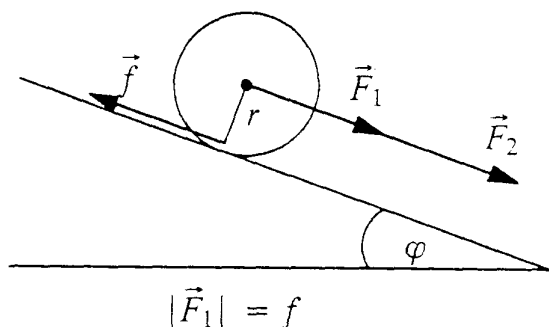


Abbildung VI.12: Zylinder rollt eine schiefe Ebene hinab

Jetzt kennen wir ein genaues Kraftgesetz für die äußere Kraft. Die Kräfte, die wirken, können wir aufschreiben:

Für die Bewegung längs einer schiefen Ebene wirkt die Komponente der Gewichtskraft

$$F = Mg \sin \varphi.$$

Die zweite wirkende Kraft erhält man aus folgender Überlegung: Der Zylinder rollt nur deswegen die Ebene hinunter statt zu

rutschen, weil eine Haftreibung wirkt. Ohne die Haftreibung würde er abrutschen. Wir nennen die Reibungskraft, sie wirkt entgegengesetzt der Komponente der Gewichtskraft.

Jetzt zerlegen wir die Kraft  $F$  in zwei Komponenten. Die erste Komponente längs des Vektors, die denselben Betrag hat wie die Reibungskraft, dieser aber entgegen gerichtet ist, bezeichnen wir mit. Betragsmäßig gilt dann

$$f = F_1 .$$

Der Rest des Vektors  $\vec{F}$  wird nicht kompensiert, bewirkt also nach Newton eine Beschleunigung. Wir bezeichnen diesen Rest mit, sein Betrag errechnet sich aus

$$F_2 = F - F_1 .$$

Nach Newton gilt

$$\vec{F}_2 = M\vec{a} .$$

$\vec{F}$  setzt sich somit zusammen aus einer Beschleunigungskraft  $\vec{F}_2$  und einer Gegenkraft  $\vec{F}_1$  zur Reibung, die zusammen mit  $\vec{f}$  ein Kräftepaar bildet.

Insgesamt haben wir die Kräfte zerlegt in ein Kräftepaar und eine resultierende Kraft am Schwerpunkt!

Dabei ist ein Kräftepaar definiert als:

**Definition VI.1: Ein Kräftepaar ist ein System aus zwei parallelen, gleich großen, aber entgegengesetzt gerichteten Kräften, deren**

**Angriffslinien nicht auf derselben Gerade liegen.**

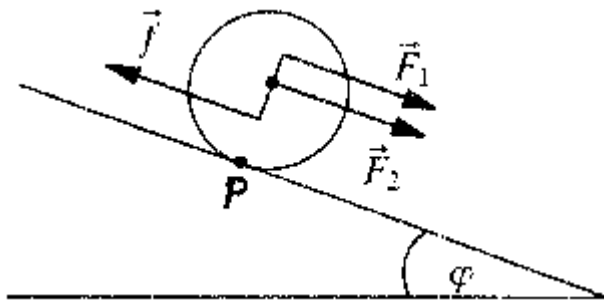


Abbildung VI.13: Kräftepaar bei rollendem Zylinder

Dabei haben wir von der Verschiebung der einzelnen Kräfte Gebrauch gemacht: Zunächst verschiebt man die ‘Restkraft’, die eine Beschleunigung des Körpers im Newton’schen Sinn hervorruft, in den Schwerpunkt. Das ist aufgrund des Schwerpunktsatz erlaubt. Dann verschieben wir das Kräftepaar  $\vec{f}, \vec{F}_1$  so,

dass die Mitte der Verbindungsgeraden auf dem Schwerpunkt liegt.

Das Kräftepaar  $\vec{f}, \vec{F}_1$  greift jetzt symmetrisch zum Schwerpunkt an. Die Bewegung des Zylinders wird in dieser Darstellung beschrieben, ohne daß formal am Auflagepunkt eine Kraft angesetzt wird.

Das Kräftepaar  $\vec{f}, \vec{F}_1$  bewirkt eine Rotation, also ein Drehmoment, während die ‘Restkraft’  $\vec{F}_2$  eine Translation des Schwerpunkts bewirkt.

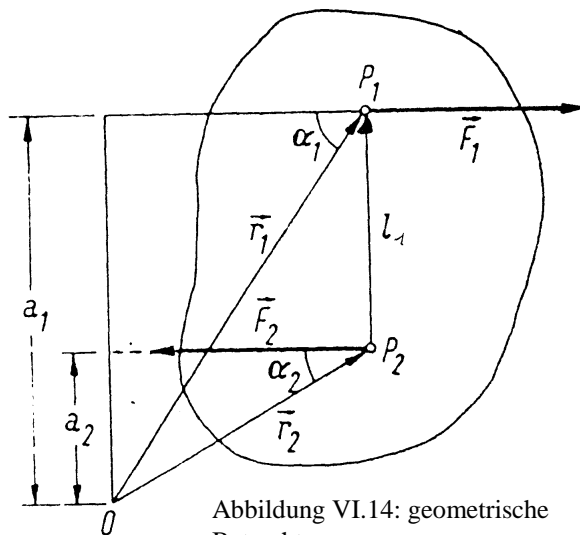


Abbildung VI.14: geometrische Betrachtung

Nun wollen wir das Drehmoment für einen beliebigen Bezugspunkt 0 eines beliebigen Körpers berechnen. Dazu sollen zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$  betrachtet werden, an denen die Kräfte  $\vec{F}_1$  und  $\vec{F}_2$  angreifen. Die beiden Kräfte erfüllen die Bedingungen für ein Kräftepaar. Das Drehmoment um Punkt  $P_1$  beträgt nach der allgemeinen Definition

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$$

analog für  $P_2$

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2)$$

Für die Beträge gilt dann

$$\tau = (r_1 F_1 \sin(\alpha_1)) + (r_2 F_2 \sin(\alpha_2))$$

Die geometrische Betrachtung zeigt, daß die Beziehung  $a_i = r_i \cdot \sin(r_i, F_i)$  gilt. Damit folgt

$$\Leftrightarrow \tau = a_1 F_1 + a_2 F_2$$

mit  $F_1 = -F_2$

$$\Leftrightarrow \tau = (a_1 - a_2) F_1$$

mit  $a_1 - a_2 = \ell$

$$\Leftrightarrow \tau = \ell F_1$$

Der Betrag des Drehmoments hängt also nur vom senkrechten Abstand der Punkte und vom Kräftepaar ab.

Als allgemeine Formulierung kann festgehalten werden:

Zu jedem Kräftepaar  $\vec{F}_1$  und  $\vec{F}_2$  gehört ein Drehmoment  $\tau$  mit.  $\vec{\ell}$  ist dabei der Verbindungsvektor der Angriffspunkte von  $\vec{F}_1$  und  $\vec{F}_2$ .

Merke: Ein Kräftepaar dreht einen frei beweglichen Körper so, daß seine Drehung um eine durch den Schwerpunkt gehende Achse erfolgt. Die Drehung ist dabei unabhängig von der Lage des Kräftepaares, da dieses ein freier Vektor ist.

Merke: Ein Kräftepaar kann im starren Körper unter Beibehaltung seiner Richtung verschoben werden, ohne dass das Drehmoment sich ändert.

Für die Rechnung mit Kräftepaaren heißt dieses Ergebnis, daß man das Kräftepaar für die jeweilige Bewegung geschickt verschieben kann, z.B. in den Schwerpunkt der oben berechneten Rolle.

Damit ist der vorangestellte Satz bewiesen:

Merke: Bei frei beweglichen Körpern läßt sich die Bewegung beschreiben durch **Translation des Schwerpunkts** und **Rotation um den Schwerpunkt**.

### VI.3 Trägheitsmoment

Bisher haben wir drei wichtige Analogien zwischen Translation und Rotation herausgearbeitet:

	<b>Translation</b>		<b>Rotation</b>	
Impuls	$\vec{p}$	$\ddot{U}$	$\vec{L}$	Drehimpuls
Geschwindigkeit	$\vec{v}$	$\ddot{U}$	$\vec{\omega}$	Winkelgeschwindigkeit
Beschleunigung	$\vec{a}$	$\ddot{U}$	$\vec{\alpha}$	Winkelbeschleunigung
Kraft	$\vec{F}$	$\ddot{U}$	$\vec{\tau}$	Drehmoment
Masse	$m$	$\ddot{U}$	?	



Um das Grundgesetz der Mechanik übertragen zu können, fehlt uns nur noch ein Analogon zur Masse. Diese Übertragung der Masse wird Trägheitsmoment genannt. Wie kann man aus dem bisher bekannten eine mathematische Beschreibung des Trägheitsmomentes entwickeln?

Betrachten wir wieder ein einfaches Beispiel:

Ein einfacher Fall eines rotierenden starren Körpers ist eine rotierende Platte, deren Ebene senkrecht zur Rotationsachse ist. Die Platte bestehe aus diskreten Massenpunkten  $m_i$ , die starr miteinander verbunden sind. Dann ergibt sich für die Rotationsenergie  $E_R$ , also die kinetische Energie der Massepunkte  $m_i$ :

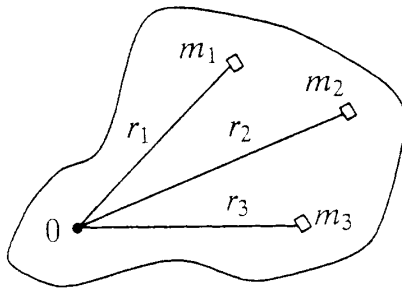


Abbildung VI.15: Massepunkte eines starren Körpers

Für eine Masse  $m_i$

$$E_{Ri} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

für alle  $N$  Massen folgt

$$E_R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2$$

In einem starren Körper haben alle Massepunkte dieselbe Winkelgeschwindigkeit.

Also gilt mit  $v = \omega r$

$$\Leftrightarrow E_R = \frac{1}{2} \sum m_i (\omega r_i)^2$$

mit  $\omega = \text{const.}$

$$\Leftrightarrow E_R = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_i^2$$

Vergleichen wir diese Formel mit der Ausgangsformel für die kinetische Energie:

$$E_R = \frac{1}{2} v^2 m$$

$$E_R = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \sum m_i r_i^2$$

Die bereits bekannte Analogie

$\vec{v} \quad \ddot{U} \quad \vec{\omega}$  zeigt, daß die Ausdrücke

identisch sind, wenn

$$m = \sum m_i r_i^2 \quad \text{ist.}$$

Nun kann man das Trägheitsmoment definieren:

**Definition VI.2: Das Trägheitsmoment eines starren Körpers mit diskreter Massenverteilung bezüglich einer zur Ebenen senkrechten Drehachse wird**

**definiert als** 
$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2,$$

**wobei  $r_i$  der Abstand des Massepunktes  $m_i$  von der Drehachse ist.**

Man hätte auch argumentieren können, daß  $m_i r_i^2$  eine rein geometrische Größe ist, eine Eigenschaft starrer Körper. Dann definiert man eine Abkürzung

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 .$$

Die Rotationsenergie berechnet sich damit als

$$\text{Rotationsenergie} \quad E_R = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

$$\text{analog zur Translationsenergie} \quad E_T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 .$$

Merke: Die **Rotationsenergie** berechnet sich als

$$E_R = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

$$\text{analog zur Translationsenergie } E_T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 .$$

Auch für Rotationsbewegungen gilt die **Energieerhaltung**.

Diese Formel gilt für alle Körper, solange  $\vec{r}_i$  senkrecht auf der Drehachse steht.

Mit dieser Definition kann man nun alle Größen von der Translation auf die Rotation übertragen.

Nun fehlt nur noch der Übertrag dieses Ergebnisses auf kontinuierliche Massenverteilung, also die Summation über infinitesimale Massestücke.

Dementsprechend gilt bei Übergang zur Integration mit dem Abstand  $r$  von der Drehachse:

$$I_Z = \int r^2 dm$$

$$\text{mit der Dichte } \rho = \frac{dm}{dV} \quad \Rightarrow \quad I_Z = \int r^2 \rho dV$$

$I_Z$  ist das Trägheitsmoment in bezug auf die Drehachse  $z$ .

**Definition VI.3: Das Trägheitsmoment eines starren Körpers mit kontinuierlicher Massenverteilung bezüglich einer zur Ebenen senkrechten**

**Drehachse  $z$  wird definiert als**  $I_Z = \int r^2 \rho dV,$

**wobei  $r_i$  der Abstand des Massepunktes  $m_i$  von der Drehachse ist.**

Damit läßt sich das Grundgesetz der Mechanik auch auf die Rotation übertragen. Dazu sollen die Größen Drehimpuls und Drehmoment mit den Variablen Winkelgeschwindigkeit,

Winkelbeschleunigung und Trägheitsmoment geschrieben werden. Zunächst berechnen wir den

Drehimpuls:  $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$

mit  $p_i = m_i v_i \Rightarrow \vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$

und mit  $r_i \perp v_i \Rightarrow \vec{L}_i = m_i r_i v_i \vec{e}_i$

mit  $\vec{e}_i =$  Einheitsvektor in Richtung  $L_i$

mit  $v = \omega r \Rightarrow \vec{L}_i = m_i r_i^2 \omega \vec{e}_i$

$\Rightarrow \vec{L} = m_i r_i^2 \vec{\omega}$

falls  $\vec{r} \perp$  auf der Drehachse steht, wie in unserem Beispiel angenommen wurde.

Damit gilt für den Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \vec{\omega}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{L} = I \vec{\omega}}$$

Merke: Der **Drehimpuls** läßt sich analog zum Impuls  $\vec{p} = m\vec{v}$  darstellen als  $\vec{L} = I\vec{\omega}$

Eine analoge Berechnung zeigt, daß aus dem Drehmoment  $\vec{\tau}$

mit  $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

und  $\vec{L} = I\vec{\omega} \Rightarrow \vec{\tau} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ ,

mit  $\frac{d\omega}{dt} = \alpha \Rightarrow \vec{\tau} = I \cdot \vec{\alpha}$  analog zu  $\vec{F} = m\vec{a}$  folgt.

Merke: Das **Drehmoment** läßt sich analog zur Kraft  $\vec{F} = m\vec{a}$  darstellen als.

### VI.4 Drehimpulserhaltung

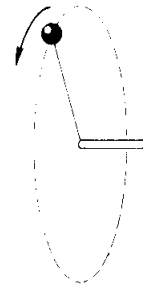
Wenn das resultierende externe Drehmoment null ist, bleibt der totale Drehimpulsvektor eines abgeschlossenen Systems konstant. Diese Aussage ist analog zu der Impulserhaltung der Translationsbewegung.

**Drehimpulserhaltung:** Ist das resultierende Drehmoment eines Systems null, so ist der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße.  
Aus  $\vec{\tau} = 0$  folgt  $\vec{L} = \text{const.}$

Ist das Drehmoment null und damit der Drehimpuls,, konstant, muss das aber nicht bedeuten, dass damit auch Winkelgeschwindigkeit und Trägheitsmoment konstant sein müssen. Zur Veranschaulichung dieses Sachverhalts dient der nächste Versuchsblock:

#### Versuch VI.4: rotierender Ball

Dieser Versuchsaufbau besteht aus einem Eisengestell, das einen Winkel darstellt, so daß eine Stange parallel zu Boden in einigem Abstand dazu montiert ist. An dieser Stange wird ein Ball an einem Faden festgeknotet. Versetzt man nun diesen Ball einmal in Rotation um die Stange, so wirkt nach dem Anstoßen kein Drehmoment mehr, der Drehimpuls ist konstant. Dennoch kann man beobachten, daß der Ball, je mehr sich der Faden um die Stange wickelt, immer schneller rotiert. Die Länge des Fadens stellt den oben benutzten Vektor  $r$ , also den Abstand der Masse von der Drehachse dar. Verringert sich dieser Abstand, so wird auch das Trägheitsmoment kleiner. Da das Produkt aus Trägheitsmoment und Winkelgeschwindigkeit konstant bleibt, muß sich die Winkelgeschwindigkeit erhöhen - der Ball rotiert schneller.



#### Versuch VI.5: Drehschemel

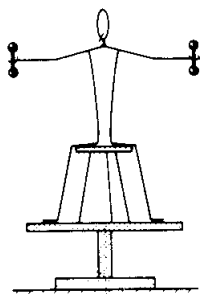


Abbildung VI.16:  
Schemazeichnung  
Versuch VI.5

Dasselbe Prinzip liegt diesem Versuch zugrunde. Eine Testperson setzt sich auf einen drehbaren Schemel und nimmt in beide Hände ein möglichst großes Gewicht. Bei ausgestreckten Armen wird die Person mit dem Stuhl angestoßen und so in Rotation versetzt. Beide drehen sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit. Zieht die Person nun die Gewichte an den Körper, so verringert sie ihr Trägheitsmoment und vergrößert damit die Winkelgeschwindigkeit.

Dieses Prinzip machen sich nicht nur gelangweilte Schreibtischstuhl - Benutzer zunutze, sondern z.b. auch Eiskunstläufer, die bei einer Pirouette den Schwung holen, in dem sie alle Gliedmaßen möglichst weit vom Rumpf weg strecken. Zum Drehen ziehen sie dann die Arme an den Körper um das Trägheitsmoment zu verringern.



Abbildung VI.17:  
Pirouette

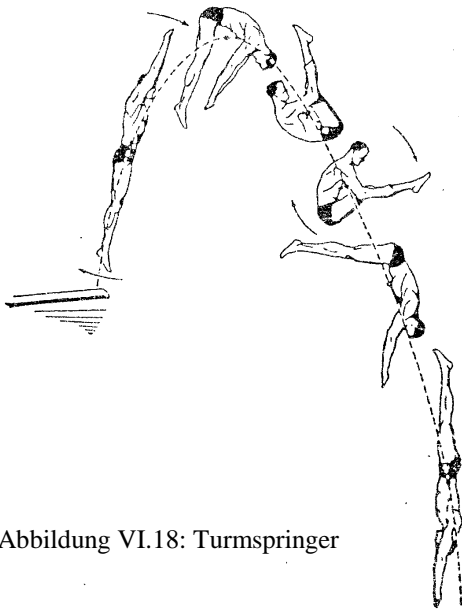


Abbildung VI.18: Turmspringer

Aus demselben Grund verringern auch Turmspringer vor einem Salto ihre Spannweite und damit das Trägheitsmoment. Der Anfangsdrehimpuls ist durch den Absprung festgelegt. Die Regelung der Umdrehungszahlen kann dann nur noch durch Änderung des Trägheitsmomentes erfolgen. Bei einem Turmspringer werden dabei Verhältnissen von  $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$  durch Änderung des Trägheitsmomentes erreicht.

Wenn die Winkelgeschwindigkeit  $\omega'$  verändert wird, z.B. verdreifacht, dann durch die Veränderung des Trägheitsmomentes um denselben Faktor.

$$\text{Aus } \omega' = 3 \omega_0 \quad \Rightarrow \quad I' = \frac{1}{3} I_0,$$

$$\text{da} \quad I_0 \omega_0 = I' \omega'$$

aufgrund der Drehimpulserhaltung gelten muß.

$$\text{Für die Rotationsenergie gilt dann aber} \quad \frac{1}{2} I' \omega'^2 > \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2$$

Der Gewinn an Rotationsenergie muß von dem Springer durch Arbeit erbracht werden. Gegen die Zentrifugalkraft muß er Arbeit leisten, um die Arme und Beine anziehen zu können.

### Versuch VI.6: Keltisches Wackelholz

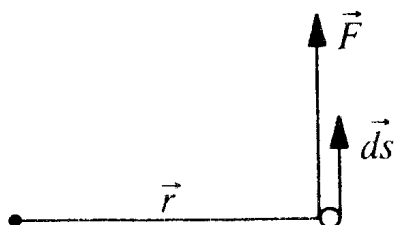
Das keltische Wackelholz ist ein Holzstück, das in Form eines Schiffsrumpfes geschnitzt ist. Drückt man eine Ecke senkrecht nach unten, so erwartet man, eine senkrechte Wippbewegung ähnlich einer Wippe. Diese Erwartung wird jedoch nicht erfüllt: Das Wackelholz beginnt zu rotieren. Da dem Holz nur ein Drehmoment in Richtung der waagerechten Achse gegeben wurde, scheint durch eine Drehung des Holzes um die waagerechte Achse das eben errechnete Gesetz widerlegt. Die Erklärung ist jedoch nicht ganz so spektakulär:

Das Holz ist unsymmetrisch gebaut worden, indem ein schweres Metallstück auf einer Seite eingelassen wurde. Dadurch liegt der Schwerpunkt nicht im erwarteten Symmetriepunkt. Das ausgeübte Drehmoment hat damit eine kleine Komponente längs der senkrechten Achse und das Holz dreht sich.

## VI.5 Arbeit und Leistung

In der Dynamik der gradlinigen Bewegungen hatten wir die Arbeit definiert als Produkt aus zurückgelegtem Weg und dabei aufgebrachtener Kraft:

$$dW = d\vec{s} \cdot \vec{F}$$



Betrachtet man einen Massepunkt  $m$ , der bei einer Kreisbewegung ein Stück des Weges  $d\vec{s}$  eines Kreises vom Radius  $r$  zurücklegt, so zeigt die geometrische Skizze den Zusammenhang

$$d\vec{s} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}.$$

Abbildung VI.19: Massepunkt  $m$ , der bei einer Kreisbewegung ein Stück des Weges  $d\vec{s}$  eines Kreises vom Radius  $r$  zurücklegt

Die dabei geleistete Arbeit zeigt der Vergleich mit der Formel aus der Translation

$$dW = (d\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{F}$$

Mit der mathematischen Beziehung

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

gilt ebenso

$$dW = d\vec{\varphi} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$$

mit  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$\Rightarrow dW = d\vec{\varphi} \cdot \vec{\tau}$$

Merke: Die **Arbeit bei einer Rotationsbewegung** errechnet sich als

$$dW = d\vec{\varphi} \cdot \vec{\tau}$$

analog zur Arbeit der Translationsbewegung  $dW = d\vec{s} \cdot \vec{F}$

Die Leistung war definiert als

$$P = \frac{dW}{dt}$$

mit dem obigen Ergebnis folgt dann

$$P = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \cdot \vec{\tau}$$

mit  $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$  folgt

$$P = \vec{\omega} \cdot \vec{\tau}$$

Merke: Die **Leistung bei einer Rotationsbewegung** errechnet sich als

$$P = \vec{\omega} \cdot \vec{\tau}$$

Im Folgenden betrachten wir die Leistung einer Rotationsbewegung anhand eines Motors:

## Versuch VI.6: Messung der Stärke eines Motors durch Bestimmung seines Drehmomentes

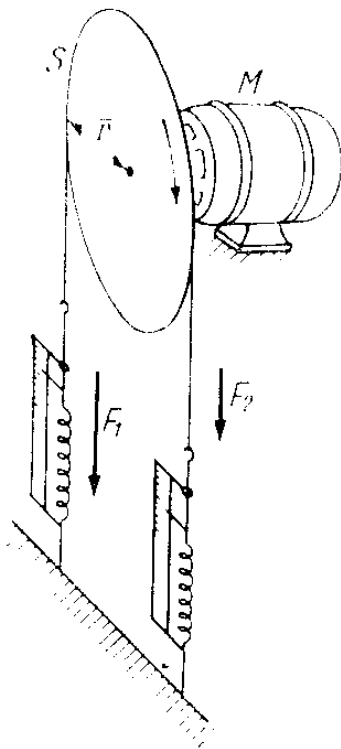


Abbildung VI.20: Leistung eines Motors

Bei diesem Versuch soll die Eingangsleistung eines Motors mit seiner Ausgangsleistung verglichen werden. Als Versuchsanordnung wird ein Motor M, der über eine Welle angetrieben wird, mit einer Riemenscheibe S des Radius  $r$  verbunden. Über die Scheibe wird ein Riemen gelegt, der durch Ziehen gespannt werden kann. An den beiden Enden des Riemens werden Federwaagen befestigt. Zunächst läßt man den Riemen locker hängen und mißt im Leerlauf die Umlauffrequenz  $\nu$ , die sich einstellt, wenn der Motor läuft. Danach spannt man den Riemen bis der Motor die Scheibe nicht mehr beschleunigen kann. Dann wird das Motordrehmoment grade von Gesamtdrehmoment der Feder ausgeglichen. Die Federn sind ungleich gedehnt. Auf der einen Seite wirkt die Kraft  $F_1$ , auf der anderen die Kraft  $F_2$ .

Im Bezug auf die Achse wirken dann die Drehmomente dieser beiden Kräfte einander entgegen, das Gesamtdrehmoment berechnet sich also als

$$\tau_G = (F_1 - F_2)r \quad \curvearrowright$$

Die Motorleistung  $P$  läßt sich dann berechnen aus

$$P = \vec{\tau}_G \cdot \vec{\omega}$$

Für den Betrag folgt mit  $\curvearrowright$

$$P = (F_1 - F_2)r \cdot \omega,$$

mit  $\omega = 2\pi\nu$  folgt

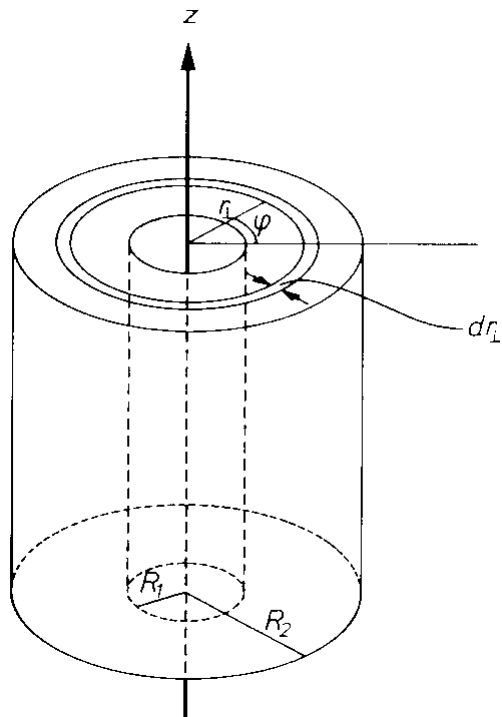
$$P = (F_1 - F_2)r \cdot 2\pi\nu.$$

Die Eingangsleistung wird berechnet als Produkt von Stromstärke  $I$  und Spannung  $U$

$$P_E = UI.$$

Ein Vergleich der beiden Leistungen zeigt den Wirkungsgrad dieses Motors, der aufgrund von Energieverlusten, z.B. mechanischer Reibung, wesentlich kleiner als 100% ist.

## VI.6 Konkrete Berechnung eines Trägheitsmoments



Nun betrachten wir ein Beispiel für Berechnung des Trägheitsmomentes. Zunächst soll das **Trägheitsmoment eines Zylinders** berechnet werden:

Wichtig bei der Berechnung eines Trägheitsmomentes ist zunächst die Symmetrieüberlegung. Wenn man die Koordinaten geschickt wählt und kleine Volumenelemente so definiert, daß man ihren Inhalt leicht berechnen und danach über alle Elemente summieren kann, spart man viel Zeit und Arbeit. Suchen wir also 'geschickte' Koordinaten:

Abbildung VI.21: Symmetriebetrachtung bei einem Zylinder

Der erste Versuch gilt den bekannten kartesischen Koordinaten. Nach der Formel für das

Trägheitsmoment  
konstanten Dichte

$$I_Z = \int r^2 \rho dV \quad \text{können wir mit der Bedingung einer}$$

$$I_Z = \rho \int r^2 dV \quad \text{schreiben.}$$

Der Zylinder habe die Dicke, bzw. Länge  $\ell$  und den Radius  $R$ . Nun muß das Integral über das Volumen

$$dV = \rho dx dy dz \quad \text{berechnet werden, also}$$

$$I_Z = \int r^2 \rho dx dy dz = ?$$

Dieser Ansatz sieht kompliziert aus. Deshalb versuchen wir einen neuen Ansatz mit Zylinderkoordinaten. Dazu betrachten wir einen infinitesimal dünnen Hohlzylinder mit dem Radius  $r$  und der Dicke  $dr$ . Jetzt kann das Volumen direkt angegeben werden als Produkt aus Grundfläche  $r^2 \pi$  und Höhe des Zylinders  $\ell$ . Damit gilt

Volumen

$$V = r^2 \pi \cdot \ell$$

$$\Rightarrow dV = \ell \cdot 2\pi \cdot r dr$$

mit  $\rho = \frac{dm}{dV}$

$$\Rightarrow dm = \rho \ell 2\pi r dr$$



$$\begin{aligned}
\text{Aus } I_Z = \int r^2 dm & \Rightarrow I = 2\pi\rho\ell \cdot \int_0^R r^3 dr \\
& \Rightarrow I = 2\pi\rho\ell \cdot \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R \\
& \Rightarrow I = 2\pi\rho\ell \cdot \frac{R^4}{4} \\
& \Rightarrow I = \rho \cdot R^2 \pi \ell \cdot \frac{R^2}{2}
\end{aligned}$$

$$\text{Mit } V = R^2 \pi \cdot \ell \quad \Rightarrow \quad I = \rho \cdot V \cdot \frac{R^2}{2}$$

Das ist die Formel für das Trägheitsmoment eines Zylinders des Radius R und des Volumens V.

**Merke:** Das **Trägheitsmoment eines Vollzylinders** beträgt

$$I = \rho \cdot V \cdot \frac{R^2}{2}$$

Wenn man nun zwei Zylinder derselben Masse eine schiefe Ebene herunter rollen lassen, müßten diese dieselbe Bewegung ausführen, wenn sie dasselbe Volumen und denselben Radius haben. Dieses Ergebnis betrachten wir bei einem Experiment:

### Versuch VI.7: Zwei 'identische' Zylinder

Bei diesem Versuch werden zwei Zylinder derselben Masse und Abmessungen eine schiefe Ebene herunter rollen gelassen. Wider Erwarten rollt ein Zylinder schneller als der andere. Gehen wir wieder davon aus, daß die berechneten Prinzipien nicht falsch waren, muß analog zum Wackelholz auch hier eine Größe nicht das sein, was wir vermuten. Das Ergebnis findet sich beim Öffnen der Körper: ein Zylinder ist hohl. Berechnen wir nun, welcher Zylinder der schnellere ist:

Hierfür benötigen wir das Trägheitsmoment. Mit einer analogen Rechnung folgt dann für das Trägheitsmoment des Hohlzylinders:

$$I_H = MR^2$$

Genauer

$$I_H = \frac{M}{2} (R_a^2 + r_i^2)$$

Trägheitsmoment des Vollzylinders:

$$I_V = \frac{MR^2}{2}$$

Für die Kräfte, die auf rollende Zylinder wirken, gilt nach Seite 147:

$$\text{Kraft zur Beschleunigung} \quad ma = mg \sin\varphi - f \quad \hat{E}$$

mit  $M = R \cdot f = I_Z \alpha \quad \neg$

mit  $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

und  $\omega = \frac{v}{R}$   $\Leftrightarrow \alpha = \frac{d\left(\frac{v}{R}\right)}{dt}$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \frac{1}{R}$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{a}{R} \quad \neg$

In  $\neg \Rightarrow M = R \cdot f = I_Z \frac{a}{R}$

mit  $I_Z =$  Trägheitsmoment um Symmetrieachse

Der Vergleich mit  $\hat{E}$  führt zu dem Ergebnis

$$a = \frac{g \sin \varphi}{1 + I / R^2 m}$$

Einsetzen der Trägheitsmomente für Vollzylinder und Hohlzylinder ergibt:

Vollzylinder:  $a = \frac{2}{3} g \sin \varphi$

$\frac{1}{3}$  der Kraft wird auf Rotation verwendet.

Hohlzylinder:  $a = \frac{1}{2} g \sin \varphi$

$\frac{1}{2}$  der Kraft wird auf Rotation verwendet.

Der Vollzylinder hat die größere Beschleunigung und rollt deshalb schneller.

Merke: Das **Trägheitsmoment eines Hohlzylinders** beträgt

$$I_H = \frac{M}{2} (R_a^2 + r_i^2).$$

Ein anderes Beispiel für die Berechnung einer Rotationsbewegung mit Hilfe des Trägheitsmomentes ist die **Maxwellsche Scheibe**:

Die Maxwellsche Scheibe ist aufgebaut wie ein Jojo mit einer inneren Scheibe, auf der ein Faden aufgerollt ist und einer äußeren Scheibe. Läßt man das Jojo fallen, während man den Faden festhält, wirken Erdanziehung und Fadenspannkraft. Der Schwerpunkt des Jojos, an dem

die Anziehungskraft der Erde angreift, liegt im Mittelpunkt der beiden konzentrischen Scheiben. Der Punkt, an dem die Kraft über den Faden angreift, liegt jedoch auf einem Punkt der inneren Scheibe. Die beiden Kräfte lassen sich wieder zerlegen in eine Restkraft und ein Kräftepaar. Das Jojo rotiert und läuft dabei nach unten. Ist der Faden jedoch ganz abgewickelt, läuft das Jojo wieder bis zum Ausgangspunkt hinauf. Die durch Heben des Jojos geschaffene potentielle Energie wird während des Vorgangs u.a. in Rotationsenergie umgewandelt. Offensichtlich wirkt die Energieerhaltung auch bei der Umwandlung von potentieller Energie in Rotationsenergie. Am untersten Punkt muß zudem die Drehimpulserhaltung das 'Aufwickeln' des Fadens auf dem Weg nach oben bewirken. Diese Prinzipien wollen wir nun mathematisch zusammenfassen, um die Beschleunigung zu berechnen, mit der die Scheibe nach unten läuft.

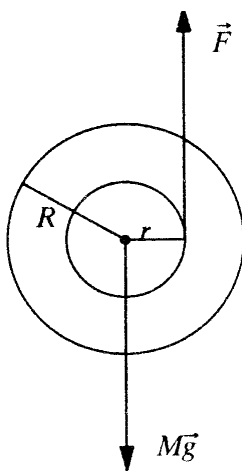


Abbildung VI.22:  
Maxwellsche Scheibe

Die Fadenkraft  $\vec{F}$  greift an einem Punkt, der um den kleinen Radius vom Schwerpunkt entfernt liegt, senkrecht nach oben an.

Die Erdanziehungskraft  $\vec{G}$  greift im Schwerpunkt senkrecht nach unten an.

Die Resultierende der beiden Kräfte ist eine Kraft, die im Newton'schen Sinne eine Beschleunigung verursacht. Es gilt also:

$$\begin{aligned} M\vec{a} &= M\vec{g} + \vec{F} \\ \Leftrightarrow -\vec{F} &= M(\vec{g} - \vec{a}). \quad \hat{E} \end{aligned}$$

Die Fadenkraft  $\vec{F}$  ist uns leider nicht direkt über eine bekannte Formel zugänglich, wir wissen aber, daß die Fadenkraft ein

Drehmoment auf die Scheibe ausübt.

Da die Verbindungslinien  $\vec{r}$  senkrecht auf  $\vec{F}$  steht, kann mit Beträgen gerechnet werden. Statt  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$  können wir das

Drehmoment  $\tau = r \cdot F$  benutzen.

Ebenso gilt  $\tau = I \frac{d\omega}{dt}$ .

Aus  $\tau = r \cdot F$  und  $\tau = I \frac{d\omega}{dt}$  folgt  $r \cdot F = I \frac{d\omega}{dt}$ .

$$\Leftrightarrow r \cdot F = I \cdot \frac{1}{r} \frac{dv}{dt}$$

$$\Leftrightarrow r \cdot F = I \cdot \frac{a}{r}$$

$$\Leftrightarrow F = I \cdot \frac{a}{r^2}$$

Setzen wir diesen Ausdruck für die Fadenkraft in den Betrag von  $\hat{E}$  ein, so folgt

$$M(g - a) = I \cdot \frac{a}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow Ia = r^2 M (g - a)$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{r^2 M g}{I + r^2 M}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{g}{1 + I / r^2 M}$$

Setzen wir in diese Formel für die Beschleunigung eines Jojos noch das Trägheitsmoment einer Scheibe, bzw. eines Zylinders ein, so folgt

$$\text{mit } I = \frac{MR^2}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{g}{1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{r^2}}$$

Ist  $R^2/r^2$  also wesentlich größer als 1, so rollt die Scheibe äußerst langsam ab.

### **Versuch VI.8: Maxwellsche Scheibe an einer Waage**

Bei diesem Versuch wird eine Maxwellsche Scheibe an eine Schale einer Waage gehängt.

1) Im aufgerollten Zustand des Jojo wird die Waage justiert, indem man in die andere Waagschale Gewichte legt. Das Jojo ist so gewählt, daß der äußere Radius erheblich größer ist als der innere.

2) Läßt man nun das Jojo herunter laufen, so geht die Waagschale mit dem Jojo nach oben; sie zeigt ein kleineres Gewicht als vorher an. Das läßt sich so begründen:

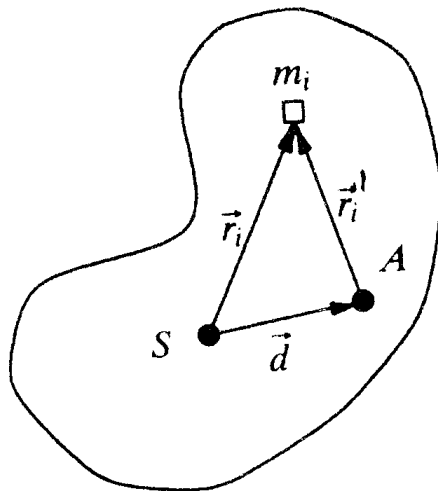
Im Zustand 1) wirkt auf die Schale nur die Anziehungskraft der Erde  $G = Mg$ .

Läuft das Jojo, so wirken die oben aufgestellten Kräfte. Der Vergleich der Kräfte zeigt, daß die Kraft im Zustand 2) kleiner ist als die erste. Diese Differenz zeigt die Waage an.

3) Nachdem das Jojo umgeschlagen ist, zeigt die Waage beim Hinauflaufen wieder ein geringeres Gewicht an. Auch hier müssen wieder beide Kräfte von oben betrachtet werden. Diesmal wirkt die Beschleunigung  $a$  zwar als Verzögerung nach oben, sie hat aber ein negatives Vorzeichen. Damit wirkt die Resultierende wieder nach unten und die wirkende Kraft wird verringert.

## VI.7 Steinerscher Satz

Bis jetzt haben wir gelernt, Rotationen um Symmetrieachsen zu beschreiben, indem wir das Trägheitsmoment bezüglich dieser Achse berechnet haben. Wollen wir nun die Rotation um eine andere als die Symmetrieachse berechnen, geraten wir in Schwierigkeiten. Bei der Berechnung des Trägheitsmoments haben wir uns die Symmetrie zunutze gemacht, um mit geeigneten Koordinaten rechnen zu können. Nun müssen wir uns darauf aufbauend eine



Möglichkeit überlegen, die Rotation um beliebige Achsen zu berechnen. Dabei wollen wir uns aber auf Achsen beschränken, die parallel zur Symmetrieachse verlaufen.

Gegeben sei das Trägheitsmoment um die Symmetrieachse S. Gesucht ist das Trägheitsmoment um die dazu parallele Achse A. In der Skizze sind die Radiusvektoren eines Massepunktes  $m$  von den Achsen eingezeichnet.

Abbildung VI.23: Zum Steinerschen Satz

$\vec{r}_i$  sei der Radiusvektor bezüglich S

$\vec{r}_i'$  sei der Radiusvektor bezüglich A und

$\vec{d}$  sei der Abstand der Achsen S und A.

Dann gilt

$$\vec{r}_i' = \vec{d} + \vec{r}_i$$

$$\Leftrightarrow r_i'^2 = r_i^2 + d^2 + 2 \vec{r}_i \cdot \vec{d}$$

Daraus folgt für das Trägheitsmoment bezüglich A mit

$$I_A = \int_V r_i'^2 dm$$

$$\Rightarrow I_A = \int_V r_i^2 dm + \int_V d^2 dm + 2 \int_V \vec{r}_i \cdot \vec{d} dm$$

laut Definition ist

$$\int_V r_i^2 dm = I_s$$

mit konstantem Abstand  $d$  und der Gesamtmasse  $M$  gilt

$$\int_V d^2 dm = M d^2$$

Da  $\vec{r}_i \frac{\vec{d}}{d} =$  Projektion von  $\vec{r}_i$  auf  $\vec{d}$  ist, d.h. das Integral  $\int_V \vec{r}_i \frac{\vec{d}}{d} dm$  die

Schwerpunktsdefinition bezüglich der Richtung von  $\frac{\vec{d}}{d}$  ist, folgt

$$d \int_V \vec{r}_i \frac{\vec{d}}{d} dm = 0$$

Zusammengefaßt gilt dann:

$$I_A = I_s + M d^2$$

Diese einfache Formel zum Berechnen eines Trägheitsmoment bezüglich einer Rotationsachse parallel zu Symmetrieachse wird Steinerscher Satz genannt.

**Steinerscher Satz:** Ist  $I_s$  das Trägheitsmoment für eine Rotationsachse durch den Schwerpunkt, so gilt für eine parallele Achse durch A im Abstand  $d$  zur Rotationsachse

$$I_A = I_s + M d^2.$$

### VI.8 Zusammenfassender Vergleich Rotation - Translation

Jetzt können wir abschließend eine komplette Gegenüberstellung der Größen in der Translation und der Rotation vornehmen. Die englischen Begriffe sind ebenfalls angeführt. Sie werden bei der Lektüre englischer Fachliteratur benötigt und helfen zudem, sich die Abkürzungen der einzelnen Größen zu merken.

Rectilinear Motion geradlinige Bewegung - Translation		Rotation about a Fixed Axis Rotation um eine feste Achse	
Displacement <i>Verschiebung</i>	$\mathbf{x}$	$\theta$	Angular displacement <i>Winkelverschiebung</i>
Velocity <i>Geschwindigkeit</i>	$dx/dt = \mathbf{v}$	$\omega = d\theta/dt$	Angular velocity <i>Winkelgeschwindigkeit</i>
Acceleration <i>Beschleunigung</i>	$dv/dt = \mathbf{a}$	$\alpha = d\omega/dt$	Angular acceleration <i>Winkelbeschleunigung</i>
Mass (translational inertia) <i>Masse</i>	$\mathbf{M}$	$\mathbf{I}$	Rotational inertia <i>Trägheitsmoment</i>
Force <i>Kraft</i>	$M\mathbf{a} = \mathbf{F}$	$\tau \equiv M = I\alpha$	Torque <i>Drehmoment</i>
Work <i>Arbeit</i>	$\int Fdx = W$	$W = \int \tau d\theta$	Work <i>Arbeit</i>
Kinetic energy	$\frac{1}{2} Mv^2$	$\frac{1}{2} I\omega^2$	Kinetic energy
Power <i>Leistung</i>	$Fv = P$	$P = \tau \omega$	Power <i>Leistung</i>
Linear momentum <i>Impuls</i>	$Mv = \mathbf{p}$	$\mathbf{L} = I\omega$	Angular momentum <i>Drehimpuls</i>

Tabelle VI.1: Rotation - Translation

Die Beziehungen zwischen den oben angeführten grundlegenden Größen der Translation und der Rotation zeigt die folgende Tabelle.

<b>Rectilinear Motion</b> geradlinige Bewegung - <b>Translation</b>	<b>Verbindende</b> <b>Gleichung</b>	<b>Rotation about a Fixed Axis</b> <b>Rotation um eine feste</b> <b>Achse</b>
Velocity <i>Geschwindigkeit</i>	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$	Angular velocity <i>Winkelgeschwindigkeit</i>
Acceleration <i>Beschleunigung</i>	$\vec{a} = \vec{r} \cdot \alpha$	Angular acceleration <i>Winkelbeschleunigung</i>
Force <i>Kraft</i>	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$	Torque <i>Drehmoment</i>
Linear momentum <i>Impuls</i>	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	Angular momentum <i>Drehimpuls</i>

Tabelle VI.2: Verbindungsgleichungen



### VI.9 Drehung um bewegliche Achsen: Kreisel

Bisher haben wir nur Rotationsbewegungen betrachtet, bei denen das Drehmoment  $\vec{\tau}$  parallel zur Drehachse war. War dies nicht gewährleistet, konnten wir nur die Komponente von  $\vec{\tau}$  betrachten, die in Richtung der Drehachse zeigte.

#### Versuch VI.9: Auf seiner Spitze gelagerter Kreisel

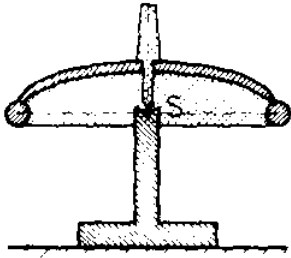


Abbildung VI.24: Kreisel im Schwerpunkt unterstützt

Ein einfaches Beispiel ist der Kreisel, der senkrecht steht und sich um seine Symmetrieachse dreht. Verliert der Kreisel aber durch Reibung an Energie, so führt er eine kompliziertere Bewegung aus. Man kann beobachten, daß ein Kreisel dann aus der senkrechten Anfangslage kippt und sich um sich selbst dreht, wobei die Achse des Kreisels zusätzlich einen Kreis beschreibt.

Diese Bewegung ist mit unseren Mitteln nicht mehr zu beschreiben.

Es gibt viele Beispiele für kompliziertere Kreiselbewegungen:

#### Versuch VI.10: Überkopf - Kreisel

Es gibt Kreisel, die zunächst mit senkrechter Achse rotieren, dann aber plötzlich umkippen und auf dem Kopf weiter drehen.

#### Versuch VI.11: Kreiselkompass

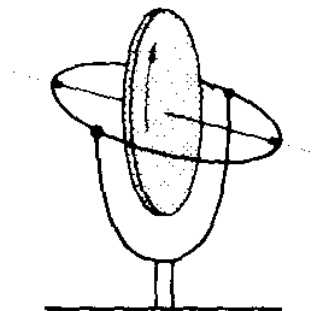


Abbildung VI.25: Prinzip des Kreiselkompasses

Rotationsbewegungen kann man sich in der Technik zunutze machen. Ein Beispiel ist der Kreiselkompass. Der Kompass kann einmal in eine Richtung ausgerichtet werden, dann behält er diese Ausrichtung bei, auch wenn das äußere Gestänge bewegt wird. Grundprinzip dieses Kompasses ist die sogenannte kardalische Aufhängung.

### Versuch VI.12: Kardanisch aufgehängter Kreisel

Betrachten wir einen anderen Aufbau: Eine Scheibe wird so in einem Ring befestigt, daß sie in einer Ebene senkrecht zum Boden frei rotieren kann. Dieser Ring ist fest mit einer Stange verbunden, die ihrerseits zum Erdboden geneigt werden kann. Sie ist mit einem Gewicht so justiert, daß sie senkrecht zum Erdboden steht. Eine zweite Stange vom Boden zur Stange mit dem Ring kann reibungsfrei um ihre eigene Achse rotieren, bleibt dabei aber immer

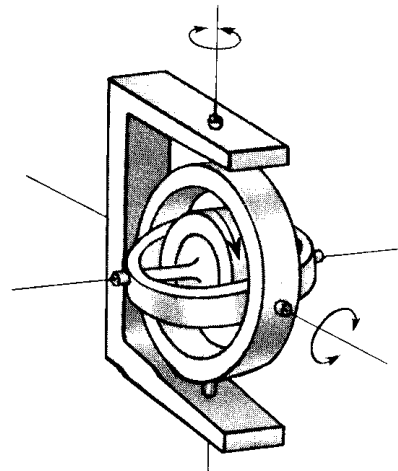


Abbildung VI.26: Kardanisch aufgehängter Kreisel

senkrecht zum Erdboden. Stellt man alle Stangen im rechten Winkel zueinander ein und dreht das Rad

an, so kann die Stange danach frei im Raum ausgerichtet werden, ohne daß sie wieder in die Ausgangslage zurückfällt. Hängt man ein weiteres Gewichtsstück an das dem Rad gegenüberliegende Ende der Stange, so beginnt die Stange sich in Horizontalebene zu drehen.

Wie kann man die in diesen Versuchen beobachteten Bewegungen beschreiben?

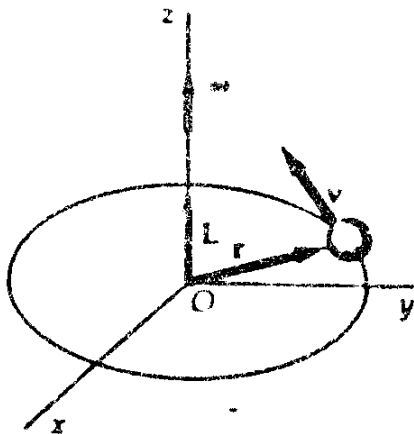


Abbildung VI.27: Teilchen auf Kreisbahn: Drehimpuls bzgl. Keismittelpunkt ist parallel zur Winkelgeschwindigkeit

Offensichtlich müssen wir von der bisherigen Einschränkung abweichen, das Drehmoment sei parallel zur Drehachse (Abbildung VI.27). Damit sind die bisherigen Beziehungen für den idealen kräftefreien Kreisel ( $\vec{\tau} = 0$  und  $\vec{L}$  parallel zu  $\vec{\omega}$  und zur Symmetrieachse) nicht mehr gültig. Wir müssen jetzt Achsen betrachten, deren Richtung sich ändert. Das Drehmoment ist nicht null ( $\tau \neq 0$ ), da der Kreisel nicht im Schwerpunkt aufgehängt ist

Zerlegen wir das Drehmoment in Komponenten parallel zur Drehachse und senkrecht dazu, so können wir die Bewegung aufgrund des parallelen Anteils des Drehmomentes mit dem bisher Erarbeiteten sofort angeben. Welche Wirkung aber haben Komponenten von  $\vec{\tau}$  senkrecht zur Drehachse?

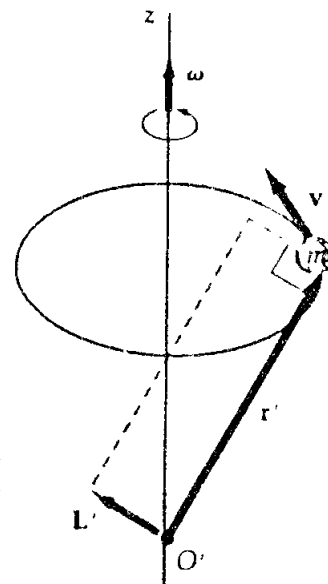


Abbildung VI.28: Drehimpuls bezogen auf einen vom Kreismittelpunkt verschiedenen Nullpunkt. Der Drehimpuls ist nicht parallel zur Winkelgeschwindigkeit.

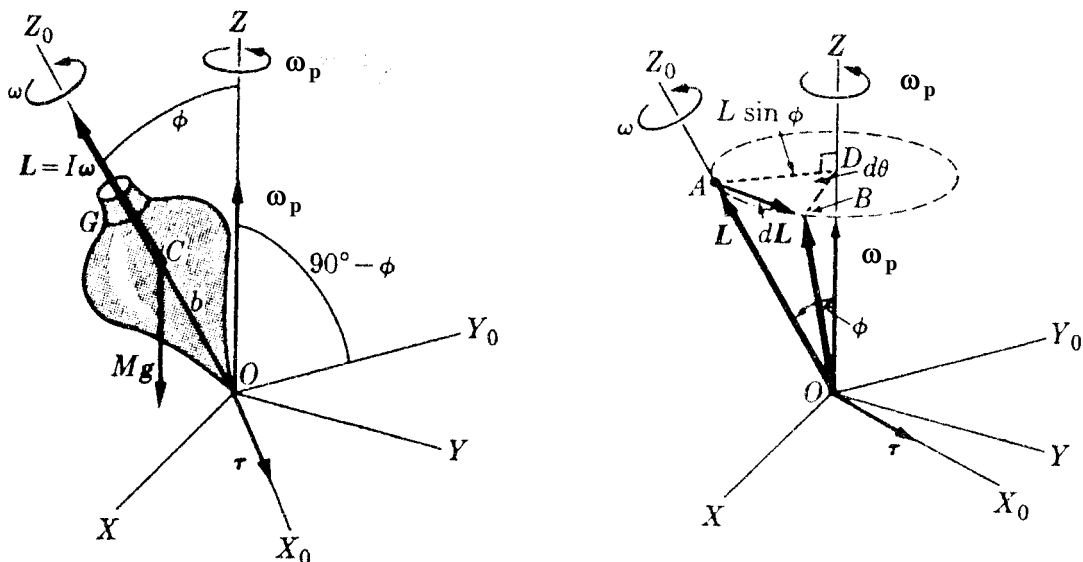


Abbildung VI.29: zeigt einen Kreisel, der sich mit  $\omega$  um die Figurenachsens ( $Z_0$ ) dreht

Abbildung VI.29 zeigt einen Kreisel, der sich mit  $\omega$  um die Figurenachsens ( $Z_0$ ) dreht, und auf den ein Drehmoment  $\vec{\tau}$  wirkt, das nicht verschwindet. Hierdurch ist der Drehimpuls  $\vec{L}$  nicht mehr zeitlich konstant, denn aus

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

folgt mit

$$\vec{\tau} \neq 0$$

$$\Rightarrow \vec{L} \neq \text{const.}$$

Allgemein gilt

$$d\vec{L} = \vec{\tau} dt .$$

Steht das Drehmoment  $\vec{\tau}$  senkrecht zum Drehimpuls  $\vec{L}$  ist die Änderung  $d\vec{L}$  ebenfalls *senkrecht* zu.

Das wirkende Drehmoment  $\vec{\tau}$  ist auf das im Schwerpunkt C wirkende Gewicht  $M\vec{g}$  des Kreisels zurückzuführen und ist gleich dem Vektorprodukt  $\vec{OC} \cdot M\vec{g}$ . Dies bedeutet, daß das Drehmoment  $\vec{\tau}$  senkrecht zu den Achsen Z und  $Z_0$  ist und somit auch zu. Sein Betrag ist

$$|\vec{\tau}| = M g b \sin \phi$$

mit dem Winkel  $\phi$  zwischen Z und  $Z_0$  und  $b = \overline{OC}$ .

Unter Wirkung des Drehmomentes  $\vec{\tau}$  **präzidiert** die Figurenachse  $Z_0$  um die Achse Z mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_p$ . Das Ergebnis der Gleichung lautet

$$d\vec{L} / dt = \vec{\tau}$$

d.h.  $d\vec{L}$  zeigt in die Richtung des Drehmomentes  $\vec{\tau}$ .

Im Folgenden soll die Präzessionsfrequenz  $\omega_p$  berechnet werden. Allgemein gilt

$$\omega_p = d\Theta / dt$$

Die geometrische Betrachtung der Abbildung zeigt die Beziehung:

$$d\Theta = dL / L \sin \phi$$

mit  $d\vec{L} / dt = \vec{\tau} \quad \Rightarrow \quad d\Theta = \tau dt / L \sin \phi$

wenn eine Näherung für kleine Winkel betrachtet werden soll.

$$\Rightarrow \quad \omega_p = \frac{\tau}{L \sin \phi}$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega_p = \frac{M g b \sin \phi}{L \sin \phi}$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega_p = \frac{M g b}{L}$$

mit  $L = I\omega \quad \Leftrightarrow \quad \omega_p = \frac{M g b}{I\omega}$

Benennt man nun das Trägheitsmoment  $Mgb$  als  $\tau$ , dann lautet die Formel

$$\boxed{\omega_p = \frac{\tau}{I\omega}}$$

wobei I das Trägheitsmoment um die Figurenachse des Kreisels und  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels ist.

Diese Formel zeigt, daß der Kreisel schnell präzediert, wenn das Drehmoment  $\tau = Mgb$  groß ist und langsam, wenn der Drehimpuls groß ist. Seine Stabilität gegenüber einwirkenden Drehmomenten ist also um so größer, je größer das Trägheitsmoment und die Winkelgeschwindigkeit sind. Die Richtungen von  $\vec{\omega}_p, \vec{L}$  (oder  $\vec{\omega}$ ) und  $\vec{\tau}$  bilden ein Rechtssystem.

In Vektorschreibweise gilt deshalb

$$\vec{\tau} = \vec{\omega}_p \times \vec{L}$$

$$\vec{\tau} = I(\vec{\omega}_p \times \vec{\omega})$$

oder

Merke: Die **Winkelgeschwindigkeit der Präzession** berechnet sich vektoriell aus

$$\vec{\omega}_p = \vec{\tau} \times \vec{L} \quad \text{bzw.} \quad \vec{\omega}_p = I^{-1}(\vec{\tau} \times \vec{L}).$$

Um diese Überlegung zu verifizieren betrachten wir zwei Versuche:

### Versuch VI.13: Kugelkreisel auf Luftkissen

Bei diesem Versuch wird eine schwere eiserne Kugel mit einer herausschauenden Achse in einer Schale auf einem Luftkissen möglichst reibungsfrei gelagert. Die Kugel wird mit Hilfe einer Schleifmaschine in Rotation versetzt. Zunächst steht die Achse der Kugel senkrecht nach oben. Ist die Kugel so in Rotation versetzt worden, kann man danach die Achse beliebig ausrichten, die Richtung der Achse bleibt erhalten. Hängt man hingegen ein Gewicht an die Achse, so führt die Kugel eine Präzessionsbewegung aus. Sie präzediert um so schneller, je größer die angehängte Masse ist. Nach kurzer Zeit verliert die Kugel trotz Luftkissen durch Reibung Energie. Der Drehimpuls wird dadurch verringert und die Präzession schneller.

Dieser Versuch zeigt, daß die Präzessionsfrequenz nicht vom Winkel, wohl aber von der Masse abhängt.

### Versuch VI.14: Präzession einer Fahrradfelge

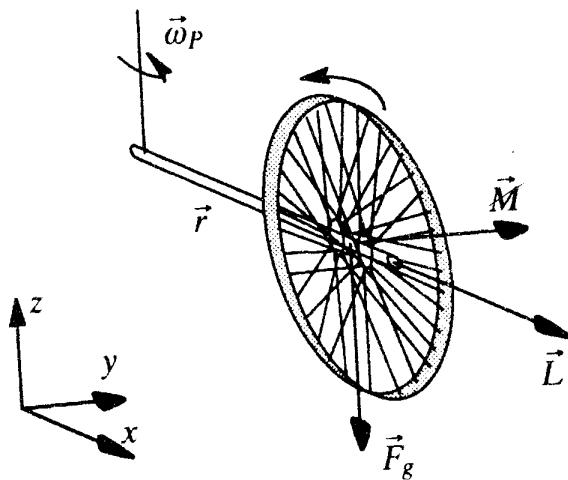


Abbildung VI.30: Versuch VI.14 - Präzession einer Fahrradfelge

Bei diesem Versuch wird eine Fahrradfelge an einem Stab befestigt. Der Stab wiederum ist an einem Seil befestigt, welches festgehalten wird. Wird die Felge in Rotation versetzt, so stellt sie sich auf, bis sie im rechten Winkel zur Erde steht. In dieser Lage rotiert die Felge mit dem Stab um den Aufhängepunkt.

Die Erklärung kann aus der Zeichnung abgelesen werden: Die Vektoren  $\vec{L}$  und  $\vec{F}_g$  bewirken ein Drehmoment.  $\Delta\vec{L}$  zeigt

in die Richtung von  $\vec{\tau}$  in die Zeichenebene hinein.

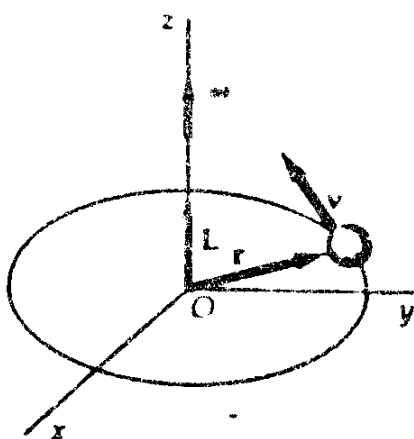
Die Präzessionsfrequenz kann wie oben berechnet werden als:

$$\omega_p = \frac{r \cdot mg}{L}$$

Die Richtung von  $\omega_p$  kehrt sich um, wenn L umgedreht wird.

### VI.10 Unsymmetrische Rotationskörper

In diesem Kapitel betrachten wir wieder feste Rotationsachsen.



1) Das einfachste Beispiel ist ein Massepunkt, der auf einer Kreisbahn um den Nullpunkt rotiert. Wir hatten festgestellt, daß der Drehimpuls als  $\vec{L} = I\vec{\omega}$  geschrieben werden kann, d.h. der Drehimpulsvektor ist parallel zum Vektor der Winkelgeschwindigkeit.

Abbildung VI.31: Teilchen auf Kreisbahn: Drehimpuls bzgl. Keismittelpunkt ist parallel zur Winkelgeschwindigkeit

2) Betrachten wir dieses Beispiel jetzt für dieselbe Bewegung, jedoch mit einem anderen Nullpunkt. Zur Vereinfachung liege der Nullpunkt auf einer Achse durch den Kreismittelpunkt, der z-Achse. Der Radiusvektor  $\vec{r}$ , der Verbindungsvektor des Nullpunktes mit dem Massepunkt, steht jetzt nicht senkrecht auf der Rotationsachse. Dann hat der Drehimpuls  $\vec{L}$  wegen

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

eine Komponente senkrecht zur Drehachse:

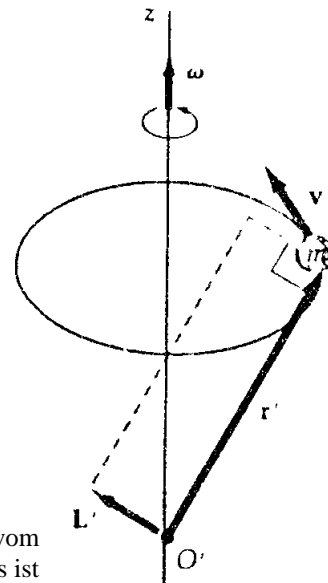


Abbildung VI.32: Drehimpuls bezogen auf einen vom Kreismittelpunkt verschiedenen Nullpunkt. Der Drehimpuls ist nicht parallel zur Winkelgeschwindigkeit.

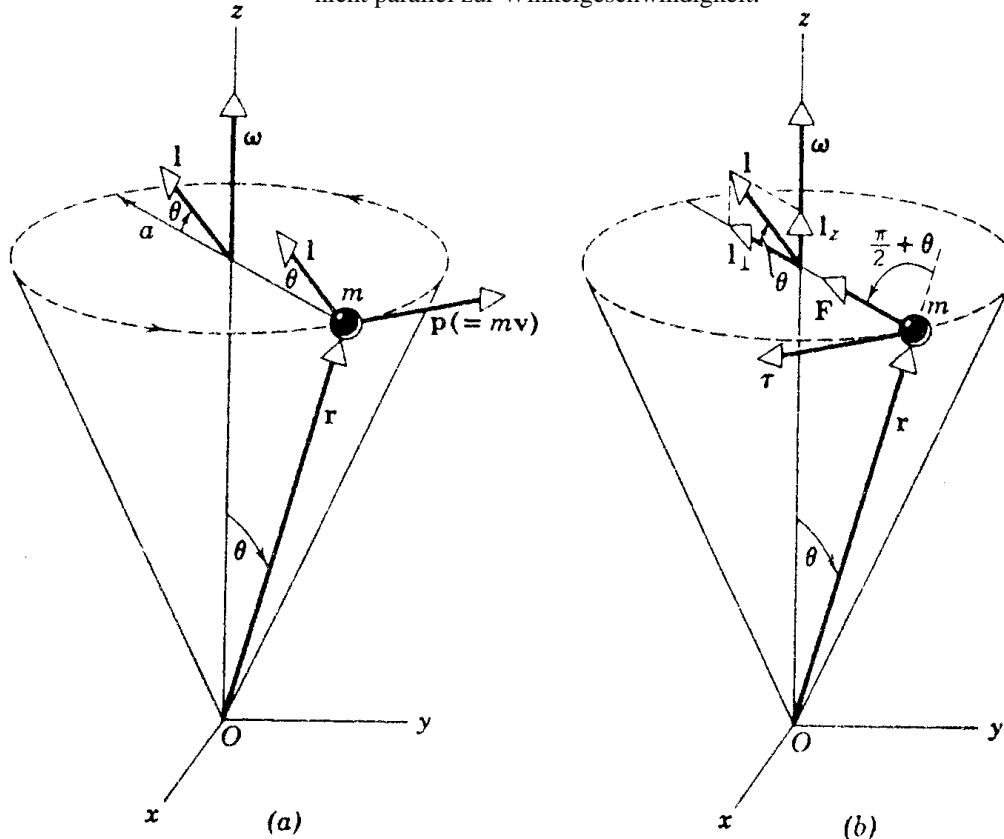


Abbildung VI.33: Geometrische Betrachtung ( $\ell$  entspricht  $\vec{L}$  im Text).

Das Problem bei der Berechnung dieser Bewegung ist, für ein Massenelement  $m_i$  den zugehörigen Drehimpuls  $L_i$  abhängig von der Wahl des Drehpunktes 0 auf der Achse zu

bestimmen. Der Nullpunkt muß also für jeden Körper unter Berücksichtigung der Lagerung der Drehachse geeignet gewählt werden.

In unserem Beispiel drehe  $\vec{L}$  sich im Raum. Dann muß wegen

$$d\vec{L} / dt = \vec{\tau}$$

ein Drehmoment  $\vec{\tau}$  existieren, das  $\Delta\vec{L}$  hervorruft.

Das zugehörige Moment um 0 ist  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_{ZP}$

wobei  $\vec{F}$  die Zentripetalkraft (z.b. Fadenkraft) bezeichnet.

Das Drehmoment  $\vec{\tau}$  hat die Richtung der Bahntangente und damit die Richtung von.

Statt  $\vec{L} = I\vec{\omega}$

gilt jetzt:  $L_Z = I \cdot \omega$

wobei  $L_Z$  und  $\omega$  dieselbe Richtung haben.

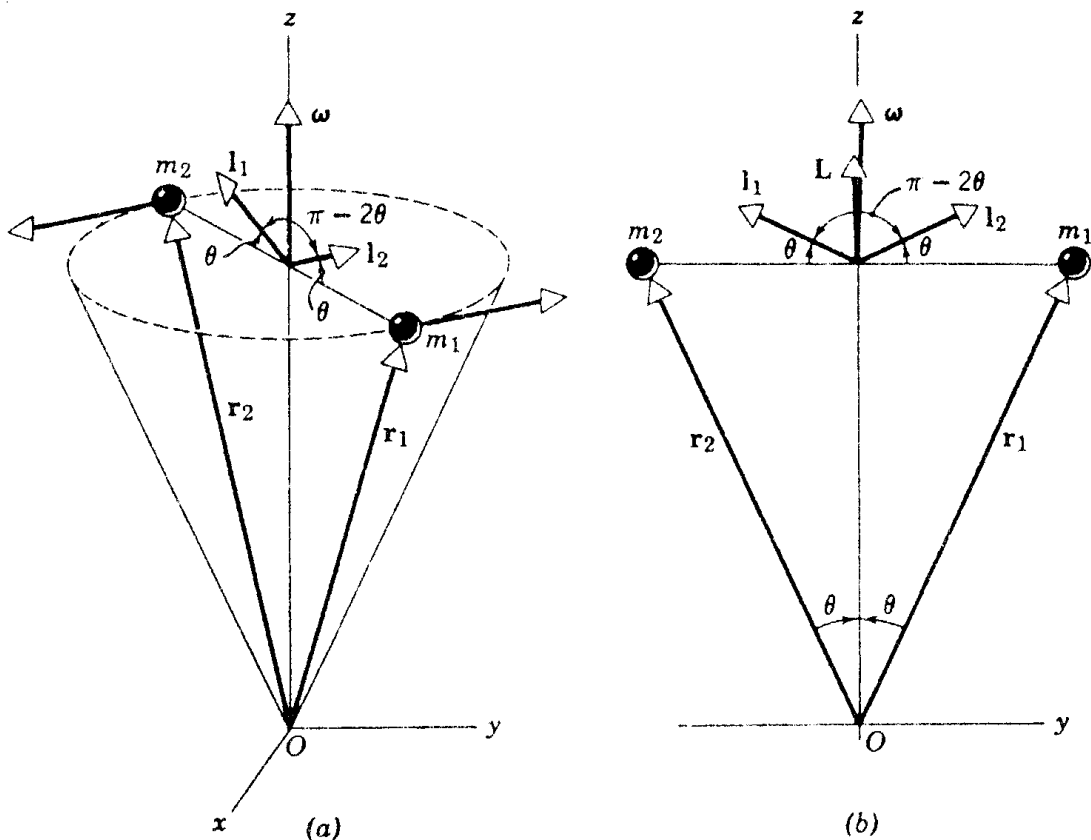


Abbildung VI.34: Rotationssymmetrisches Hantelmodell



3) Ergänzt man die Masse  $m_1$  durch Hinzufügen der Masse  $m_2$  zu einer Hantel, deren Achse senkrecht auf der Drehachse steht, so bekommt man wieder einen rotationssymmetrischen Drehkörper. Jetzt ist

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

$$\Leftrightarrow \vec{L} = (L_{1z} + L_{2z}) \vec{u}_z = \text{const.}$$

Dieser Ausdruck ist unabhängig von der Wahl des Nullpunktes auf der Drehachse. Damit ist

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = 0$$

Diese Berechnung gilt für alle Körper, deren Massenelemente symmetrisch zur Drehachse sind.

Merke: Für alle Körper, deren Massenelemente symmetrisch zur Drehachse sind, gilt:

$$\vec{L} \parallel \vec{\omega} \quad \text{und damit} \quad \vec{L} = I \vec{\omega}.$$

#### 4) Nun betrachten wir ein konkretes **Beispiel eines unsymmetrischen Drehkörpers mit fixierten Achsen**

Eine Hantel liege mit spitzem Winkel  $\Theta$  gegen die Rotationsachse, die geht durch Schwerpunkt der Hantel geht. Durch Zentrifugalkräfte versucht die Hantel, sich senkrecht zur Drehachse zu stellen!

Die Lagerung der Achse muß oben die Kraft  $\vec{F}$  und unten die Kraft  $-\vec{F}$  auf die Achse ausüben, um sie in ihrer Lage zu halten. Dies **Kräftepaar** ergibt ein Drehmoment um C. Das Drehmoment  $\vec{\tau}$  zeigt in Richtung von  $\Delta\vec{L}$  vertikal aus der Zeichenebene heraus. Die Kräfte  $\vec{F}$  drehen sich mit  $\vec{L}$  und verursachen ein „Flattern“ oder eine „Unwucht“ des

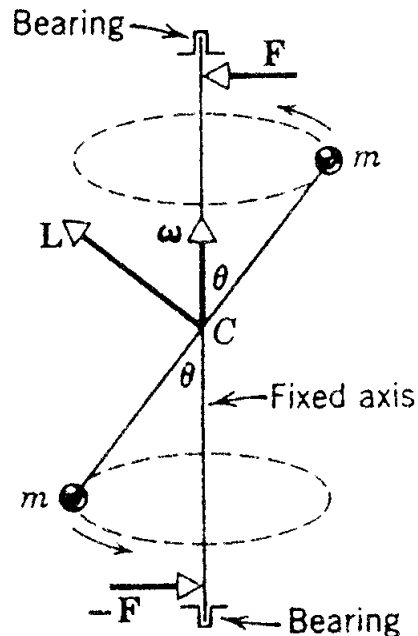


Abbildung VI.35: Beispiel eines unsymmetrischen Drehkörpers mit fixierten Achsen

Rotationskörpers. Da  $\vec{F} \sim \omega^2$  ist, ist das Auswuchten von Rädern für hohe Fahrgeschwindigkeiten z.B. eines Fahrgestells von Flugzeugen, extrem wichtig.

5) Nun berechnen wir ein **Beispiel freier Achsen**.

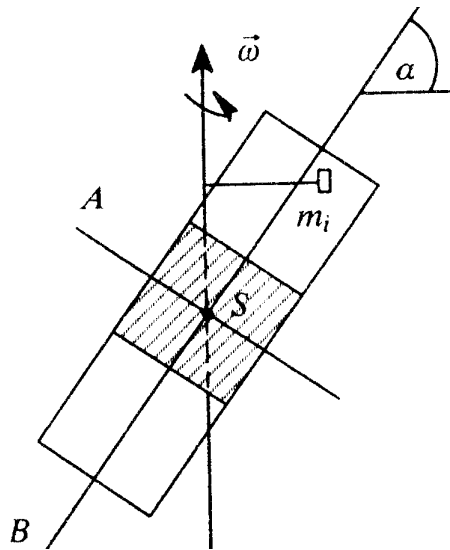


Abbildung VI.36: rotierender zylindrischer Stab

Eine Symmetrieachse definiert für einen Körper ein Hauptträgheitsmoment, wir haben Trägheitsmomente deshalb immer nur bezüglich einer Achse angegeben. Eine Zigarrenkiste z.B. hat 3 Hauptträgheitsmomente. Dreht ein Körper sich um eine beliebige Achse, so ist die Drehung im Allgemeinen nicht stabil. Die bei der Rotation auftretenden Drehmomente sind so, daß nur Drehungen um die Achsen des größten und des kleinsten Drehmomentes stabil sind. Schon kleinste Störungen bringen die Achse des mittleren Trägheitsmomentes aus der Ausgangslage heraus. Die Achse des größten Trägheitsmomentes ist am stabilsten.

Als Voraussetzung legen wir fest, A sei die Hauptträgheitsachse mit dem größtem Trägheitsmoment. Dann gilt allgemein

$$I_A > I_B$$

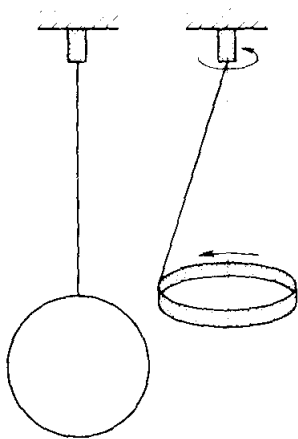
Wenn, wie in unserem Beispiel angenommen, der Winkel  $\alpha = 45^\circ$  ist, dann ist der in der Zeichnung schraffiert dargestellte Teil symmetrisch.

Das resultierende Drehmoment berechnet sich aus den Massen  $m_i$  im unschraffierten Teil, die ein Zentrifugalkraft-Paar erzeugen. Das durch die Zentrifugalkräfte erzeugte Drehmoment wird Deviationsmoment genannt. Eine Drehung erfolgt solange, bis alle Massen symmetrisch verteilt sind. Dann ist A eine stabile Drehachse. Bei einem starren Körper versucht das Deviationsmoment einen Körper so zu drehen, daß er um seine Hauptträgheitsachse rotiert. Ist der Körper nicht frei aufgehängt, wird er durch dieses wirkende Moment verbogen.

Zu diesem Phänomen betrachten wir das Verhalten verschiedener Körper in einem Versuch:

### Versuch VI.15: Rotierende Körper und deren Hauptträgheitsachsen

Bei diesem Versuch werden verschiedene Körper mit Fäden an eine vertikal nach unten gerichtete Achse eines Motors gehängt. Über den Motor können die Körper mit verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten in Rotation um ihre freien Achsen versetzt werden.



Der erste Körper in unserem Versuch ist ein Ring, der zunächst senkrecht herabhängt. Mit steigender Winkelgeschwindigkeit richtet sich der Ring horizontal auf. Der Ring rotierte also zunächst um die Achse mit dem geringsten Trägheitsmoment, danach um die Achse mit maximalem Trägheitsmoment.

Abbildung VI.37: Drehbewegung eines außerhalb des Schwerpunktes unterstützten Ringes

Als zweiten Körper betrachten wir eine Kette, die zunächst glatt herunter hängt. Bei der Rotation weitet sie sich durch die Zentrifugalkräfte zu einem Ring aus und richtet sich dann ebenfalls in die stabilste Lage der Rotation aus. Sie rotiert in horizontaler Lage analog zum Ring.

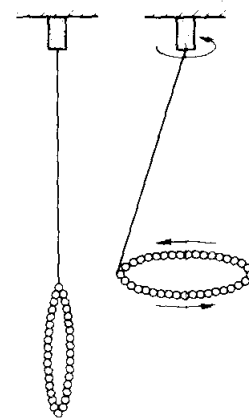
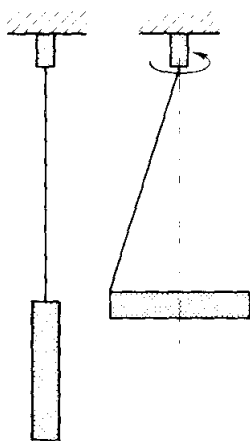


Abbildung VI.38: Drehbewegung einer außerhalb des Schwerpunktes unterstützten Kette



Als dritten Körper versetzen wir einen Stab in Rotation um seine freien Achsen. Auch dieser Körper dreht sich bei größerer Winkelgeschwindigkeit um seine Hauptträgheitsachse, d.h. er rotiert horizontal zur Erde.

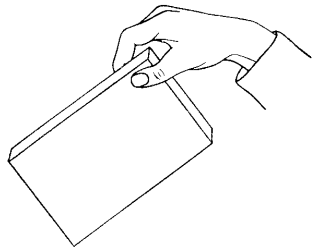
Abbildung VI.39: Drehbewegung eines außerhalb des Schwerpunktes unterstützten zylindrischen Stabs

Man kann für jeden beliebigen Körper drei Achsen finden, die durch den Schwerpunkt gehen und für die das Deviationsmoment null ist.

Diese Achsen sind dann die oben erwähnten Hauptträgheitsachsen. Wie bereits erläutert, hat ein Körper in der Regel verschiedene Trägheitsmomente durch verschiedene Achsen. Die Achsen, zu denen das größte und das kleinste Trägheitsmoment gehört, sind immer freie Achsen, die dritte Hauptträgheitsachse steht senkrecht auf den beiden. Die Drehung um die Achse mit dem kleinsten Trägheitsmoment und um die Achse mit dem größten

Trägheitsmoment ist stabil, die Drehung um die dritte frei Achse ist labil. Diese Tatsache läßt sich leicht an einer Zigarrenkiste verdeutlichen:

### Versuch VI.16: Hauptträgheitsachsen der Zigarrenkiste



Um die Hauptträgheitsachsen zu verdeutlichen kann ein simpler Versuch genutzt werden: Ein Quader, z.b. eine Zigarrenkiste

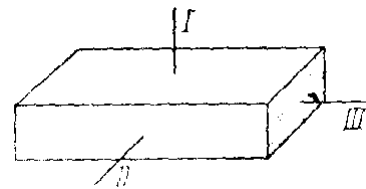


Abbildung VI.40:  
Hauptträgheitsachsen eines Quaders

wird in die Luft geworfen und dabei um verschiedene Achsen gedreht. Beim ersten Wurf versetzt man den Quader in Rotation um die Achse 1 und

beobachtet die Richtung der Achse im Raum - sie bleibt erhalten. Dasselbe gilt, wenn man die Kiste mit einer Drehung um die Achse 2 hoch wirft. Versetzt man die Kiste jedoch in Rotation um die Achse mit dem mittleren Trägheitsmoment, Achse 3, so ändert sich die Lage dieser Achse während des Flugs ständig. Die Rotation um diese Achse ist nicht stabil.

### VI.11 Erklärung der Kreiselversuche

Mit den bis jetzt gewonnenen Erkenntnissen wollen wir versuchen, die eingangs gezeigten Versuche zu erklären:

#### Erklärung des Versuchs VI.9: „Auf seiner Spitze gelagerter Kreisel“

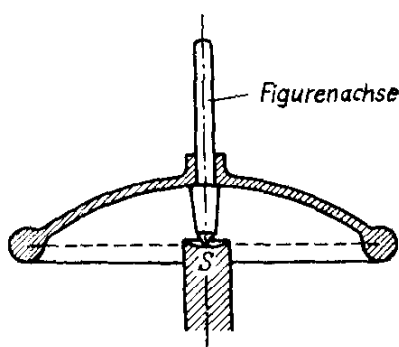


Abbildung VI.41a): Auf seiner Spitze gelagerter Kreisel rotiert um die Figurenachse

Bei diesem einfachsten Beispiel hatten wir festgestellt, daß sich der Kreisel, wenn er senkrecht steht, um seine Symmetrieachse

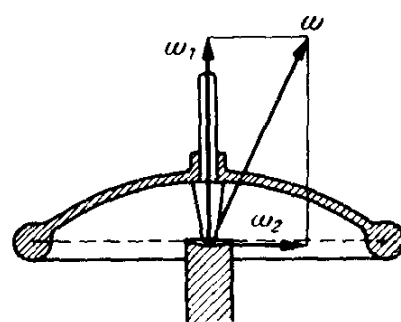


Abbildung VI.41 b): Winkelgeschwindigkeit des Kreisels

dreht. Wir hatten beobachtet, daß der Kreisel nach einiger Zeit aus der

senkrechten Anfangslage kippt und sich um sich selbst dreht, wobei die Achse des Kreisels zusätzlich einen Kreis beschreibt. Dabei liegt der Lagerpunkt je nach Stellung der Spitze über oder unter dem Schwerpunkt. Der Kreisel führt eine Präzessionsbewegung aus, deren Richtung abhängig ist vom Trägheitsmoment und der Schwerpunktlage. Dieser Kreisel hat das

Hauptträgheitsmoment bei einer Rotation um seine Symmetrieachse, die z-Achse. Für die anderen Trägheitsmomente gilt:

$$I_x = I_y < I_z$$

### Versuch VI.11: Kreiselkompass

Der Kreiselkompass kann einmal in eine Richtung ausgerichtet werden, dann behält er diese Ausrichtung bei, auch wenn das äußere Gestänge bewegt wird. Als Grundprinzip dieses Kompasses hatten wir die kardanische Aufhängung erkannt. Der Kreisel selbst ist ein Drehkörper mit möglichst großem Trägheitsmoment. Die Drehachse ist die Figurenachse.

### Versuch VI.12: Kardanisch aufgehängter Kreisel

Der wesentliche Aspekt dieses Kreisels liegt darin, daß er ein kräftefreier Kreisel ist. Zunächst hatten wir alle Stangen im rechten Winkel zueinander eingestellt und das Rad angedreht. Die Stange konnte danach frei im Raum ausgerichtet werden, ohne daß sie wieder in die Ausgangslage

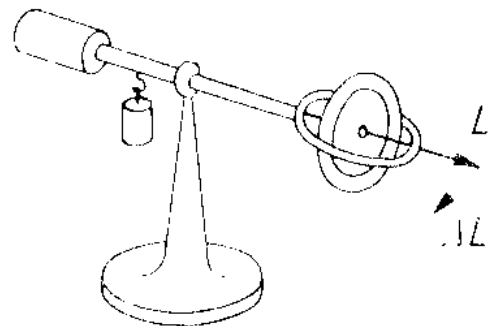


Abbildung VI.42: Kardanisch aufgehängter Kreisel

zurückfiel. Hängt man ein weiteres Gewichtsstück an das dem Rad

gegenüberliegende Ende der Stange, so beginnt die Stange sich in Horizontalebene zu drehen. Jetzt wollen wir zudem dem äußeren Ende der Stange gegenüberliegend vom Kreisel einen kräftigen aber kurzen Schlag nach unten versetzen. Nach dem Satz der Erhaltung des Drehimpulses für kräftefreie Kreisel bleibt der Drehimpuls frei im Raum erhalten.

Die Figurenachse hingegen dreht sich auf Kegelmantel um. Nach Schlag kann die Figurenachse nicht zurück in die Ausgangslage fallen, da das Drehmoment null ist und zudem die Trägheit existiert.

Zugleich wird aber eine Drehung um x-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}_2$  angeworfen.

Für die gesamte Winkelgeschwindigkeit gilt dann mit der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}_1$  bei der

Drehung um Figurenachse 
$$\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}$$

Mit dieser resultierenden Winkelgeschwindigkeit rotiert der Kreisel um die momentane Drehachse. Diese Bewegung nennen wir **Nutation**.

### Versuch VI.13: Kugelkreisel auf Luftkissen

Bei diesem Versuch wurde eine schwere eiserne Kugel mit einer herausschauenden Achse in einer Schale auf einem Luftkissen möglichst reibungsfrei gelagert und in Rotation versetzt. Zunächst stand die Achse der Kugel senkrecht nach oben, aber nachdem die Kugel so in Rotation versetzt worden war, konnte die Achse beliebig ausgerichtet werden. Die Richtung der Achse im Raum blieb erhalten.

Dieses Verhalten kann aus der Symmetrie der Kugel erklärt werden: Die Trägheitsmomente sind bezüglich der Rotation um jede Achse gleich, also  $I_z = I_y = I_x$ . Drehimpuls  $\vec{L}$  und momentane Drehachse  $\omega$  fallen somit immer zusammen.

Diese Symmetrie geht verloren, hängt man ein Gewicht an die Achse. Deshalb konnten wir beobachten, daß die Kugel eine Präzessionsbewegung ausführt.

### VI.12 Zusammenfassung der Kreiselbewegungen

Um die Kreiselbewegungen um verschiedene Achsen zusammenfassend zu betrachten, werden wir uns auf kräftefreie Kreisel beschränken.

Als erstes hatten wir die **Präzession** kennengelernt. Hier ist der Betrag des Drehmoments zeitlich konstant. Die Richtung ändert sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.

Der Drehimpuls dreht sich laufend im Raum; auch sein Betrag ist zeitlich konstant. Drehimpuls

und Drehmoment berechnen sich als 
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}.$$

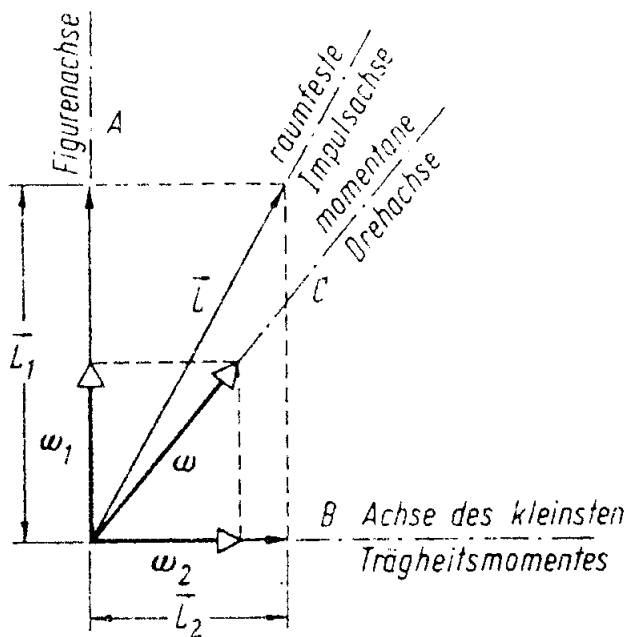
Die Präzessionsgeschwindigkeit beträgt damit 
$$\omega_P = \frac{\tau}{L}.$$

Die Figurenachse weicht der Kraft seitlich in Richtung des Drehmomentes aus

Bei dem kardanisch aufgehängten Kreisel konnten wir eine Bewegung beobachten, die wir **Nutation** genannt haben. Sie tritt nur beim kräftefreien Kreisel auf, wenn der Drehimpuls konstant ist. Versetzt man dem Kreisel einen kurzen Stoß, so erhält er einen zusätzlichen

Drehimpuls  $\Delta\vec{L}$ , für das gilt 
$$\Delta\vec{L} = \int_0^{\Delta t} \vec{\tau} dt$$

Auch hier weicht der Kreisel nach der Seite aus, solange  $\Delta\vec{L} \ll \vec{L}$  ist. Es gibt zu demselben Drehimpuls verschiedene Rotationsformen, die von der Vorgeschichte abhängig sind, je nachdem, ob die momentane Drehachse in Ruhe ist oder nicht.



Vor dem Stoß fallen Figurenachsens, Drehimpulsrichtung und momentane Drehachse zusammen und sind raumfest.

Nach dem Stoß ist die Figurenachsens einmal in Bewegung versetzt und bleibt in Bewegung.

Abbildung VI.43: Ein kurzer Schlag verursacht aufgrund der Drehimpulserhaltung eine Drehung um die Achse des kleineren Trägheitsmomentes  $I_2$ . Beim symmetrischen Kreisel existieren nur zwei verschiedene Trägheitsmomente!

Merke: Die im Körper feste Figurenachsens A, die im Raum feste Drehimpulsachsens  $\vec{L}$  und die momentane Drehachse C ( $\vec{\omega}$ ) liegen in einer Ebene und bilden immer die gleichen Winkel miteinander (symmetrischer Kreisel).

Die genaue Bewegung wird beschrieben durch die Gleichungen der einzelnen Komponenten des Drehimpulses. Dazu muß der Drehimpuls in seine Komponenten längs der Figurenachsens, Achse A, und der Achse des kleinsten Trägheitsmomentes, Achse B, zerlegt werden. Die geometrische Betrachtung zeigt dann

$$\vec{L}_1 = \vec{\omega}_1 I_1$$

und

$$\vec{L}_2 = \vec{\omega}_2 I_2.$$

Da das Trägheitsmoment längs der Achse B laut Definition der Achse das kleinste Trägheitsmoment ist, gilt immer

$$I_1 > I_2$$

Die Figurenachsens hat das größte Trägheitsmoment.

Aus der Drehimpulserhaltung

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \text{const}$$

folgt

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

Der Vektor der Gesamtwinkelgeschwindigkeit ist nicht parallel zum Vektor des Drehimpulses. Das Verhältnis kann aus den Trägheitsmomenten berechnet werden.

Die Winkelgeschwindigkeiten  $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}$  liegen in einer Ebene mit  $\vec{L}_1, \vec{L}_2, \vec{L}$  und rotieren um  $\vec{L} = \text{const}$ . Die Figurenachsens und die momentane Drehachse rotieren um die raumfeste Impulsachsens.

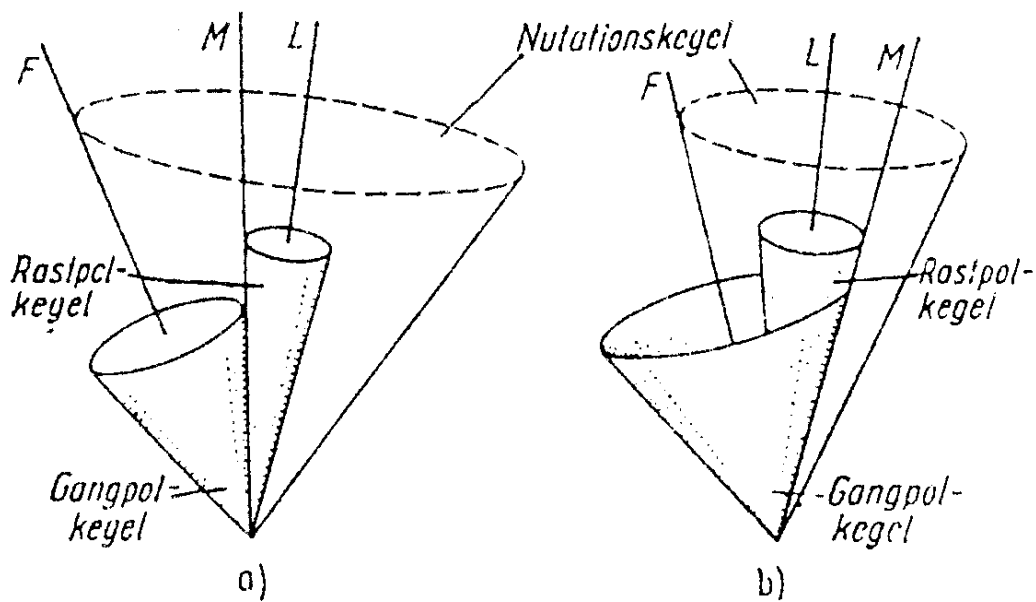


Abbildung VI.44: Rastpol-, Nutations- und Gangpolkegel

Die momentane Drehachse  $M$  (bzw.  $\bar{\omega}$ ) beschreibt den raumfesten **Rastpolkegel**, die Figurenachse  $F$  den **Nutationskegel**, der sich ebenfalls um die Drehimpulsachse  $L$  bewegt. Dabei rollt auf dem raumfesten Rastpolkegel, der mit der Figurenachse fest verbunden ist, der **Gangpolkegel** ab, wobei dies mit konstanter Geschwindigkeit erfolgt. Diese Aussagen gelten für den abgeplatteten kräftefreien Kreisel

Notation VI.2: Von einem **abgeplatteten Kreisel** spricht man, wenn die *geometrische Figurenachse die Hauptträgheitsachse des größten Trägheitsmomentes* ist.

Notation VI.3: Von einem **verlängertem Kreisel** spricht man, wenn die *geometrische Figurenachse die Hauptträgheitsachse des kleinsten Trägheitsmomentes* ist.

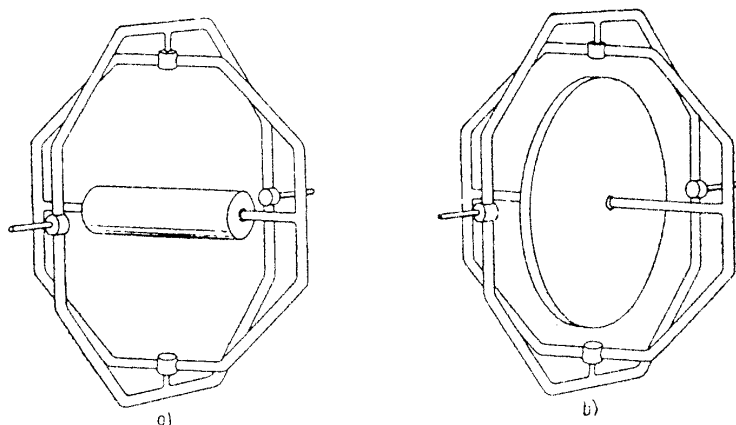


Abbildung VI.45: Verlängerter und abgeplatteter Kreisel



### VI.13 Trägheitsmomente und Drehschwingung

In Kapitel IV hatten wir uns mit Schwingungen beschäftigt. Wir hatten festgestellt, daß Schwingungsdauern auf verschiedene Weisen sehr genau gemessen werden können. Ein Beispiel war die Federschwingung. Nun wollen wir die Schwingung betrachten, die durch Spiralfedern hervorgerufen werden können. Bisher konnten wir alle Erkenntnisse über Rotation durch Übertragen der aus der Translation bekannten Ergebnisse gewinnen. Deshalb vergleichen wir auch hier einmal die lineare Federschwingung mit der Schwingung einer Spiralfeder.

Bei der Federschwingung hatten wir zusammenfassend folgende Ergebnisse gewonnen:

Die Rückstellkraft einer Feder lautet (Hook'sches Gesetz)  $\vec{F} = -k\vec{x}$ .

Die **Schwingungsgleichung** der Federschwingung lautet  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ .

Die **allgemeine Lösung** der Schwingungsgleichung lautet

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

Die **Kreisfrequenz** der Schwingung ist gegeben durch

$$\omega \text{ mit } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Die **Schwingungsdauer** ist gegeben durch

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Die **Schwingungsfrequenz** ist gegeben durch

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{1}{2\pi}$$

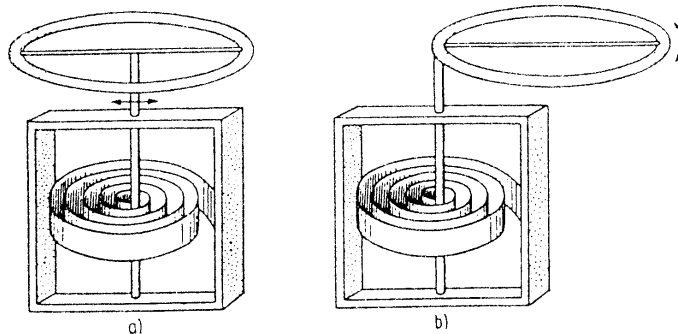


Abbildung VI.46: Drehschwingung

Analog zur Translation betrachten wir statt der Kraft  $\vec{F}$  das Drehmoment  $\vec{\tau}$  und statt des linearen Weges  $\vec{x}$  den Winkel  $\varphi$ . Die Federkonstante wird mit  $D$  bezeichnet, sie heißt Direktionsmoment. Damit können

wir im Vergleich mit dem Hook'schen

Gesetz direkt die 'Rückstellkraft' - bei der Rotation wird diese rücktreibendes Moment genannt - angeben:

Bei Auslenkung um den Winkel  $\varphi$  übt eine Spiralfeder ein rücktreibendes Drehmoment aus:

rücktreibendes Drehmoment  $\tau = -D\varphi$ .

Die Bewegungsgleichung berechnet analog man aus

$$I \ddot{\varphi} = -D\varphi$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\varphi} + \frac{D}{I} \varphi = 0$$

Dementsprechend ist die allgemeine Lösung

$$\varphi = \varphi_{\max} \cos\left(\sqrt{\frac{D}{I}} t + \varphi_0\right)$$

mit der Schwingungsdauer

$$T = 2 \pi \sqrt{I / D}$$

$I$  ist das Trägheitsmoment des auf die Drillachse aufgesetzten Probekörpers, wenn das Trägheitsmoment der Drillachse selbst vernachlässigt werden kann. Dieses Ergebnis entspricht dem Ergebnis der linearen Federschwingung, wenn man das Trägheitsmoment als Analogon zur Masse und das Direktionsmoment als Analogon zur Federkonstanten sieht.

Je größer das Direktionsmoment ist, desto schneller schwingt der Körper; je größer das Trägheitsmoment des schwingenden Körpers ist, desto langsamer schwingt er.

Als mögliche Anwendung dieses Verhältnisses kann man eine Bestimmung des Direktionsmomentes  $D$  vornehmen, oder das Trägheitsmoment eines Körpers durch Rotation um verschiedene Achsen berechnen

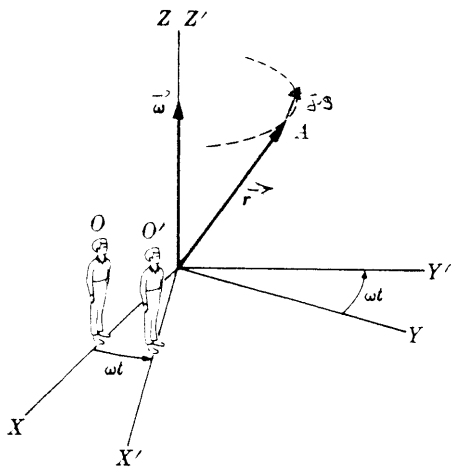
Diese Schwingung ist auch die Erklärung für die Schwingung bei der Gravitationsdrehwaage nach Cavendish.

#### VI.14 Rotierende Bezugssysteme und Trägheitskräfte

Bisher hatten wir die Erde als Bezugssystem vieler Bewegungen betrachtet. Dabei gingen wir davon aus, daß die Erde ein Inertialsystem ist. Daß diese Annahme eine Vereinfachung darstellte, war bereits bekannt. Die Aufstellung der Kräfte nach Newton haben wir mit  $\vec{m}\ddot{a} = \sum \vec{F}$  angegeben, als mögliche Kräfte betrachteten wir Gravitation, Federkräfte oder andere Zwangskräfte. Diese Formel muß korrekterweise noch um jene Kräfte erweitert werden, die durch die Rotation der Erde entstehen. Eine Kraft, die aus der Rotation entsteht ist die Zentrifugalkraft. Bei der Geschwindigkeit, mit der die Erde sich dreht, kann diese Kraft für die meisten Berechnungen vernachlässigt werden. Dennoch ändert sie die resultierende Kraft meßbar: Die Differenz der Gravitationskraft z.B. beträgt zwischen dem Äquator und den Polen 3 Promille. Zusätzlich zu der Zentrifugalkraft tritt eine neue Trägheitskraft bzw. Scheinkraft, die der mitbewegte Beobachter registriert. Es ist die **Corioliskraft**.

Im Folgenden soll die Corioliskraft hergeleitet werden aus einer Rotation des Koordinatensystems<sup>(VI.1)</sup>. Bei dieser Herleitung können wir leider auf eine etwas kompliziertere mathematische Betrachtung nicht verzichten. Die Herleitung selber zu kennen ist weniger

wichtig, als zu erkennen, daß nur aus der Drehung des Bezugssystems die Corioliskraft herzuleiten ist. Das Vorgehen ist uns schon aus der Galileitransformation bekannt und kann auch hier rein formal durchgeführt werden.



Gegenüber einem Inertialsystem S drehe sich das System S' mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die z-Achse. Beide Systeme haben denselben Ursprung.

Um die Rechnung zu vereinfachen, möchte ich zunächst einige Konventionen zur Schreibweise einführen:

Zeitliche Ableitungen im System S werden wie bisher üblich mit einem Punkt gekennzeichnet. Insbesondere

gilt  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$  und. Die Geschwindigkeit im System S sei, der Weg.

Zeitliche Ableitungen im System S' werden mit  $\frac{d}{dt}$  gekennzeichnet. Insbesondere gilt. Die Geschwindigkeit im System S' sei, der Weg.

**1. Schritt: Wie groß ist die Geschwindigkeit des Punktes A im System S, wenn A sich im System S' mit der Geschwindigkeit  $\vec{u}$  bewegt?**

Für eine Geschwindigkeit  $\vec{u} = 0$  gilt für einen Beobachter in S

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r}.$$

Mit

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{v}$$

und

$$\frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega}$$

folgt

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Hat der Punkt A eine Geschwindigkeit  $\vec{u}$  in S', so muß diese in S zu  $\vec{v}$  addiert werden. Damit gilt allgemein

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \neg$$

und mit  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad -$$

**2. Schritt: Wie sieht die Beschleunigung  $\vec{b}$  des Punktes A in S' im System S aus?**

Aus der Mechanik ist der Zusammenhang  $\vec{b} = \dot{\vec{v}}$  bekannt.

Damit folgt aus Gleichung  $\vec{v} = \dot{\vec{u}} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}$

da  $\dot{\vec{\omega}} = 0$  ist, gilt  $\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{u}} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$ .

Mit  $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{u}} + \vec{\omega} \times (\vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r})$

$$\Leftrightarrow \boxed{\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{u}} + \vec{\omega} \times \vec{u} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})} \quad \textcircled{R}$$

### 3. Schritt: Was ist $\dot{\vec{u}}$ ?

Ebenso, wie für die Transformation des Vektors  $\vec{r}$  von  $S'$  nach  $S$  gilt für jeden

beliebigen Vektor  $\vec{a}$

$$\dot{\vec{a}} = \frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a}$$

Somit ist  $\dot{\vec{u}}$

$$\boxed{\dot{\vec{u}} = \frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{u}} \quad -$$

eingesetzt in  $\textcircled{R}$  ergibt

$$\dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{u} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Zusammengefasst gilt

$$\boxed{\dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{u}}{dt} + 2(\vec{\omega} \times \vec{u}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).}$$

### 4. Schritt: Was bedeutet diese Gleichung?

Die Beschleunigung  $\dot{\vec{v}}$  setzt sich offensichtlich aus drei Termen zusammen:

- $\frac{d\vec{u}}{dt}$  Dieser Term gibt die **Beschleunigung von Punkt A** in System  $S'$  an.
- $2(\vec{\omega} \times \vec{u})$  Dieser Term ist Ausdruck der **Coriolisbeschleunigung**. Jetzt können wir mit der Formel  $F = ma$  auch die Corioliskraft angeben:  $\vec{F}_C = 2m\vec{u} \times \vec{\omega}$ .
- $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  Dieser Vektor steht senkrecht auf, sein Betrag ist  $\omega^2 r$ . Für  $\cos\varphi = 1$ , also, ergibt sich aus dieser Beschleunigung die Kraft  $F = m\omega^2 r$ . Diese Formel kennen wir als **Zentrifugalkraft**.

Jetzt haben wir eine Formel für die Corioliskraft hergeleitet und zudem eine Gleichung für alle in einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierenden System herrschenden Kräfte aufgestellt.

Merke: Die **Corioliskraft**  $\vec{F}_C = 2m\vec{u} \times \vec{\omega}$  steht immer senkrecht auf der Relativgeschwindigkeit im rotierenden Bezugssystem.

Merke: Im rotierenden Bezugssystem gilt die Newtonsche Grundgleichung:

$$m\dot{\vec{v}} = m \left[ \frac{d\vec{u}}{dt} + 2(\vec{\omega} \times \vec{u}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \right].$$

Daß die Corioliskraft nicht immer vernachlässigbar ist, ist bereits aus der Geographie bekannt. Beim Wetter wirkt diese Kraft erheblich auf die Bildung von Luftströmen.

Betrachten wir jetzt einige einfache Beispiele für die auftretenden Kräfte in rotierenden Systemen:

Um die Bewegung eines Körpers aus den verschiedenen Blickwinkeln, aus dem rotierenden Bezugssystem und aus einem Inertialsystem, qualitativ zu erfassen, betrachten wir zunächst ein Gedankenexperiment:

Für dieses Experiment bräuchten wir zwei Physiker, einen Ball und eine große rotierende Scheibe. Zunächst stehen beide Physiker einander zugewandt auf der Scheibe, einer stehe im Mittelpunkt, der andere am Rand. Sie werfen sich den Ball zu. Ein beobachtender Student im Inertialsystem sieht, daß der Ball linear nach außen fliegt, der zweite Physiker ihn allerdings verpasst, da er sich inzwischen nach links weiter gedreht hat.

Nun stellt sich auch der Beobachter auf die Scheibe. Wird der Ball erneut von der Mitte nach außen geworfen, sieht der Beobachter eine andere Bahn: Der Beobachter ist relativ zum System, in dem der Ball geworfen wird, in Ruhe, der Ball scheint nach rechts abgelenkt zu werden. Die Scheinkraft, die den Ball auf einer parabelförmigen Bahn erscheinen läßt, ist die Corioliskraft.

Einen ähnlichen Versuch führen wir durch:

### Versuch VI.17: Schuß auf rotierender Scheibe

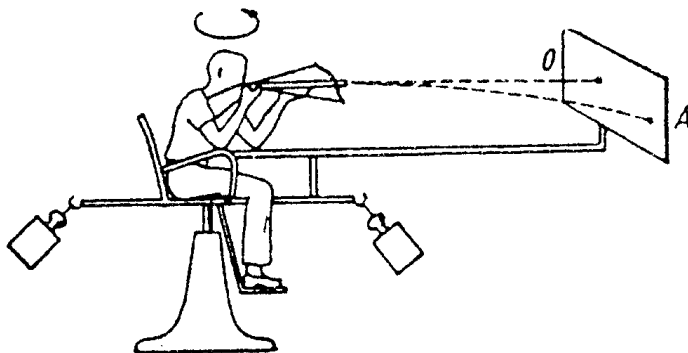


Abbildung VI.48: Versuch zur Erläuterung der Corioliskraft

Bei diesem Versuch wird eine Person auf einen Drehstuhl gesetzt. An dem Stuhl ist eine Stange waagrecht zum Boden angebracht; an deren Ende befindet sich eine gewölbte Plexiglasscheibe. Die Person schießt jetzt mit einem Pfeil längs der Verbindungsstange

auf die Scheibe. Dieser Versuch ist analog zum Gedankenexperiment aufgebaut: Der Physiker in der Mitte des Kreises wirft keinen Ball, sondern einen Pfeil. Um die Abweichung genauer bestimmen zu können wird nicht ein punktueller Fänger am Rand des Kreises aufgestellt, sondern eine Scheibe. Wenn man auf dieser Scheibe in Ruhe den Punkt 0 der Verbindungsgraden zur Person markiert, kann nach dem Schuß die Abweichung exakt gemessen werden. Qualitativ sieht der Beobachter im Vorlesungssaal, also in einem Inertialsystem, daß die Markierung sich vom Auftreffpunkt wegdreht. Im Stand trifft die Versuchsperson die markierte Mitte 0, je schneller sie sich dreht, desto weiter weicht die Auftreffstelle A des Pfeils davon ab.

Über die geometrische Betrachtung der Bewegung kann die Coriolisbeschleunigung hergeleitet, bzw. bei bekannten Parametern errechnet werden. Dabei müssen wir beachten, daß der Pfeil nicht direkt von der Mitte des Kreises aus abgeschossen wird, sondern aus einer Armlänge  $r_A$  Entfernung davon.

Das rotierende System nennen wir  $S'$ , das Inertialsystem  $S$ .  $S'$  rotiere gegen  $S$  mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit.

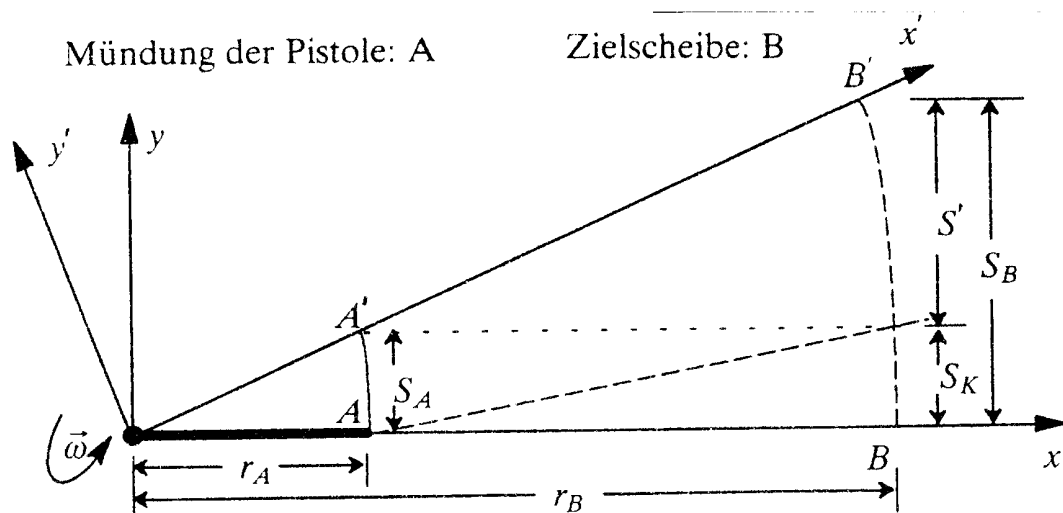
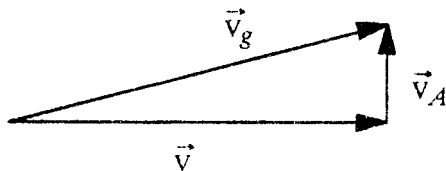


Abbildung VI.49: Geometrische Überlegung zum Versuch

Ohne Drehung wird der Pfeil mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}'$  von  $x = r_A$  bei  $t = 0$  abgeschossen. Er kommt bei Punkt B, dem Mittelpunkt der Scheibe, an nach einer Zeit  $t$ . Aus der Kinematik

kennen wir die Beziehung für  $t$  
$$t = \frac{r_B - r_A}{v'}$$
  $\neg$

Nun wird die Bewegung mit Drehung vom Inertialsystem aus betrachtet:



Die Kugel hat beim Verlassen des Laufes bei A die Geschwindigkeit, für die gilt

$$\vec{v}_g = \vec{v} + \vec{v}_A$$

Es addiert sich die Geschwindigkeit der Laufmündung.

Der Pfeil kommt im Abstand  $S_K$  von Punkt B aus an.

$$S_K = v_A \cdot t = \omega r_A t$$

Die geometrische Betrachtung der Skizze zeigt, daß der Abstand  $S_K$  der Strecke  $S_A$  entspricht.

Betrachtet man denselben Vorgang vom rotierenden System aus gesehen, so hat sich nach der Zeit  $t$  hat der Punkt A nach  $A'$  und B nach  $B'$  bewegt. Die Wege der Punkte A und B sind verschieden:

$$S_A = v_A t$$

mit  $v = r\omega$

$$\Leftrightarrow S_A = \omega r_A t = S_K$$

$$S_B = v_B t$$

$$\Leftrightarrow S_B = \omega r_B t$$

Vom mitgedrehten Beobachter aus gesehen gilt für die Streckendifferenz  $S'$

$$S' = - (S_B - S_K)$$

mit den Ergebnissen von oben

$$\Leftrightarrow S' = - \omega (r_B - r_A)t$$

Dann gilt mit  $\neg$

$$S' = - \omega v t^2 .-$$

Mit der allgemeinen Berechnung der Beschleunigung

$$S = \frac{a}{2} t^2$$

gilt, ergibt sich aus -

$$a = \frac{d^2 S}{dt^2} = 2 \omega v \quad \textcircled{R}$$

Diese Beschleunigung ist die Coriolisbeschleunigung in einem rotierenden Bezugssystem.

Die so ermittelte Formel ist in Einklang mit der allgemein hergeleiteten, wenn man die Anfangsgeschwindigkeit im bewegten System  $\vec{v} = \vec{v}'$  setzt und beachtet, daß

$$\vec{a}_c = \vec{v}' \times \vec{\omega} = -\vec{\omega} \times \vec{v}' \quad \text{ist.}$$

Wie bereits erwähnt, spielt die Corioliskraft auch auf der Erde aufgrund der Eigenrotation eine große Rolle. Hier ist sie vor allem bei dem Verständnis des Wetters ein wichtiger Faktor,

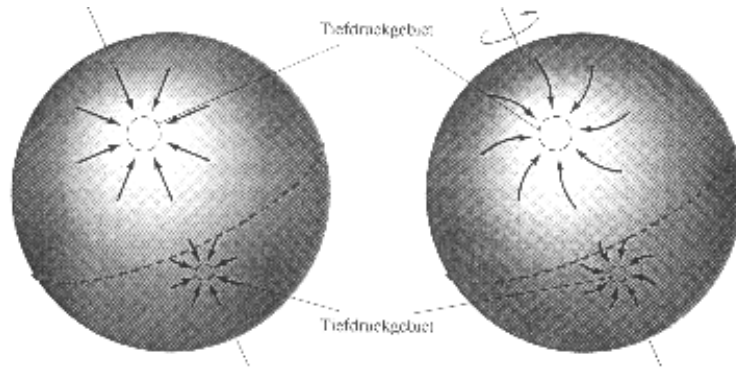


Abbildung VI.50: Ablenkung von Winden

der betrachtet werden muß.

Betrachtet man die Zyklone

der beiden Halbkugeln von einem Satelliten, also einem Inertialsystem, aus, so drehen die Zyklonen sich auf der Südhalbkugel rechts herum, auf der Nordhalbkugel dagegen links herum. Würde die Erde sich nicht drehen, so müßten die Winde gradlinig in das Tiefdruckgebiet in der Mitte hineinlaufen. Die Beobachtung der abgelenkten Ströme ist deshalb ein weiterer Beweis für die Rotation der Erde.

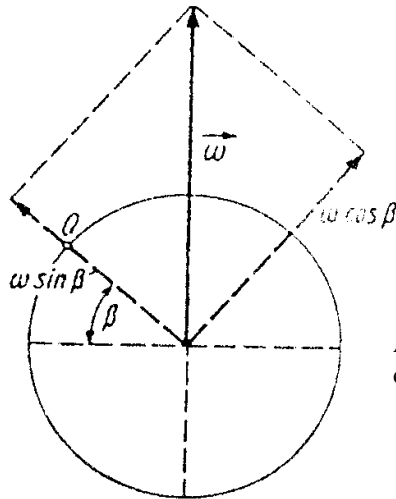
### Versuch VI.18: Foucaultscher Pendelversuch

Ein anderer Nachweis zur Erdrotation ist der Foucaultsche Pendelversuch. Grundprinzip dieses Versuches ist es, mit einem einfachen Pendel die Erdrotation nachzuweisen. Dabei schwingt ein Pendel von einem Aufhängepunkt A in einer Pendelebene senkrecht zum Boden. Durch die Erdrotation dreht sich der Boden unter dem Pendel weg, dessen Ausrichtung senkrecht zum Fixsternhimmel erhalten bleibt, da es keine Kräfte gibt, die senkrecht zur Pendelebene auf das Pendel wirken.

Um den Versuch quantitativ auswerten zu können, wird in der Gleichgewichtslage des Pendels der Faden über eine optische Anordnung vergrößert an die Wand projiziert. Dann lenkt man das Pendel aus und justiert es so, daß das Bild des Fadens wieder exakt denselben Strich darstellt. So ist die Pendelebene senkrecht zum Boden und senkrecht zur Wand justiert. Läßt man nun das Pendel schwingen, dreht sich für die mitbewegten Beobachter die Pendelebene im Uhrzeigersinn und ist dann nicht mehr senkrecht zur Wand. Tatsächlich kann man das Bild des Fadens schon nach wenigen Schwingungen deutlich die Wand entlang wandern sehen.

Um die Bewegung zu berechnen müssen wir zunächst die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  der Erde in 2 Komponenten aufteilen.





Die Vertikalkomponente ist dann  $\omega \sin \beta$ ; wobei  $\beta$  die geographische Breite ist.

Diese Vertikalkomponente erzeugt Corioliskräfte, die in die waagerechte Ebene fallen und so die beobachtete Seitenablenkung des Pendels bewirkt.

Abbildung VI.51: Zerlegung der Winkelgeschwindigkeit der Erde

Die Horizontalkomponente  $\omega \sin \beta$  bewirkt eine Änderung der Schwerkraft. Auf der Nordhalbkugel erfolgt die Drehung gegen den Uhrzeigersinn: Die

Corioliskräfte zeigen immer nach rechts. Das Pendel schwingt wie erläutert also nicht in einer Ebene.

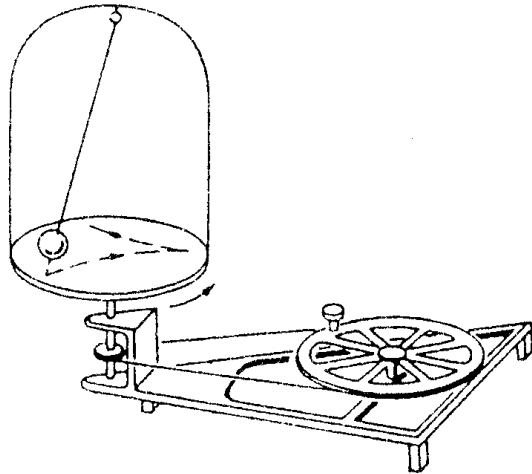


Abbildung VI.52: Modellversuch zur Drehung der Pendelebene

$\alpha$  sei der Drehungswinkel für eine Schwingung.  
 $r$  sei die Schwingungsweite. Dann gilt für die Bogenlänge die geometrische Beziehung

$$\alpha = \frac{\delta}{r}$$

Andererseits ist

$$\alpha = T \omega \sin \beta$$

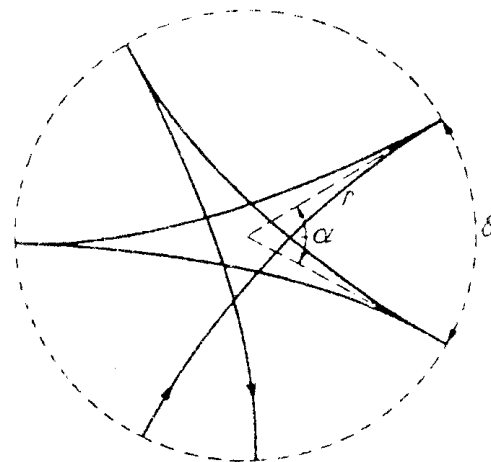


Abbildung VI.53: Drehung der Pendelebene

Insgesamt folgt dann 
$$\frac{\delta}{r} = T \omega \sin \beta$$

Im Vorlesungsversuch wurde bei der Projektion ein als bekannt vorausgesetzter

Vergrößerungsfaktor  $\frac{f}{d}$  benutzt. Aus 
$$\omega \sin \beta = \frac{\delta}{r T} \cdot \frac{f}{d}$$

kann z.B. der Längengrad in Aachen bestimmt werden. Der Erwartungswert für **Aachen** ist

$$\beta = 50^{\circ} 44'$$