

V. Drehbewegungen

In Kapitel II und III haben wir die Grundlagen kennengelernt, die wir brauchten, um gradlinige oder die Überlagerung von gradlinigen Bewegungen zu berechnen. Bei der Betrachtung des Pendels hingegen haben wir bereits gemerkt, daß man mit diesem Werkzeug nicht alle beobachtbaren Bewegungen beschreiben kann. Insbesondere Kreisbewegungen, z.B. die Bewegung des Fadenpendels auf einem Kreisbogen, brauchen eine andere Beschreibungsform. Eine dieser Formen haben wir mit der Einführung der Koordinaten φ und r kennengelernt. Dies wollen wir im Folgenden systematischer für jede Kreisbewegung betrachten.

V.1 Kinematik der Kreisbewegung

V.1.1 Darstellung eines Vektors in verschiedenen Koordinatensystemen

Betrachten wir noch einmal die Darstellung eines Vektors \vec{r} , der vom Kreismittelpunkt zu einem beliebigen Punkt auf dem Kreisbogen zeigt, in einem karthesischen Koordinatensystem. Zur einfacheren Berechnung liege der Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Die Betrachtung des Kreises beinhaltet die Annahme, die

Bewegung verlaufe in einer Ebene (wir setzen also $z = 0$) und die Länge des Radiusvektors sei konstant. Der Vektor läßt sich darstellen durch seine Komponenten in x - und y - Richtung. Die Graphik zeigt, daß die

x -Komponente $x = r_0 \cos \varphi$

y -Komponente $y = r_0 \sin \varphi$

betragen.

Die Länge des Vektors \vec{r} kann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras errechnet werden:

$$r^2 = x^2 + y^2 = r_0^2$$

In Kapitel IV.8.2 hatten wir bereits die Polarkoordinaten r und φ kennengelernt. Wir hatten festgestellt, daß jeder Punkt in einer Ebene sich darstellen läßt durch die Angabe des Radius des gedachten Kreises um den Mittelpunkt, auf dem der Punkt liegt, und den Winkel, den der Vektor mit einer definierten Achse einschließt. Insbesondere gilt für einen Punkt auf einem Kreis mit konstanten Radius, daß er bei Kenntnis des Radius nur durch den Winkel beschrieben

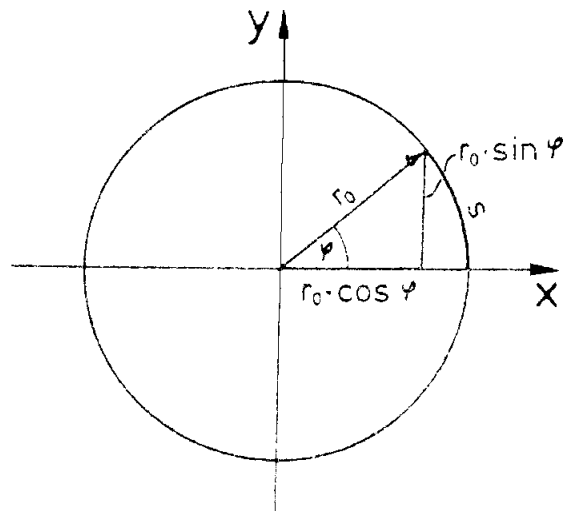


Abbildung V.1: Rechtwinklige Koordinaten x, y

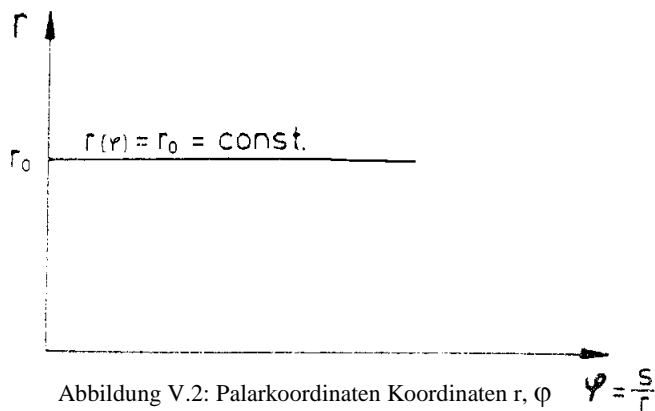


Abbildung V.2: Polarkoordinaten Koordinaten r, φ

werden kann. Diese Koordinaten spannen also eine Ebene auf und lassen sich folglich auch in einem ebenen Koordinatensystem einzeichnen. Die Achsen werden von den beiden Polarkoordinaten bestimmt.

Der Vektor \vec{r} wird in den beiden Systemen folglich dargestellt als:

Kartesischen Koordinaten:

$$\vec{r} = (r_0 \cos \varphi, r_0 \sin \varphi, 0)$$

Polarkoordinaten

$$r(\varphi) = r_0 = \text{const.}$$

Mittels der oben ermittelten Beziehungen umrechnen.

$x = r \cos \varphi$ $y = r \sin \varphi$

lassen sich die Koordinaten umrechnen. \neg

V.1.2 Gleichförmige Kreisbewegung

Als erstes Beispiel einer Bewegung betrachten wir die gleichförmige Bewegung auf einem Kreis. Analog zur geradlinigen gleichförmigen Bewegung definiert man diese Bewegung über die konstante Geschwindigkeit. Die zu betrachtende Geschwindigkeit ist hierbei jedoch nicht der Vektor, sondern die Winkelgeschwindigkeit ω , also die Änderung des Winkels mit der Zeit.

Definition V.1: Die Winkelgeschwindigkeit ω ist die Änderung des Winkels φ mit der Zeit:
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Damit definieren wir die gleichförmige Kreisbewegung als die Bewegung auf einem Kreis mit konstantem Radius r und konstanter Winkelgeschwindigkeit ω .

Definition V.2: Eine Bewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf einem Kreis mit konstantem Radius wird gleichförmige Kreisbewegung genannt.

Die Abhängigkeit des überstrichenen Winkels mit der Zeit kann analog zur geradlinigen Bewegung durch Integration des Winkelgeschwindigkeits - Zeit - Gesetzes berechnet werden:

Aus $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

folgt $\varphi(t) = \int \omega dt$

und mit $\omega = \text{konstant}$ $\varphi(t) = \omega \int dt$.

Mittels Integration folgt $\varphi(t) = \omega t + \alpha$.

Die Integrationskonstante α kann durch die Definition des Winkels φ zur Zeit $t = 0$ als $\varphi(t = 0) = 0$ gleich null gesetzt werden. Dann gilt die

Bewegungsgleichung $\varphi(t) = \omega t$.

Die Komponenten in Schreibweise der kartesischen Koordinaten können ermittelt werden durch Einsetzen der Bewegungsgleichung - in die Transformationsgleichungen \rightarrow .

Aus $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$ folgt mit $\varphi = \omega t$ $\begin{cases} x = r \cos \omega t \\ y = r \sin \omega t \end{cases}$.

Der Vektor \vec{r} hat also den Betrag

$$r = r_0 \cos \omega t + r_0 \sin \omega t$$

Diese Gleichung ist der allgemeinen Lösung der Schwingungsgleichung des Pendels sehr ähnlich. Hier hatten wir die Lösung der Schwingungsgleichung ermittelt als:

$$r(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

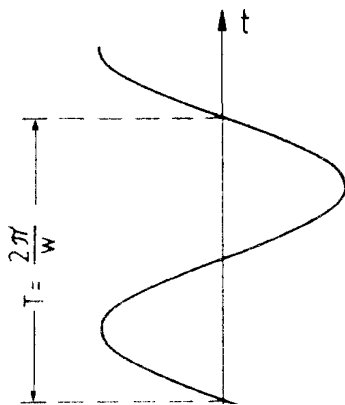
mit der Kreisfrequenz der Schwingung,

der Schwingungsdauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$

und der Schwingungsfrequenz $\nu = \frac{1}{T}$.

Versuch V.1: Überlagerung einer Kreisbewegung und einer Pendelbewegung

Mit diesem Versuch soll untersucht werden, was die Pendel- und die gleichförmige Kreisbewegung gemeinsam haben. Dazu wird ein Fadenpendel in Schwingung versetzt. Unter dem Pendel befindet sich eine Scheibe mit darauf befestigtem Zeiger. Die Scheibe rotiert mit fester Winkelgeschwindigkeit um den Mittelpunkt, der auf einer Gradlin mit der Ruhelage des darüber schwingenden Pendels liegt. Durch Synchronisation, d.h. durch Loslassen des Pendels, wenn der Zeiger sich grade darunter befindet, kann man die Bewegungen so starten, daß in der ebenen Projektion Zeiger und Kugel senkrecht übereinander stehen.



Mit diesem Versuch wurde gezeigt, daß die Pendelschwingung durch Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung in die beiden Richtungen der Pendelebene synchronisiert werden kann. Die Kreisbewegung entspricht einer Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen gleicher Frequenz in x und y.

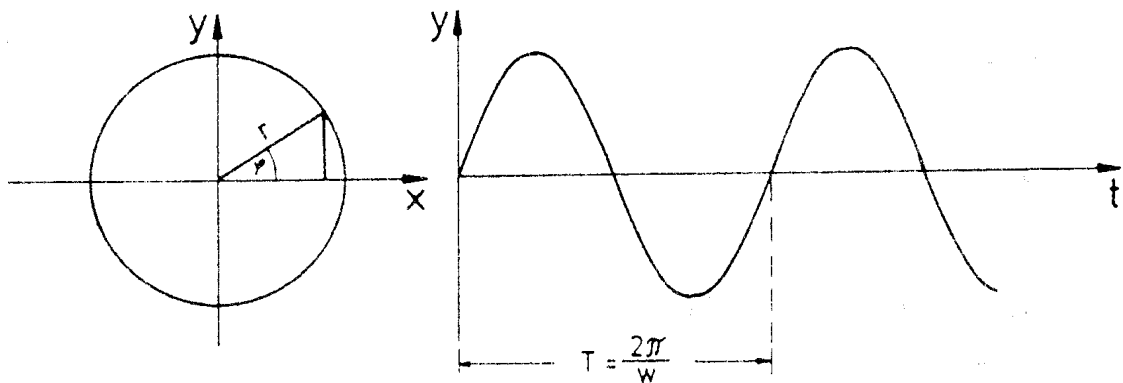


Abbildung V.3: Überlagerung von Pendel- und gleichförmiger Kreisbewegung

Nun wollen wir über die Berechnung der Geschwindigkeit \vec{v} und anschließend der Beschleunigung \vec{a} versuchen, auf die wirkende Kraft zu schließen. Hierfür betrachten wir die kartesischen Koordinaten x und y, die z-Komponente sei null:

$$\vec{r}(t) = (x = r \cos \omega t, \quad y = r \sin \omega t)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = (v_x = -r\omega \sin \omega t, \quad v_y = r\omega \cos \omega t)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = (a_x = -r\omega^2 \cos \omega t, \quad a_y = -r\omega^2 \sin \omega t)$$

Zusammengefaßt lauten die Vektoren:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (r \cos \omega t, r \sin \omega t) \\ \vec{v}(t) &= (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t) \\ \vec{a}(t) &= (-r\omega^2 \cos \omega t, -r\omega^2 \sin \omega t). \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Vektoren $\vec{r}(t)$ und $\vec{a}(t)$ zeigt, daß eine einfache Beziehung zwischen der Beschleunigung und dem Ortsvektor einer gleichförmigen Kreisbewegung existiert:

Merke: Die **Beschleunigung** ist bei einer gleichförmigen Kreisbewegung radial nach innen zum Mittelpunkt gerichtet. Sie hat keine Tangentialkomponente:

$$\vec{a} = \vec{a}_r = -\omega^2 \vec{r} .$$

Notation V.1: Die **Tangentialkomponente** des Beschleunigungsvektors wird mit \vec{a}_t bezeichnet, die dazu senkrecht stehende **Radialkomponente** entlang des Radiusvektors mit.

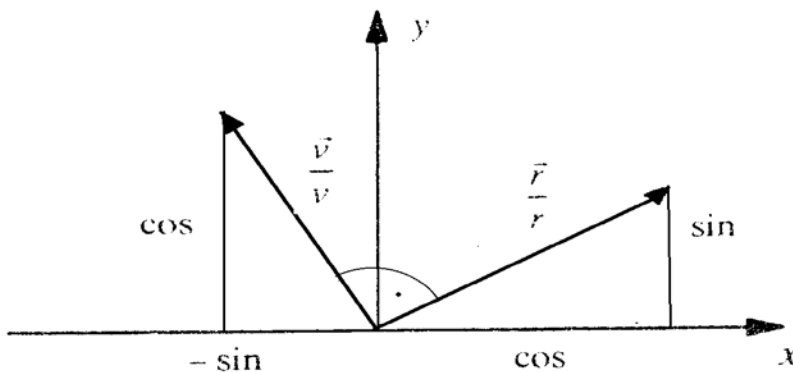


Abbildung V.4: geometrische Überlegung zu $\vec{v} \perp \vec{r}$

Ein (graphischer) Vergleich des Geschwindigkeitsvektors \vec{v} und des Radiusvektors \vec{r} zeigt zudem, daß diese beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

Dieses Ergebnis folgt auch direkt aus

der Bedingung, r sei konstant. Das bedeutet, daß $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ keine Komponente in Richtung des Kreisradius haben kann.

Die so ermittelten Ergebnisse gelten für beliebige Winkelgeschwindigkeiten ω :

Merke: Bei einer Kreisbewegung steht der **Geschwindigkeitsvektor** immer senkrecht auf dem Radiusvektor: $\vec{v} \perp \vec{r} .$

Für beliebige, nicht notwendigerweise konstante Winkelgeschwindigkeiten ω gilt damit in Polarkoordinaten:

Geschwindigkeit entlang der Kreisbahn $v_s = \frac{ds}{dt}$

mit $s = r\varphi \Rightarrow v_s = r \frac{d\varphi}{dt} + \varphi \frac{dr}{dt} ,$

Mit, da $r = \text{const.} \Rightarrow v_s = r \frac{d\varphi}{dt}$

und mit $\omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \boxed{v_s = r\omega}$

Mit dem oben errechneten Ergebnis $\vec{v} \perp \vec{r} , v_r = 0$

folgt $\Rightarrow \boxed{v_s = v_t = r\omega}$

Merke: Die Tangentialgeschwindigkeit einer Kreisbewegung berechnet sich als

$$v_s = v_t = r\omega, \text{ die Radialgeschwindigkeit ist null: } v_r = 0.$$

Für die Beschleunigung entlang der Kreisbahn gilt

$$a_s = \frac{dv_s}{dt}$$

$$\text{mit } v_s = r\omega \quad \Rightarrow \quad a_s = \frac{dr}{dt}\omega + \frac{d\omega}{dt}r,$$

$$\text{mit } \omega \frac{dr}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_s = \frac{d\omega}{dt}r.$$

Definition V.3: Die Winkelbeschleunigung α ist die Änderung

$$\text{der Winkelgeschwindigkeit } \omega \text{ mit der Zeit: } \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Versuch V.2: tangentieller Funkenflug bei einem Schleifstein

Mit diesem Versuch soll die Flugbahn eines Punktes gezeigt werden, der mit dem Geschwindigkeitsvektor \vec{v} von einer Kreisbahn flieht, weil keine Kräfte auf ihn wirken. Der Beschleunigungsvektor steht senkrecht auf den Geschwindigkeitsvektor und zum Mittelpunkt hingerrichtet. Der Körper müßte also tangentiell von der Kreisbahn wegfliegen. Diesen Vorgang kann man eindrucksvoll am Funkenflug eines Schleifsteins beobachten. Hierfür treibt man einen runden Schleifstein an und hält einen Stab

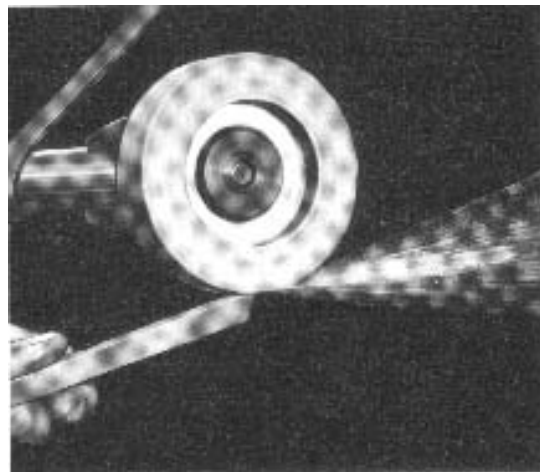


Abbildung V.5: tangentieller Funkenflug an einem Schleifstein

an den Schleifring. Die Funken fliegen tangentiell weg.

V.2 Die Fliehkraft: Dynamik der Kreisbewegung

V.2.1 Untersuchung der Fliehkraft

Im Folgenden wollen wir untersuchen, welche Kraft die Masse auf der Kreisbahn hält. Die oben errechnete Radialbeschleunigung

$$\vec{a}_r = -\omega^2 \vec{r}$$

wird durch eine Zwangskraft

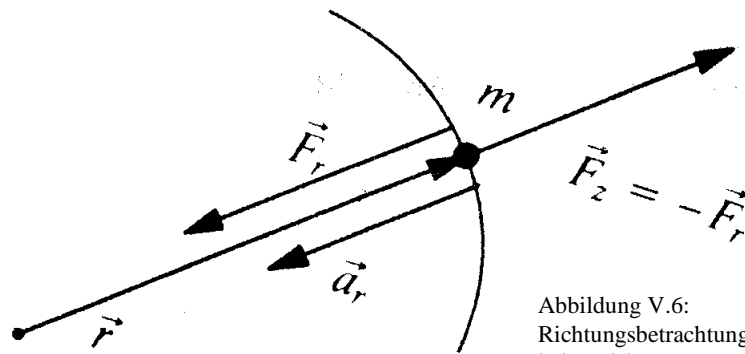


Abbildung V.6:
Richtungsbetrachtung
bei Kreisbewegungen

\vec{F}_r hervorgerufen. Diese Zwangskraft kann z.B. die Fadenspannung oder

die Schienenführung bei einem Zug sein. Nach Newton kann man diese Kraft schreiben als.

Definition V.4: Die zum Kreismittelpunkt hin gerichtete Kraft, die durch die Radialbeschleunigung hervorgerufen wird, nennt man **Zentripetalkraft**.

Merke: Dieses ist die einzige wirklich existierende Kraft im Sinne des 2. Newtonschen Axioms, d.h. in einem Inertialsystem.

Im Sinne des d'Alembertschen Prinzips spürt man im mitbewegten System, das kein Inertialsystem ist, eine Scheinkraft, die der realen Kraft, der Zentripetalkraft, entgegengerichtet gleich groß ist. Diese Kraft \vec{F}_Z erzeugt im mitbewegten System ein scheinbares dynamisches Gleichgewicht, der mitbewegte Massepunkt bewegt sich nicht. Wirkt jedoch auf den mitbewegten Massepunkt die Zwangskraft \vec{F}_r nicht, so spürt er nur die Scheinkraft \vec{F}_Z .

Definition V.5: Die der Zentripetalkraft \vec{F}_r entgegengerichtete Scheinkraft \vec{F}_Z ist die

einzige Kraft, die ein mitbewegter Beobachter spürt, auf den die Zwangskraft \vec{F}_r nicht wirkt: Zentrifugalkraft.

V.2.2 Versuche zur Fliehkraft

Die bekanntere der beiden oben eingeführten Kräfte ist wohl die Scheinkraft: die Zentrifugalkraft. Das liegt mitunter daran, daß oft bei Kreisbewegungen, z.B. in Fahrzeugen, die Zwangskraft nicht direkt auf den eigenen Körper wirkt, wohl aber die Zentrifugalkraft. Ein Beispiel hierfür ist die Kurvenfahrt eines Autos, bei der man aus der Kurve raus, also vom

Mittelpunkt des Kreises weg, eine Kraft verspürt. Berechnen wir die wirkende Kraft auf den Fahrer, der mit 120 km/h in eine Kurve mit dem Radius $r = 10$ m fährt und dabei auf die Hälfte der Geschwindigkeit, also auf 60 km/h abbremst.

Die Winkelgeschwindigkeit beträgt $\omega = \frac{v}{r}$,

die Radialbeschleunigung $\vec{a}_r = -\omega^2 \vec{r}$ $a_r = \frac{v^2}{r}$.

Mit den oben genannten Werten erfährt der Fahrer eine Beschleunigung von $27,8 \text{ m/s}^2$, das entspricht ungefähr $3g$, also der dreifachen Erdbeschleunigung.

Versuch V.3: Das „Säge“-Blatt:

Bei diesem Versuch wird ein rundes Blatt Papier über eine in der Mitte befestigte Achse einer Bohrmaschine schnell in eine Kreisbewegung versetzt. Somit bewegt sich jeder einzelne Punkt des Papiers mit einer Winkelgeschwindigkeit. Quadratisch mit dieser Winkelgeschwindigkeit steigt die Beschleunigung an, welche die Punkte des Papiers erfahren. Diese Beschleunigung hat eine stabilisierende Kraft zur Folge. Diese Kraft ist bei entsprechender Wahl der Antriebsgeschwindigkeit so groß, daß das Blatt ausreichend stabilisiert wird, um Holz zu zersägen.

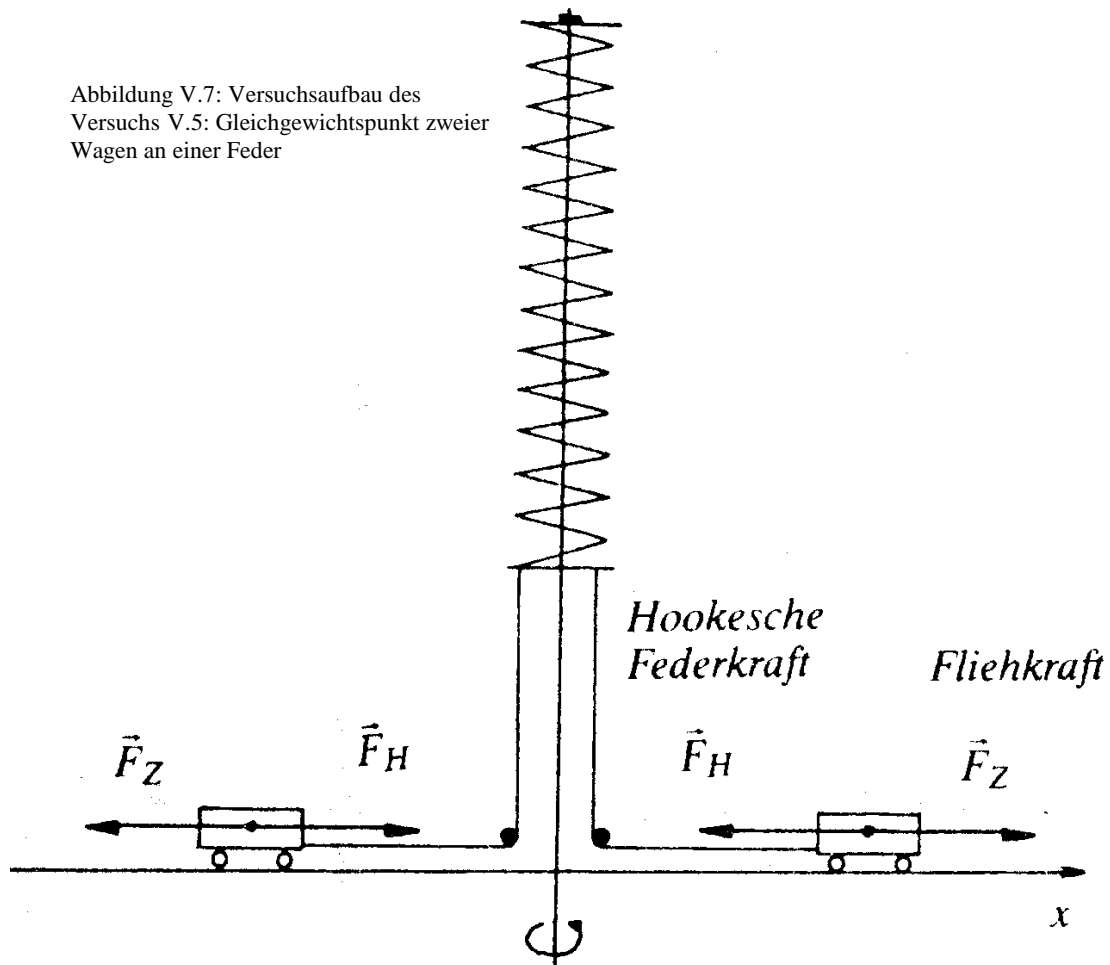
Versuch V.4: Rollende Kette

Dasselbe Prinzip kann man nutzen, um eine Metallkette in eine Kreisform zu bringen und zu stabilisieren. Hierfür wird eine Scheibe über eine Bohrmaschine angetrieben. Auf die Scheibe ist eine Metallkette gespannt. Nachdem die Kette schnell genug angetrieben wurde, kann sie von der Scheibe gelöst werden. Sie rollt nun durch die Radialkraft stabilisiert tangentiell los. Die Energie der Kette reicht, um bei Anstoßen an ein Hindernis einige Meter weit und hoch zu fliegen.

Versuch V.5: Gleichgewichtspunkt zweier Wagen an einer Feder

Bei dieser Versuchsanordnung stehen sich zwei Wagen gegenüber auf einer Schiene, auf deren Mitte senkrecht ein Stab befestigt ist, an dessen Ende eine Feder über den Stab herab hängt.

Abbildung V.7: Versuchsaufbau des Versuchs V.5: Gleichgewichtspunkt zweier Wagen an einer Feder



Über Umlenkrollen sind die Wagen an die Feder angehängt, sie erfahren also die Federrückstellkraft (Hook'sche Kraft \vec{F}_H), die sie zum Mittelpunkt der Schiene hin beschleunigt. Die Schiene kann über eine vertikale Achse in gleichmäßige Rotation mit verstellbarer Winkelgeschwindigkeit versetzt werden. Auf die Wagen wirkt nun zusätzlich die Fliehkraft, welche die Wagen von der Achse weg beschleunigen. Bei einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit stellt sich ein Gleichgewicht ein, das unabhängig von der Entfernung x der Wagen von Mittelpunkt der Schienen ist. Diese Winkelgeschwindigkeit läßt sich leicht berechnen:

Die entgegengesetzt wirkenden Kräfte $\vec{F}_H = \vec{F}_r$ müssen betragsmäßig gleich groß sein, damit die resultierende Kraft null ist und der Körper sich in Ruhe befindet. Mit den bekannten Formeln für die Hook'sche Kraft $F_H = Dx$ und die Fliehkraft $F_Z = m\omega^2 r$

und dem Radius r der Kreisbahn
 Feder über die Umlenkrolle folgt

$r = x$ gleich der Auslenkung der
 Dr.

Diese Gleichung ist unabhängig von der Auslenkung r , was der Versuch auch zeigte.
 Umformulieren nach ω liefert den Ausdruck für die Winkelgeschwindigkeit, bei der das

Gleichgewicht eintritt:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Versuch V.6: Fliehkraftregler

Der Fliehkraftregler besteht aus zwei schweren Kugeln, die über eine Achse in Rotation versetzt werden können. Die Kugeln hängen an Stangen der Länge l , die an der angetriebenen Achse fest montiert sind. Zwei weitere Stangen der Länge s sind so mit der Achse verbunden, daß sie sich auf und ab bewegen lassen, wobei sie an den Kugeln festsitzen. In Rotation versetzt heben sich die Kugeln und damit das untere Gestänge bis zu einer bestimmten Höhe, bei der ein mit den Kugeln verbundener Leiter sich so weit nach oben bewegt, daß er den Kontakt zu seinem Stromkreis verliert und ihn somit durchtrennt. In diesem

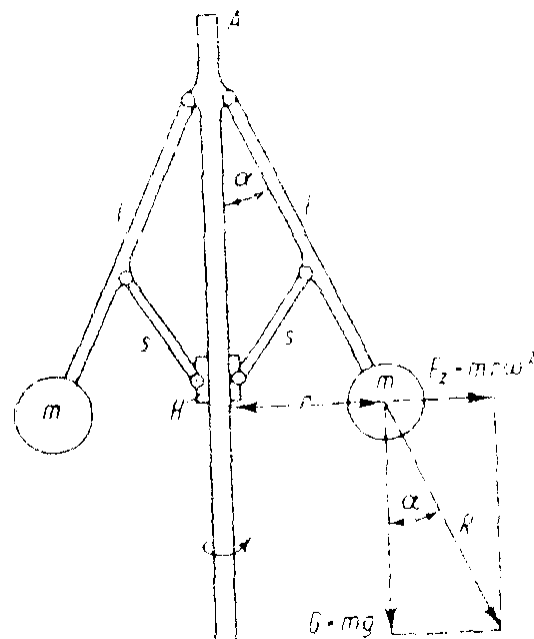


Abbildung V.8: Fliehkraftregler

Stromkreis hängt auch der Antrieb der Achse, so daß die Kugeln nicht mehr rotieren und sinken. Der Kontakt ist wieder hergestellt und die Kugeln heben sich wieder. Die ausgestellten Stangen bilden mit der Achse den Winkel α , die Kugeln seien den Abstand r von der Achse entfernt..

Im Gleichgewicht übt die Stange auf die Kugel eine Zwangskraft \vec{F} aus, die betragsmäßig der vertikalen Komponente des resultierenden Kraftvektors \vec{R} aus der Gewichtskraft \vec{G} und der Fliehkraft \vec{F}_Z entsprechen muß. Die geometrische Betrachtung der wirkenden Kraftkomponenten zeigt, daß für den Ausstellwinkel α die Beziehung gilt:

$$\tan \alpha = \frac{\omega^2 r}{g}$$

V.3 Drehmoment und Drehimpuls

Für gradlinige Bewegungen hatten wir das zweite Newtonsche Axiom kennengelernt als

2. Newtonsches Axiom.

Daraus hatten wir abgeleitet, daß in einem abgeschlossenen System, in dem der Impuls konstant ist, die resultierende der äußeren Kräfte null sein muß.

Dieses Gesetz soll im Folgenden auf Rotationen übertragen werden. Dazu betrachten wir zunächst die Definition der Kraft und des Impulses.

V.3.1 Übertragung des Kraftbegriffes

Als erstes Beispiel einer nicht-linearen Bewegung hatten wir das Pendel kennengelernt. Auf das Pendel wirken Fadenspannkraft und Gravitationskraft. Die Komponente der Gravitationskraft, die entlang des Fadens wirkt, wird durch die Fadenspannkraft kompensiert; für die Bewegung wichtig ist also allein die Komponente senkrecht zum Faden. Wir hatten diese Komponente als

$$\vec{G}_\perp = \vec{G} \sin \alpha$$

errechnet.

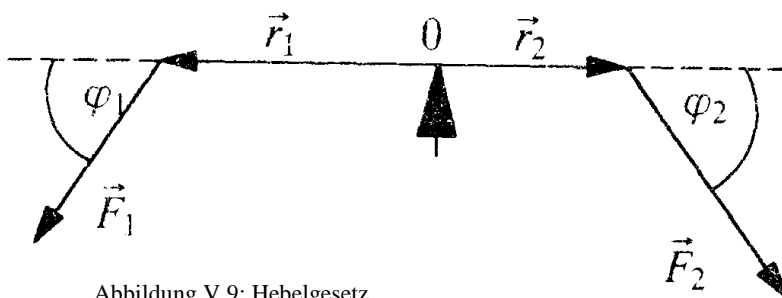


Abbildung V.9: Hebelgesetz

Ein anderes Beispiel sind die Hebelgesetze. Hier wissen wir, daß nur das Produkt aus Hebelarm und der Kraftkomponente

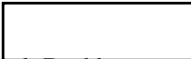
senkrecht zum Hebelarm für eine Drehung wirksam sind. Zieht man mit einer Kraft \vec{F}_1 unter einem beliebigen Winkel φ_1 zum Hebel ein Ende des Hebels nach unten, so bewirkt nur die Kraftkomponente senkrecht zum Hebel eine Drehung, die andere Komponente wird analog zum Pendel durch die Zwangskraft des Hebels kompensiert. Diese Komponente kann direkt abgelesen werden als

$$\vec{F}_{1\perp} = \sin \varphi_1 \vec{F}_1$$

Analog wirke auf der zweiten Seite des Hebels die Kraft \vec{F}_2 unter einem Winkel φ_2 . Gleichgewicht herrscht, wenn das Produkt aus wirksamer Kraft und Hebelarm gleich ist, also

$$r_1 \sin \varphi_1 \vec{F}_1 = r_2 \sin \varphi_2 \vec{F}_2 .$$

Allgemein kann man schließen, daß die eine Rotation bewirkende Kraftkomponente einer unter dem Winkel φ angreifenden Kraft \vec{F} die Form hat



$$\tau = r \sin \varphi F.$$

Wie die Kraft selbst, ist auch diese Größe eine Vektorgröße. Ändert man die Richtung der angreifenden Kraft, also den Winkel, oder die Richtung des Vektors, so ändert sich auch die Richtung von M. Wie in Kapitel II gezeigt, nutzt man zur Beschreibung eines Vektors, der seinerseits Produkt zweier Vektoren ist, das Vektor-, bzw. Kreuzprodukt. Damit können wir die Größe M vektoriell definieren als

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Dieses Übertragung des Kraftbegriffes auf die Rotation nennen wir Drehmoment.¹

Definition V.6: Das Drehmoment ist eine Vektorgröße, es steht senkrecht auf der Ebene, die durch \vec{r} und \vec{F} aufgespannt wird:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}. \text{ Sein Betrag ist.}$$

Die Definition des Kreuzproduktes besagt, daß das Drehmoment immer senkrecht aus Kraftvektor und Radius der Kreisbewegung stehen muß.

Wird z.B. eine Masse an einem Faden befestigt, der Faden im Ursprung eines Koordinatensystems festgehalten wird, so zeigt $\vec{\tau}$ in Richtung der Drehachse. Dies gilt aber nur für dieses spezielle Beispiel, die allgemeine Richtung von $\vec{\tau}$ muss für jede Bewegung neu untersucht werden.

Einheitenbetrachtung:

$$[\tau] = [r] [F] = 1 \text{ Newton-Meter} = 1 \text{ Nm}$$

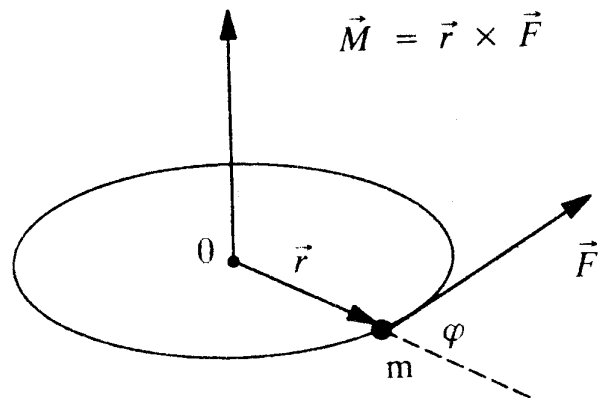


Abbildung V.10: Drehmoment, \vec{M} entspricht $\vec{\tau}$

¹ Das Drehmoment wird mit $\vec{\tau}$ bezeichnet, vom englischen Ausdruck *torque*. In einigen Büchern und Abbildungen hingegen ist auch die Bezeichnung M für das Drehmoment üblich.

V.3.2 Übertragung des Impulsbegriffes

Wir wollen nun eine Erhaltungsgröße analog zum Impuls für die Rotation definieren. Hierfür setzen wir versuchsweise analog zu der Übertragung des Drehmomentes $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Diese Größe nennt man Drehimpuls, sie steht senkrecht auf dem Radiusvektor und dem Impuls und damit auf der Geschwindigkeit des Massepunktes.

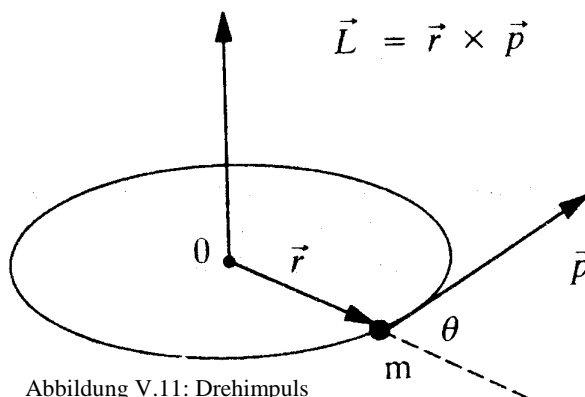


Abbildung V.11: Drehimpuls

Wir definieren diese Größe unter Vorbehalt und überprüfen danach, ob mit ihr das zweite Newtonsche Axiom erfüllt ist.

Definition V.7: Der Drehimpuls ist eine Vektorgröße, er steht senkrecht auf der Ebene, die durch \vec{r} und \vec{p} aufgespannt wird:

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Sein Betrag ist.

Einheitenbetrachtung:

$$[L] = [r] [p] = 1 \text{ m} \cdot \text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}. \text{ Mit } 1 \text{ N} = \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ folgt } [L] = 1 \text{ Nms}.$$

Bei der oben diskutierten Drehbewegung eines Massepunktes an einem Faden steht der Impuls senkrecht auf dem Radius und der Drehimpuls zeigt in Richtung der Drehachse.

V.3.3 Formulierung des 2. Newtonschen Axioms für die Rotation

Wir versuchen jetzt, das zweite Newtonsche Axiom mit den neu definierten Größen zu formulieren.

$$\begin{aligned} \text{Aus} \quad & \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \\ \text{folgt mit } \vec{p} = m\vec{v} \quad & \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \\ \Leftrightarrow \quad & \vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v}). \end{aligned}$$

Die Änderung des Drehimpulses mit der Zeit läßt sich über Differentiation berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \\ \Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} &= m(\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a}). \end{aligned}$$

Wegen $\vec{v} \times \vec{v} = 0$ ² $\Leftrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a})$.

Mit $\vec{F} = m\vec{a}$ $\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Merke: Die zeitliche Änderung des Drehimpulses mit der Zeit entspricht dem wirkenden Drehmoment:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}.$$

Diesen Sachverhalt kann man nun analog zur gradlinige Bewegung interpretieren als die Tatsache, daß ein Drehmoment, das auf einen Körper angewandt wird, eine Änderung des Drehimpulses bewirkt. Wirkt in einem abgeschlossenen System kein resultierendes Drehmoment, so ist der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße.

Satz von der Drehimpulserhaltung:

Wirkt in einem abgeschlossenen System kein resultierendes Drehmoment, so ist der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.}$$

Diese Erhaltungsgröße hat seinen Grund in der Invarianz der Naturgesetze gegen Drehungen im Raum. Er spielt eine sehr wichtige Rolle in der Physik, besonders in der Atom- und in der Kernphysik.

Greift z.b. eine Kraft im Schwerpunkt eines rotierenden Teilchens an, so ist der Drehimpuls erhalten, obwohl eine Kraft einwirkt. Dies kann man so erklären, daß die Kraft parallel zum Radiusvektor der Kreisbewegung steht und das aus der Kraft resultierende Drehmoment deshalb null ist.

$$\vec{F} \parallel \vec{r} \Rightarrow \vec{F} \times \vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{\tau} = 0.$$

² Diese Beziehung ist leicht aus der Definition des Kreuzproduktes zu beweisen: Der Betrag des Kreuzproduktes ist. Da ein Vektor mit sich selber einen Winkel von 0° einschließt gilt mit $\sin 0^\circ = 0$ $|\vec{v} \times \vec{v}| = |\vec{v}||\vec{v}|0$. Das ist gleich null: $|\vec{v} \times \vec{v}| = 0$. Damit ist auch der resultierende Vektor der Nullvektor.

V.3.4 Zusammenfassung der wichtigsten Vektorgrößen der Rotation

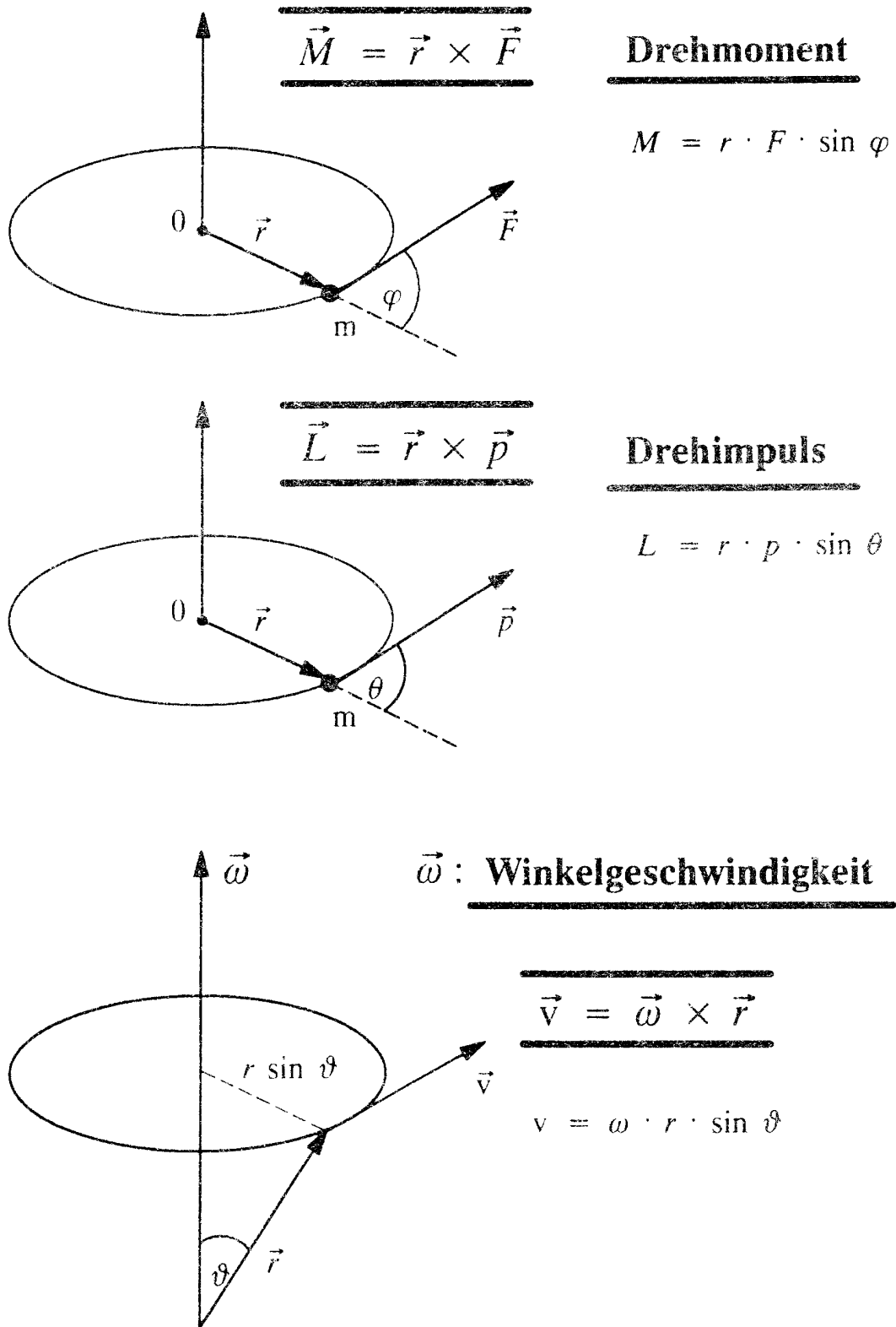


Abbildung V.12: Zusammenfassende Darstellung von Drehmoment (hier mit M bezeichnet), Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit

V.4 Planetenbewegung, Kepler'sche Gesetze und die Gravitation

V.4.1 Vom geozentrischen Weltbild zur Kopernikanischen Wende



Abbildung V.13: Rückläufige Bahn des Mars

Betrachtet man viele Nächte hindurch den Mars und zeichnet seine Position im Himmel in regelmäßigen Abständen ein, so kann man die Laufbahn des Mars relativ zur Erde ermitteln. Dieser Versuch führt jedoch zu einer Bahn, die keine einfache geometrische Gestalt aufweist. Der Mars scheint eine rückläufige Bewegung auszuführen.

Bereits vor 5000 Jahren begannen die Ägypter, Babylonier, Chinesen und Inder die Erscheinungen am Himmel systematisch zu beobachten. Je nach Weltbild wurde versucht, die Bewegung der Planeten um die Erde zu beschreiben.³

Die beiden griechischen Philosophen **Aristoteles** (384 - 322 v.

Chr.) und **Plato** (427 - 347 v. Chr.) behaupteten, die Sterne bewegten sich auf der vollkommensten aller Bahnen, dem Kreis, einmal am Tag um die Erde. Dabei, so postulierten sie, hätten die Sterne eine dem Betrag nach konstante Geschwindigkeit.

Beobachtete Abweichungen von der Kreisbahn, wie die des Mars, versuchte **Ptolomäus** um 150 n. Chr. durch Zusatzannahmen zu deuten. Er behauptete, durch Überlagerung einer kleineren Kreisbahn des Planeten mit der großen Kreisbahn um die Erde entstünden die zu



Abbildung V.14: Aristotelischer Kosmos

beobachteten Epizyklen. Dieses System, das bis in die Neuzeit Gültigkeit besaß, wird heute **geozentrisches, ptolemäisches Weltbild** genannt.

³ Erstaunlicherweise behauptete Astriarch um 270 v. Chr. bereits, die Fixsterne seien in Ruhe und deren scheinbare Bewegung werde nur durch die Rotation der Erde um die eigene Achse vorgetäuscht. Diese Lehre konnte sich jedoch nicht durchsetzen: Nach Revision der Vorstellung, die Erde sei eine Scheibe, ging man seit ca. 380 v. Chr. vom geozentrischen Weltbild aus.

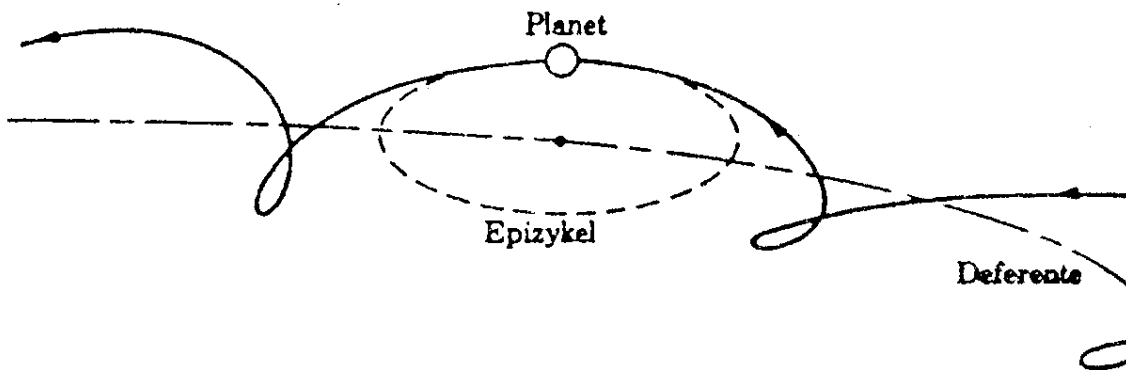
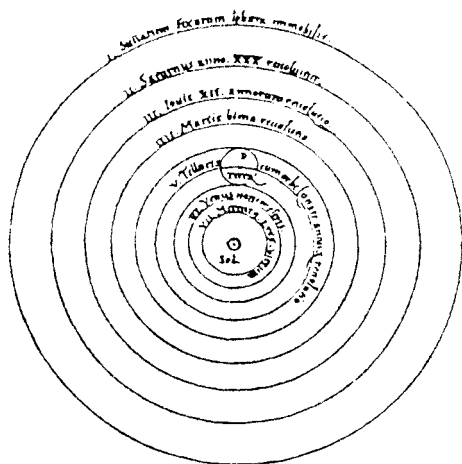


Abbildung V.15: Ptolemäische Vorstellung komplizierter Kreisbewegungen: Kreise auf Kreisen verursachen Epizyklen

Noch im 16. Jh argumentierte man, die Erde könne sich nicht um sich selbst drehen, da sonst eine Kanonenkugel bei einer angenommenen Drehung von West nach Ost in Richtung Westen viel weiter fliegen müsse als nach Osten.

NICOLAI COPERNICI
 ner, in quo terram cum orbe lunari tanquam epicyclo contineri
 diximus. Quinto loco Venus nono mense reducitur., Sextum
 deniq; locum Mercurius tenet, octuaginta dierum spacio circū
 currens, in medio uero omnium refidet Sol. Quis enim in hoc



pulcherimo templo lampadem hanc in alio uel meliori loco po-
 neret, quam unde totum simul possit illuminare. Siquidem non
 inepte quidam iuccernam mundi, alij mentem, alij rectorem uo-

Abbildung V.16: Heliozentrischer Kosmos

komplizierten Hilfsbewegungen.

Dieser Theorie widersprachen erst **Kopernikus** (1473 - 1543 n. Chr.) und **Galilei**, dennoch gingen beide von Planetenbewegungen auf Kreisbahnen aus. Dem geozentrischen Weltbild widersprach Kopernikus als erster, als er in seinem Werk „De revolutionibus orbium coelestium“⁴ 1542 die Hypothesen aufstellte, die Erde drehe sich täglich einmal um die eigene Achse und dadurch erscheinen die Bewegungen der Planeten und die Erde bewege sich um die Sonne. Dieses Weltbild wird **heliozentrisches Weltbild** genannt. Durch das Beharren auf die Kreisbahnen der Planeten erforderte die Beschreibung der Beobachtungen auch nach der Kopernikanischen Wende noch die

V.4.2 Die Kepler'schen Gesetze

Den endgültigen Bruch mit dieser Vorstellung schaffte der Däne **Tycho Brahe** (1546 - 1601), der die Marsbahn mit einer Präzession von ungefähr einer Bogenminute ausmaß.⁵ Brahe selbst fand jedoch die Fixsternparallaxe noch nicht und nahm so die Erde als ruhend an.

Johannes Kepler (1571 - 1630) wertete nach dem Tod seines Lehrers dessen Messungen aus und fand, daß die Marsbahn keinen Kreis, sondern eine Ellipse beschreibt. Er stellt anhand dieser Entdeckung drei Gesetze über die Planetenbewegung auf. Mit diesen drei Gesetzen kann die gesamte Kinematik der Planetenbewegung zusammengefaßt werden:

1. Kepler'sches Gesetz: Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Insbesondere umkreist die Erde die Sonne auf einer Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. Der zweite Brennpunkt der Ellipse hat in Keplers Theorie keine physikalische Bedeutung. Dieser Satz bedeutet, daß die zwischen den Planeten wirkende Kraft eine anziehende Kraft sein muß, weil sich bei einer abstoßenden Kraft die Planeten voneinander entfernen müßten

2. Kepler'sches Gesetz: Der von der Sonne zum Planeten gezogene Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Mit diesem Gesetz wich Kepler auch von der Theorie der Griechen ab, die Geschwindigkeit der Planeten auf ihrer Bahn sei dem Betrag nach konstant. Er erkannte, daß die Planeten sich in Sonnennähe (Perihel) schneller bewegen müssen als in Sonnenferne (Aphel).

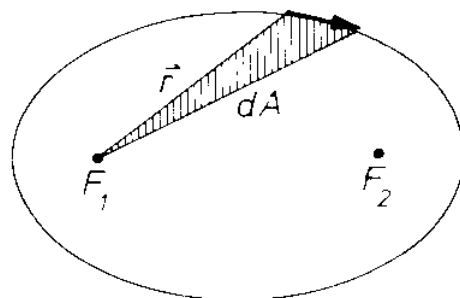


Abbildung V.17: 2.KG: Flächensatz

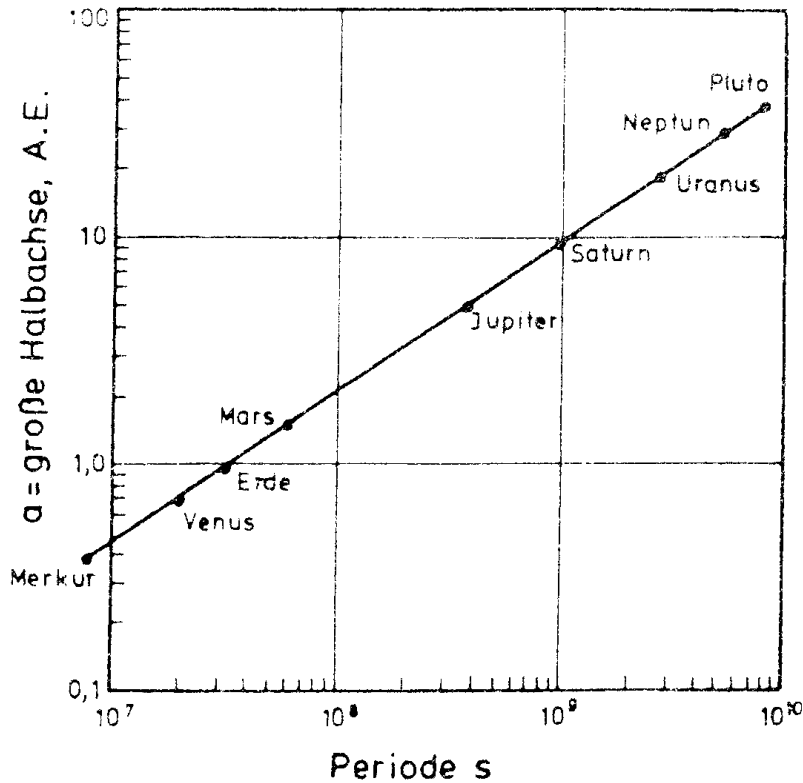
⁴ aus dem Lateinischen übersetzt: „Über die Umdrehung der Himmelssphären“

⁵ Diese genaue Messung ist deshalb so erstaunlich, weil Tycho Brahe diese mit bloßem Auge vornehmen mußte. Das Fernrohr existierte noch nicht.

3. Kepler'sches Gesetz: Die Quadrate der Umlaufzeiten T_1 und T_2 zweier beliebiger Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen a_1 und a_2 der

Bahnellipsen:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$



Erst Newton versuchte aus dieser Beschreibung der Kinematik der Planetenbewegung auf die Art der wirkenden Kräfte rückzuschließen. Er begründete damit die dynamische Beschreibung der Planetenbewegung.

Abbildung V.18: Planeten liegen auf einer Geraden, die das dritte Kepler'sche Gesetz benennt.

V.4.3 Herleitung des Gravitationsgesetzes aus den Kepler'schen Gesetzen

Fassen wir die wichtigsten Aussagen der Kepler'schen Gesetze einmal anders formuliert zusammen:

1. Kepler'sches Gesetz: Die wirkende Kraft ist anziehend, da sonst keine geschlossenen Bahnen existieren könnten.
2. Kepler'sches Gesetz: Die wirkende Kraft ist eine Zentralkraft. Eine Zentralkraft ist dabei eine Kraft, die stets in Richtung des Mittelpunktes der Kreisbewegung zeigt und deren Funktion vom Radius der Kreisbahn abhängt. Allgemein kann man eine Zentralkraft schreiben als:

Definition V.8: Eine Zentralkraft hat stets die Form

$$\vec{F}_R = \frac{\vec{r}}{r} \cdot f(r) .$$

Um diese Formulierung zu beweisen wählen wir den Rückkehrschluss:

Wir beweisen, daß aus der Annahme, die wirkende Kraft sei eine Zentralkraft der von Kepler formulierte Flächensatz folgt:

Angenommen, eine Masse m bewege sich unter

Einfluß einer Zentralkraft

$$\vec{F}_R = -\frac{f(r)}{r^2} \cdot \vec{r}.$$

↪

Dann wirkt das Drehmoment

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = \frac{f(r)}{r} \vec{r} \times \vec{r}$$

mit $\vec{r} \times \vec{r} = 0$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = 0$$

Mit

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \text{const.} -$$

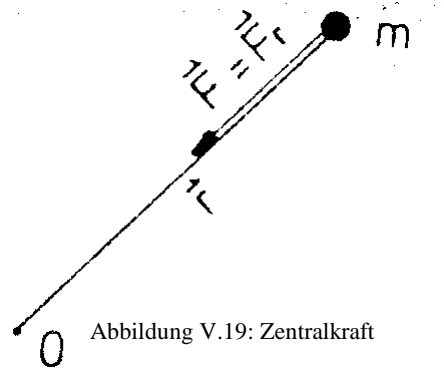


Abbildung V.19: Zentralkraft

Das heißt, für Zentralkräfte ist allgemein der Drehimpuls erhalten.

Untersuchen wir nun den Zusammenhang mit dem Flächensatz. Qualitativ hatten wir bereits gesagt, daß die Geschwindigkeit größer sein muß, je näher der Planet der Sonne ist. Oben

haben wir errechnet, daß $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$ konstant ist.

Zur quantitativen Berechnung zeichnen wir einmal die Fläche auf, die der Fahrstrahl überstreicht:

Die schraffierte Dreiecksfläche berechnet sich als die Hälfte des Produktes der Höhe h und der Strecke r :

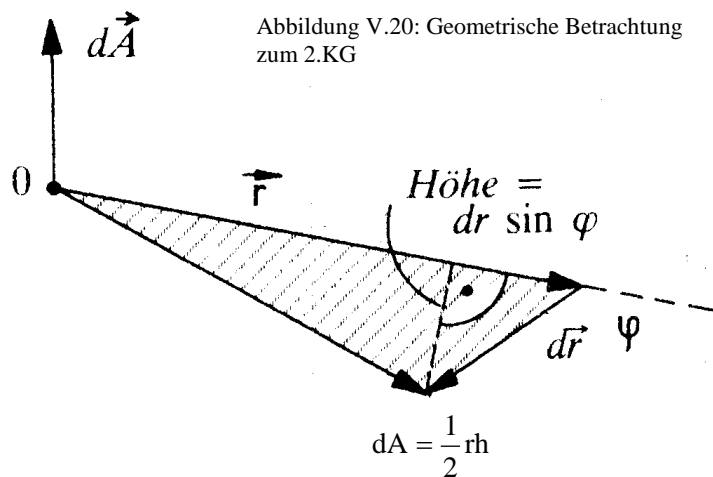


Abbildung V.20: Geometrische Betrachtung zum 2.KG

$$dA = \frac{1}{2} rh$$

$$\text{mit } h = dr \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad dA = \frac{1}{2} r dr \sin \varphi .$$

Wir definieren einen Flächenvektor, der senkrecht auf der Fläche steht und dessen Betrag der

$$\text{Maßzahl der Fläche entspricht} \quad d\vec{A} = \frac{1}{2} (\vec{r} \times d\vec{r}).$$

Die zeitliche Ableitung dieses Vektors, also die Änderung der Fläche, die der Radiusvektor pro

Zeit überstreicht ist
$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{r} \right)$$

Mit $d\vec{r} \times d\vec{r} = 0$ \Leftrightarrow
$$\boxed{\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right)} \quad \parallel$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit dem Drehimpuls:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

mit $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ \Leftrightarrow
$$\vec{L} = m\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\vec{L}dt}{dt} = m \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{r} \right)$$

mit $d\vec{r} \times d\vec{r} = 0$ \Rightarrow
$$\frac{\vec{L}dt}{dt} = m \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L}dt = m(\vec{r} \times d\vec{r})} \cdot$$

Der Vergleich von \parallel und \cdot zeigt, daß gilt:

$$d\vec{A} = \frac{1}{2m} \vec{L}dt$$

Mit $\vec{L} = \text{constant}$ folgt:
$$\boxed{dA \sim dt.} \quad \textcircled{R}$$

Das bedeutet: In gleichen Zeit dt überstreicht der Vektor \vec{r} gleiche Flächen dA .

Umgekehrt folgt aus \textcircled{R} auch \neg , denn wenn \neg nicht gilt, gelten auch - und damit auch \textcircled{R} nicht, also gilt in beide Richtungen:

2. Kepler'sches Gesetz: Flächensatz ÖZentralkraft

Die r -Abhängigkeit $f(r)$ kann am einfachsten aus dem 3. Kepler'schen Gesetz geschlossen werden:

Hierzu gehen wir zur Vereinfachung von Kreisbahnen aus, die Halbachsen a aus der Formulierung des Kepler'schen Gesetzes seien also die Radien r eines Kreises.

Mit dieser Notation lautet das 3. Kepler'sche Gesetz :

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

umformuliert folgt für alle T_i und a_i
$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} = \frac{T}{r} = k$$

Die Radialbeschleunigung berechnet sich aus

$$a_r = \omega^2 r$$

$$\text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad a_r = \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

$$\text{mit } \frac{r^3}{T^2} = k \quad \Rightarrow \quad a_r = \frac{4\pi^2}{k} \frac{1}{r^2}$$

Die Kraft auf den Planeten der Masse m kann man dann angeben mit

$$F_p = ma_r$$

$$\Rightarrow \quad F_p = m \frac{4\pi^2}{k} \frac{1}{r^2}$$

Da k eine planetenunabhängige Konstante ist folgt direkt:

$$F_p \sim \frac{m}{r^2}.$$

Durch das 3. Newtonsche Axiom wissen wir, daß dieselbe Kraft entgegen gerichtet auf die

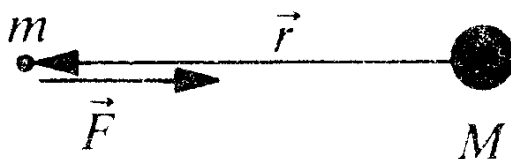
$$\text{Sonne der Masse } M \text{ wirkt:} \quad F_s = F_p \sim \frac{m}{r^2}.$$

Zusammengefaßt gilt dann

$$F_s = F_p = -.$$

V.4.4 Das Gravitationsgesetz

Diese Gleichung gibt den Betrag der Kraft an, die von einer beliebigen Masse M auf eine andere Masse m ausgeübt wird. Die Richtung der Kraft wird festgelegt durch den Vektor, der



die beiden Massen verbindet. Hierbei

definiert man den Vektor \vec{r} von der größeren zur kleineren Masse. Die Richtung

der Kraft wird mit dieser Konvention

angegeben durch den Einheitsvektor in

Richtung der Verbindung. Somit ist die Kraft negativ, sie wirkt entgegen des Vektors, denn die kleine Masse wird angezogen und bewegt sich damit entgegengesetzt zum so definierten Einheitsvektor.

Vektoriell kann man die Gleichung der Kraft einer Masse M auf eine andere Masse m

schreiben: $\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$. Dieses Gesetz wird nach seinem Entdecker *Newtonsches*

Gravitationsgesetz genannt.

Newtonsches Gravitationsgesetz:
Eine Masse M übt auf eine andere Masse m, die sich im
Abstand r befindet, eine Kraft \vec{F} aus, für die gilt:

$$\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Um diese Kraft zu berechnen, müssen die Massen der Körper bekannt sein, ihr Abstand voneinander und die Konstante γ . Die Konstante gilt für beliebige Körper, sie muß jedoch einmal bestimmt werden können. Um diese universelle Konstante ermitteln zu können, muß man eine Kraft kennen, die zwischen zwei Massen wirkt, ebenfalls die Massen und den Abstand.

Diese Überlegung macht sich der Engländer Cavendish (1731 - 1810) zunutze. Er erfand 1798 einen Versuch, bei dem die wirkende Gravitationskraft auf eine zweite Weise, über die daraus resultierende Bewegung der Massen, berechnet werden kann. Die so ermittelte Kraft kann dann in das Newtonsche Gravitationsgesetz eingesetzt werden und die Konstante γ kann mit Kenntnis der anderen Faktoren berechnet werden.

Versuch V.7: Cavendish Drehwaage

Ein waagerechter Stab trägt an den Enden zwei kleine Bleikugeln der Masse m. Dieser Stab ist in der Mitte an einem dünnen Faden, dem Torsionsfaden, aufgehängt und kann deshalb in dem Querschlitz der Gravitationsdrehwaage frei schwingen. Am Stab ist ebenfalls mittig ein Spiegel befestigt, so dass die horizontalen Bewegungen durch einen reflektierten Laserstrahl

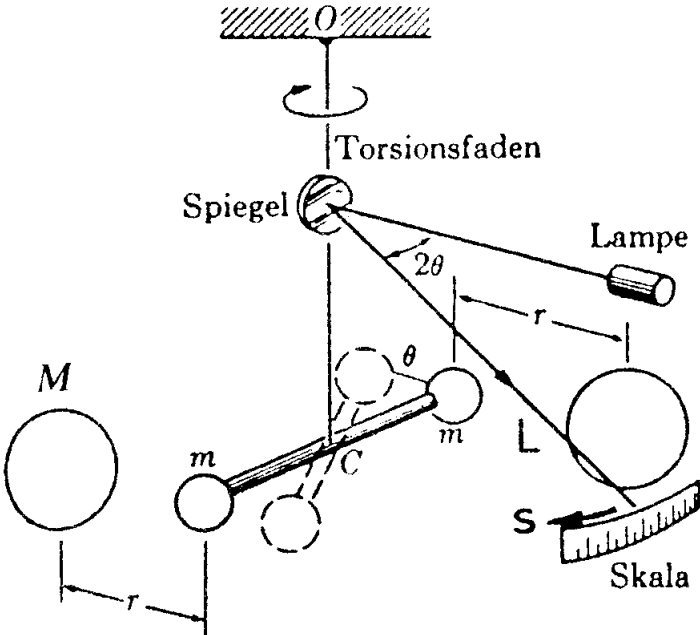


Abbildung V.21: Schema der Cavendish-Drehwaage

vergrößert an der gegenüberliegenden Wand sichtbar gemacht werden können. Zunächst sind zwei große Kugeln der Masse M ($M \gg m$) symmetrisch zu den kleinen Kugeln in geringem Abstand angebracht.

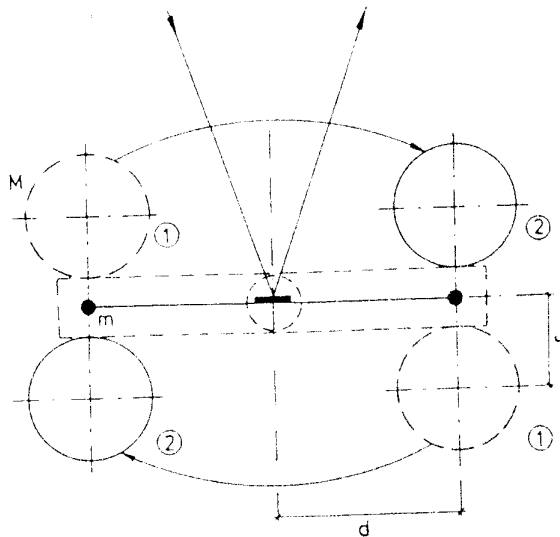


Abbildung V.22: Aufsicht

In dieser Stellung \neg wird im Gleichgewicht die Anziehungskraft \vec{F} von M auf m durch die Verdrillungsspannung des Aufhängefadens kompensiert $\vec{F} = -\vec{F}_R$. Wenn sich der Zeiger auf das Gleichgewicht eingestellt hat werden die großen Kugeln in die Lage \neg geschwenkt. Jede der großen Kugeln übt nun auf die kleine eine Gravitationskraft \vec{F} aus. Dadurch wirkt jetzt die Anziehungskraft von M auf m in die entgegengesetzte Richtung und \vec{F} und \vec{F}_R addieren sich. Die nun wirkende

Kraft des Betrags $F_N = 2F$ erzeugt nach Newton eine Beschleunigung a .

Mit $F_N = ma$ und $F_N = 2F$ wirkt die Beschleunigung

$$a = \frac{2F}{m}.$$

Die wirkende Kraft läßt sich mit dem Gravitationsgesetz schreiben als

$$F = \gamma \frac{Mm}{r^2}$$

Für die Beschleunigung folgt:

$$a = \frac{2}{m} \gamma \frac{Mm}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow a = 2\gamma \frac{M}{r^2}. \quad \neg$$

Die Bewegung mit dieser Beschleunigung wird über den Lichtstrahl vergrößert an die Wand projiziert. Die geometrische Betrachtung des Strahls zeigt die Abhängigkeit des Winkels, um den der Spiegel gedreht wird, von der Bewegung der Kugeln. Für den Drehwinkel des Spiegels gilt:

$$\theta = \frac{x}{d},$$

wenn der Weg der kleinen Kugeln mit x und ihr Abstand von der Achse d genannt wird. Der Reflexionswinkel des Strahls wird um 2θ geändert. Mit L als Abstand des Spiegels von der Projektionsfläche und s als Weg des Lichtzeigers auf der Wand gilt

$$\frac{s}{L} = 2\theta.$$

$$\text{Mit } \theta = \frac{x}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{L} = \frac{2x}{d}$$

$$\text{für den Weg gilt dann} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{sd}{2L}.$$

Der Zusammenhang des Weges mit der Beschleunigung für konstante Beschleunigungen ist gegeben durch

$$a = \frac{2x}{t^2}.$$

$$\text{Mit } x = \frac{sd}{2L} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{sd}{Lt^2} \quad -$$

Ein Vergleich der beiden Ausdrücke \neg und $-$ zeigt, daß für die Beschleunigung gilt:

$$2\gamma \frac{M}{r^2} = \frac{sd}{Lt^2}.$$

Der Ausdruck für die zu bestimmende Konstante γ lautet dann:

$$\gamma = \frac{s}{t^2} \frac{dr^2}{2ML}.$$

Die Größen M , L , r und d sind durch den Aufbau gegeben, der Weg s und die dafür benötigte Zeit wird gemessen.

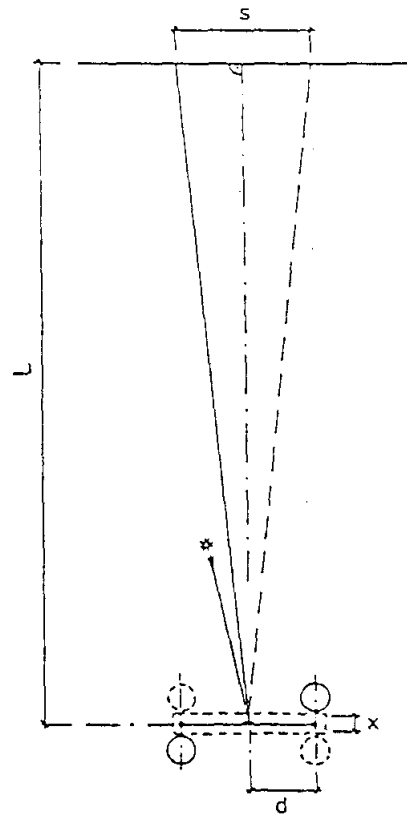


Abbildung V.23: Geometrische Betrachtungen

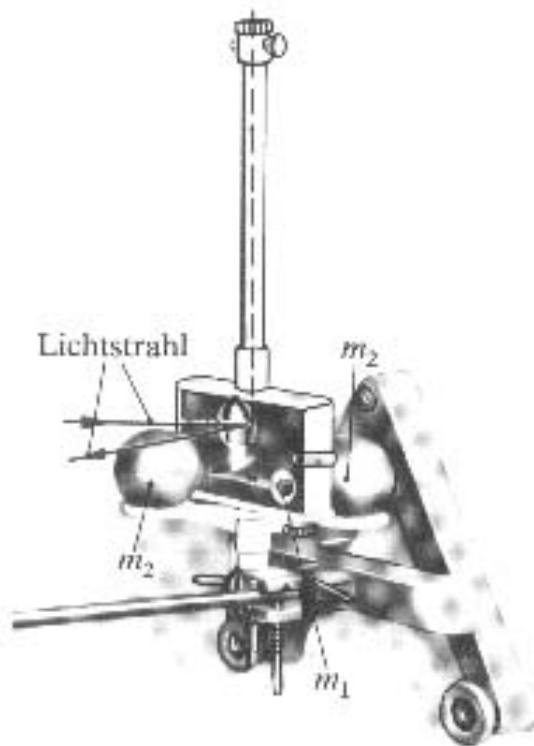


Abbildung V.24: Im Film gezeigte Drehwaage von Leybold

Da die Gravitationskräfte zwischen zwei Körpern mit kleiner Masse sehr klein sind, wir spüren sie im täglichen Leben nicht, ist es nötig, mit dieser Drehwaage Kräfte von 10^{-8} cN messen zu können. Die Präzision erfordert eine von Erschütterungen frei Umgebung. Deshalb ist dieser Versuch nur nachts durchzuführen, wenn kein Straßenverkehr herrscht. Leider kann der Versuch deshalb nur als Film vorgeführt werden.

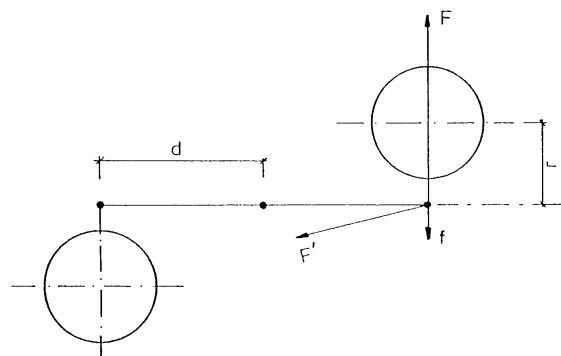
Die Messung in dem vorgeführten Film ergab den Wert.

Der Literaturwert der **Gravitationskonstanten** lautet

$$\gamma = 6,670 \pm 0,007 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} .$$

Bei solchen Drehwaagen liegt noch ein systematischer Fehler vor, der bei der Ermittlung des Wertes der Gravitationskonstanten mit berücksichtigt werden muß:

Die kleine Kugel wird ebenfalls von der anderen, weiter entfernten großen Kugel angezogen. Diese Kraft \vec{F}' ist zwar eine sehr kleine Kraft, führt aber dennoch zu der beobachteten Abweichung. Auch diese Kraft läßt sich über das Gravitationsgesetz berechnen:



$$F' = \gamma \frac{mM}{r^2 + 4d^2} .$$

Diese Kraft hat eine entgegengesetzte Komponente \vec{f} zur messenden Kraft:

$$f = \frac{r^3}{r^2 + 4d^2 \sqrt{r^2 + 4d^2}} \cdot \gamma \frac{mM}{r^2} .$$

Mit $F = \gamma \frac{Mm}{r^2} \Leftrightarrow f = \frac{r^3}{r^2 + 4d^2 \sqrt{r^2 + 4d^2}} \cdot F.$

Um den Faktor $1+\beta$, mit $\beta = \frac{r^3}{r^2 + 4d^2 \sqrt{r^2 + 4d^2}}$

muss unser Messergebnis also korrigiert werden. Mit unseren Werten folgt daraus

$\beta = 7,7 \cdot 10^{-2}$ und damit.

V.4.5 Gezeiten

Die Gravitationskräfte von Mond und Sonne sind Ursache für Ebbe und Flut, da sich das Wasser, das die Erde bedeckt, nahezu frei bewegen kann. Um die Gezeitenkräfte zu verstehen, betrachte man die Drehung des Mondes und der Erde um einen gemeinsamen Schwerpunkt. Dieser Schwerpunkt befindet sich 0,7 Erdradien vom Mittelpunkt der Erde entfernt, also noch innerhalb des Erdkörpers. Hierbei darf man sich die Verbindung Mond - Erde nicht wie ein Hantelmodell vorstellen, also mit starrer

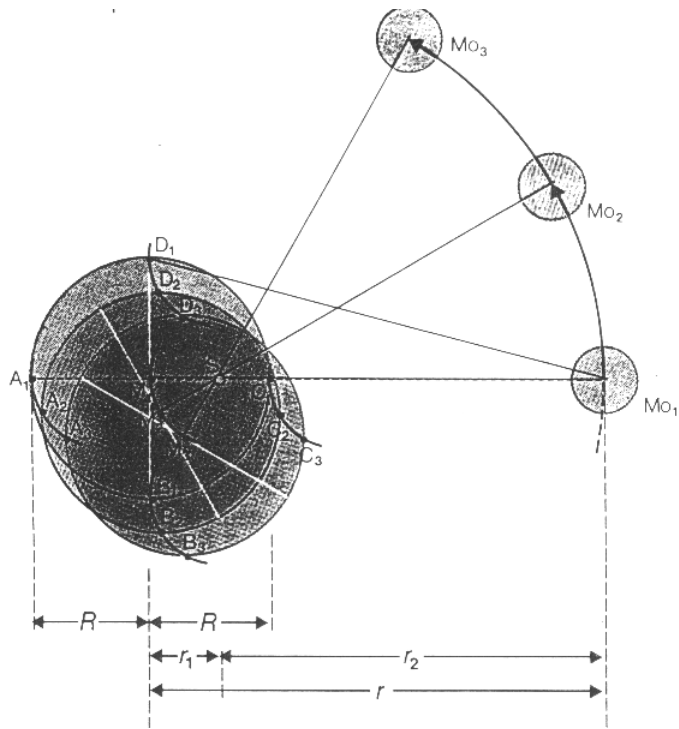
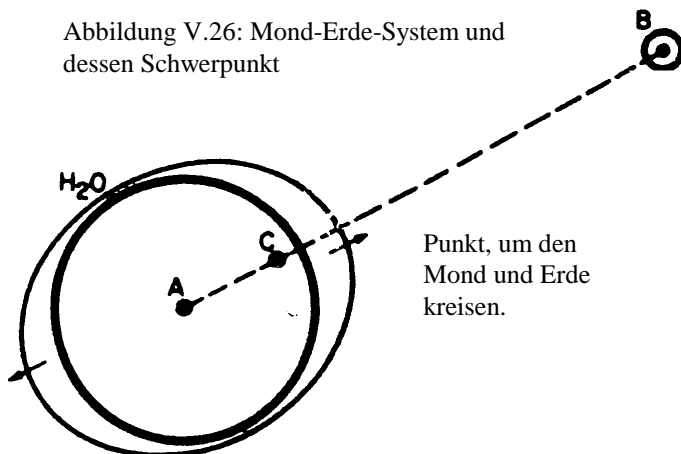


Abbildung V.25: Mond und Erde dürfen nicht als starre Hantel verstanden werden, die sich um den gemeinsamen Schwerpunkt dreht.

Abbildung V.26: Mond-Erde-System und dessen Schwerpunkt



Punkt, um den Mond und Erde kreisen.

Verbindungsachse. Die Kopplung über die Gravitation ist nur eine Fernkraftkopplung. In Wirklichkeit beschreibt jeder Punkt der Erde einen eigenen Kreis. Infolge der Drehung um den gemeinsamen Schwerpunkt von Mond und Sonne wirkt auf das Wasser an ihrer mondzugewandeten Seite

zusätzlich zur Gravitationskraft des Mondes eine größere Zentrifugalkraft in gleicher Richtung, während auf der mondabgewandten Seite beide Kräfte gegeneinander wirken. Dabei sind alle Fliehkräfte auf der Erde gleich zum Mond gerichtet, die Anziehungskräfte hängen jedoch vom variablen Abstand der beiden Planeten ab.

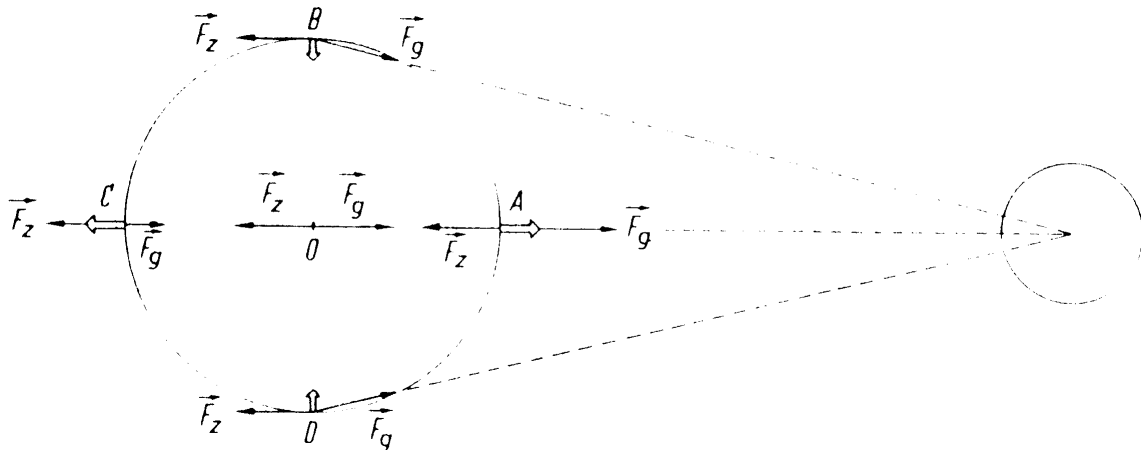


Abbildung V.27: Kräfte, die auf Wasserteilchen wirken

Aus der Mondmasse und dem Abstand vom Mond zur Erdmitte, $r = 60$ Erdradien, berechnet sich die Fliehkraft. Nun ist der mondnahe Punkt vom Mondmittelpunkt einen Erdradius weniger entfernt, also nur 59 Erdradien. Ein in diesem Punkt frei bewegliches Wasserteilchen erfährt nach dem Gravitationsgesetz durch die Mondanziehung die um den Faktor $(60/59)^2$ größere Gravitationskraft. Das Wasserteilchen wird also durch den Differenzbetrag der beiden Kräfte stärker zum Mond hin beschleunigt als der starre Erdkörper. In diesem Punkt bildet sich ein dem Mond zugewandter Flutberg. Ein auf der Erdkugel genau gegenüberliegendes Teilchen ist 61 Erdradien vom Mond entfernt und erfährt deshalb die kleinere Beschleunigung. Es bleibt hinter der Erde zurück, da es vom Mond weniger stark beschleunigt wird. So bildet sich in diesem Punkt ein vom Mond angewandter Flutberg aus. Unter beiden Flutbergen dreht sich die Erde im Laufe von 24 Stunden und 50 Minuten einmal durch (der Mond bleibt täglich etwa 50 Minuten hinter der Sonne zurück).

Die Rechnung für die Beschleunigungen ergibt ein Verhältnis zur Gravitationsbeschleunigung g

von

$$\frac{\Delta a}{g} = \frac{M_{\text{Mond}}}{M_{\text{Erde}}} \frac{r_{\text{Erde}}^3}{r_{\text{Mond}}^3} \approx 10^{-7}.$$

Die Sonne übt auf der Erde eine fluterzeugende Wirkung aus, die etwa 40% von der des Mondes beträgt. Steht die Sonne in gleicher Richtung wie der Mond, Neumond, oder dem Mond entgegen, Vollmond, dann addieren sich die Wirkungen der beiden Himmelskörper und es gibt eine Springflut. Steht die Sonne bei Halbmond unter 90° , so schwächen sich die

Wirkungen zu einer Nippflut. Im freien Ozean beträgt der Tidenhub nur etwa 79 cm. Im Innern von Buchten staut sich das Wasser und es entstehen Höhenunterschiede zwischen Ebbe und Flut von bis zu 12 Metern (Mont-Sant-Michel) oder sogar bis zu 21 Metern (Fundy-Bay in Kanada). Auch in kleineren „Meeren“ wirken die Gezeiten: Der Baikalsee hat einen Tidenhub von 6 - 8 cm, im Genfer See sind es noch 2 mm, im Chiemsee 1 mm.

V.4.6 Zusammenhang Schwerkraft - Gravitation

Eine der wesentlichen Leistungen Newtons war es, zu erkennen, dass diejenige Kraft, die die Planeten auf ihren Umlaufbahnen hält, dieselbe Kraft ist, die den Apfel auf seinen Kopf fallen ließ. Er erkannte damit, was keineswegs eindeutig war: Gravitationskraft und Schwerkraft sind ein und dasselbe. Damit schaffte Newton zum ersten mal die Vereinigung zweier bis dahin als unabhängig von einander geltender Kräfte bzw. Phänomene.

Der mathematische Beweis, daß diese Kräfte identisch sind und die uns bekannte Formel für die Hubarbeit aus der Gravitation abgeleitet werden kann, wird in der theoretischen Physik betrachtet. Hier wollen wir nur aus dieser Tatsache die Erdmasse berechnen:

Das Gesetz der Schwerkraft hatten wir hergeleitet als

$$F_S = mg.$$

Das Gravitationsgesetz lautet

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2}.$$

Diese beiden Kräfte sind laut Newton identisch, also gilt für beliebige m und M

$$\gamma \frac{mM}{r^2} = mg$$

$$\Leftrightarrow \gamma \frac{M}{r^2} = g.$$

Sind die beiden universellen Konstanten g und γ bekannt, kann eine Masse M, die sich im bekannten Abstand r von der Probemasse m befindet, berechnet werden. So kann z.B. die Erdmasse M_E berechnet werden mit

$$M_E = \frac{r_E^2}{\gamma} g$$

$$\Leftrightarrow M_E = \frac{(6,37 \cdot 10^6)^2 \cdot 9,8}{6,6 \cdot 10^{-11}} \text{ kg}.$$

Damit errechnet sich die Erdmasse als:

Erdmasse $M_E \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

V.5 Wie funktioniert Gravitation?

Bisher haben wir außer der Schwerkraft nur Nahwirkungskräfte untersucht; Kräfte also, die durch direktes Angreifen auf einen Körper wirken. Wie die Betrachtung der Gezeiten schon zeigte, ist dieses Modell nicht so einfach auf die Gravitation zu übertragen. Seit der Formulierung des Gravitationsgesetzes durch Newton ist die Wirkung, auf der diese Kraft beruht, Gegenstand zahlreicher Überlegungen.

Newton formulierte seine Aussagen über Fernkräfte noch sehr vorsichtig „als ob“ eine Fernkraft wirkt.

Maxwell postulierte Nahwirkungskräfte, analog zu den bekannten Kräften. Die Übertragung der Kräfte, er konzentrierte sich insbesondere auf die elektromagnetische Kraft, stellte er sich mittels eines allgegenwärtigen Äthers vor.

Einstein machte die Gravitation zu einer Eigenschaft des Raumes. Die allgemeine Relativitätstheorie beinhaltet eine „Raumkrümmung“ durch Massen.

Moderne Quantenfeldtheorien versuchen, die Gravitation ähnlich wie die anderen Wechselwirkungen durch Austausch von Feldquanten zu erklären. Dieser Mechanismus ist für die anderen Wechselwirkungen, also schwache, starke und elektromagnetische Wechselwirkungen, bereits nachgewiesen, für die Gravitation jedoch noch nicht. Die in dieser Theorie vorhergesagten Austauscheteilchen werden Gravitonen genannt.

Die Entstehung einer Gravitationswelle stellt man sich vor durch die schnelle Bewegung von großen Massen. Diese Massen, die sich zudem schnell bewegen, gibt es im All. Mögliche Quellen sind in dieser Tabelle aufgeführt. Daneben stehen jeweils Signaltyp und Frequenz der Welle und die Auswirkungen. Beispielsweise würden Gravitationswellen von einem Doppelstern ausgesendet den Abstand zwischen Massen, die einen Meter voneinander entfernt sind, um nur 10^{-21} Meter verändern.




Quelle	Signaltyp	Frequenz	Stärke
 Typ II Supernovae	impulsartig	<1 Mhz	10^{-21}
 schwingendes Doppelpulsar	gedämpfte Sinusschwingung	10 khz für 1 Sonnen- masse	10^{-22}
 Galaxienhaufen durch kosmische Strings	Rauschen	2000 bis 800- quenzband	10^{-14} 10^{-23}
Urknall	Rauschen	?	?

Abbildung V.28: mögliche Quellen von Gravitationswellen

Nach der allgemeinen Relativitätstheorie sollten Gravitationswellen sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten und tensorielle (elliptische) Raumverzerrungen hervorrufen, also die Gestalt des Raumes verändern, den sie durchlaufen. In dieser Darstellung ist die Auswirkung der Gravitationswelle auf eine frei im Raum längs der Welle aufgehängte Gummiröhre simuliert. Links ist die Gummiröhre abgebildet, rechts ein Satz von Massen, die auf einer Ebene liegen. Weber führte 1970 einen solchen Versuch zum Nachweis der Gravitationswellen mit einem

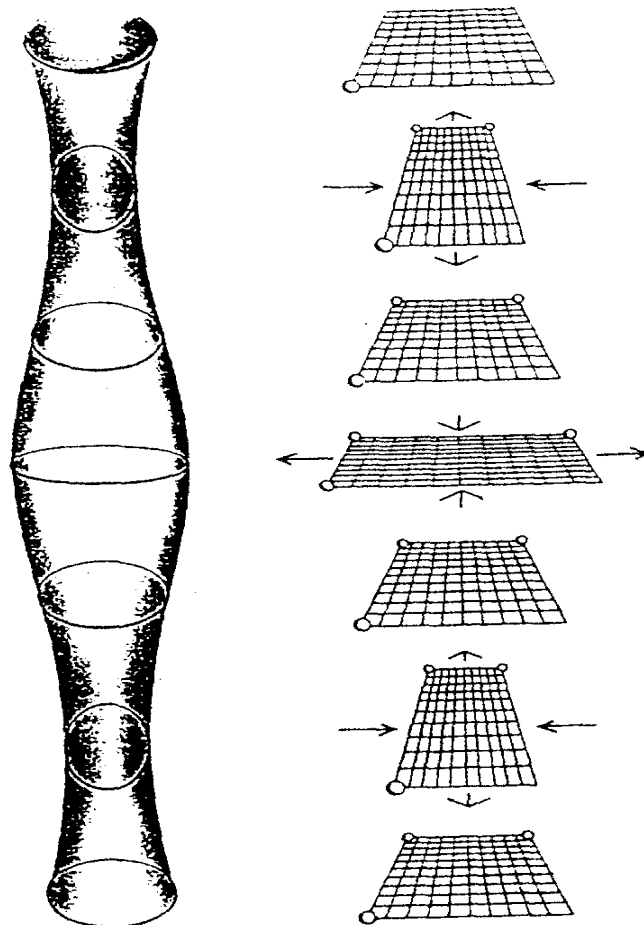


Abbildung V.29: Raumverformungen zum Nachweis von Gravitationswellen

schwingungsfrei aufgehängten Zylinder durch.

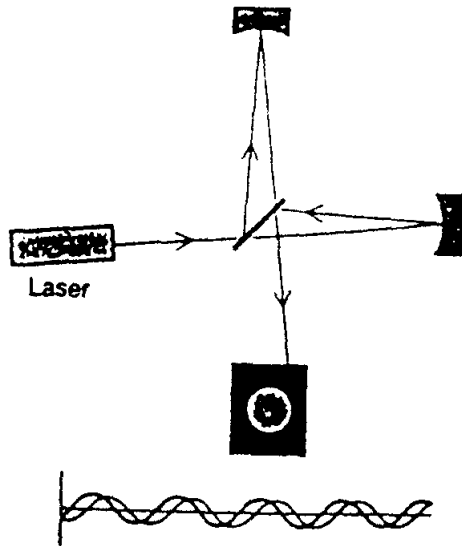


Abbildung V.30 a: Interferenzexperimente

Zum Nachweis von Gravitationswellen werden Interferometer eingesetzt. Ein einfaches Interferometer besteht aus einem Laser, einem Strahlenteiler, je einem Spiegel, welche die beiden senkrecht zueinander stehenden Arme zueinander begrenzen, und einer Photodiode. Unterhalb der Diode ist jeweils der Verlauf des elektrischen Feldes in jedem zurückkehrenden Lichtstrahl als Funktion der Zeit aufgetragen. In der Ausgangsposition unterscheiden sich die Armlängen um ein Achtel. Bei der Überlagerung sind die beiden Lichtstrahlen um einen Viertel-Zyklus außer Phase, und die Hälfte des Lichtes erscheint am Ausgang. Das

Interferenzmuster ist stabil. (Abbildung V.30

a)

Wenn eine Gravitationswelle die Ärmellängendifferenz verändert, nimmt die Helligkeit des Ausgangsstrahls je nach Vorzeichen des Wegunterschiedes entweder ab oder zu, das Interferenzmuster ändert sich gegenüber der Ausgangsposition und ist nicht stabil (Abbildung V.30 b und c).

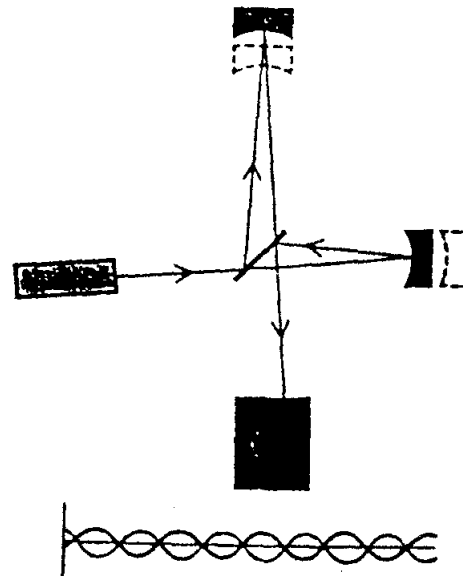
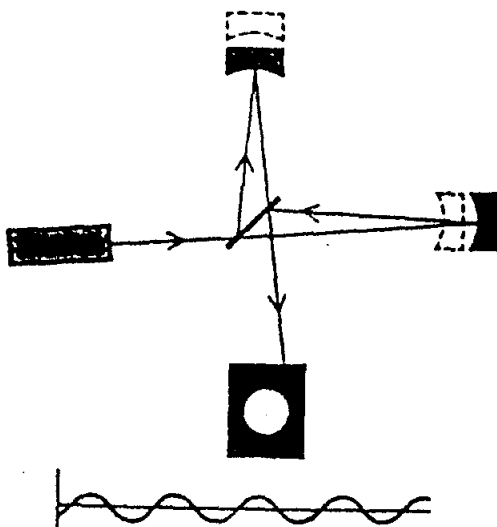


Abbildung V.30 b: Interferenzexperimente

Die Realisation solcher Versuche ist sehr

schwierig, da die erwarteten Längenunterschiede der Arme bei 10^{-16} m liegen, also ungefähr in der Größenordnung eines Protons liegen. Am 23 Februar 1987 gab es in nur 160000 Lichtjahren Entfernung in der Magellanstraße eine Supernova



(SN 1987 A, ungefähr 20 Sonnenmassen), von der möglicherweise Gravitationswellen ausgingen. Leider waren alle Detektoren zu diesem Zeitpunkt ausgeschaltet.

V.6 Gravitationsfeld und Gravitationspotential

Nachdem wir nun die Gravitationskraft zweier Körper aufeinander berechnen können, wollen wir versuchen, dem Körper eine Art Eigenschaft zuzuordnen, die seine Gravitationskraft auf jeden beliebigen anderen Körper beschreibt.

V.6.1 Energiebetrachtung

Dazu betrachten wir zunächst wieder eine Masse M , die auf eine andere Masse m eine Gravitationskraft ausübt. Gegen diese Kraft soll eine beliebige äußere Kraft \vec{F}_a geleistet werden, z.B. durch Ziehen an einem an der Masse befestigten Seil. Zunächst befinden sich die beiden

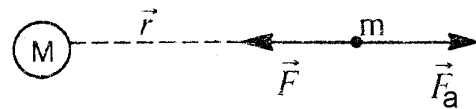


Abbildung V.31: Kompensationskraft

Kräfte im Gleichgewicht, die Masse m ruhe also (Abbildung V.31).

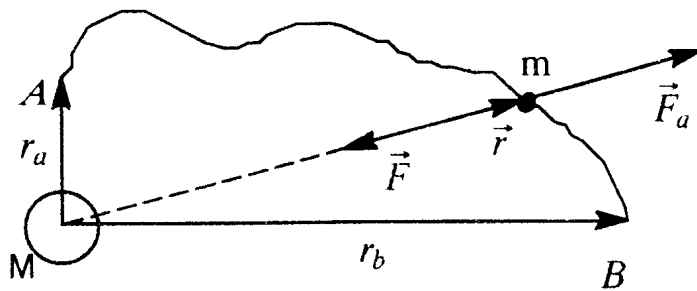


Abbildung V.32: äußere Kraft gegen das Gravitationsfeld

Vergrößern wir jetzt die äußere Kraft, oder ändern wir deren Richtung, dann bewegt sich die Masse m im Gravitationsfeld von M (Abbildung V.32). Dabei leistet die Kraft Arbeit. Nach der allgemeinen Definition für Arbeit IV.2 kann man diese Arbeit

angeben mit:

$$dW = \vec{F}_a d\vec{r}.$$

Wo bleibt nun diese in das System gesteckte Energie?

In Kapitel IV, Definition IV.3, hatten wir gesehen, daß dW ganz in potentielle Energie umgewandelt wird, wenn die wirkenden Kräfte konservativ sind. Konservative Kräfte waren Kräfte, bei denen die dagegen zu leistende Arbeit nur von Anfangs- und Endpunkt der Bewegung abhängt, für die also gilt:

$$\oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = 0.$$

Wenn es sich bei der Gravitationskraft also um eine konservative Kraft handelt, so ließe sich die Frage beantworten. Untersuchen wir also die Gravitationskraft auf dieses Kriterium:

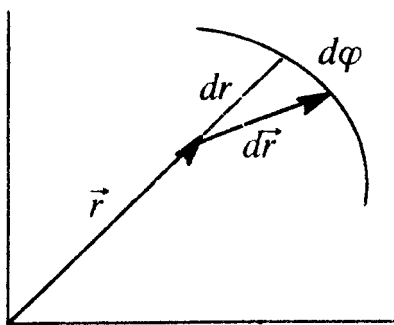
Die Formel $\oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = 0$ bedeutete für die Arbeit

zwischen zwei Punkten A und B $\int_A^B \vec{F} d\vec{r}$ ist wegunabhängig.

Mit $\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$ $\Rightarrow \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = -\gamma \cdot mM \int_A^B \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{r}$

Mit * $\Leftrightarrow \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = -\gamma \cdot mM \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr$

$\Leftrightarrow \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \left[-\gamma \cdot mM \frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B}$



* Die Betrachtung der Polarkoordinaten

r und ρ zeigt:

$\vec{r} \cdot d\vec{r} = r \cdot (\text{Änderung } d\vec{r} \text{ von } \vec{r} \text{ entlang } \vec{r}) = r \cdot dr$

Abbildung V.33: Geometrische Überlegungen

Dieser Ausdruck für die Arbeit ist nur abhängig von den Abständen der Punkte A und B, nicht vom durchlaufenen Weg und auch nicht vom absoluten Abstand zur Masse M.

Für konservative Kräfte können wir nun eine potentielle Energie definieren. Die potentielle Energie ist dabei definiert als die Energiedifferenz, welche die Probemasse in den Punkten A

und B hat. $\Rightarrow \Delta W_P = -\gamma \cdot \frac{mM}{r_B} - \left(-\gamma \cdot \frac{mM}{r_A} \right)$

$\Leftrightarrow \Delta W_P = W_P(B) - W_P(A)$.

Da nur Potentialdifferenzen meßbar sind, muß auch in diesem Fall eine Konvention getroffen werden, die den Nullpunkt festlegt. Bei die Gravitation legt man den Nullpunkt unendlich weit von der Masse M entfernt fest:

$W_P(r_A \rightarrow \infty) = 0$.

Die Konvention hat den Vorteil, daß die Formel

$$\Delta W_P = -\gamma \cdot \frac{mM}{r_B} - \left(-\gamma \cdot \frac{mM}{r_A} \right)$$

wesentlich vereinfacht wird: $\Rightarrow \Delta W_P = -\gamma \cdot \frac{mM}{r_B}$.

Für beliebige r_B $\Rightarrow \Delta W_P = -\gamma \cdot \frac{mM}{r}$.

Merke: Die **potentielle Energie**, die die Gravitationskraft zwischen zwei Körpern der Massen M und m erzeugt, beträgt:

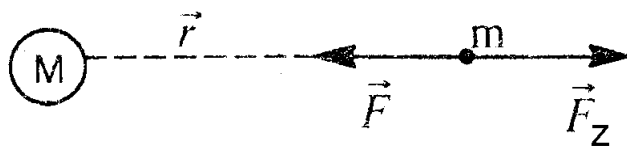
$$\Delta W_P = -\gamma \cdot \frac{mM}{r}$$

Vernachlässigen wir jetzt wieder die nichtmechanischen Energieformen, dann läßt sich die Gesamtenergie berechnen aus

$$W = W_P + W_K$$

$$\Leftrightarrow W = -\gamma \cdot mM \frac{1}{r} + \frac{1}{2} mv^2.$$

Zur Vereinfachung berechnen wir diese Energien für eine Kreisbahn, die m um M beschreibt. Annähernd kann diese Bahn z.B. als Planetenbahn um die Sonne angesehen werden. Die Masse



m bewegt sich nicht von M weg, ihr Abstand r sei konstant. Dann müssen Fliehkraft \vec{F}_Z und

Gravitationskraft \vec{F} entgegengesetzt gleich groß sein.

Im Gleichgewicht gilt also $\vec{F}_Z + \vec{F} = 0$. Unter Berücksichtigung der Vorzeichen gilt auch $F_Z + F = 0$.

Mit $F = -\gamma \cdot mM \frac{1}{r^2}$ und $F_Z = \frac{mv^2}{r}$

$$\Rightarrow -\gamma \cdot mM \frac{1}{r^2} + \frac{mv^2}{r} = 0.$$

Für $r \neq 0$ $\Rightarrow -\gamma \cdot mM \frac{1}{r} + mv^2 = 0$.

Ein Vergleich mit den Energieformen $W_P = -\gamma \cdot mM \frac{1}{r}$ und $W_K = \frac{1}{2} mv^2$

Zeigt, dass gilt:

$$\boxed{W_P + 2W_K = 0,}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{W_P = -2W_K.}$$

$$\Rightarrow 2W_K = \gamma \cdot mM \frac{1}{r}$$

Damit lässt sich die Gesamtenergie berechnen als:

Merke: Die **Gesamtenergie** einer Kreisbewegung durch Gravitationskraft beträgt:

$$W = \frac{1}{2} W_P = -\frac{1}{2} \gamma \cdot mM \frac{1}{r} < 0.$$

Die Gesamtenergie ist negativ.

Wie aus Kapitel IV bekannt gilt die Energieerhaltung, d.h., daß diese Energie zu jeder Zeit konstant ist, während die einzelnen Energien W_P und W_K ausgetauscht werden.

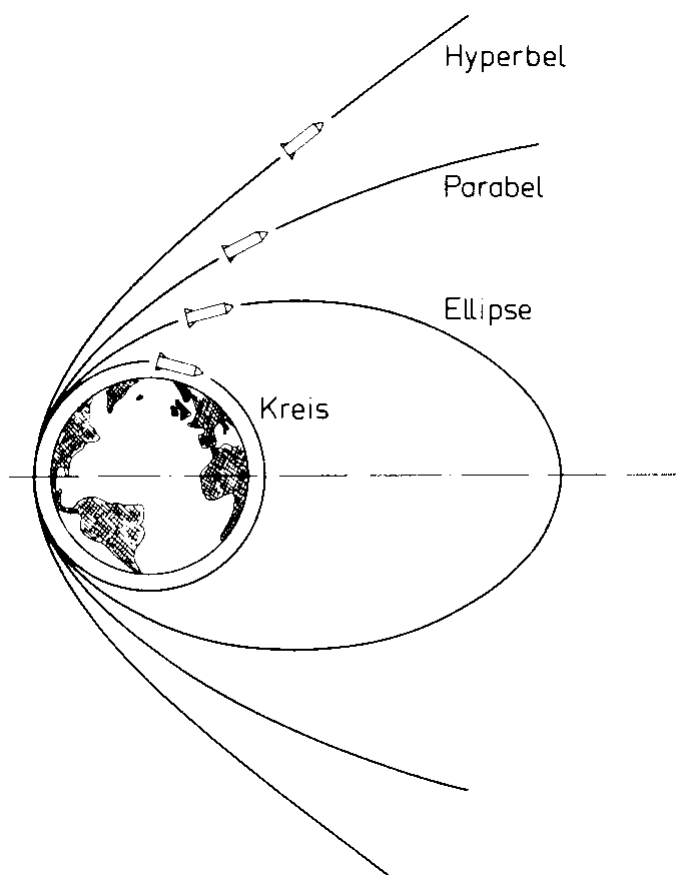


Abbildung V.34: Raketenbahnen

Qualitativ ist dieses Ergebnis einsichtig: Ist die Gesamtenergie negativ, so bewegt die Masse m sich auf einer geschlossenen Bahn, ist die Gesamtenergie jedoch positiv, sind die Bahnen offen.

$W < 0 \rightarrow$ geschlossene Bahnen:
Ellipsen oder Kreise

$W = 0 \rightarrow$ Grenzfall: Parabel

$W > 0 \rightarrow$ offene Bahnen:
Hyperbeln.

Die genaue Berechnung dieses Sachverhaltes wird in der Theorie vorgenommen, hier soll die Vorführung einer Computersimulation als Anschauung ausreichen.

Versuch V.8: Bewegung einer Kugel in einer flachen Schale

Die verschiedenen Bewegungsmöglichkeiten können simuliert werden, indem man eine flache Schale wählt, in der eine Kugel möglichst reibungsfrei rollen kann. Je nach 'Einwurf' kann man



kreisende oder elliptische Bewegungen erwirken. Ist die Energie groß genug, so rollt

die Kugel geradeaus aus der Schale heraus. Ist die Energie jedoch nur grade groß genug, verläßt die Kugel die Schale unter Beschreibung einer Parabelbahn.

V.6.2 Zusammenhang potentielle Energie und Kraft

Im letzten Kapitel haben wir die beiden Formeln

$$\Delta W_P = - \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} d\vec{r}$$

und

$$\Delta W_P = \int_A^B dW_P \quad \text{benutzt.}$$

Faßt man diese Formeln zusammen, so gilt die Beziehung

$$- \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B dW_P .$$

$$\Rightarrow \quad dW_P = -\vec{F} d\vec{r}$$

Kann man nun mit Hilfe dieser Beziehung von der potentiellen Energie auf die wirkende Kraft zurückrechnen? Das Problem ist nicht so trivial, da die potentielle Energie ein Skalar, die Kraft hingegen ein Vektor ist. Man steht also vor der Aufgabe, von einer nicht gerichteten Größe auf eine gerichtete zurück schließen zu müssen.

Rein formal kann man zunächst versuchen, durch Dividieren mit $d\vec{r}$ einen Ausdruck für die

Kraft zu erlangen:
$$\frac{dW_P}{d\vec{r}} = -\vec{F} .$$

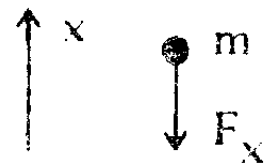
Untersuchen wir nun anhand zweier uns bekannter Kraftgesetze, diese Gleichung zu verifizieren. Dazu wählen wir zunächst Kräfte, die in einer Dimension berechnet werden können:

1. Schwerkraft:

Die potentielle Energie ist gegeben durch $W_P = mgx .$

$$\Rightarrow \quad \frac{dW_P}{dx} = mg$$

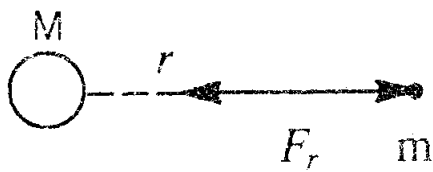
Das so ermittelte Kraftgesetz lautet $F = -mg .$



Dieses Gesetz entspricht dem uns bekannten Gesetz der Schwerkraft.

2. Gravitation:

Die potentielle Energie ist gegeben durch



$$W_P = -\gamma \cdot mM \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{dW_P}{dr} = \gamma \cdot \frac{mM}{r^2}$$

Das so ermittelte Kraftgesetz lautet

$$F = -\gamma \cdot \frac{mM}{r^2}$$

Auch dieses Gesetz entspricht dem uns bekannten Gesetz der Gravitation.

Untersuchen wir jetzt die Verallgemeinerung für drei Dimensionen:

Gesucht wird ein Ausdruck für die Kraft, der die Gleichung

$$dW_P = -\vec{F}d\vec{r} \quad \text{erfüllt.}$$

Diese Gleichung wird erfüllt durch

$$\vec{F} = -\left(\frac{d}{dx} W_P, \frac{d}{dy} W_P, \frac{d}{dz} W_P\right)$$

Diesen Vektor nennt man partielle Ableitung von W_P . Partielle Ableitung heißt dabei nichts anderes, als daß der zu differenzierende Ausdruck $f(x,y,z)$ nach der angegebenen Variablen abgeleitet wird, während die anderen beiden als Konstante behandelt werden. Beispielsweise heißt, dass die Funktion f abgeleitet wird, als sei sie eine Funktion $f(x)$ und y und z seien Konstante. Die Schreibweise ∂ statt d wird verwandt, um die partielle Differentiation zu verdeutlichen.

Definition V.9: Die Operation $\vec{F} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)W_P$

wird partielle Differentiation genannt.

Den Operator $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ schreibt man 'grad' oder ' $\vec{\nabla}$ ' (Nabla).

Nun muß noch bewiesen werden, daß die so definierte Gleichung

$$F = -\text{grad } W_P$$

die Ausgangsgleichung

$$dW_P = -\vec{F}d\vec{r} \quad \text{erfüllt.}$$

Es muß also gelten

$$\begin{aligned} & -\vec{F}d\vec{r} \\ = & \text{grad } W_P d\vec{r} \\ = & \left(\frac{\partial}{\partial x} W_P, \frac{\partial}{\partial y} W_P, \frac{\partial}{\partial z} W_P\right)(dx, dy, dz) \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} W_P dx + \frac{\partial}{\partial y} W_P dy + \frac{\partial}{\partial z} W_P dz$$

$$= \text{Dwp.}$$

Notation V.2: Die Ableitung $\frac{\partial}{\partial x} W_P dx + \frac{\partial}{\partial y} W_P dy + \frac{\partial}{\partial z} W_P dz$ wird **totales Differential** genannt.

Anschaulich kann man sich die Vektoren anhand der Höhenlinien auf einer Landkarte vorstellen:

Ein Berg wird mit den sogenannten Höhenlinien eingezeichnet, also mit Linien, die alle Punkte derselben Höhe verbinden. Diese Linien sind Äquipotentiallinien. Der Gradient zeigt jetzt in Richtung der Falllinie, also in Richtung der wirkenden Kraft.

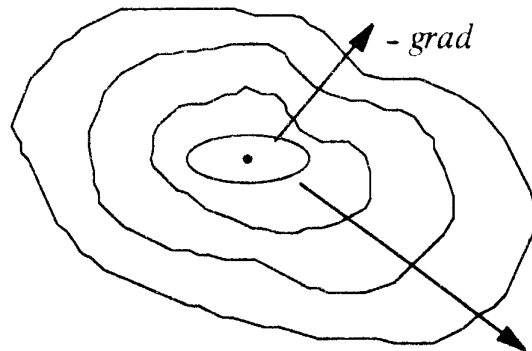
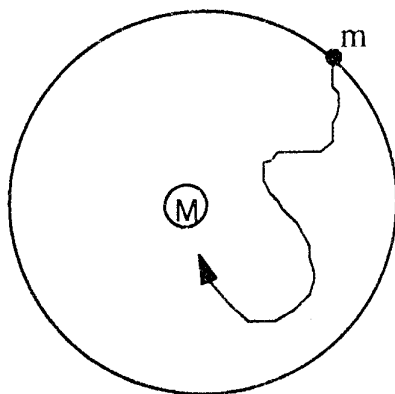


Abbildung V.35: Höhenlinien als Äquipotentiallinien

Merke: Der negative Gradient beschreibt anschaulich die Richtung und Stärke des größten Gefälles in einem Potentialgebirge.

V.6.3 Gravitationsfeldstärke und Gravitationspotential



Eine Probemasse m werde in der Umgebung der Masse M verschoben. In den letzten beiden Kapiteln haben wir eine Formel für die potentielle Energie in jedem Punkt berechnet. Damit können wir nun die potentielle Energie bestimmen, die der Körper der Masse m im Gravitationsfeld der Masse M besitzt. Greifen wir nun die Anfangsfrage auf: Wie kann man unabhängig von der Probemasse m eine 'Eigenschaft' der Masse M , bzw. des Raumes um die Masse M bestimmen, welche die Wirkung

auf eine beliebige (gedachte) Probemasse beschreibt?

Die Antwort ergibt sich aus der Formel $\Delta W_P = -\gamma \cdot \frac{mM}{r}$.

Wenn eine Größe gesucht wird, die von m unabhängig ist, muß dieser Ausdruck nur durch m geteilt werden. Diese Formel gibt dann eine Eigenschaft an, die nur von M und dem Abstand von M abhängt.

$$\frac{\Delta W_P}{m} = -\gamma \cdot \frac{M}{r}.$$

Dieser Ausdruck wird Gravitationspotential genannt.

Definition V.10: Das Gravitationspotential einer Masse M ist definiert als Quotient der potentielle Energie einer Probemasse im Abstand r und der Probemasse selbst.

Gravitationspotential $V(\vec{r}) = \frac{\Delta W_P}{m} = -\gamma \cdot \frac{M}{r}.$

Analog zu dieser Definition soll jetzt noch der Kraftbegriff übertragen werden:

In Anlehnung an die Formel

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad}W_P(\vec{r})$$

definiert man die Formel

$$\vec{G}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m}.$$

$$\Leftrightarrow \vec{G}(\vec{r}) = -\text{grad} \frac{W_P(\vec{r})}{m}$$

$$\Leftrightarrow \vec{G}(\vec{r}) = -\text{grad}V(\vec{r})$$

Dieser Ausdruck wird Gravitationsfeldstärke genannt.

Definition V.11: Die Gravitationsfeldstärke gibt die Kraft auf einen Probekörper an geteilt durch seine Masse.

$$\vec{G}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m} = -\text{grad} \frac{W_P(\vec{r})}{m} = -\text{grad}V(\vec{r}).$$

Die Größen $\vec{G}(\vec{r})$ und $\vec{V}(\vec{r})$ sind vom Probekörper unabhängig.

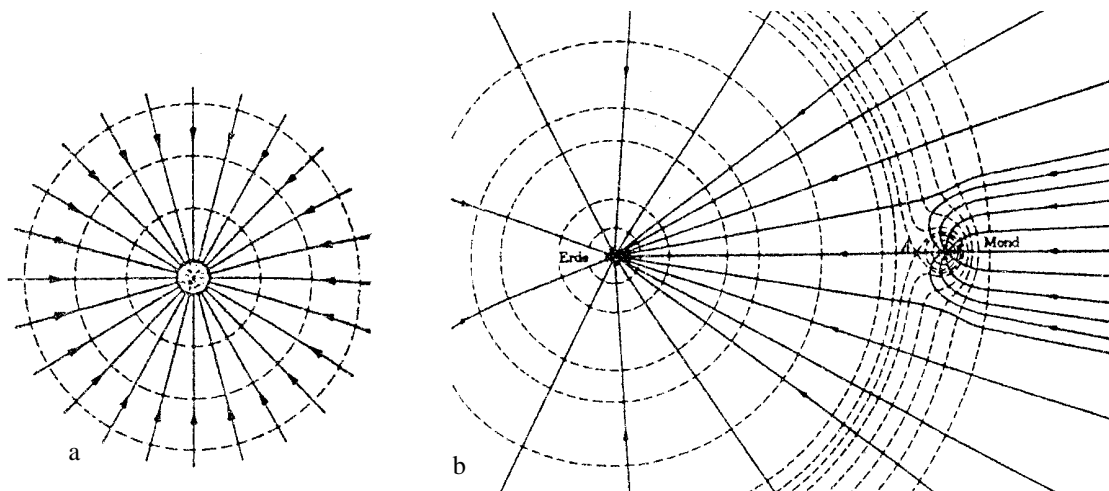


Abbildung V.36: Gravitationsfeldlinien einer Punktladung (a) und des Erde-Mond-Systems (b)

Diese Abbildung zeigt Äquipotentiallinien, hier als gestrichelte Linien gezeichnet, und Kraftfeldlinien, als Pfeile gekennzeichnet, des Gravitationsfeldes einer Masse (Abbildung V.36a) und des Erde-Mond-Systems (Abbildung V.36b). Die Kraftfeldlinien zeigen in Richtung des Potentialgefälles. Die Dichte der Kraftlinien ist proportional zur Feldstärke. Die Abbildungen sind dreidimensional vorzustellen.

V.6.4 Zusammenfassung der neu eingeführten Begriffe

Kraft \vec{F}

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad}W_p(\vec{r})$$

potentielle Energie W_p

$$\vec{F} = m\vec{G}$$

$$\bullet m \uparrow \downarrow \bullet \frac{1}{m}$$

$$W_p = mV$$

Feldstärke \vec{G}

$$\vec{G}(\vec{r}) = -\text{grad}V(\vec{r})$$

Potential V

Abschließend wollen wir noch anschaulich die Feldstärke einer Vollkugel, z.B. der Erde betrachten.⁶ In einer

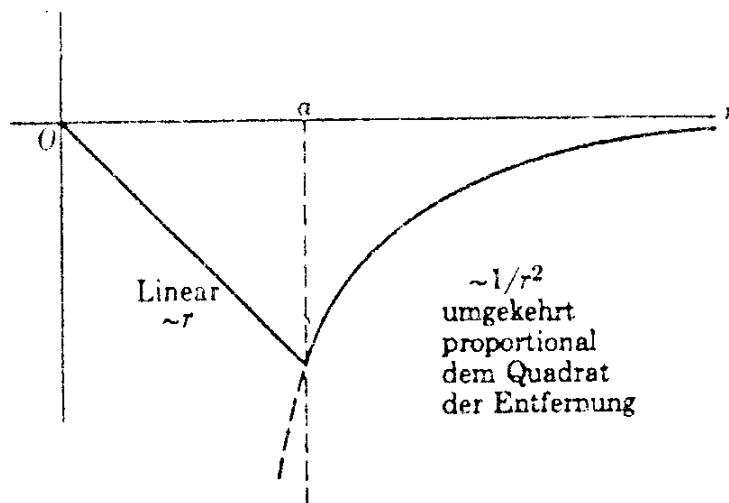


Abbildung V.37: Feldstärke einer Vollkugel

Entfernung vom Mittelpunkt der Kugel, die größer ist als deren Radius, also außerhalb der Kugel, verhält sich das Feld wie das einer Punktmasse im Mittelpunkt der Kugel. In der Kugel selbst fällt die Feldstärke jedoch linear mit der zunehmenden

Nähe zum Mittelpunkt ab. Im Mittelpunkt selbst wirkt schließlich keine Kraft auf einen Probekörper.

⁶ Die Berechnung der Feldstärke kann in fast jedem Buch zur Experimentalphysik nachgelesen werden. Empfehlenswert sind die Darstellung im Alonso-Finn und im Berkley-Kurs.

Nun noch ein **Nachtrag zur Gravitation** aus der Allgemeinen **Relativitätstheorie**:

Einstein erhob in seinen Theorien Naturphänomene zum Prinzip und versuchte damit, die Natur zu berechnen.

In der Speziellen Relativitätstheorie erhob er die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit zum Prinzip und schloß daraus weitgehende Folgerungen.

In der Allgemeinen Relativitätstheorie betrachtete Einstein die Gleichheit von träger und schwerer Masse als Prinzip. Für einen Beobachter folgt laut Einstein aus dieser Tatsache, daß er nicht unterscheiden kann, ob er sich in einem konstanten Schwerfeld oder in einem Bezugssystem mit konstanter Beschleunigung befindet.

Diese Überlegung kann an einem Gedankenexperiment verdeutlicht werden:

Zwei Astronauten, die nicht aus ihrem Raumschiff schauen können, führen je ein Experiment durch: Der erste Astronaut läßt eine Kugel fallen, der andere steht auf einer Waage. Die beiden beobachten dieselbe Bewegung ob sie auf einem Planeten stehen oder im gravitationsfreien Raum beschleunigt fliegen.

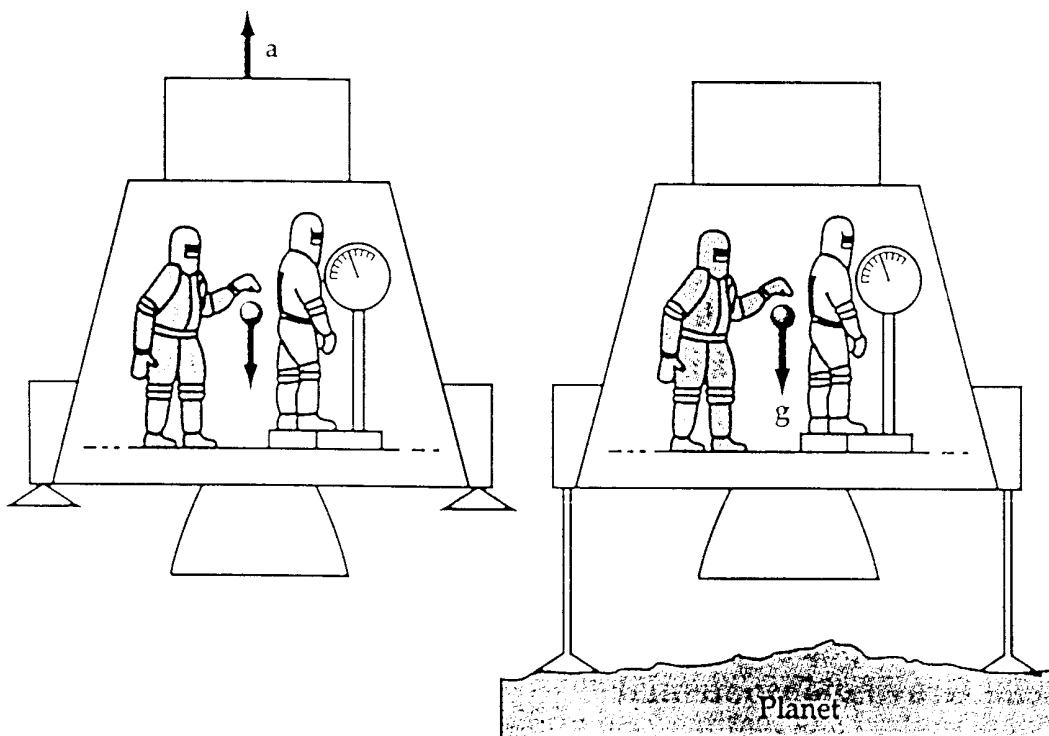


Abbildung V.38: Die Astronauten können anhand der Versuche nicht unterscheiden, ob sie sich in einem konstanten Schwerfeld oder in einem Bezugssystem mit konstanter Beschleunigung befinden.

