

IV. Erhaltungssätze und deren Anwendung

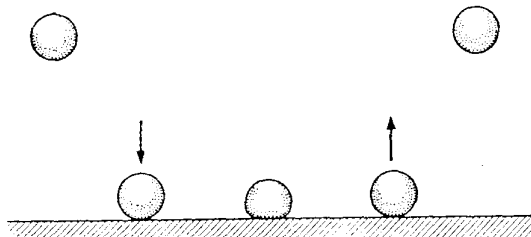


Abbildung IV.1: Verformung bei einem springenden Ball

Mit den bisher kennengelernten Definitionen können wir im Prinzip durch Ermittlung der wirkenden Kräfte alle Bewegungen berechnen. Bei den diskutierten Bewegungen ließen sich die Kräfte leicht aufstellen. In der Regel ist das aber nur mit Kenntnis vieler Faktoren z.B. aus der Festkörperphysik möglich. Zudem kann dieses

Verfahren sehr kompliziert sein. Betrachten wir als Beispiel einen Ball, der auf der Erde hüpfet. Der Ball berührt die Erde, wird an der Auftreffstelle verformt und wird dann durch die Rückstellkraft wieder nach oben beschleunigt. Wenn die Verformung und die Rückstellkraft bekannt sind, kann die Bewegung berechnet werden. Hierfür muss aber die Beschaffenheit des Balls von der Festkörperphysik berechnet werden; für jeden anderen Ball erneut. Dieses Vorgehen ist theoretisch möglich, für wichtige Aussagen über den springenden Ball allerdings unnötig. Einfacher ist es, zunächst einmal zu fragen, was bei dieser Art der Bewegung vielleicht konstant bleibt. Diese Überlegung führte in der Experimentalphysik zu zwei fundamentalen Erhaltungssätzen, die in der klassischen Mechanik immer Gültigkeit besitzen.

Betrachten wir also, was bei einer beliebigen Bewegung konstant bleibt, ausgehend von den bisher bekannten Größen Kraft, Masse, Beschleunigung, Geschwindigkeit, Ort und Zeit.

IV.1 Der Begriff der Arbeit

IV.1.1 Definition der Arbeit

Der Begriff der Arbeit ist schon aus dem täglichen Sprachgebrauch bekannt. Will man Massen bewegen, so muss man dafür Arbeit verrichten. Genauer ausgedrückt heißt das in der Physik, dass bei der Bewegung von Massen die Kräfte Arbeit verrichten müssen.. Betrachten wir einen einfachen Fall der Bewegung von Massen:

Versuch IV.1: Arbeit längs eines graden Weges:

Ein schwerer Körper wird an einem Seil befestigt und längs eines graden Weges längs gezogen. Um ein Maß für die Kraft zu haben, kann man z.B. eine Federwaage an einem Ende

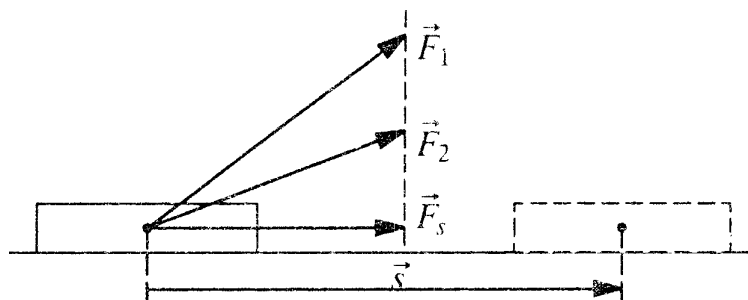


Abbildung IV.2: Arbeit längs eines graden Weges

des Seils befestigen. Jetzt kann man mit verschiedenen Winkeln zur Erdoberfläche an dem Seil ziehen, um den Körper zu bewegen. Als Grenzfälle soll dabei einmal parallel zum Boden und senkrecht dazu gezogen werden. Das Seil gibt in diesen zweidimensionalen Fall die Richtung der wirkenden Kraft an.

Nun soll der Körper mit konstanter Kraft einen festen Weg s gezogen werden. Der Versuch zeigt, dass man bei einem Winkel von 0° , also parallel zur Erde gezogen, am wenigsten Kraft braucht. Je größer der Winkel wird, desto mehr ausgeübte Kraft zeigt die Federwaage an. Bei einem Winkel von 90° hebt man den Körper nur hoch und bewegt ihn gar nicht in s -Richtung. Es zeigt sich, dass nur die Kraftkomponente entlang des Weges für die Fortbewegung des Körpers wirksam ist.

Das Produkt aus wirksamer Kraft und Weg nennt man Arbeit.

Definition IV.1: Arbeit ist das Produkt aus der Kraft längs eines Weges und dem zurückgelegten Weg.

$$W = F \cdot s \cdot \cos \alpha$$

Einheitenbetrachtung:

$[F \cdot s] = [F] \cdot [s] = 1\text{N} \cdot 1\text{m} = \text{Nm}$. Die zusammengesetzte Einheit Nm wird mit Joule, als Einheitszeichen J bezeichnet. Aus der Definition von Newton folgt auch: $1\text{J} = 1\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$. Im früher üblichen csg-System wird die Einheit der Arbeit mit erg bezeichnet, wobei $1\text{erg} = 10^{-7}\text{J}$ ist.

Notation VI.1: Die Arbeit wird mit **W** bezeichnet. Die Einheit der Arbeit ist das **Joule**:

$$[W] = \text{J}.$$

IV.1.2. Erweiterung auf variable Kräfte und beliebige Wege

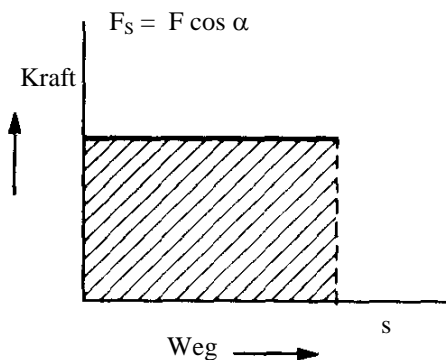


Abbildung IV.3: Kraft-Weg-Diagramm für konstante Kraft F_s längs des Weges

des Weges gemeint.)

Betrachten wir dieses Arbeitsdiagramm mit einer veränderlichen Kraft längs eines geraden Weges. Da mit Kraft hier nur die Kraftkomponente längs des Weges gemeint ist, kann jetzt sowohl der Betrag der Kraft variieren, als auch seine Richtung. In diesem Fall kann die Arbeit als Fläche unter der Kurve der Kraft verstanden werden. Eine solche Fläche berechnet man mit einem Integral.

Es gilt dann $W = \int_0^s F ds$ oder für eine beliebige gerade

Strecke, die nicht im Nullpunkt beginnen muss:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F ds .$$

Nehmen wir jetzt noch an, dass die Strecke nicht längs einer Geraden, sondern beliebig im Raum verlaufen kann. Dann gilt die Definition IV.1 nur für unendlich kleine Wegelemente, in denen die Strecke als gradlinig angenommen werden kann. Die Arbeit muss über diese kleinen Wegelemente summiert werden. Für kleine Wegelemente gilt also $\Delta W = F \Delta r \cos \alpha$, mit der Definition des Vektors aus Kapitel I folgt. Summiert über alle Teilstücke folgt:

Definition IV.2: Arbeit mit variabler Kraft längs eines beliebigen Weges:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$$

Die in Definition IV.1 gegebene Formel für die Arbeit ist ein skalares Produkt. Aus der Geometrie ist bekannt, dass das Produkt zweier Skalare gleich dem Inhalt des Rechtecks ist, das mit den Seitenlängen der beiden Skalare aufgespannt werden kann. Im Koordinatensystem eingezeichnet bedeutet das, dass die Fläche unter den Kraft - Weg

- Diagramm ein Maß für die verrichtete Arbeit ist. (Mit Kraft ist hier natürlich die Kraft längs

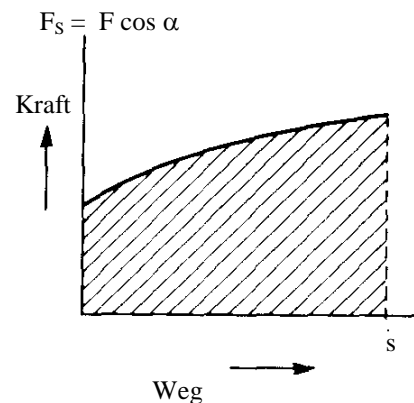


Abbildung IV.4: Kraft-Weg-Diagramm für variable Kraft F_s längs des Weges

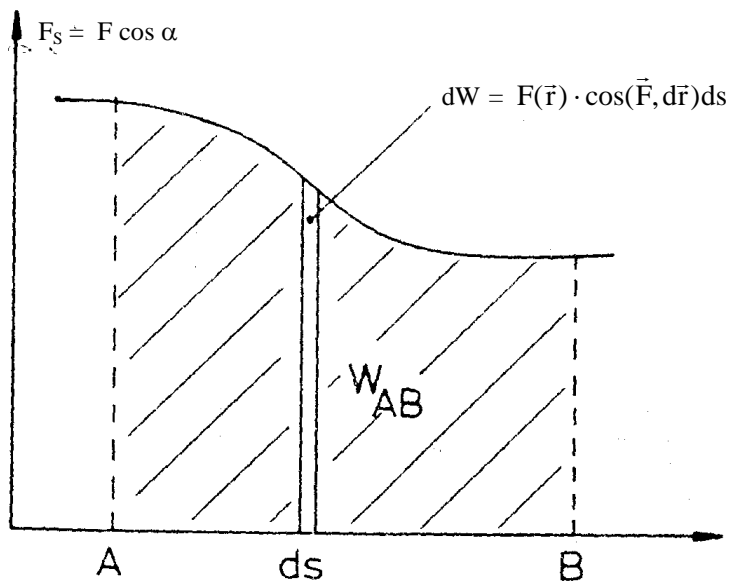


Abbildung IV.5: Wegintegral der Arbeit

Die Arbeit W_{AB} längs eines Teilstückes von Punkt A nach Punkt B entspricht also dem Teil unter der Kurve der Kraftkomponente F_S , das durch die Senkrechten auf die beiden Begrenzungspunkte konstruiert wird.

IV.1.3 Beschleunigungsarbeit

Bei der Herleitung des Arbeitsbegriffs hatten wir die Geschwindigkeit der Bewegung vernachlässigt, wir haben also eine quasistationäre Bewegung betrachtet. Die Definition der Kraft als Ursprung jeder Beschleunigung legt uns aber nahe, diese Vernachlässigung genauer zu untersuchen. Ich kann eine Kiste auch so ziehen, dass sie möglichst schnell wird. Was folgt dann aus der Definition der Bewegung?

Die Kraft, die eine Bewegung verursacht, dient in diesem Fall der Beschleunigung des Körpers der Masse m . Eine solche Kraft lässt sich mit dem 2. Newtonschen Axiom immer schreiben als. Setzen wir diese Definition der Kraft in die Formel

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad \text{ein,}$$

Dann folgt:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m \vec{a}(t) \cdot d\vec{r}(t) \quad \text{mit } \vec{a}(t) = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2}$$

Folgt

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} \cdot d\vec{r}(t).$$

Nun schreiben wir

$$W = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt \quad \text{mit } d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

$$\Leftrightarrow W = \int_{t_1}^{t_2} d \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right)^2 \right)$$

mit $\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t)$ folgt

$$W = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} d\left(\frac{1}{2}m\vec{v}(t)^2\right)$$

mit $\vec{v}^2 = v^2$ gilt

$$W = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2)$$

Die Beschleunigungsarbeit hängt also nur von der Masse m des beschleunigten Körpers und von Anfangs- und Endgeschwindigkeit ab. Auch die Richtung und der Weg, auf dem die Beschleunigungsarbeit erfolgt, ist irrelevant für den Wert der geleisteten Beschleunigungsarbeit.

Aus \vec{v} und \vec{r} folgt:

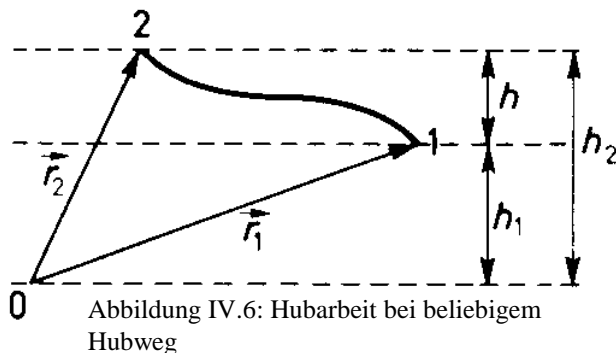
$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2)$$

Merke: Die **Beschleunigungsarbeit**, die eine Kraft \vec{F} verrichtet, wenn sie einen Körper der Masse m von v_1 auf v_2 beschleunigt ist

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2)$$

Eine genauere Interpretation der Beschleunigungsarbeit wird in Kapitel IV.3 vorgenommen.

IV.1.4 Hubarbeit



Eine andere Form der Arbeit, die geleistet werden kann, ist das Heben von Körpern gegen die Gewichtskraft. In einem Gedankenexperiment werde ein Körper der Masse m auf einem beliebigen Weg von einer Höhe h_1 auf eine größere Höhe h_2 gehoben.

Dabei sei h positiv definiert bei einer Aufwärtsbewegung. Dieser Vorgang soll jetzt möglichst langsam, also ohne Beschleunigung durchgeführt werden.

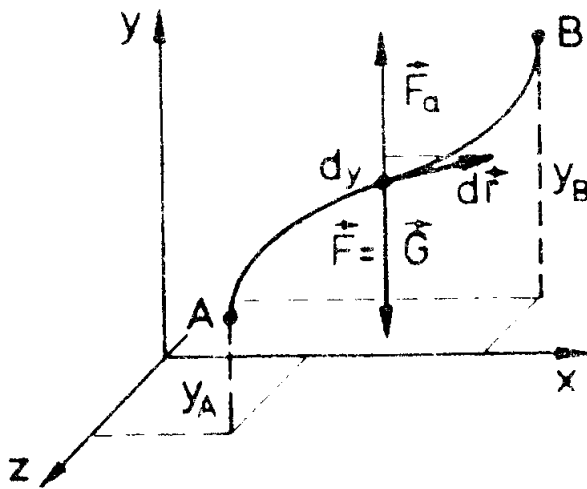


Abbildung IV.6b: Hubarbeit bei beliebigem Hubweg

Die äußere Kraft, die aufzuwenden ist, ist die Gegenkraft zur am Körper nach unten wirkenden Gewichtskraft:

$$\vec{F}_a = -\vec{G}.$$

Für die Arbeit gilt

Mit Definition IV.2

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_a(\vec{r}) d\vec{r}$$

$$W = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{G} d\vec{r}.$$

Die Arbeit wird nur mit dem Teil der Kraft \vec{F}_a geleistet, die in Richtung der Bewegung zeigt, also nur mit der Komponente $F_a \cos \alpha$.

Es folgt
$$W = - \int_{r_1}^{r_2} G \cos \alpha \cdot dr.$$

Mit $\cos \alpha \cdot dr = dh$ gilt

$$W = - \int_{h_1}^{h_2} G \cdot dh$$

$$\Leftrightarrow W = -G(h_2 - h_1)$$

mit $G = -mg$
$$W = mg(h_2 - h_1)$$

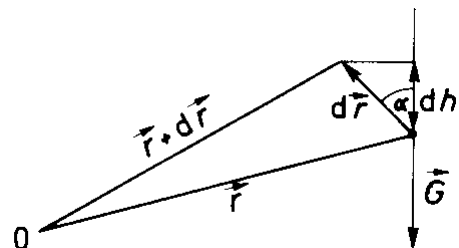


Abbildung IV.7: geometrische Betrachtung zur Hubarbeit

Die Hubarbeit ist also ebenfalls unabhängig vom Weg, auf dem die Höhe erreicht wird. Sie ist nur abhängig von der Masse des gehobenen Körpers und der absoluten Höhendifferenz Δh .

Merke: Die **Hubarbeit** ist unabhängig vom Weg gleich dem Produkt aus Masse, Erdbeschleunigung und Höhendifferenz:

$$W = mg\Delta h.$$

Die Arbeit, die gegen die Gewichtskraft geleistet werden muss, ist nur von den Endpunkten abhängig. Dies ist eine Eigenschaft der Gewichtskraft und einiger anderer Kräfte. Diese Kräfte werden zusammengenommen und mit dem Begriff *konservative Kräfte* bezeichnet. Aus der Überlegung, dass die Arbeit von Punkt A nach Punkt B nur von der Höhendifferenz Δh , und

ebenfalls vom Punkt B nach A nur von der Höhendifferenz $-\Delta h$ abhängt, folgt direkt, dass die Arbeit von einem beliebigen Punkt A über einen beliebigen Weg zurück nach Punkt A null sein muss. Man bezeichnet die Integration über einen geschlossenen Weg als Ringintegral.

Notation IV.2: Integrale über geschlossene Wege werden

Ringintegrale genannt: \oint .

Definition IV.3: Kräfte, bei denen die dazugelegte Arbeit nur von Anfang- und Endpunkt der Bewegung abhängt, heißen konservative Kräfte:

$$\oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = 0.$$

IV.1.5 Spannarbeit

Aus der Erfahrung ist bekannt, dass die Kraft, die man benötigt, um eine Feder auszulenken, mit wachsender Auslenkung konstant steigt. Also ist, bzw. $F \sim x$. Die Proportionalitätskonstante ist z.B. abhängig vom Material der Feder oder der Anzahl der Windungen. Sie ist also eine Materialkonstante und wird mit unterschiedlich mit k oder D bezeichnet.

Notation IV.3: Die **Federkonstante** wird mit **D** bezeichnet.

Dieses empirische Ergebnis wird im Hook'schen Gesetz formuliert:

Hook'sches Gesetz: Die Kraft zur Auslenkung einer Feder um die Strecke x aus der Ruhelage beträgt: $\vec{F} = D \cdot \vec{x}$.

Die Hook'sche Kraft ist ebenfalls eine konservative Kraft.

Die Arbeit lässt sich dann mit

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$$

berechnen als

$$W = \int_{x_1}^{x_2} Dx \cdot dx$$

$$\Leftrightarrow W = D \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} \right) + \text{const.} \quad \text{mit const} = 0$$

$$\Leftrightarrow W = \frac{D}{2} (x_2^2 - x_1^2)$$

Insbesondere gilt für die Auslenkung x aus der Ruhelage

$$W = \frac{D}{2} x^2.$$

Merke: Die **Spannarbeit** einer Feder beträgt:

$$W = \frac{D}{2} (x_2^2 - x_1^2)$$

IV.2 Potentielle Energie

Betrachten wir noch einmal die in Kapitel IV.1.4 berechnete Hubarbeit: Aus der Formel $W = mg\Delta h$ folgt direkt, dass man beim Aufwärtsheben Arbeit leisten muß, sie beim Hinunterheben hingegen gewinnt. Ein Körper, der sich über seinem Ausgangsniveau befindet, hat offensichtlich die Fähigkeit, Arbeit zu leisten. Diese Fähigkeit nennt man Energie der Lage oder auch potentielle Energie¹. Er kann z.B. einen Körper gleicher Masse, der mit einem Seil an ihm befestigt ist, über eine Umlenkrolle auf die Höhe heben, auf der er war. Man definiert daher den Zuwachs an potentieller Energie ΔW

$$\Delta W = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{G}(\vec{r}) d\vec{r} = mgh_2 - mgh_1$$

oder allgemein für ein beliebiges Kraftfeld:

Definition IV.4: Potentielle Energie im Kraftfeld:

$$W_p = W_p(2) - W_p(1) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$$

Diese potentielle Energie ist bis auf eine Integrationskonstante bestimmt, die willkürlich vereinbart werden muß. Zumeist legt man das Bezugssystem so, dass der Ursprung des Systems auf der Ausgangsebene der Bewegung liegt. Dann gilt z.B. für die Schwerkraft die einfache Formel:

$$W_p = mgh.$$

Auch eine gespannte Feder besitzt potentielle Energie. Man berechnet sie analog zur Arbeit, die zum Spannen gebraucht wurde mit

$$W_p = \frac{1}{2} Dx^2$$

IV.3 Kinetische Energie

¹ von potentia (lat.) = Macht

Betrachten wir nun die Ergebnisse aus der Berechnung der Beschleunigungsarbeit. Wir hatten die Beschleunigungsarbeit errechnet als

$$W = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_2^2).$$

Ein Körper, der sich mit einer Geschwindigkeit v bewegt, hat ebenfalls das Potential, andere Körper zu beschleunigen, zu bewegen oder zu deformieren. Diese Fähigkeit nennen wir, wie oben eingeführt, Energie. Diese Form der Energie unterscheidet sich allerdings von der potentiellen Energie: es handelt sich nicht um eine Lage-Energie, sondern um eine Bewegungs-Energie. Wir nennen sie folglich kinetische Energie². Auch hier definieren wir zur Betrachtung einzelner Bewegungen ein Inertialsystem, in dem die Integrationskonstante null ist, in dem also gilt:

Definition IV.5: Kinetische Energie:

$$W_K = \frac{1}{2} m v^2$$

IV.4 Satz von der Erhaltung der Energie

Wenn man die Ergebnisse aus den Kapiteln IV.1.3

Beschleunigungsarbeit $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_2^2) \quad \neg$

und die Definition IV.4 aus Kapitel IV.2

potentielle Energie $W_P = W_P(2) - W_P(1) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} \quad -$

mit der Definition IV.5 aus Kapitel IV.3

kinetische Energie $W_K = \frac{1}{2} m v^2 \quad \textcircled{R}$

$$W_K(2) - W_K(1) = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) \quad \textcircled{R}'$$

zusammenfasst, ergibt sich

aus \neg und $-$ $W_P = W_P(2) - W_P(1) = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_2^2)$

mit \textcircled{R}' $W_K(2) - W_K(1) = - [W_P(2) - W_P(1)]$

$$\Leftrightarrow W_K(2) - W_K(1) = W_P(1) - W_P(2)$$

$$\Leftrightarrow W_K(2) + W_P(2) = W_P(1) + W_K(1)$$

² von kineo = ich bewege

Die Rechnung zeigt und die Erfahrung bestätigt, dass zu jeder Zeit, in der ich ein abgeschlossenes System betrachte, die Summe der Gesamtenergie $W = W_K + W_P$ konstant ist. Das gilt jedoch nur für konservative Kräfte.

Satz von der Erhaltung der Energie: Die Summe aus potentieller und kinetischer Energie ist für konservative Kräfte immer konstant:

$$W = W_K + W_P = \text{constant}$$

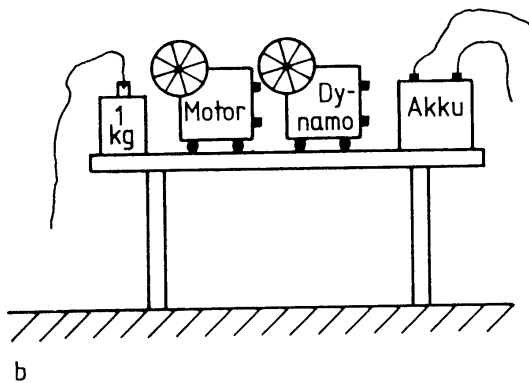
Diese Formulierung ist die einfachste Form des Satzes von der Energieerhaltung; er umfasst nur die beiden uns bekannten mechanischen Energieformen. Später werden wir die Erweiterung kennenlernen, dass die Summe aller Energien in einem abgeschlossenen System konstant sind.

Die Energieerhaltung beruht auf der Invarianz der Naturgesetze gegen die Zeit:

Als Beispiel betrachten wir das Naturgesetz der Gravitation: Nehmen wir an, die Gravitation sei nicht invariant gegen eine Zeitverschiebung.

Das hieße, dass das Gewicht eines Körpers zu einer Zeit, z.B. morgens, geringer wäre als zu einer zweiten Zeit, vielleicht abends. Diesen Umstand könnte ich mir zunutze machen:

Indem ich einen Akku über einen Generator mit



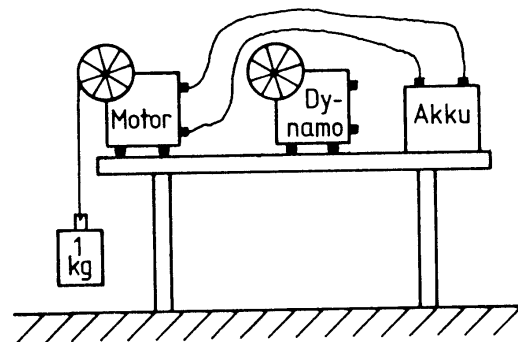
um den Körper auf Tischhöhe zurückzuziehen. Da die Erdanziehung morgens aber niedriger ist als abends, kann ich morgens vom Akku die Arbeit $W_{\text{morgens}} = - m g_{\text{morgens}} h$ verrichten lassen, um abends beim Fallenlassen die Energie

$W_{\text{abends}} = m g_{\text{abends}} h$ zu speichern.

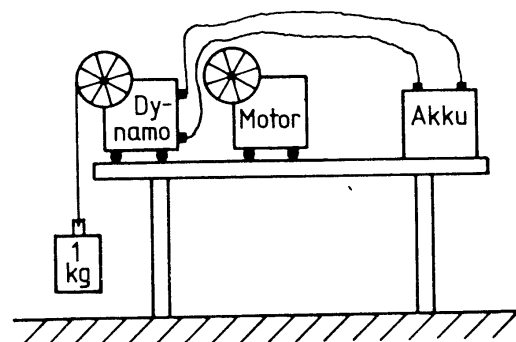
Mit $g_{\text{morgens}} < g_{\text{abends}}$, gilt aber

$W_{\text{morgens}} + W_{\text{abends}} > 0$, ich hätte ein Kraftwerk gebaut.

Die Invarianz der Naturgesetze gegen die Zeit und



a
einem Gewicht verbinde, welches ich über die Tischkante hängen lasse, kann ich den Akku aufladen bei Fallenlassen des Gewichts, brauche aber wieder Energie,



c
Abbildung IV.8: Dieses Kraftwerk würde auf der zeitlichen Varianz der Energie basieren.

der daraus resultierende Energiesatz bewahren mich jedoch vor einem solchen Versuch.

Versuch VI.2: Kugel rollt von verschiedenen Höhen eine Bahn hinunter

In diesem Versuch soll rein qualitativ der Satz von der Erhaltung der Energie gezeigt werden.

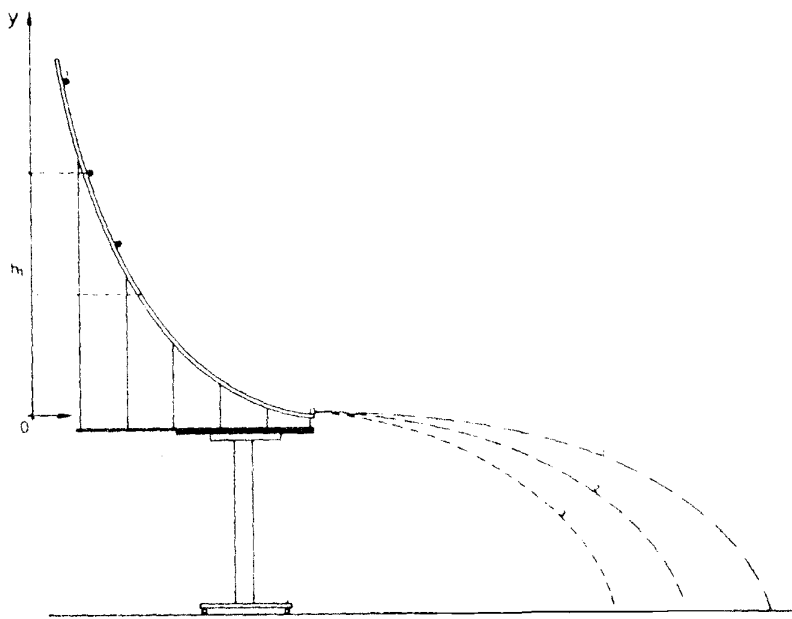


Abbildung IV.9: Energieerhaltung

Hierfür wird eine Kugel auf einen markierten Punkt einer steil abfallenden Bahn gelegt, die Höhendifferenz zum Endpunkt der Bahn sei h . Das Ende der Bahn ist parallel zur Erde ausgerichtet, die Kugel vollführt die Bewegung eines horizontalen Wurfs. Auf der Höhe h hat die Kugel nur potentielle

$$Energie: \quad W_p = mgh.$$

Beim Verlassen der Bahn

$$W_k = \frac{1}{2} mv^2.$$

hat sie auf der Höhe $h = 0$ nur noch potentielle Energie:

$$\begin{aligned} \text{Wegen der Energieerhaltung folgt:} \quad W_p &= W_k \\ \Leftrightarrow mgh &= \frac{1}{2} mv^2 \\ \Rightarrow v &= \sqrt{2gh} \end{aligned}$$

Mit dem Ergebnis der horizontalen Wurfs aus Kapitel II.4.4

$$y(x) = -\frac{g}{2 \cdot v^2} x^2$$

kann man sehen, dass die Wurfweite nur von der Höhe abhängt, auf welcher die Kugel abrollt. Um dieses Ergebnis zu verifizieren, wird in dem Versuch noch von zwei anderen Höhen die Kugel losgelassen. Je kleiner die Höhe ist, desto weniger weit fliegt die Kugel.

Abschließend betrachten wir noch die Dimension der Energie und führen eine weitere nützliche Größe ein:

Einheitenbetrachtung:

Nach der Definition der Energie gilt: $[Energie] = [Arbeit]$

$$\Rightarrow [W_K] = [W_P] = Nm = J$$

Merke: Die Einheit der Energie ist analog zur Einheit der Arbeit das **Joule**:

$$[W] = J.$$

Oftmals ist es nicht nur interessant, welche Arbeit verrichtet wurde, sondern auch in welcher Zeit dies geschah. Des halb definiert man die Leistung:

Definition IV.6: Leistung ist der Quotient aus geleisteter Arbeit und der dafür benötigten Zeit:

$$P = \frac{dW}{dt}.$$

Einheitenbetrachtung:

$$[Leistung] = [Arbeit] / [Zeit] = J s^{-1}.$$

Die zusammengesetzte Einheit $J s^{-1}$ wird mit Watt bezeichnet und als W abgekürzt.

$$1 W = 1 J s^{-1} = 1 kg m^2 s^{-3}$$

Notation IV.4: Die **Leistung** wird mit **P** bezeichnet. Sie hat die Einheit **Watt**

IV.5 Impulssatz

Das zweite Newtonsche Axiom

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

lässt sich mit der

Definition der Beschleunigung

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

auch schreiben als

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Man definiert den Term

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

als **Impuls**

und schreibt nun

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Diese Formulierung des Zweiten Newtonschen Axioms ist umfassender als die erste, weil sie auch den Fall variabler Masse berücksichtigt:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

mit partieller Integration $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$

Bei den bisher berechneten Fällen war die Masse zeitlich konstant, also

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

und damit $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$.

Merke: Das zweite Newtonsche Axiom wird umfassender geschrieben als

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}.$$

Definition IV.7: Der Impuls ist das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit:

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Einheitenbetrachtung:

$$[\text{Impuls}] = [\text{Masse}] [\text{Geschwindigkeit}] = \text{kg m s}^{-1}.$$

In einem abgeschlossenen System gilt $\sum \vec{F}_i = 0$ für alle äußeren Kräfte.

$$\Rightarrow \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt} = 0$$

mit $\vec{p} = \sum \vec{p}_i \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$

$$\Leftrightarrow \vec{p} = \text{const.}$$

Satz von der Erhaltung des Impulses:

In einem abgeschlossenen System ist die Summe der Einzelimpulse konstant:

$$\sum \vec{p}_i = \text{const.}$$

IV.6: Stoßgesetze

Mit den beiden erarbeiteten Erhaltungssätzen

Energieerhaltung: $W = W_K + W_P = \text{constant}$

Impulserhaltung: $\sum \vec{p}_i = \text{constant}$

kann man mit Kenntnis der Anfangszustände die Bewegungsgleichungen von Körpern berechnen, die gegeneinander stoßen. Dieses Verfahren ist z.B. in der Kernphysik unerlässlich.

Hier erstellte man durch eine scheinbare Verletzung des Energie- und Impulssatzes die Hypothese, dass bei e^+e^- -Stößen ein weiteres Teilchen, das sogenannte Lepton τ erzeugt wird. Wir wollen in dieser Vorlesung jedoch nur einfache Modelle betrachten: den zentralen elastischen und unelastischen Stoß, den schiefen Stoß und die Dynamik von Stößen.

IV.6.1 Elastischer Stoß

Bei elastischen Stößen werden die stoßenden Körper weder unelastisch verformt noch erwärmt, die Reibung sei vernachlässigbar. Das bedeutet, dass nur mechanische Energie umgesetzt wird, es gilt folglich der Energieerhaltungssatz und der Impulserhaltungssatz.

Versuch IV.3: grader, zentraler, elastischer Stoß auf der Luftkissenbahn

Dieser Versuch wird auf der Luftkissenbahn durchgeführt. Zwei Reiter der Massen m_1 und m_2 werden mit den Geschwindigkeiten \vec{v}_1 und \vec{v}_2 aufeinander zu bewegt. Nach dem Stoß werden die Geschwindigkeiten \vec{v}_1' und \vec{v}_2' der Reiter gemessen.

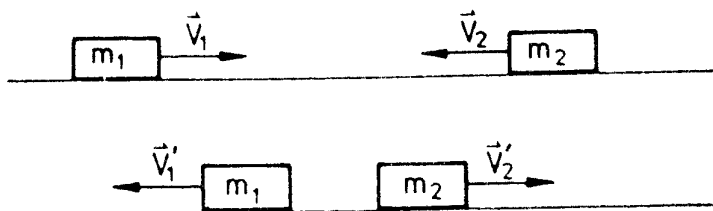


Abbildung IV.10: elastischer Stoß auf der Luftkissenbahn

Betrachten wir die beiden Erhaltungssätze:

Energieerhaltung :

Die potentielle Energie ist konstant, wir definieren sie

als $W_p = 0$.

Energie vor dem Stoß:

$$W = W_{K1} + W_{K2}$$

$$\Leftrightarrow W = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Energie nach dem Stoß:

$$W' = W_{K1}' + W_{K2}'$$

$$\Leftrightarrow W' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

Energieerhaltung :

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$\Leftrightarrow m_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}_1') (\vec{v}_1 + \vec{v}_1') = m_2 (\vec{v}_2 - \vec{v}_2') (\vec{v}_2 + \vec{v}_2') \quad \neg$$

$$\begin{aligned}
\text{Impuls vor dem Sto\ss:} & \quad \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\
& \Leftrightarrow \quad \vec{p} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \\
\text{Impuls nach dem Sto\ss:} & \quad \vec{p}' = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \\
& \Leftrightarrow \quad \vec{p}' = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \\
\text{Impulserhaltung:} & \quad m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \\
& \Leftrightarrow \quad m_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}'_1) = m_2 (\vec{v}_2 - \vec{v}'_2) -
\end{aligned}$$

$$\text{Aus } \neg \text{ und } - \text{ folgt:} \quad \vec{v}_1 + \vec{v}'_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}'_2$$

Dieses Ergebnis in den Impulssatz eingesetzt ergibt die

Bewegungsgleichungen für den **graden, zentralen, elastischen Sto\ss:**

$$\begin{aligned}
\vec{v}'_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_2 \\
\vec{v}'_2 &= \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1
\end{aligned}$$

Betrachten wir fünf Spezialfälle:

$$\begin{aligned}
1) \text{ Der zweite Reiter ruht vor dem Sto\ss:} & \quad \vec{v}_2 = 0 \\
\Rightarrow & \quad \vec{v}'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_1, \quad \vec{v}'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \text{ Der zweite Reiter ruht vor dem Sto\ss:} & \quad \vec{v}_2 = 0 \\
\text{und die Massen der Reiter sind gleich:} & \quad m_1 = m_2 \\
\Rightarrow & \quad \vec{v}'_1 = 0, \quad \vec{v}'_2 = \vec{v}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \text{ Reflexion am festen Ende:} & \quad m_2 = \infty, \quad \vec{v}_2 = 0 \\
\Rightarrow & \quad \vec{v}'_1 = -\vec{v}_1, \quad \vec{v}'_2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) \text{ Der zweite Reiter ruht vor dem Sto\ss:} & \quad \vec{v}_2 = 0 \\
\text{und die Massen der Reiter sind:} & \quad m_2 = \frac{1}{2} m_1
\end{aligned}$$

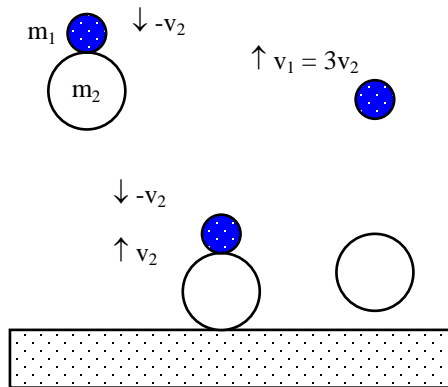
$$\Rightarrow \quad \vec{v}_1' = \frac{1}{3} \vec{v}_1 \quad , \quad \vec{v}_2' = \frac{4}{3} \vec{v}_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_2'}{v_1'} = 4 \quad , \quad \vec{v}_2' = \vec{v}_1 + \vec{v}_1'$$

5) Der zweite Reiter ruht vor dem Stoß: $\vec{v}_2 = 0$

und die Massen der Reiter sind: $m_2 = 2 m_1$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_1' = -\frac{1}{3} \vec{v}_1 \quad , \quad \vec{v}_2' = \frac{2}{3} \vec{v}_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_2'}{v_1'} = 2 \quad , \quad \vec{v}_2' = \vec{v}_1 + \vec{v}_1'$$

Versuch IV.4: 'Astro-Blaster'



Bei diesem Versuch werden zwei Gummibälle verschiedener Massen auf den Boden fallen gelassen. Zunächst springen beide Bälle auf die Ausgangshöhe zurück. Ein geringer Energieverlust durch Reibung und Wärme ist nicht ganz auszuschließen, kann in der Rechnung aber vernachlässigt werden. Nun werden die beiden Bälle lose auf eine Stange gesteckt und gemeinsam fallen gelassen, der kleinere Ball ist dabei oben. Das Ergebnis ist verblüffend: Der kleinere Ball springt bis an die Decke des Raumes zurück. Die

Rechnung liefert die Steighöhe genau:

Die Bälle deren Masse m_1 und m_2 mit $m_1 < m_2$ fallen mit derselben Geschwindigkeit \vec{v} zu Boden. Dabei setzen wir die Geschwindigkeit beim Fall negativ, also \vec{v} (rauf) = $-\vec{v}$ (runter). Wenn der Ball 2 bereits umgekehrt ist und mit \vec{v} rauf fliegt, fällt der Ball 1 noch mit $-\vec{v}$ hinab. Es ergibt sich eine elastische Reflexion des Balls 1 an Ball 2 mit entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeit. In die Formeln

$$\vec{v}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1$$

eingesetzt, folgt für den Betrag der Geschwindigkeit des Balls 1:

$$v_1' = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

Setzen wir als Näherung $m_1 \ll m_2$ folgt $v_1' = 3v_1$.

Der Ball fliegt also mit dreifacher Geschwindigkeit rauf. Da die Strecke quadratisch mit der Geschwindigkeit verläuft, fliegt er folglich neun mal so hoch.

IV.6.2 Dynamik von Stößen

Bisher haben wir nur die Bewegung vor und nach dem Stoß berechnet, die Dynamik des Stoßes selbst haben wir unbeachtet gelassen. In der Einleitung des Kapitels haben wir als Beispiel einen Ball betrachtet, der auf der Erde verformt wird und dadurch zurückprallt. Wir wissen jetzt, wie schnell er zurückprallt und könnten daraus auch die Höhe berechnen, jetzt wollen wir die Kraft zu jeder Zeit der Bewegung betrachten:

Da die Erde oder eine Wand bereits einen Spezialfall mit $m_2 = \infty$, $\vec{v}_2 = 0$ darstellen, betrachten

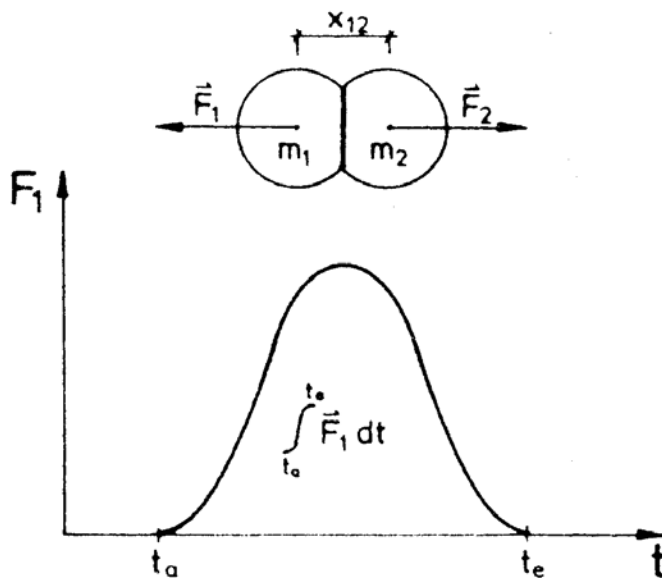


Abbildung IV.11: Kraftstoß

wir wieder den Stoß zweier Kugeln.

Die Verformung bewirkt eine Rückstellkraft, die nach dem 2. Newtonsche Axiom wechselseitig ist:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Mit dem 2. Newtonschen Axiom

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

gilt
$$\vec{F}_1 = \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \frac{d(m_1\vec{v}_1)}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \vec{F}_1 dt = d\vec{p}_1$$

Die Änderung des Impulses über eine Zeitspanne von t_a nach t_e kann also durch Integration errechnet werden. Man nennt dieses Integral über die Kraft Kraftstoß:

Definition IV.8: Der Kraftstoß ist die Änderung des Impulses:

$$\text{Kraftstoß} = \int_{t_a}^{t_e} \vec{F}_1 dt = \int_{p_a}^{p_e} d\vec{p} = \vec{p}_e - \vec{p}_a = \Delta\vec{p}$$

Diese Definition verletzt die Impulserhaltung nicht, denn wegen des 3. Newtonschen Axioms

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad \text{gilt:} \quad \Delta\vec{p}_1 &= -\Delta\vec{p}_2 \\ \Leftrightarrow \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Merke: Während des Stoßes ändern sich die Einzelimpulse in komplizierter Weise, der Gesamtimpuls bleibt jedoch zu jedem Zeitpunkt erhalten.

Generell unterscheidet man auch bei der Dynamik von Stößen zwischen zwei verschiedenen Arten:

Beim **elastischen Stoß** ist die wirkende Rückstellkraft elastisch und hängt analog zur Feder nur vom Relativabstand der beiden Kugelmittelpunkte ab. Wie in Versuch VI.3 bereits angewandt gilt die Energieerhaltung:

Merke: Bei **elastischen Stößen** ist die Rückstellkraft konservativ, es gilt die Energieerhaltung der Mechanik

Beim **unelastischen Stoß** ist die Rückstellkraft nicht konservativ; sie hängt z.B. bei Reibung von der Geschwindigkeit oder bei unelastischer Verformung von der Vorgeschichte ab. Der Energiesatz gilt folglich nur unter Einbeziehen anderer, nichtmechanischer Energieformen wie Wärme oder Gitterverformung. Im Allgemeinen ist $\Delta W > 0$, bei exothermen Reaktionen ist jedoch auch $\Delta W < 0$ möglich.

Auch für nichtkonservative Kräfte gilt immer die Impulserhaltung:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum \vec{p}_i = \text{const.}$$

Merke: Bei **unelastischen Stößen** ist die Rückstellkraft nicht konservativ, die Energieerhaltung der Mechanik gilt nicht:
 $W_K (\text{vorher}) = W_K (\text{nachher}) + \Delta W,$
 es gilt die Impulserhaltung: $\sum \vec{p}_i = \text{const.}$

Versuch IV.5: grader, zentraler, unelastischer Stoß auf der Luftkissenbahn

Für diesen Versuch wird derselbe Aufbau wie in Versuch IV.3 genutzt. Diesmal wird jedoch an beiden Reitern ein Knetgummi befestigt, so dass beide Reiter nach einem Zusammenstoß fest zusammen bleiben. Quantitativ untersucht werden wieder Stöße mit verschiedenen Massen und Geschwindigkeiten. Berechnen wollen wir den Fall, dass der zweite Reiter der Masse m_2 ruht, wenn der erste Reiter der Masse m_1 mit einer konstanten Geschwindigkeit \vec{v}_1 auftrifft.

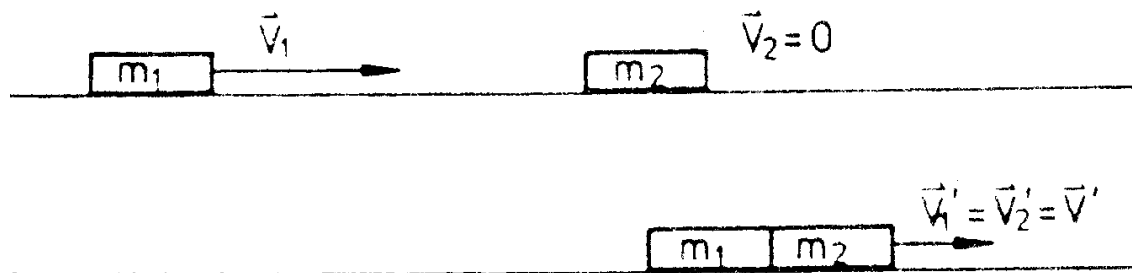


Abbildung IV.12: unelastischer Stoß

Als Randbedingung ist also gegeben: $\vec{v}_2 = 0$. Beim unelastischen Stoß gilt die Energieerhaltung nicht, wohl aber die Impulserhaltung:

$$\begin{aligned} \text{Impuls vor dem Stoß:} \quad & \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\ & \Leftrightarrow \vec{p} = m_1 \vec{v}_1 \\ \text{Impuls nach dem Stoß:} \quad & \vec{p}' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \\ & \Leftrightarrow \vec{p}' = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \\ \text{Impulserhaltung:} \quad & m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \end{aligned}$$

Nach dem Stoß müssen die beiden vereinten Massen mit derselben Geschwindigkeit weiterfahren, also gilt $\vec{v}_1' = \vec{v}_2' = \vec{v}'$.

Die Gesamtmasse der vereinten Reiter beträgt $m_1 + m_2$.

$$\begin{aligned} \text{Aus der Impulserhaltung} \quad & m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \\ \text{folgt:} \quad & m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}' + m_2 \vec{v}' \\ & \Rightarrow v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1. \end{aligned}$$

Für den Sonderfall zweier Reiter mit derselben Masse $m_1 = m_2$ gilt dann: $v' = \frac{v_1}{2}$.

Betrachten wir jetzt den Verlust an mechanischer Energie ΔW :

$$\begin{aligned} & W \text{ (vorher)} = W' \text{ (nachher)} + \Delta W \\ \text{Energie vor dem Stoß:} \quad & W = W_1 + W_2 \quad \text{mit } \vec{v}_2 = 0 \\ & \Leftrightarrow W = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \\ \text{Energie nach dem Stoß:} \quad & W' = \frac{m_1 + m_2}{2} v'^2 \\ & \Leftrightarrow W' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} W \\ \text{Energieverlust:} \quad & \Delta W = W - W' \\ & \Leftrightarrow \Delta W = W - \frac{m_1}{m_1 + m_2} W \\ & \Leftrightarrow \Delta W = \frac{m_2}{m_1 + m_2} W \end{aligned}$$

Merke: Nach einem **unelastischen, zentralen Stoß** eines gradlinig gleichförmig bewegten Körpers mit einem ruhenden, haben beide die **Geschwindigkeit**

$$v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

Der **Verlust an mechanischer Energie** beträgt

$$\Delta W =.$$

Betrachtet man den Stoß der Reiter der Masse m_1 an einer festen Wand, also $m_2 \rightarrow \infty$, dann

kann in der Formel $\Delta W = \frac{m_2}{m_1 + m_2} W$ die Masse m_1 gegenüber m_2 vernachlässigt werden, und

es gilt:

$$\Delta W = W.$$

Ein Beispiel hierfür ist ein PKW der Masse $m = 1000 \text{ kg}$, der mit einer Geschwindigkeit von $v_1 = 120 \text{ km/h}$ frontal gegen eine feste Wand fährt. Die kinetische Energie des Wagens beträgt

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} m v_1^2 \\ \Rightarrow W &= \frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot \left(\frac{120 \text{ km}}{3600 \text{ s}} \right)^2 \\ \Leftrightarrow W &= \frac{1}{2} 10^6 \text{ J} \end{aligned}$$

Diese Energie wird komplett in nichtmechanische Energie umgewandelt. Die Leistung dieses Aufpralls, der $\Delta t = 1/10 \text{ s}$ dauern soll, berechnet sich nach Definition IV.6 als Quotient aus geleisteter Arbeit und der dafür benötigten Zeit:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\Delta W}{\Delta t} \\ \Rightarrow P &\approx \frac{1}{2} 10^7 \text{ W} \approx 5 \text{ MW} \end{aligned}$$

Versuch IV.6: Ballistisches Pendel

Bei diesem Versuch soll die Geschwindigkeit eines Geschosses aus einem Gewehr berechnet werden. Hierzu schießt man eine Gewehrkuugel der Masse m aus einigen Metern Entfernung auf eine Kiste der Masse M . Diese Kiste ist an einem Seil frei schwingend aufgehängt und befindet sich vor dem Einschuss in Ruhe. Trifft das Geschoss die Kiste, so wird diese beschleunigt und schwingt aus. Dabei verschiebt sie einen Markierungsstift, der nach Rückschwingen der Kiste stehen bleibt und so die maximale Auslenkung a der Kiste anzeigt.

Zur Berechnung muß dieser Vorgang in zwei Teile unterteilt werden: Die Zeit vom Abschuss bis zum Einschlagen des Geschosses in die Kiste, und die Zeit vom Einschuss bis zur maximalen Auslenkung des Kistenpendels.

1) Die Zeit vom Abschuss bis zum Einschlagen des Geschosses in die Kiste:

Dieser Teil der Bewegung entspricht einem unelastischen Stoß der Massen m und M , wobei m sich mit \vec{v}_G bewegt, während M ruht. Es gilt also die Impulserhaltung, nicht aber die Energieerhaltung. Nach dem Stoß bewegen sich die vereinten Massen mit:

Impulserhaltung :

$$\begin{aligned} \text{Impuls vor dem Stoß:} \quad & \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\ & \Leftrightarrow \vec{p} = m\vec{v}_G \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Impuls nach dem Stoß:} \quad & \vec{p}' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \\ & \Leftrightarrow \vec{p}' = m\vec{v} + M\vec{v} \end{aligned}$$

$$\text{Mit dem Ergebnis von Versuch IV. :} \quad v = \frac{m}{m+M} v_G \quad \neg$$

2) Die Zeit vom Einschuss bis zur maximalen Auslenkung des Kistenpendels:

Die Kiste mit dem Geschoss (Masse $m + M$) hat zur Zeit des Einschusses die maximale Geschwindigkeit v , also maximale kinetische Energie W_K . Er hängt auf der Höhe $h = 0$, hat also keine potentielle Energie $W_P = 0$. Wenn die schwingende Kiste auf dem höchsten Punkt angekommen ist, also die Höhe h hat, dreht sie um, ihre Geschwindigkeit ist in diesem Punkt null. Sie hat maximale potentielle Energie, aber ihre kinetische Energie ist null. Die Energieerhaltung sagt uns, dass die Summe der Energie in jedem Punkt gleich ist.

$$\text{Energie zur Zeit des Einschusses:} \quad W_P = 0, W_K = \frac{1}{2}(m+M)v^2$$

$$\text{mit } W_1 = W_P + W_K \quad \Rightarrow \quad W_1 = \frac{1}{2}(m+M)v^2$$

$$\text{mit } \neg : v = \frac{m}{m+M} v_G \quad \Rightarrow \quad W_1 = \frac{1}{2}(m+M) \left(\frac{m}{m+M} v_G \right)^2$$

$$\text{Energie auf höchstem Punkt} \quad W_P = (m+M)gh, W_K = 0$$

$$\text{mit } W_2 = W_P + W_K \quad \Rightarrow \quad W_2 = (m+M)gh$$

Energieerhaltung

$$W_1 = W_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(m+M) \left(\frac{m}{m+M} v_G \right)^2 = (m+M)gh$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{m}{m+M} v_G \right)^2 = gh$$

Diese Gleichung beschreibt die Abhängigkeit der Höhe h , auf die die Kiste schwingt, und der Geschwindigkeit v_G des Geschosses. In unserem Versuch wurde statt der Höhe h die Strecke a gemessen. Über die geometrische Beziehung $h = l - \sqrt{l^2 - a^2}$ kann bei Kenntnis der Pendellänge l die Höhe berechnet werden.

IV.6.3 Schiefer Stoß

Der elastische schiefe Stoß ist der allgemeine Fall des elastischen Stoßes. In der Regel kann man nicht exakt festlegen, ob die Schwerpunkte der stoßenden Körper auf einer Geraden liegen. Deshalb muß man beim schiefen Stoß den Abstand der Geraden, auf denen die Schwerpunkte verlaufen, betrachten. Dieser Abstand wird **Stoßparameter** b genannt. Beim elastischen Stoß gelten, wie besprochen, Energie- und Impulserhaltungssatz.

Versuch IV.7: schiefer Stoß zweier Kugeln

Bei diesem Versuch wird analog zu Versuch IV.2 eine Kugel von einer Höhe h einer Bahn rollen gelassen. Diesmal liegt am horizontalen Ende der Bahn eine zusätzliche Kugel. Diese ruht auf einer Mikrometerschraube und kann so in der Höhe $\Delta h'$ variiert werden. Dadurch trifft die rollende Kugel die ruhende nicht zentral, sondern um einige Mikrometer versetzt.

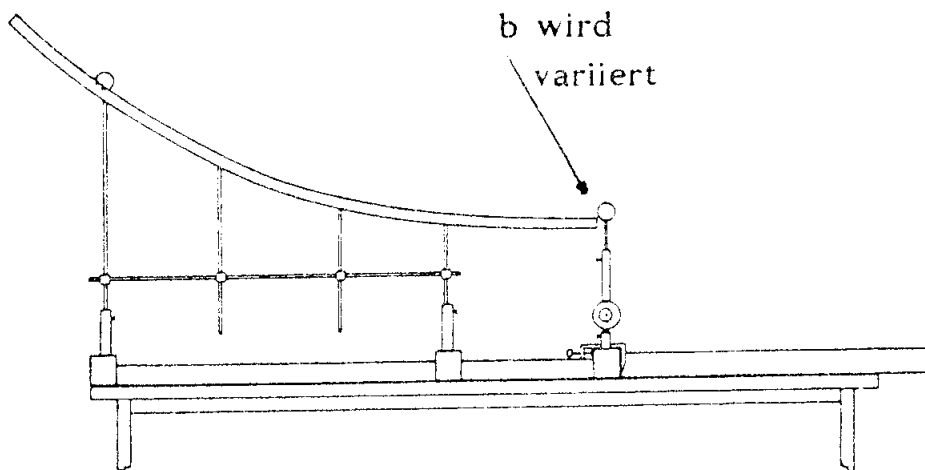


Abbildung IV.13: Schematischer Versuchsaufbau

Die Höhe $\Delta h'$ entspricht dem oben eingeführten Stoßparameter b .

Analog zum elastischen Stoß gilt die Energieerhaltung:

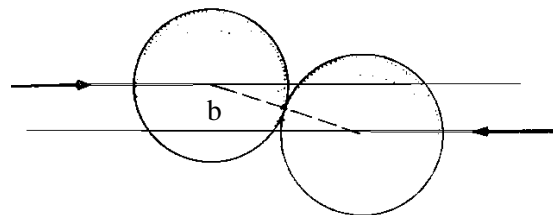


Abbildung IV.14: Stoßparameter

Energie vor dem Stoß:

$$W = W_{K1} + W_{K2} \quad \text{mit } v_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow W = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

Energie nach dem Stoß:

$$W' = W_{K1}' + W_{K2}'$$

$$\Leftrightarrow W' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

Energieerhaltung :

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

mit $m_1 = m_2 = m$

$$\Rightarrow v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \quad \square$$

Impuls vor dem Stoß:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad \text{mit } \vec{v}_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{p} = m_1 \vec{v}_1$$

Impuls nach dem Stoß:

$$\vec{p}' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

$$\Leftrightarrow \vec{p}' = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$$

Impulserhaltung:

$$m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$$

mit $m_1 = m_2 = m$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2' \quad -$$

Aus \vec{v}_1 und \vec{v}_2 folgt wegen des Kosinussatzes, dass der eingeschlossene Winkel der Geschwindigkeitsvektoren ein rechter Winkel sein muß. Es entsteht beim Auftragen der

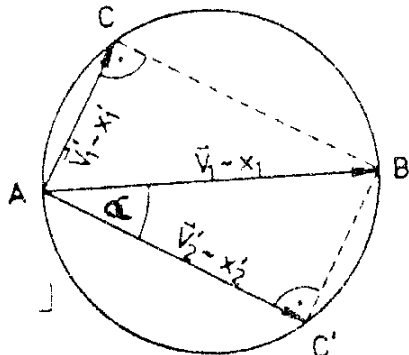


Abbildung IV.15: Thaleskreis

Geschwindigkeitsvektoren also immer ein rechtwinkliges Dreieck. Die Ecken dieses Dreiecks liegen nach dem Satz des Thales immer auf einem Kreis. Dieser Kreis hat den Durchmesser des ursprünglichen Geschwindigkeitsvektors.

Der Versuch zeigt, dass die Kugeln immer auf demselben Kreis landen, solange die Geschwindigkeit der Kugel, also ihre Abrollhöhe, nicht variiert wird.

Wo genau auf dem Kreis sie landen, hängt vom Stoßparameter b ab. Die Untersuchung der Streuwahrscheinlichkeit ließe auf das Kraftgesetz schließen. Dies wird in der Kernphysik oft genutzt, um Rückschlüsse über Kernkräfte zu erhalten.

IV.7 Rakete

Mithilfe der gewonnenen Erkenntnisse über die Impulserhaltung soll nun die Bewegung einer Rakete berechnet werden. Dabei sollen jedoch äußere Kräfte, z.B. Reibung und Gravitation, vernachlässigt werden.

Gegeben sei eine Rakete der Masse m , die zu einer beliebigen Zeit t_1 mit der Geschwindigkeit \vec{v} fliegt. Die Masse m der Rakete beinhaltet Treibstoff.

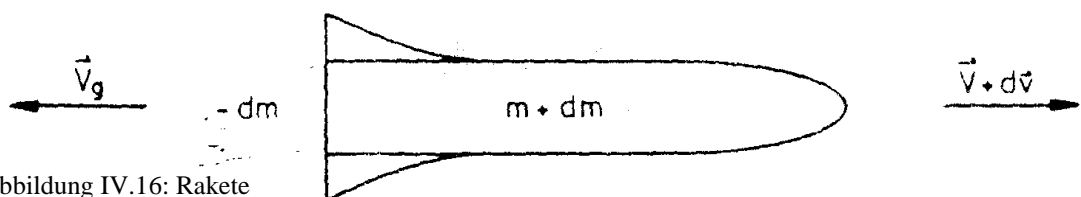


Abbildung IV.16: Rakete

Die Rakete stößt Gase mit der Geschwindigkeit \vec{v}_G relativ zur Rakete aus und wird damit beschleunigt auf die Geschwindigkeit. Bekannt sind also folgende Bedingungen:

Zeit t_1 : Masse der Rakete m
 Geschwindigkeit der Rakete \vec{v}

Zeit t_2 : Masse der Rakete $m + dm$
 Masse der Gase $- dm$

Geschwindigkeit der Rakete	$\vec{v} + d\vec{v}$
Geschwindigkeit der Gase	$\vec{v} + \vec{v}_G$

Für die differentielle Änderung von $t_1 \rightarrow t_2$ gilt wegen der Impulserhaltung:

Impuls vor der Zündung: $\vec{p} = \vec{p}_R + \vec{p}_G$ mit $\vec{p}_G = 0$

$$\Leftrightarrow \vec{p} = m\vec{v}$$

Impuls nach der Zündung:

$$\vec{p}' = \vec{p}_R' + \vec{p}_G'$$

$$\Leftrightarrow \vec{p}' = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - dm(\vec{v} + \vec{v}_G)$$

Impulserhaltung:

$$\vec{p} = \vec{p}'$$

$$\Leftrightarrow m\vec{v} = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - dm(\vec{v} + \vec{v}_G)$$

$$\Leftrightarrow m\vec{v} = m\vec{v} + md\vec{v} + dm\vec{v} + dmd\vec{v} - dm\vec{v} - dm\vec{v}_G$$

$$\Leftrightarrow (m + dm)d\vec{v} = dm\vec{v}_G$$

Die Masse der Gase soll gegenüber der Masse der Rakete vernachlässigbar klein sein, es gilt also mit $dm \ll m$

$$\Rightarrow md\vec{v} = dm\vec{v}_G$$

$$\Leftrightarrow d\vec{v} = \frac{dm}{m} \vec{v}_G \quad \neg$$

Diese Gleichung gibt die Geschwindigkeitsänderung der Rakete an, die Gase der Masse $-dm$ mit \vec{v}_G ausstößt.

Merke: Die Bewegungsgleichung der Rakete lautet

$$d\vec{v} = \frac{dm}{m} \vec{v}_G.$$

Die Endgeschwindigkeit kann man mittels Integration der Bewegungsgleichung von der Zeit der Zündung t_0 bis zum Ende der Beschleunigung t_e errechnen.

$$\vec{v}_0 - \vec{v}_e = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_e} d\vec{v}$$

mit \neg

$$= \int_{m_0}^{m_e} \frac{dm}{m} \vec{v}_G$$

$$= \vec{v}_G \int_{m_0}^{m_e} \frac{dm}{m}$$

$$= \vec{v}_G \left[\ln m \right]_{m_0}^{m_e}$$

Merke: Die Endgeschwindigkeit der Rakete beträgt

$$\vec{v}_e = \vec{v}_0 - \vec{v}_G \ln \left(\frac{m_0}{m_e} \right).$$

Die Beschleunigung der Rakete kann über die Beziehung $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ berechnet werden.

Merke: Die Beschleunigung der Rakete beträgt

$$\vec{a} = \frac{dm}{dt} \frac{\vec{v}_G}{m}.$$

Über das dritte Newtonsche Axiom $\vec{F} = m\vec{a}$ lässt sich die Schubkraft \vec{F}_T berechnen.

Merke: Die Schubkraft der Rakete beträgt

$$\vec{F}_T = \frac{dm}{dt} \vec{v}_G.$$

Da wir die Masse der Gase negativ als $-dm$ definiert hatten, ist die Schubkraft der Geschwindigkeit der Gase entgegengesetzt.

IV.8 Schwingungen

IV.8.1 Federschwingung

Im Folgenden wollen wir die Bewegung einer Masse untersuchen, die an einer Feder ausgelenkt wurde. Um die Dynamik der Bewegung beschreiben zu können, müssen wir hierfür alle wirkenden Kräfte aufstellen und die resultierende äußere Kraft errechnen. Mithilfe der Newtonschen Axiome kann man dann die Beschleunigung und daraus die Geschwindigkeit und den Ort zu jeder Zeit t berechnen.

Anders als in Kapitel III. soll die Feder diesmal nicht horizontal zur Erde liegen, sondern senkrecht hinab hängen. Das Problem ist eindimensional, die Auslenkung der Feder geben wir mit dem Skalar x an, und definieren sie positiv, wenn die Feder ausgelenkt ist.

Als Ausgangslage betrachten wir eine Feder mit einer angehängten Masse m , die sich im Gleichgewicht befindet. So wirkt auf die Masse m in Richtung der Erde, also in positiver

x -Richtung die Gewichtskraft $\vec{G} = m\vec{g}$. Zugleich

wirkt die Rückstellkraft der ausgelenkten Feder, die wir mit dem Hook'schen Gesetz als $\vec{F} = -D\vec{x}$ angeben können. Da die Feder sich im Gleichgewicht befindet, gilt offensichtlich. Die beiden Kräfte heben sich auf, sie brauchen uns für die weitere Untersuchung nicht zu interessieren. Wir definieren deshalb die Auslenkung in der Gleichgewichtslage als $x = 0$.

Nun wird die Feder um eine beliebige Strecke x ausgelenkt. Auf die Masse wirkt jetzt eine weitere Rückstellkraft $\vec{F} = -D\vec{x}$. Solange ich die Feder festhalte befindet sie sich in Ruhe, also im Gleichgewicht der Rückstellkraft und der auslenkenden Kraft, die ich ausübe.

Nun soll die Masse losgelassen werden. Es wirkt nur noch die Rückstellkraft. Nach dem 2. Newtonschen Axiom ruft diese Kraft eine Beschleunigung \vec{a} hervor. Die Vektoren können unter Berücksichtigung der Richtungen durch Skalare ersetzt werden. Dann wirkt auf die Massen die Kraft $F = -Dx$ als beschleunigende Kraft. $F_N = ma$ wirkt der Beschleunigung entgegen. Es gilt

$$F = F_N$$

$$\text{mit } F = -Dx \text{ und } F_N = ma \quad \Leftrightarrow \quad -Dx = ma$$

$$\text{mit } a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{-Dx = m \frac{d^2x}{dt^2}} \quad \neg$$

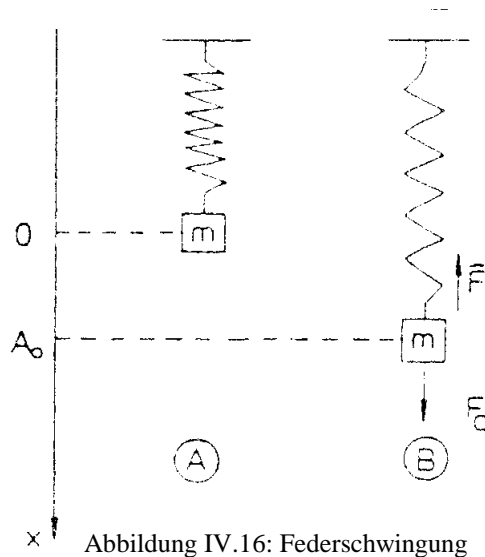


Abbildung IV.16: Federschwingung

Diese Gleichung ist eine lineare (die Ableitungen sind nur linear), homogene (der absolute Term ist null) Differentialgleichung zweiter Ordnung (die Gleichung beinhaltet maximal die zweite Ableitung).

Merke: Eine **lineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung** ist eine Gleichung der Form

$$x = -A \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Notation IV.5: **Differentialgleichungen** werden kurz als **DGL** bezeichnet.

Diese Form der Gleichungen hat genau zwei linear unabhängige Lösungen. Alle anderen Lösungen sind Linearkombinationen dieser Lösungen. Die Mathematik gibt Lösungsschemata an, wir begnügen uns in diesem Fall damit, die Lösungen durch Überlegungen und Erraten zu finden:

Gesucht wird eine Funktion, die zweimal abgeleitet bis auf einen konstanten, negativen Vorfaktor wieder die Ausgangsfunktion ergibt, also $f''(t) = \ddot{f}(t) \sim -f(t)$. Aus der Mathematik wissen wir noch, dass diese Bedingung die beiden Winkelfunktionen Sinus und Kosinus erfüllen. Da wir zwei linear unabhängige Lösungen suchen, wählen wir diese beiden mit einer beliebigen Konstanten ω als Ansatz:

1. Ansatz:

$$x(t) = A \cdot \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -A\omega \cdot \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega^2 \cdot \cos \omega t$$

Diesen Ansatz setzen wir in die Gleichung \neg , um zu überprüfen, ob er die Bedingungen erfüllt:

$$-DA \cdot \cos \omega t = -mA\omega^2 \cdot \cos \omega t$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{D}{m}\right)A \cdot \cos \omega t = (\omega^2)A \cdot \cos \omega t$$

Diese Gleichung zeigt, dass die gestellte Bedingung $-Dx = m \frac{d^2x}{dt^2}$ erfüllt ist, und die zunächst als beliebig angenommene Konstante ω sich aus den bekannten Konstanten m und D zusammensetzt:

$$\omega^2 = \frac{D}{m}.$$

Analog lässt sich zeigen, dass der

2. Ansatz

$$x(t) = B \cdot \sin \omega t$$

eine Lösung der Gleichung \neg ist. Die Winkelfunktionen Sinus und Kosinus sind linear unabhängig, die allgemeine Lösung lautet also:

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Betrachten wir nun die Bewegung im Experiment: Die losgelassene Feder wird durch die Rückstellkraft wieder zusammen gezogen bis zu einem Umkehrpunkt, dann fällt die Masse wieder bis zum Ausgangspunkt x nach unten. Dieser Vorgang wiederholt sich **periodisch**: die Masse schwingt. Die berechnete Gleichung beschreibt also eine Federschwingung, sie wird deshalb Schwingungsgleichung genannt.

Notation IV.6: Die Auslenkung x der Feder ist eine Funktion der Zeit, sie wird **Elongation** genannt.

Das Argument ω in der Winkelfunktion gibt stets die Periode an, mit der die Schwingung ausgeführt wird. Setzen wir für die oben ermittelten Konstanten ω in die Gleichung ein, so lautet

Gleichung \neg
$$-Dx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

mit $\omega^2 = \frac{D}{m}$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

oder anders geschrieben
$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

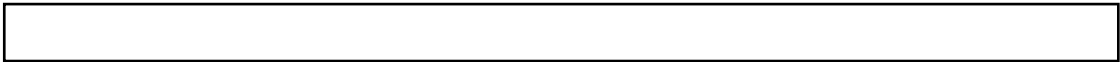
Versuchen wir nun zu ermitteln, nach welcher Zeit die Feder wieder in die Ausgangslage zurückkehrt, wie lange eine Schwingung also dauert. Hierfür muß gelten:

$$x(t + T) = x(t)$$

$$\Leftrightarrow A \cos \omega t + B \sin \omega t =$$

Da die Cosinus und Sinusfunktionen die Periode 2π haben, muß $\omega \cdot T = 2\pi$ gelten, und damit

beträgt die **Schwingungsdauer**
$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$



Notation IV.7: Man nennt das Inverse der Schwingungsdauer **Frequenz ν** der Schwingung.

Fassen wir also zusammen:

Merke: Die **Schwingungsgleichung** der Federschwingung lautet

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Merke: Die **allgemeine Lösung** der Schwingungsgleichung lautet

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

Merke: Die **Kreisfrequenz** der Schwingung ist gegeben durch

$$\omega \text{ mit } \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Merke: Die **Schwingungsdauer** ist gegeben durch

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$$

Merke: Die **Schwingungsfrequenz** ist gegeben durch

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{D}{m}} \frac{1}{2\pi}$$

Die Konstanten A und B in der allgemeinen Lösung ergeben sich aus den Anfangsbedingungen: Die Schwingung werde zur Zeit $t = 0$ bei $x = A_0$ gestartet. Die Geschwindigkeit in diesem Punkt war null $v_0 = 0$.

Mit

$$v = \dot{x} = -A\omega \sin t + B\omega \cos \omega t$$

gilt also

$$-A\omega \sin t + B\omega \cos \omega t = 0$$

mit $t = 0$

$$\Rightarrow B\omega = 0.$$

Also muss die Konstante B null sein in der Ausgangslage der Schwingung. Zu dieser Zeit gilt also

$$x(t = 0) = A_0 \cos \omega t.$$

Also gibt A_0 die Amplitude der Schwingung an.

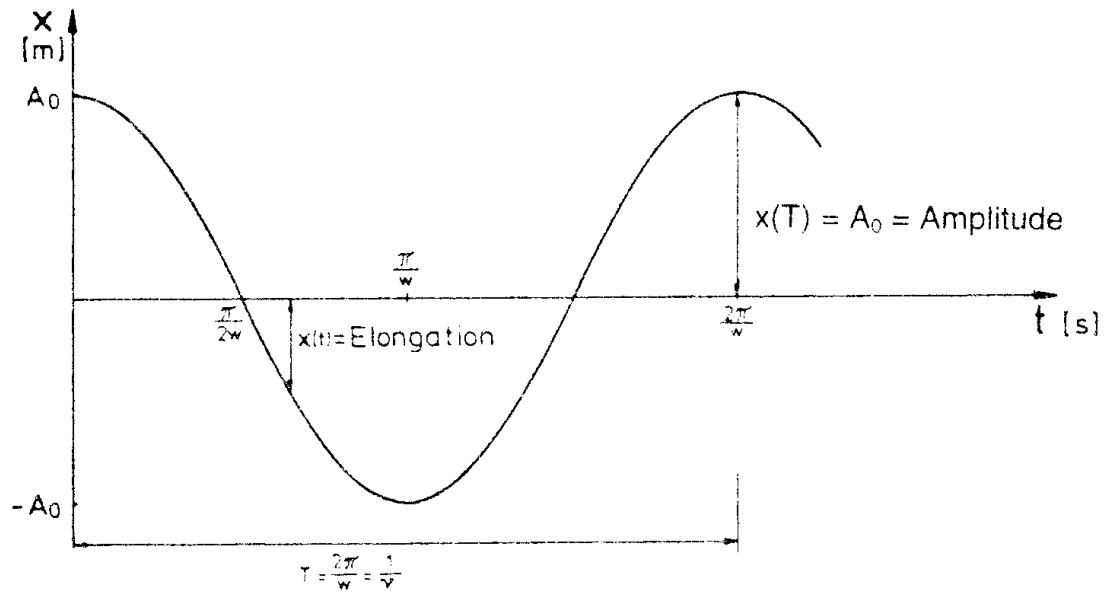


Abbildung IV.18: Schwingung

Versuch IV.8: Federschwingung

In diesem Versuch sollen einige der oben gewonnenen Ergebnisse experimentell nachgewiesen werden.

1) Im ersten Versuchsteil wird ein Federpendel an einem Stab befestigt, zwischen Masse und Feder wird ein Konstantendraht gespannt. Die Masse m kann an der Feder frei schwingen; Draht und Feder sind von Strom durchflossen. Über eine Schaltung kann die Teilspannung

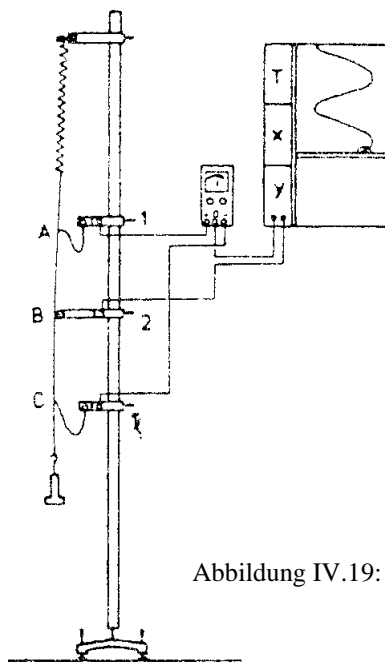


Abbildung IV.19: Versuchsaufbau zur Federschwingung

abgegriffen werden, die abfällt, wenn der Draht mit einer Teillänge einen Teilwiderstand bildet. Abhängig von der Länge des Drahtes zwischen den Messpunkten, die proportional zur Auslenkung der Feder ist, wird die Spannung ermittelt. Die Spannung als Maß für die Auslenkung x wird auf einem Monitor zeitlich aufgetragen. Die Auswertung zeigt eine Schwingung, an der Schwingungsdauer und Periodizität gut zu erkennen sind.

2) In einem zweiten

Versuchsteil wird eine Feder mit der Federkonstanten k mit einer Masse m beschwert. Die Feder wird ausgelenkt. Jetzt wird gleichzeitig die Feder losgelassen und eine Stoppuhr betätigt. Nach 20 Schwingungen wird die Uhr gestoppt. Dieser Versuch wird nun mit derselben Feder und der Masse $2m$ wiederholt.

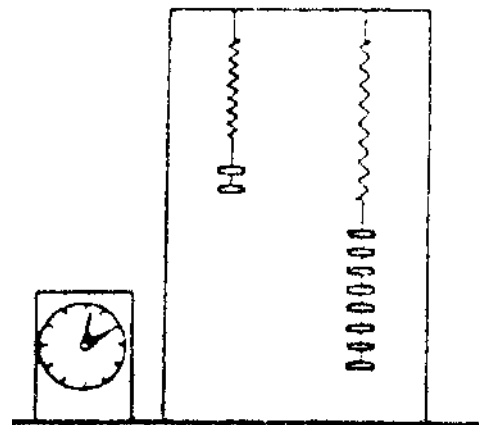


Abbildung IV.20a: Versuchsaufbau zum Nachweis der Massenabhängigkeit

Aus den Beziehungen

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

und

$$\omega^2 = \frac{D}{m}$$

ergibt sich die Gleichung für T :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{D}{m}}$$

Mit der unveränderten Federkonstanten D gilt $T \sim \sqrt{m}$.

In unserem Versuch musste die Schwingungsdauer mit $2m$ also um den Faktor $\sqrt{2}$ größer sein als mit der Masse m . Diese Berechnung konnte verifiziert werden.

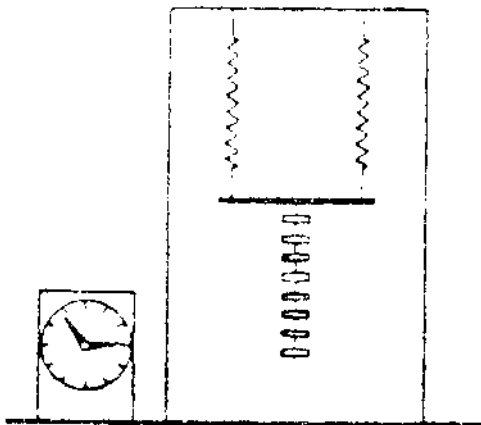


Abbildung IV.20b: Versuchsaufbau zum Nachweis der Abhängigkeit von der Federkonstanten

3) Dieser Versuchsteil hatte denselben Aufbau wie 2), nur mit dem Unterschied, dass diesmal die Masse konstant gehalten und die Federkonstante durch Parallelhängen zweier gleicher Federn verdoppelt wurde. Hier musste über die Beziehung $T \sim \frac{1}{\sqrt{D}}$ ein Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ gemessen werden. Auch diese Relation konnte experimentell bestätigt werden.

IV.8.2 Pendelschwingungen

In diesem Kapitel soll die Bewegung einer anderen Schwingung untersucht werden. Das einfachste Beispiel einer Pendelschwingung liefert das mathematische Pendel. Das mathematische Pendel stellt dabei einer Idealisierung dar; man betrachtet einen Massepunkt ohne räumliche Ausdehnung, der an einem masselosen Faden ohne Einwirkung von Reibung oder anderer Formen mechanischen Energieverlustes schwingt. Auch für die Berechnung dieser Bewegung müssen wir zunächst die wirkenden Kräfte betrachten. Im Gegensatz zur Federschwingung stellt dieses Pendel kein lineares Problem dar, denn das Pendel bewegt sich in einer Ebene:

Das Pendel sei um den Winkel φ ausgelenkt, wenn es losgelassen wird. Auf die Masse m wirkt nun wie bei der Federschwingung nur noch die Gewichtskraft. Diesen Kraftvektor wollen wir zur genaueren Untersuchung zerlegen. Dafür betrachten wir die Bewegung des

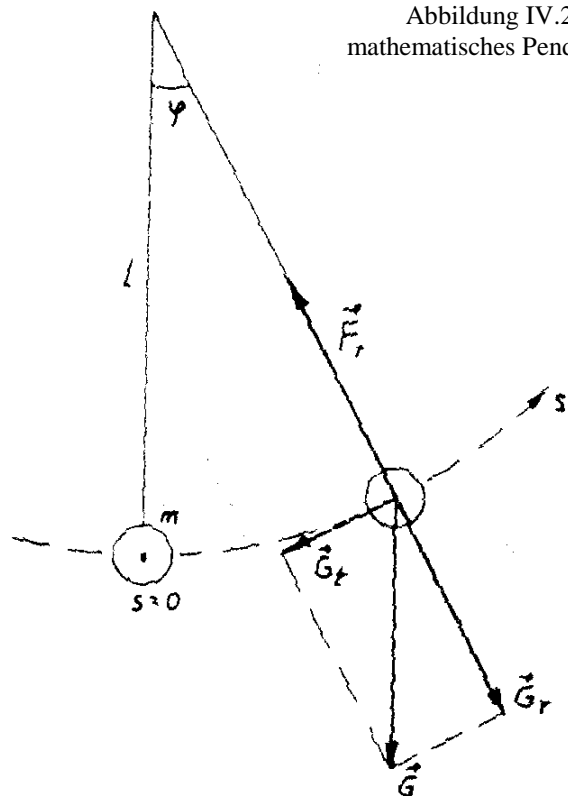


Abbildung IV.21: mathematisches Pendel

Pendels als eine Bewegung auf einem Kreisbogen. Dann kann ein Vektor zerlegt werden in eine Komponente längs des Kreisbogens, die Tangentialkomponente G_t , und in eine Komponente in Richtung des Mittelpunktes, die Radialkomponente. Im Mittelpunkt des durch Schließen des Kreisbogens gedachten Kreises liegt der Aufhängepunkt des Fadens. Der Faden übt eine Zwangskraft, die Fadenspannkraft, auf die Masse aus; er verhindert eine Bewegung vom Mittelpunkt weg. Die Radialkomponente von der Gewichtskraft \vec{G} wird durch die Fadenspannkraft kompensiert. Die Tangentialkomponente G_t verursacht nach dem 2. Newtonschen Axiom nun eine Beschleunigung längs des Kreisbogens in Richtung der Ruhelage, $\varphi = 0^\circ$.

Die Tangentialkomponente $\vec{G}_t = m \vec{g} \sin\varphi$

wirkt als beschleunigende Kraft $F =$

$$\Rightarrow m \vec{g} \sin\varphi = m \vec{a}$$

mit $\vec{a} = \ddot{\vec{x}} = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$

$$\Rightarrow \boxed{m \vec{g} \sin\varphi = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}} \quad \neg$$

Diese Differentialgleichung hängt nicht nur von einer Variablen ab, sondern von den beiden Variablen \vec{x} und φ . Um die Gleichung dennoch lösen zu können, müssen wir sie in die Form von Notation VI.5 überführen. Dazu definiert man ein neues Koordinatensystem so, dass eine Koordinate die Bogenlänge ist. Ein Punkt wird in diesem Koordinatensystem bestimmt durch den Radius des Kreises und die Länge des Bogens. Die Bogenlänge s wird dabei geschickt im Ruhepunkt definiert, also in unserem Fall sei $s = 0$, wenn die Auslenkung $\varphi = 0$ ist. Die Bogenlänge s sei positiv bei einer Auslenkung nach rechts. Diese Form der Koordinaten wird allgemein mit dem Begriff **krummlinige Koordinaten** bezeichnet, da die Achsen nicht linear verlaufen. Dennoch ist jeder Punkt einer Ebene mit diesen beiden Koordinaten darstellbar.

Mit dieser Darstellung gehen die Vektoren über in Skalare, insbesondere

$$\vec{G}_t \rightarrow -G_t$$

$$d\vec{x} \rightarrow ds$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{x}}{dt} \rightarrow \frac{ds}{dt}, \quad \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Mit dieser Transformation folgt aus Gleichung \neg :

$$mg \sin\varphi = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2 s}{dt^2} + g \sin\varphi = 0} \quad -$$

Aus der Geometrie ist die Bogenlänge bekannt als Produkt aus Winkel und Radius, hier die Länge des Fadens l . Der Winkel berechnet sich dann als

$$\varphi = \frac{s}{l}$$

Die Einheit dieser Winkelangabe ist $[\varphi] = \text{rad}$.

Umgerechnet beträgt ein Winkel von 180° in dieser Angabe π , ein Winkel von 360° beträgt 2π , usw. Ein Grad entspricht ungefähr 17 mrad .

Merke: Der **Kreisbogen** ist das Produkt aus Winkel und Radius.

Der Winkel wird in **rad** gemessen.

Also gilt mit

$$s = \varphi l$$

eingesetzt in -

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} l + g \sin\varphi = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin\varphi = 0} \quad \textcircled{R}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist immer kompliziert. Die Lösung erfolgt über die Reihenentwicklung für $\sin\varphi$:

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$$

Wenn man nach dem ersten Term alle weiteren vernachlässigt, gilt

(*Kleinwinkelnäherung*)

$$\sin\varphi \approx \varphi$$

Für Winkel unter 10° ist diese Näherung gut: $\sin 10^\circ = 0.173$ und $10^\circ \rightarrow 0,174 \text{ rad}$.

Damit lautet die Schwingungsgleichung \textcircled{R} :

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

Diese Gleichung entspricht der DGL, die wir bereits bei der Federschwingung gelöst haben.

Man kann die Kreisfrequenz ω direkt ablesen als $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Damit können wir auch für die Pendelschwingung zusammenfassen:

Merke: Die **Schwingungsgleichung** des Fadenpendels lautet

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

Merke: Die **allgemeine Lösung** der Schwingungsgleichung lautet

$$\varphi(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t .$$

Merke: Die **Kreisfrequenz** der Schwingung ist gegeben durch

$$\omega \text{ mit } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} .$$

Merke: Die **Schwingungsdauer** ist gegeben durch

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = .$$

Merke: Die **Schwingungsfrequenz** ist gegeben durch

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = .$$

Versuch IV.9: mathematisches Pendel

1) Die Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Länge des Pendels kann experimentell überprüft werden, indem man bei zwei Pendeln unterschiedlicher Länge die Schwingungsdauer für eine feste Anzahl von Schwingungen misst. Bei unserem Versuchsaufbau konnte zudem über Hallsonden die Auslenkung der Pendel in Spannungen umgesetzt und gegen die Zeit mittels Computer simultan graphisch umgesetzt werden. Wir wählten zwei Pendel der Länge l und $\frac{1}{4} l$. Über die Proportionalitätsbeziehung $T \sim \sqrt{l}$ errechnet man eine Schwingungszeit, die bei dem Pendel der Länge l um den Faktor 2 größer ist als bei dem kurzen Pendel. Dieses Ergebnis konnte sowohl an der Computerauswertung, als auch mittels Stoppuhr verifiziert werden.

2) In einem zweiten Versuchsteil kann gezeigt werden, dass die Pendel mit gleicher Länge aber unterschiedlichen Massen gleich schwingen. Dazu werden zwei Fadenpendel synchron losgelassen und beobachtet. Der Versuch über Hallsonde zwei identische Schwingungen aufzunehmen klappt nur bedingt, da die steife Stange, an der die Kugeln messtechnisch bedingt schwingen müssen, nicht annähernd masselos sind. Je leichter die Kugel ist, desto ungenauer wird die Berechnung, da der Schwerpunkt nicht mehr in der Kugel sondern oberhalb liegt. Dieser Versuch erfordert eine Berechnung ohne die Annahme, der Faden sei masselos. Dieses Pendel wird dann physikalisches Pendel genannt und bei der Mechanik starrer Körper betrachtet.

3) Der dritte Versuchsteil soll dazu dienen, die Erdbeschleunigung g mit dem Pendel zu bestimmen. Hierfür macht man sich den Umstand zu nutze, dass die Schwingungsdauer T des Pendels nur von der Länge und der Konstanten g abhängt. Formt man die Beziehung

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{nach } g \text{ um, so folgt} \quad g = l \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

Mit dieser Formel kann die Konstante g direkt errechnet werden, wenn die Länge l des Pendels und die Schwingungsdauer T bekannt sind. Die Schwingungsdauer kann auf zwei Arten ermittelt werden: Entweder man nimmt wie in Versuchsteil 2) mittels einer Hallsonde die Schwingung auf und liest dann aus dem Graphen eine Periode ab, oder man misst direkt die Schwingungsdauer über eine Photozelle. Dabei wird die Photozelle z.B. so montiert, dass sie beim Nulldurchgang der Kugel einen Impuls bekommt. Der zeitliche Abstand dreier Impulse ist dann eine Schwingungsdauer. Der im Versuch ermittelte Wert lag wegen der in 2) bereits diskutierten Gründe ca. 1% über dem Literaturwert (vgl. Versuch III.4).

IV.8.3 Zusammenfassung der Schwingungen

Die bisher diskutierten Schwingungen stellen nur zwei mögliche Beispiele von Schwingungen dar. Andere, bereits am Rande erwähnte Schwingungen führen z.B. das Ballistische Pendel und das physikalische Pendel aus. Die beiden berechneten Schwingungen hatten eine ähnliche Schwingungsgleichung und eine ähnliche Lösung. Allgemein kann man für harmonische Oszillatoren die Schwingungsgleichung, deren Lösung und die betrachteten Größen angeben in der Form:

Schwingungsgleichung des harmonischen Oszillators:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung:

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

mit der **Kreisfrequenz** der Schwingung ω

der **Schwingungsdauer** $T = \frac{2\pi}{\omega}$ und

der **Schwingungsfrequenz** $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$

Die Kreisfrequenz ω wird je nach zu untersuchender Bewegung durch die wirkenden Kräfte bestimmt.

Eine abschließende **Bemerkung zur Schreibweise**:

In einigen Lehrbüchern findet man statt der von uns benutzten allgemeinen Form der Lösung der Schwingungsgleichung $x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$

auch die Form $x(t) = A_0 \cos(\omega t + \alpha)$.

Diese Form ist nur eine äquivalente Schreibweise für dieselbe Gleichung. Statt der von uns definierten Amplituden A und B werden in dieser Gleichung eine andere Amplitude A_0 und die Phase α definiert:

$$x(t) = A_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

Additionstheorem: $\Leftrightarrow x(t) = A_0 (\cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha)$

$$\Leftrightarrow x(t) = \underbrace{A_0 \cos \alpha}_{A} \cos \omega t - \underbrace{A_0 \sin \alpha}_{B} \sin \omega t$$

$$\Leftrightarrow x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

Diese Darstellung mit einer Amplitude und einer Phase (auch Phasenverschiebung genannt), hat den Vorteil, dass sowohl Amplitude als auch Phase direkt aus der Lösung abgelesen werden können.

Eine andere Möglichkeit der Darstellung bietet die Rechnung mit komplexen Zahlen. Mit deren Hilfe kann man die Lösung in eine Linearkombination von $e^{\pm i\omega t}$ umformen. Diese Form der Lösung werden wir aber erst in Experimentalphysik II benötigen und dann einführen.

IV.9 Energie des harmonischen Oszillators

Bei der Berechnung des Ballistischen Pendels haben wir bereits eine Energiebetrachtung vorgenommen. Dies wollen wir nun mit Kenntnis der Schwingungsgleichung für harmonische Oszillatoren verallgemeinern. Reibung und andere nichtmechanische Energieverluste seien also vernachlässigbar. Als Beispiel eines harmonischen Oszillators betrachten wir wieder die Federschwingung:

Die Bewegungsgleichung des Massepunktes m, der an einer Feder schwingt, kann, wie in IV.8.3 dargestellt, angegeben werden mit. Um die Berechnung zu erleichtern, setzen wir in unserem Beispiel die Phase α gleich null. Die Schwingungsgleichung lautet dann:

$$x(t) = A_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

mit $\alpha = 0$ $\Leftrightarrow x(t) = A_0 \cos \omega t$ \neg

Betrachten wir nun die kinetische Energie zu einem beliebigen Zeitpunkt. Mit Definition IV.5

gilt
$$W_K = \frac{1}{2}mv^2$$

mit $v = \frac{dx}{dt}$
$$\Leftrightarrow W_K = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Die Gleichung für $x(t)$ ist gegeben durch \neg , $\frac{dx}{dt}$ kann über Differentiation errechnet werden:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(A_0 \cos \omega t)}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = -A_0\omega \sin \omega t \quad -$$

Dieser Ausdruck - für die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit eingesetzt in die Formel für die kinetische Energie ergibt

$$W_K = \frac{1}{2}m(-A_0\omega \sin \omega t)^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{W_K = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2 \sin^2 \omega t.}$$

Jetzt untersuchen wir die potentielle Energie zu jedem Zeitpunkt. Nach Kapitel IV.1.5 gilt für die potentielle Energie der Feder

$$W_P = \frac{1}{2}Dx^2$$

mit \neg
$$\Leftrightarrow W_P = \frac{1}{2}D(A_0 \cos \omega t)^2$$

$$\Leftrightarrow W_P = \frac{1}{2}DA_0^2 \cos^2 \omega t$$

mit $\omega^2 = \frac{D}{m}$
$$\Leftrightarrow \boxed{W_P = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2 \cos^2 \omega t.}$$

Da wir nicht-mechanische Energien vernachlässigen wollten, gilt für die Gesamtenergie:

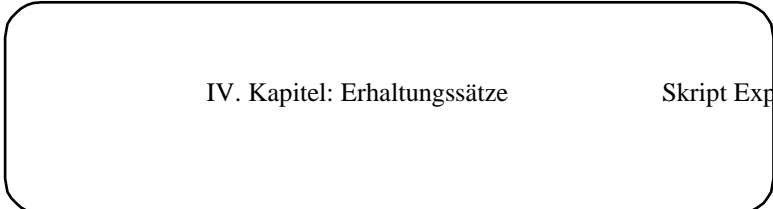
$$W = W_K + W_P$$

$$\Leftrightarrow W = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2 \sin^2 \omega t$$

$$\Leftrightarrow W = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)$$

mit $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$
$$\Leftrightarrow W = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2$$

Wegen der Energieerhaltung gilt:



Merke: Die **Gesamtenergie des harmonischen Oszillators**

$$W = \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2$$

ist zeitlich konstant.

An den Umkehrpunkten ist die Auslenkung x gleich der maximalen Amplitude A_0 und ωt ein ganzzahlig Vielfaches von π . Also gilt mit $x = \pm A_0$ und $\omega t = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$W_K = \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2 \sin^2 \omega t$$

$$\Leftrightarrow W_K = \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2 \sin^2 n\pi$$

mit $\sin n\pi = 0$

$$\Leftrightarrow W_K = 0$$

Das Einsetzen der Bedingung in

$$W_P = \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2 \cos^2 \omega t$$

ergibt

$$W_P = \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2.$$

In den Umkehrpunkten hat das Pendel nur potentielle Energie, die Geschwindigkeit ist null.

Eine analoge Rechnung für die Nulldurchgänge mit der Auslenkung $x = 0$ und

$\omega t = \frac{\pi}{2} + n\pi$ liefert

$$W_P = 0$$

und

$$W_K = \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2.$$

In den Nulldurchgängen ist also die Geschwindigkeit maximal, die potentielle Energie hingegen null.

Zusammengefasst bedeutet das:

Merke: Die potentielle Energie und die kinetische Energie werden periodisch vollständig ausgetauscht, die Gesamtenergie ist jedoch konstant.

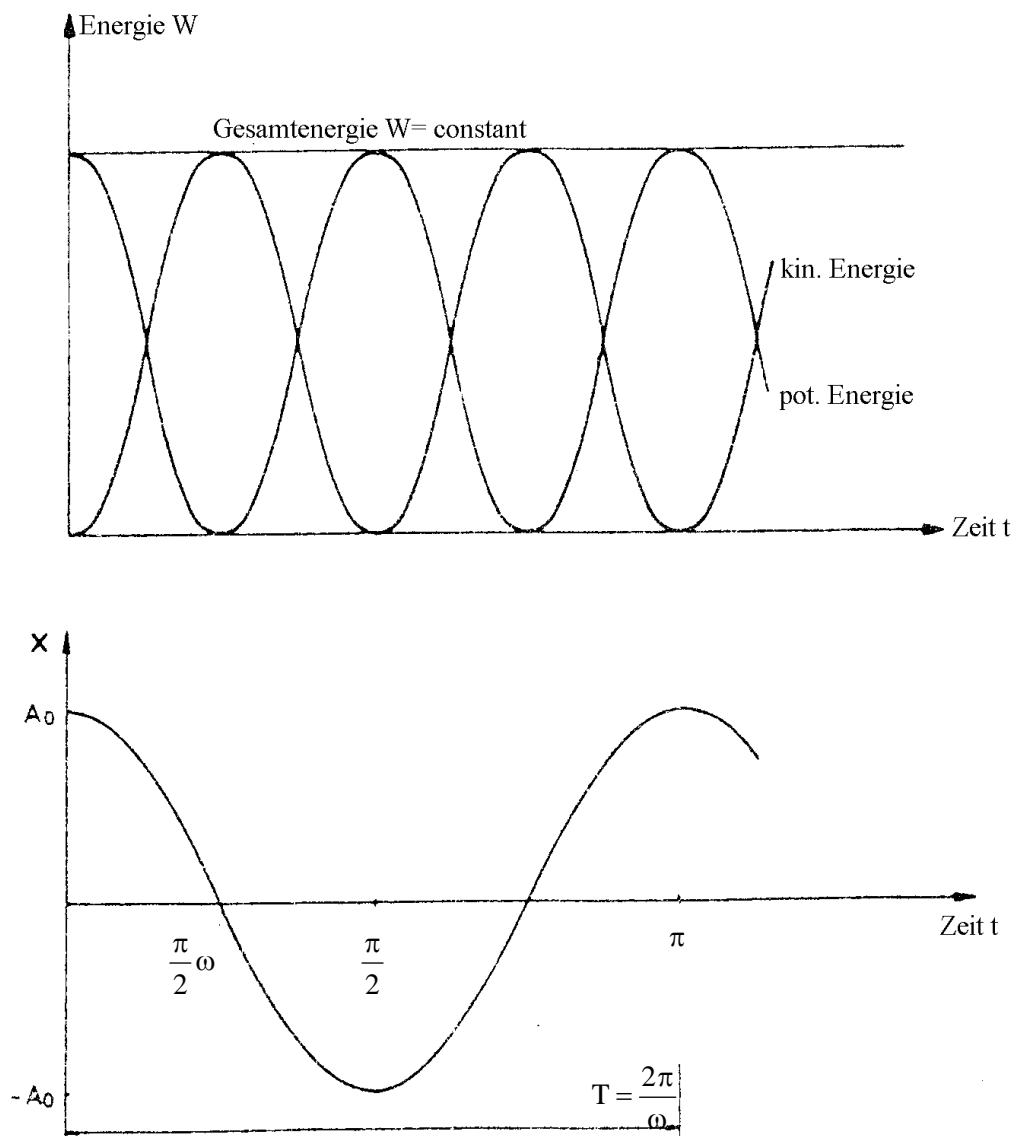


Abbildung IV.22: Energie und Auslenkung des harmonischen Oszillators

Abschließend betrachten wir noch die **mittlere kinetische und potentielle Energie**:

Notation IV.8: Der (zeitliche) **Mittelwert** einer Größe W wird mit \overline{W} bezeichnet.

Merke: Der **zeitliche Mittelwert** (in der Zeitspanne von $t = 0$ und $t = T$) einer Größe W wird berechnet als

$$\overline{W} = \frac{\int_0^T W(t) dt}{\int_0^T dt} .$$

Der Nenner stellt dabei den Normierungsfaktor dar.

Für die kinetische Energie folgt mit damit:

$$\overline{W_K} = \frac{\int_0^T W_K(t) dt}{\int_0^T dt}$$

$$\Leftrightarrow \overline{W_K} = \frac{\int_0^T \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2 \sin^2 \omega t \cdot dt}{T}$$

$$\Leftrightarrow \overline{W_K} = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2 \int_0^T \sin^2 \omega t \cdot dt .$$

mit $W = \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2$

$$\Leftrightarrow \overline{W_K} = \frac{1}{T} \cdot W \int_0^T \sin^2 \omega t \cdot dt .$$

Für die potentielle Energie folgt analog:

$$\overline{W_P} = \frac{1}{T} W \int_0^T \cos^2 \omega t \cdot dt .$$

Mit

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t \cdot dt = \frac{1}{2}$$

folgt:

$$\overline{W_P} = \overline{W_K} = \frac{1}{2} W$$

Merke: Im zeitlichen Mittel steckt jeweils die Hälfte der Gesamtenergie in der kinetischen und der potentiellen Energie: $\overline{W_P} = \overline{W_K} = \frac{1}{2} W$.

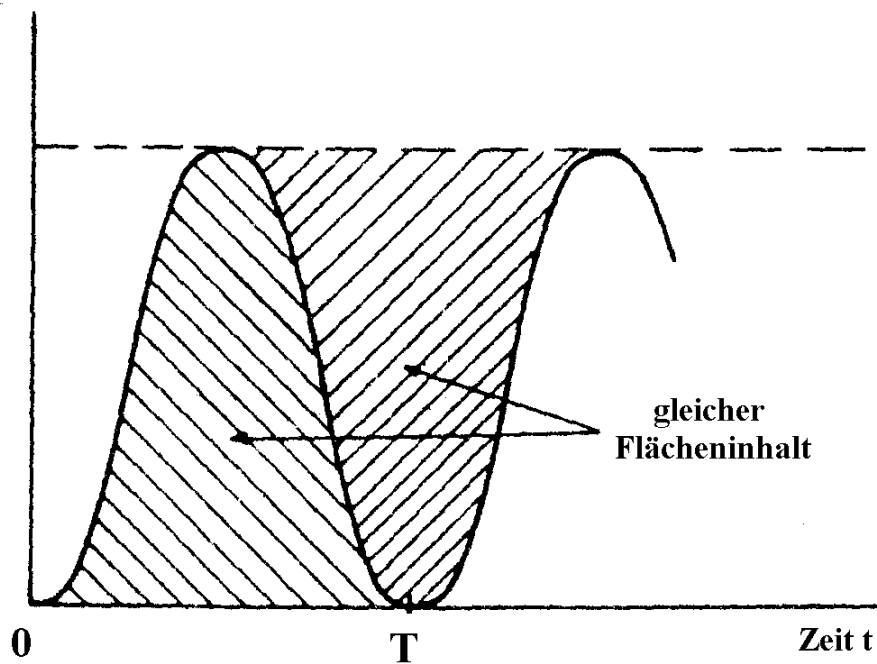


Abbildung IV.23: Gesamtenergie

Die Gültigkeit der Gleichung $\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t \cdot dt = \frac{1}{2}$ kann man ohne Berechnung aus der Betrachtung des Graphen der Funktion ablesen.