II. Kinematik gradliniger Bewegungen

Kinematik, von dem griechischen Verb *kineo = ich bewege,* nennt man den grundlegenden Zweig der Mechanik, der den zeitlichen Ablauf einer Bewegung im Raum durch mathematische Gleichungen, die sogenannten Bewegungsgleichungen, beschreibt. Die Grundlagen der Kinematik wurden zuerst von Galileo Galilei formuliert und experimentell nachgewiesen.

Abbildung II.1: Galileo Galilei.

Galileo Galilei, 1564 - 1642, war unter anderem Professor für Mathematik in Pisa und Padua. Heute sind jedoch hauptsächlich seine Verdienste in der experimentellen Physik bekannt. Galilei widerlegte die bis dahin geläufigen Irrtümer Aristoteles. Durch die Verknüpfung mit logischen Erwägungen konnte Galilei Gesetze der Physik aufstellen, die bis heute wegweisend sind. Die bekanntesten Beispiele sind der Freie Fall, Trägheit und das Fadenpendel. In der Astronomie konnte Galilei mit Hilfe eines von ihm verbesserten Fernrohrs Mondgebirge und vier Jupitermonde entdecken.

Nachdem wir in der Einleitung mit der Festlegung der Basiseinheiten Länge und Zeit die Voraussetzungen geschaffen haben, untersuchen wir nun die Bewegung von Körpern. Dabei wollen wir zwei Einschränkungen machen:

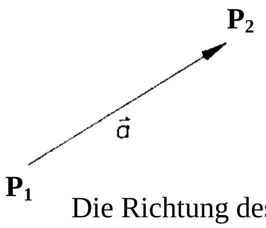
1. Wir lassen zunächst die Ursachen für die Bewegung unbeachtet. Das bedeutet, dass wir nur versuchen, die Bewegung wie wir sie sehen mit den beiden definierten Größen zu beschreiben. Die Ursachen für die Bewegung werden erst im nächsten Kapitel, *Dynamik,* betrachtet.

2. Wir beschränken uns auf die Beschreibung von Körpern, deren Abmessungen gegenüber den von ihnen zurückgelegten Strecken klein sind. Dafür definiert man den Massepunkt, einen gedachten Körper, der seine endliche Masse in einem Punkt konzentriert. Tatsächlich haben natürlich selbst die kleinsten Körper eine räumliche Ausdehnung, die man jedoch unter bestimmten Gesichtspunkten vernachlässigen kann, wenn man nur die Bewegung ihres

Schwerpunktes betrachtet. Diese Einschränkung führt zu erheblichen Erleichterungen und wird erst in einem späteren Kapitel aufgehoben.

II.1 Skalare und Vektoren

Physikalische Größen, z.b. die im ersten Kapitel eingeführte Länge $L = \{L\} \bullet [L]$ heißen Skalare, wenn sie durch nur eine Messgröße gekennzeichnet sind. Weitere Beispiele sind Temperatur, Masse oder Zeit. Es gibt jedoch noch viele andere Größen in der Physik, die zusätzlich durch eine Richtung im Raum beschrieben werden müssen. Diese Größen werden am besten durch Vektoren beschrieben. Bekannte Beispiele sind hier Geschwindigkeit, Kraft oder Verschiebungen.



Als einfachstes Beispiel sei eine Verschiebung dargestellt von Punkt P_1 nach Punkt P_2:

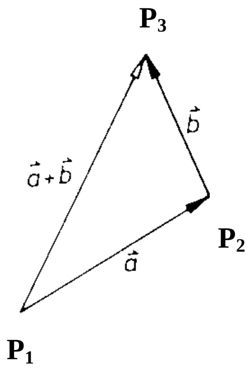
Dargestellt wird die Verschiebung durch einen Pfeil:

Die Richtung des Pfeils gibt die Richtung der Verschiebung an, die Länge des Pfeils den Betrag.

> Notation II.1: Den Betrag eines Vektors $\vec{a}$ schreibt man als $|\vec{a}|$ oder vereinfacht als.

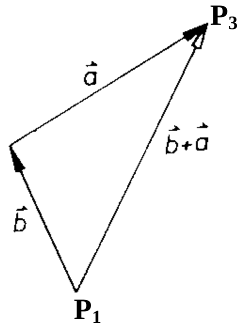
II.1.1 Addition von Vektoren

Führt man zwei Verschiebungen von Punkt P_1 über Punkt P_2 nach Punkt P_3 aus, so kann man die Vektoren addieren. Vektorgrößen in der Physik lassen sich nach den gleichen Regeln addieren wie eine Verschiebung.



Die Richtung der addierten Vektoren ergibt sich aus

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$



Für die Vektoraddition gilt das Kommutativgesetz, es gilt also:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} = \vec{c}$$

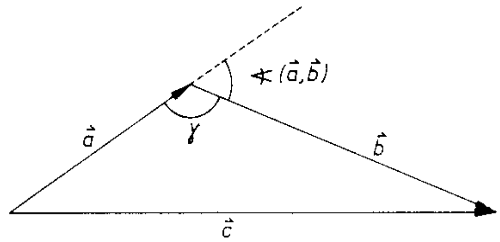
Der Betrag des resultierenden Vektors läßt sich mit Hilfe des Cosinussatzes berechnen:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$$

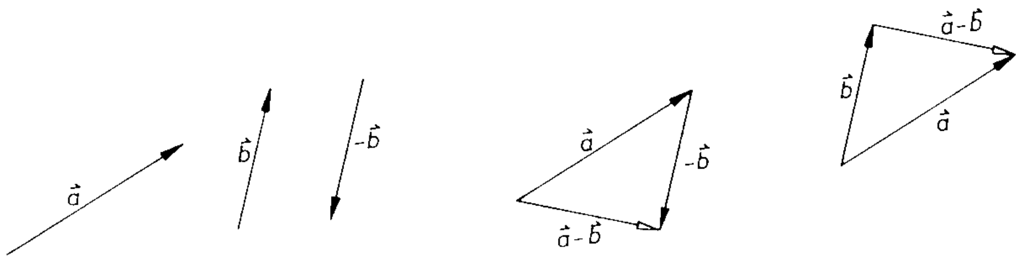
Als Spezialfall ergibt sich $\alpha = 90°$ und damit

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos 90°$$

$$\Leftrightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2$$



Die Vektorsubtraktion wird analog zur Vektoraddition durchgeführt, indem zuvor der zu subtrahierende Vektor mit negativem Vorzeichen versehen wird. Der Betrag ändert sich dann von a in - a, die Richtung dreht sich um 180°.



Drei oder mehr Vektoren werden addiert, indem man zunächst zwei Vektoren addiert und den resultierenden Vektor zu dem dritten Vektor erneut addiert, und so fort.

II.1.2 Addition von Vektoren in Koordinatendarstellung

In einem Bezugssystem, wir wollen uns hier zunächst auf rechtwinklige karthesische Koordinatensysteme beschränken, kann ein Vektor als Summe der einzelnen Komponenten längs der das System aufspannenden Achsen geschrieben werden.

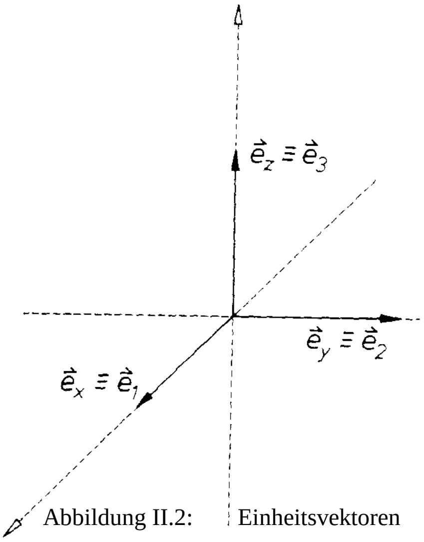


Abbildung II.2: Einheitsvektoren

Hierzu definiert man Einheitsvektoren längs der Achsen. Die Einheitsvektoren haben den Betrag 1 und stehen jeweils senkrecht aufeinander.

Definition II.1: Einheitsvektor $\vec{e} = \vec{a}/a$

Jeder dreidimensionale Vektor kann in diesem System dann dargestellt werden in der Form

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z =$$

$$a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z$$

Notation II.2: Ein Vektor wird mit $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ komponentenweise geschrieben.

Merke: Die Länge eines Vektors in Komponentenschreibweise läßt sich berechnen aus: $\lvert\vec{a}\rvert = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

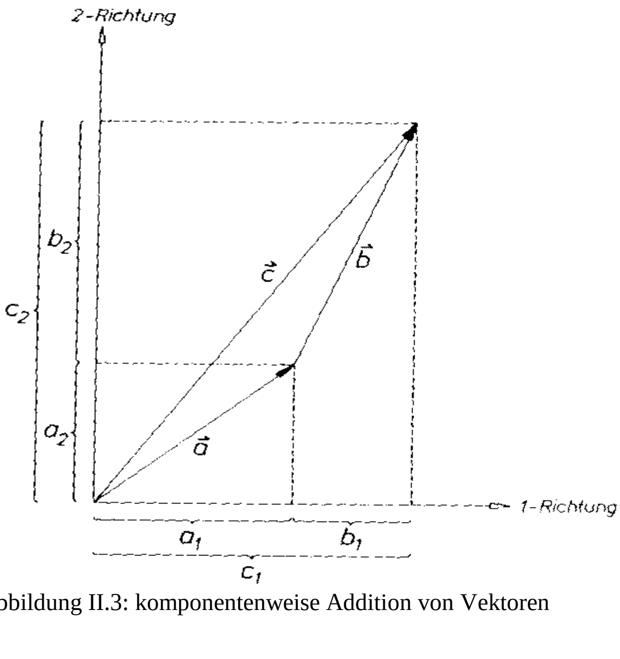


Abbildung II.3: komponentenweise Addition von Vektoren

In Koordinatenschreibweise werden Vektoren komponentenweise addiert oder subtrahiert.
Die Addition von zwei Vektoren ergibt dabei wieder einen Vektor.

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ mit

$c_x = a_x + b_x$,

$c_y = a_y + b_y$

$c_z = a_z + b_z$

Beim Wechsel des Koordinatensystems ändern sich die Komponenten a_i, b_i, c_i, nicht aber die Lage der Vektoren, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ im Raum.

II.1.3 Skalarprodukt und Kreuzprodukt

Das Punkt- oder Skalar-Produkt zweier Vektoren ist ein Skalar. Man kann es entweder aus den Komponenten oder aus den Beträgen der beiden Vektoren und dem eingeschlossenen Winkel berechnen.

> Merke: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ ist ein <u>Skalar</u>
>
> $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3$

Betrachten wir wieder den Sonderfall, dann folgt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot 0 = 0$$

oder mit $\vec{a} = (a,0,0)$ und $\vec{b} = (0,b,0)$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot 0 + 0 \cdot b + 0 \cdot 0 = \mathit{0}$$

Das Vektor- bzw. Kreuzprodukt zweier Vektoren ist ebenfalls ein Vektor. Dieser Vektor $\vec{c}$ steht senkrecht auf Vektor $\vec{a}$ und.

Notation II.3: Das Vektor- bzw. Kreuzprodukt schreibt man als $\vec{a}$ x $\vec{b}$ =.

Der Betrag des Kreuzproduktes wird ebenfalls aus den Beträgen der einzelnen Vektoren und dem eingeschlossenen Winkel berechnet.

$$|\vec{c}| = c = a \cdot b \cdot \sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$$

Um die Richtung des Vektors $\vec{c}$ zu ermitteln, müssen die Vektoren komponentenweise wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} = \ & (a_y b_z - a_z b_y)\ \vec{e}_x \\ & + (a_z b_x - a_x b_z)\ \vec{e}_y \\ & + (a_x b_y - a_y b_x)\ \vec{e}_z \end{aligned}$$

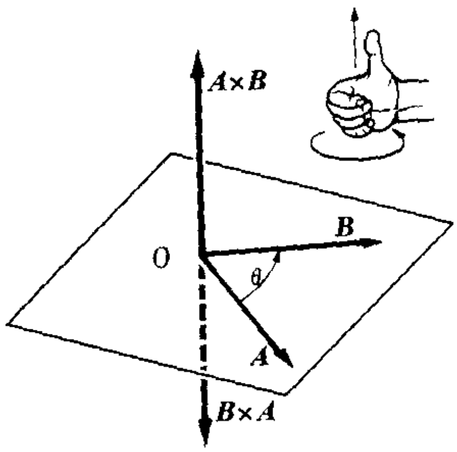


Abbildung II.4: Kreuzprodukt

> Merke: $\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein Vektor, der auf den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht steht:
>
> $\vec{c} \perp \vec{a}$.

> Merke: Das Kreuzprodukt ist <u>nicht</u> kommutativ. Es gilt:
>
> $$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

II.1.5 Differentation und Integration von Vektoren

Wie aus der Analysis bekannt, wird bei der Differentation der Grenzwert des Intervalls zwischen zwei Punkten, hier z.b. Ortsvektoren, gegen Null gebildet.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(x_2\vec{e}_x + y_2\vec{e}_y + z_2\vec{e}_z\right) - \left(x_1\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y + z_1\vec{e}_z\right)}{\Delta t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left((x_2 - x_1)\vec{e}_x + (y_2 - y_1)\vec{e}_y + (z_2 - z_1)\vec{e}_z\right)}{\Delta t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{e}_x + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{e}_y + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{e}_z$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{dz}{dt}\vec{e}_z$$

> Merke: Vektoren werden komponentenweise differenziert, das Ergebnis ist ein Vektor.
>
> $$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z$$

Die Umkehrung der Differentation ist die Integration:

$$\vec{I} = \int \vec{v}(t)dt = \vec{e}_x \int v_x(t)dt + \vec{e}_y \int v_y(t)dt + \vec{e}_z \int v_z(t)dt$$

Auch hier gilt:

> Merke: Vektoren werden komponentenweise integriert, das Ergebnis ist ein Vektor.
>
> $$I_x = \int v_x(t)dt \; ; \; I_y = \int v_y(t)dt \; ; \; I_z = \int v_z(t)dt$$

II.2 Ortsvektoren

Um den von einem Massepunkt zurückgelegten Weg beschreiben zu können, muss man zunächst einen Bezugspunkt definieren. Relativ zu diesem Bezugspunkt ändert der Massepunkt seine Position im Raum. Der Bezugspunkt wird dabei zunächst als im Bezug zur Erdoberfläche ruhend angenommen und so gelegt, dass die Bewegung des Massepunktes möglichst einfach zu beschreiben ist. Meistens legt man dazu den Bezugspunkt in den Ursprung eines Koordinatensystems. Dieses System wird unbewegtes **Bezugssystem** genannt. In einem so gewählten System sind sowohl Nullpunkt als auch Basisvektoren zeitlich konstant. Im Folgenden liegen den Beschreibungen stets unbewegte Bezugssysteme zugrunde, bewegte Bezugssysteme erfordern eine gesonderte Behandlung in Kapitel II.6 *Relativbewegung*.

Die Lage des Körpers kann dann z.b. durch die karthesischen Koordinaten x,y,z für jeden Zeitpunkt angegeben werden. Der Zeitpunkt wird mit der reellen Variablen t bezeichnet.

Der Vektor, der zu einer festen Zeit t den Ort des Massepunktes beschreibt, heißt **Ortsvektor**. Dieser Vektor ist bei Bewegungen immer eine Funktion der Zeit und wird deshalb mit $\vec{r}(t)$ oder $\vec{x}(t)$ bezeichnet. Im 3-dimensionalen Fall besteht der Ortsvektor aus drei Komponenten:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Notation II.4: Wenn es nicht explizit gesagt wird, liegt im Folgenden immer ein karthesisches Koordinatensystem zugrunde, bei dem die x-Achse parallel zur Erdoberfläche und die y-Achse senkrecht dazu steht.

Im Gegensatz zu den bisher allgemein diskutierten Vektoren sind die Ortsvektoren an einen Punkt im Raum, den Ursprung gebunden. Der Differenzvektor zweier an den Ursprung gebundener Ortsvektoren ändert sich nicht, auch wenn die anderen beiden Vektoren in ein anderes Koordinatensystem transferiert werden.

Merke: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ändert sich bei einem Wechsel des Koordinatensystems nicht, wohl aber $\vec{r}_1$ und.

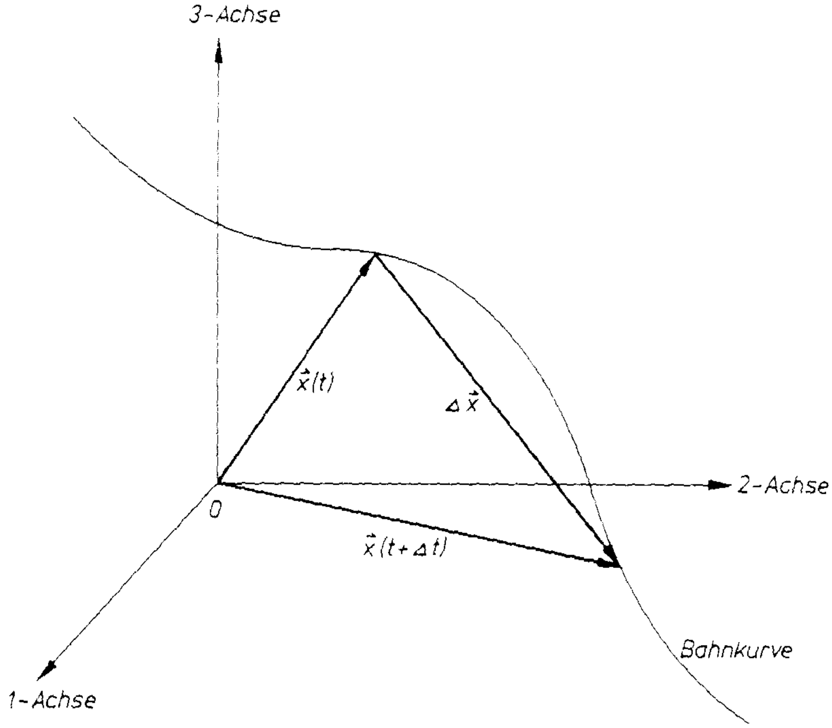


Abbildung II.5: Bahnkurve

Unter einer **Bahn** (auch **Bahnkurve** oder Trajektorie genannt) versteht man eine Funktion $\vec{r}(t)$ bzw. $\vec{x}(t)$, deren Endpunkt die gewünschte Bahnkurve beschreibt.
Zur Beschreibung einer Bewegung in einer Ebene genügen zwei Koordinaten, die Bewegung längs einer Geraden kann mit einem Skalar beschrieben werden.

II.3 Geschwindigkeit

Betrachten wir zunächst als Beispiel einer beliebigen Bewegung den eindimensionalen Fall: die gradlinige Bewegung längs der x-Achse.

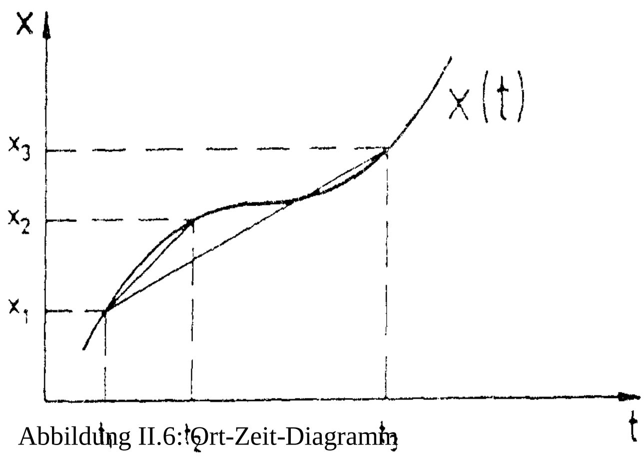


Abbildung II.6: Ort-Zeit-Diagramm

Der Ort des Massepunktes wird nur mit dem Skalar *x* beschrieben. Dargestellt werden soll die Bewegung des Massepunktes in seiner zeitlichen Abfolge. Dazu wählen wir ein **Ort-Zeit-Diagramm**. Aufgetragen wird an der Abszisse die Zeit und an der Ordinate der Ort.

Merke: Bei Erstellen von Zeit - Diagrammen wird, soweit nicht anders vereinbart, die Zeit stets auf der Abszisse abgetragen.

Der Weg wird vom Ausgangspunkt x_o zur Zeit t_o an gemessen. Dabei ermittelt man verschiedene Wertepaare $x_1(t_1)$, $x_2(t_2)$ und so fort.
Nun überlegen wir, wie schnell der Massepunkt sich bewegt hat. Dazu betrachten wir zunächst zwei Bahnpunkte. Die Differenz der zwei Wegstrecken x_1 und x_2 ist die Entfernung, die der Massepunkt zurückgelegt hat. Er hat dazu die Zeit $t_2 - t_1$ gebraucht.
Wir definieren seine Geschwindigkeit als zurückgelegte Strecke pro dafür gebrauchter Zeit. Diese Geschwindigkeit ist abhängig vom Zeitintervall und der Strecke. Berechne ich die Geschwindigkeit für ein anderes Intervall, so erhalte ich auch eine andere Geschwindigkeit. Diese Tatsache ist bereits bekannt: Auf der Autobahn kann ich kurzfristig 150 km/h fahren, und brauche dennoch inklusive Stadtverkehr über eine Stunde, um von Aachen nach Köln zu gelangen. Aus diesem Grunde sprechen wir von einer **mittleren Geschwindigkeit** und bezeichnen sie mit v_M.

Definition II.2: Die mittlere Geschwindigkeit ist der Quotient aus zurückgelegter Strecke und dafür benötigter Zeit:

$$v_M = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

<u>Bedenke:</u>
- Die mittlere Geschwindigkeit ist vom Messintervall abhängig. Die mittlere Geschwindigkeit von Punkt x_0 nach x_3 ist im Allgemeinen verschieden.
- Die mittlere Geschwindigkeit entspricht der Steigung der Sekante.

Notation II.5: Die Differenz zweier physikalischer Größen bezeichnet man abgekürzt mit **Δ**.

Die Differenz zweier Strecken schreiben wir somit ab jetzt als Δx, die der dazugehörigen Zeiten als Δt. Mit dieser Konvention lautet die Gleichung.
Diese Form der Gleichung nennen wir **Größengleichung**. Sie gilt unabhängig von den benutzten Einheiten. Wenn die Einheiten sich ändern, ändern sich auch die Maßzahlen, die Gleichung bleibt aber erhalten

Bsp: $v_M = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 60\frac{km}{h} = 1\frac{km}{min} = 16.7\frac{m}{s}$

Will man die Geschwindigkeit in einem Punkt berechnen, so muss man zunächst die Streckenintervalle immer weiter verkürzen, bis man ein infinitisimales Intervall betrachten kann. Hierzu bildet man den Grenzwert der Intervalle für eine Zeitdifferenz, die gegen Null strebt. $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$

Mit diesem Grenzwert berechnet man die **Momentangeschwindigkeit**. Sie entspricht der Steigung der Sekante durch zwei infinitisimal nebeneinander liegende Punkte, also der Steigung der Tangente.

Definition II.3: Die Momentangeschwindigkeit ist gleich der Steigung der Tangente an die Bahnkurve im ausgewählten Zeitpunkt $v = \frac{dx}{dt}$

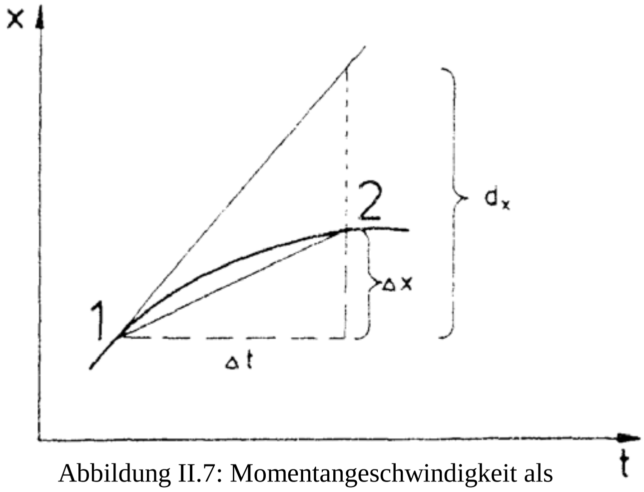


Abbildung II.7: Momentangeschwindigkeit als Tangente an die Bahnkurve

Achtung: Diese Definition der Momentangeschwindigkeit ist mathematisch problemlos, physikalisch jedoch etwas problematischer:

1. Wie bereits in Kapitel I erläutert, lassen sich theoretisch zwar die statistischen Fehler minimieren, das setzt aber unendlich viele Messungen voraus.
2. Das Auflösevermögen der Messinstrumente ermöglicht nicht beliebig kleine Messintervalle.
3. Es gibt eine prinzipielle Genauigkeitsgrenze. Eine genauere Erläuterung dieses Sachverhalts folgt in der Atomphysik.

Betrachtet man diese Definition im allgemeinen, d.h. 3-dimensionalen Fall, muss die Strecke x wieder als Vektor behandelt werden: $v_M = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$. Für die Rechnung ergibt sich dann:

1. Richtung der Momentangeschwindigkeit: $\Delta\vec{r} \to d\vec{r}$. Die Tangente an die Bahnkurve gibt die Steigung und somit die Richtung in jedem Punkt an.

2. Betrag der Momentangeschwindigkeit:

$$|\vec{v}| = v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r}{\Delta t}$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y^2) + (\Delta z^2)}}{\Delta t}$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)}^2}{dt}$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{|d\vec{r}|}{dt}$$

Richtung und Betrag der Momentangeschwindigkeit werden in einem Vektor zusammengefasst:

Definition II.4: Die Geschwindigkeit ist ein Vektor, nämlich die Ableitung des Ortes nach der Zeit. $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$

Notation II.6: Der Geschwindigkeitsvektor wird, soweit nicht anders vereinbart, $\vec{v}$ genannt, sein Betrag v.

Die Geschwindigkeit kann also durch Differentation des Ortsvektors ermittelt werden. Die erste Ableitung des Ortes nach der Zeit ist die Geschwindigkeit. In der Physik wird die Schreibweise $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ oftmals abgekürzt:

Notation II.7: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ wird oftmals als $\dot{\vec{r}}$ geschrieben, der Betrag v analog.

Analog kann man aus einer gegebenen Geschwindigkeit den Ort berechnen, indem man den Vektor $\vec{v}$ integriert. Die Umkehroperation zu $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ lautet folglich: $\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt + \vec{r}_0$.

Um über die Integration des Geschwindigkeitsvektors den Ort zu berechnen, muss also ein konstanter Faktor $\vec{r}_0$ bekannt sein. Dieser Vektor kennzeichnet den Anfangsort der Bewegung, also die Verschiebung vom Nullpunkt des Bezugssystems. Durch geschicktes Definieren des Bezugssystems kann der Anfangsort in den Ursprung gelegt werden.

Merke: Die Geschwindigkeit eines Massepunktes läßt sich aus der Bahnkurve über Differentation errechnen: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.

Merke: Der Ort des Massepunktes läßt sich über Integration aus der Geschwindigkeitsgleichung und der Randbedingung $\vec{r}_0$ ermitteln:

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt + \vec{r}_0 .$$

II.4 Beschleunigung:

Definition II.5: Die Beschleunigung ist ein Vektor, nämlich die Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right)$$

Der Beschleunigungsvektor zeigt in Richtung der Geschwindigkeitsänderung. Beschleunigung heißt also Änderungen des Betrags der Geschwindigkeit, z.b. gradlinig immer schneller fahren oder bremsen, oder die Richtung der Geschwindigkeit zu ändern, z.b. mit gleichbleibender Frequenz auf einem Kreis fahren. Der allgemeine Fall beinhaltet natürlich eine Änderung des Betrags und der Richtung.

Analog zur Betrachtung der Geschwindigkeit aus der Bahnkurve kann mit dieser Definition die Beschleunigung aus der Geschwindigkeit errechnet werden.

Notation II.8: Der Beschleunigungsvektor wird, soweit nicht anders vereinbart, $\vec{a}$ genannt, sein Betrag a.

Die Beschleunigung kann also durch Differentation des Geschwindigkeitsvektors ermittelt werden. Die erste Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit ist die Beschleunigung. Auch diese Schreibweise $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right)$ kann oftmals abgekürzt werden:

Notation II.9: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ wird oftmals als $\dot{\vec{v}}$ geschrieben, der Betrag a analog.

Auch hier kann man aus einer gegebenen Beschleunigung die Geschwindigkeit berechnen, indem man den Vektor $\vec{a}$ integriert. Die Umkehroperation zu $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ lautet folglich:

$$\vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt + \vec{v}_0 \,.$$

Um über die Integration des Beschleunigungsvektors die Geschwindigkeit zu berechnen, muss hier der konstante Faktor $\vec{v}_0$ bekannt sein. Dieser Vektor kennzeichnet die Anfangsgeschwindigkeit der Bewegung. Im Gegensatz zum Anfangsort, der ja in einem unbeweglichen Bezugssystem als ruhend und damit zeitlich konstant angesehen wird, kann die Anfangsgeschwindigkeit durchaus eine Funktion der Zeit sein.

Merke: Die Beschleunigung eines Massepunktes läßt sich aus der Geschwindigkeit über Differentation errechnen: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Merke: Die Geschwindigkeit des Massepunktes läßt sich über Integration aus der Beschleunigungsgleichung und der Randbedingung $\vec{v}_0$ ermitteln:

$$\vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt + \vec{v}_0(t) \,.$$

Betrachtet man nun die Folgerungen aus Definition II.3 und Definition II.4 nebeneinander, so folgt:

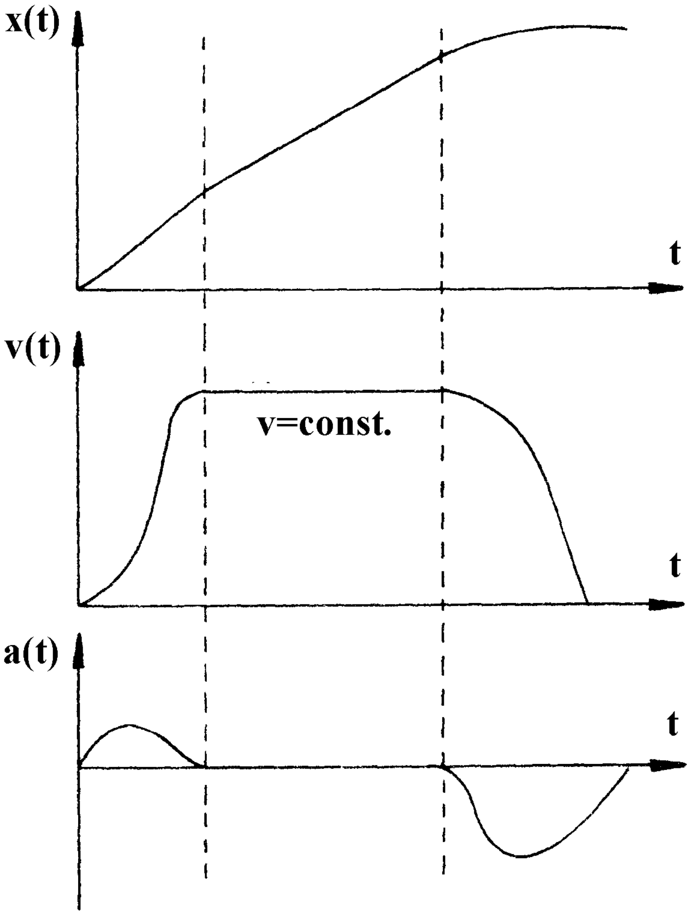
Aus $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$ und $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ folgt: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{r}^{\,2}}{dt^2}$

Notation II.10: Die zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit wird mit $\ddot{\vec{r}} = \vec{a}(t) = \frac{d\vec{r}^{\,2}}{dt^2}$ bezeichnet.

Merke: Die Beschleunigung ist die zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit.

II.5 Versuche und Berechnungen zur Kinematik

Betrachten wir im Folgenden eine eindimensionale Bewegung in x-Richtung. Diese Bewegung läßt sich, wie bereits gezeigt, in einem Weg-Zeit-Diagramm darstellen. Gegeben sei nicht die exakte Bewegungsgleichung, sondern das Weg-Zeit-Diagramm:



Über Differentation der Funktion x(t) kann jetzt die Funktion v(t) errechnet werden.

Analog kann mit der ersten Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion nach der Zeit auch die Beschleunigungsfunktion errechnet werden.

Nimmt man die Funktion a(t) als gegeben, so kann man über Integration v(t) und x(t) errechnen. Als Beispiel:

$a(t) \sim e$	$a(t) = 0$	$a(t) \sim -e$	$a(t) = 0$
$v(t) \sim \int edt + v_0$	$v(t) \sim v_0$	$v(t) \sim \int - edt + v_0$	$v(t) \sim v_0, \quad v_0 = 0$
$v(t) \sim t$	$v(t) \sim v_0$	$\frac{dx}{dt} \sim -t$	$\frac{dx}{dt} \sim 0$
$x(t) \sim \int tdt + x_0$	$x(t) \sim \int v_0 dt + x_0$	$x(t) \sim \int - tdt + x_0$	$x(t) \sim x_0$
$x(t) \sim t^2$	$x(t) \sim t$	$x(t) \sim -t^2$	$x(t) \sim x_0$

II.5.1 Geradlinige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit:

Versuch II.1: Die Luftkissenbahn

Eine Bewegung längs einer Geraden wird gradlinige Bewegung genannt und kann mit dem Skalar x(t) und t beschrieben werden.

Bei dem Versuch mit der Luftkissenbahn wird auf einer Schiene ein Wagen angeschoben. Bei einer festen Geschwindigkeit wird der Wagen losgelassen: Da der Wagen auf einer Schiene geführt wird, ändert er seine Richtung nicht. Die Reibung kann vernachlässigt werden; die Geschwindigkeit ist folglich nach Richtung und Betrag konstant. In gleichen Abständen montierte Lichtschranken messen nun die Zeit, die der Wagen benötigt, um die Strecke Δx zurückzulegen.

Die Messung ergibt immer gleiche Zeitspannen. Das bestätigt die folgende Rechnung:

Randbedingung: $v = \text{constant}$

Aus $v = \dfrac{dx}{dt}$

$$\Rightarrow \Delta x = \Delta t \bullet v$$

$$\Rightarrow x_2 - x_1 = (t_2 - t_1) \bullet v$$

$$\Rightarrow x_2 = (t_2 - t_1) \bullet v + x_1$$

Das gilt für die Strecke $x_i - x_0$ zwischen zwei beliebigen Schranken. Also gilt für alle t:

$$x = x_0 + (t - t_0) \bullet v$$

> Merke: Das Weg-Zeit-Gesetz für die 1-dimensionale gradlinige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v lautet:
> $$x = x_0 + (t - t_0) \bullet v$$

Verallgemeinerung für dreidimensionale Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit:

Die Geschwindigkeit bleibt auch hier in Richtung und Betrag gleich, wird aber als Vektor $\vec{v}$ geschrieben. Der Anfangsort der Bewegung ist gekennzeichnet durch den Vektor

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

Es gilt $\vec{v} = \left(v_x, v_y, v_z\right) = \text{constant}$

und $\vec{r} = (x, y, z)$.

Aus $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$

folgt dann $\Delta x = v_x \Delta t \quad \wedge \quad \Delta y = v_y \Delta t \quad \wedge \quad \Delta z = v_z \Delta t$

Die Umformungen von oben für alle drei Komponenten ausgeführt ergibt die Bewegungsgleichung für den dreidimensionalen Fall:

$$x = x_0 + (t - t_0) \bullet v_x$$

$$y = y_0 + (t - t_0) \bullet v_y$$

$$z = z_0 + (t - t_0) \bullet v_z$$

> Merke: Das Weg-Zeit-Gesetz für die 3-dimensionale Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ lautet:
>
> $$\vec{r} = \vec{r}_0 + (t - t_0) \bullet \vec{v}_0$$

Die eindimensionale Bewegung ist ein Sonderfall der dreidimensionalen Bewegung mit $\vec{v} = (v_x, 0, 0)$ und $\vec{r} = (x, 0, 0)$.

II.5.2 Geradlinige Bewegung mit konstanter Beschleunigung:

Versuch II.2: Freier Fall

Empirisch läßt sich bestätigen, dass auf der Erde alle Körper dieselbe Beschleunigung in Richtung der Erde erfahren, die Beschleunigung durch die Schwerkraft. Sie wird üblicherweise mit g bezeichnet und kann als Skalar beschreiben werden, da sie nur in Richtung der Erdoberfläche, also in y-Richtung wirkt. Als Vektor dargestellt gilt: $\vec{g} = (0, -g, 0)$. Der Betrag der Erdbeschleunigung ist $g = 9{,}81 \text{ m / s}^2$.

Gegeben sei also nur a = g = constant. Untersuchen wir nun die Geschwindigkeitsfunktion eines Körpers im freien Fall längs einer Achse:

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} a(t)dt + v_0$$

$$\Leftrightarrow \quad v(t) = a \cdot \int_{t_0}^{t} dt + v_0, \qquad \text{da } a(t) = a \text{ konstant ist}$$

$$\Leftrightarrow \quad v(t) = a\,(t - t_0) + v_0 \qquad , \text{mit } \int_{t_0}^{t} dt = (t - t_0)$$

Die Geschwindigkeit wächst also linear mit der Zeit. Die Konstante v_0 bezeichnet die Anfangsgeschwindigkeit, die der Körper hatte, bevor er losgelassen wurde. War der Körper zur Zeit t_0 in Ruhe, also $v_0 = 0$ m/s, dann gilt:

$$v(t) = a\,(t - t_0).$$

Setzen wir die Zeit, in welcher der Körper losgelassen wird, als Anfangszeit der Messung, also

$t_0 = 0$ s, dann gilt: $v(t) = at + v_0$.

Diese Funktionen sind jedoch nur Spezialfälle der allgemeinen Lösung und setzen bestimmte Randbedingungen voraus.

Aus der Funktion für die Geschwindigkeit läßt sich jetzt das Weg-Zeit-Gesetz berechnen:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)dt \qquad , \text{mit } v(t) = a\,(t - t_0) + v_0$$

$$\Leftrightarrow \quad x(t) = \int_{t_0}^{t} \left[a(t - t_0) + v_0\right]dt$$

$$\Leftrightarrow \quad x(t) = \int_{t_0}^{t} a(t - t_0)dt + \int_{t_0}^{t} v_0 dt$$

$$\Leftrightarrow \quad x(t) = \left[\frac{a}{2}(t - t_0)^2\right]_{t_0}^{t} + v_0\,(t - t_0) + x_0$$

$$\Leftrightarrow \quad x(t) = \frac{a}{2}(t - t_0)^2 + v_0\,(t - t_0) + x_0$$

Diese Funktion ist quadratisch, der Weg nimmt also quadratisch mit der Zeit zu. Die neu hinzugekommene Konstante bezeichnet die Verschiebung des Anfangsortes vom Ursprung des Bezugssystems. Durch geschicktes Setzen der Randparameter, $t_0 = 0$ s, $v_0 = 0$ m/s und $x_0 = 0$ m kann diese Gleichung in die stark vereinfachte Form

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2$$ gebracht werden.

Merke: Bei der gradlinigen Bewegung mit konstanter Beschleunigung gilt:

$$x(t) = \frac{a}{2}(t - t_0)^2 + v_0\,(t - t_0) + x_0$$

$$v(t) = a\,(t - t_0) + v_0$$

$$a(t) = \text{constant}$$

Damit gilt insbesondere für den Freien Fall:

Beschleunigung: $a = -g$

Randbedingungen: $t_0 = 0$s, $v_0 = 0$ m/s und $x_0 = 0$m

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2$$

Differentation $\Downarrow$ $\qquad v(t) = -gt \qquad$ $\Uparrow$ Integration mit Randbedingungen

$$a(t) = -g.$$

Bei dem Laborversuch des Freien Falls werden Kugeln verschiedener Größe, Masse und verschiedenen Materials eine vorher gemessene Strecke x ohne Anfangsgeschwindigkeit fallen gelassen. Eine Uhr misst die Zeit, die der Körper braucht, um die Strecke zurückzulegen.

Aus $x = \frac{g}{2} t^2$ können wir eine Gleichung für die Zeit umformen: $t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$

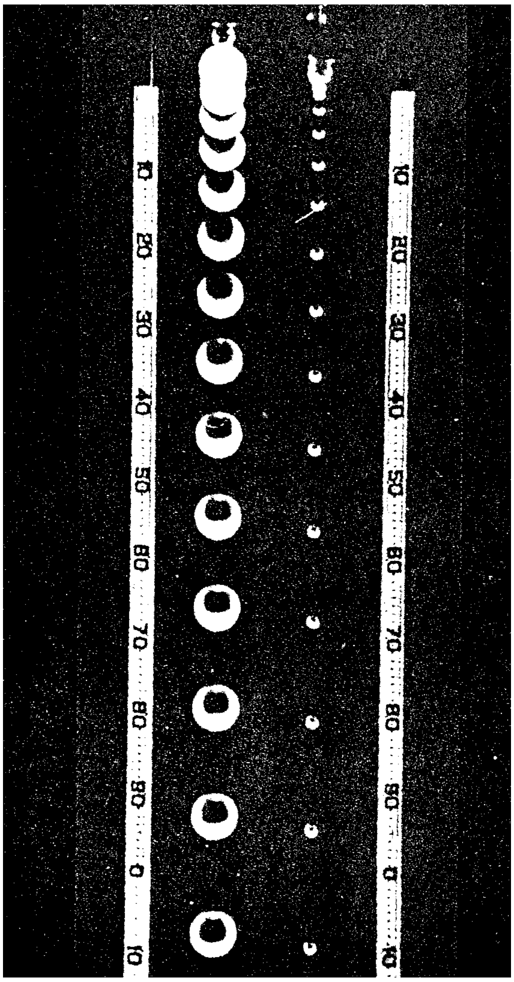


Abbildung II.8: Freier Fall

Diese Gleichung hängt nur von der Konstanten g und der Strecke ab. Der Versuch bestätigt: Die Fallzeit der Kugeln ist unabhängig von Größe, Masse und Material. Sie hängt nur von der Strecke ab.

Dieses Ergebnis ist keinesfalls selbstverständlich: Vor allem Kinder vermuten, dass schwere Körper schneller fallen müssten als leichte. Bis zu den Entdeckungen Galileis Ende des 16. Jh. galt die Vorstellung Aristoteles (384 - 322 v. Chr.) als richtig, schwere Körper würden schneller fallen als leichte.

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine stroboskopische Aufnahme zweier Kugeln unterschiedlicher Masse und Größe, die zur selben Zeit auf gleicher Höhe losgelassen wurden.

Merke: Alle Körper fallen mit derselben Beschleunigung **g = 9,81 m/s** unabhängig von Masse, Größe oder Material.

Verallgemeinerung für dreidimensionale Bewegungen mit konstanter Beschleunigung

Analog kann bei einer dreidimensionalen Bewegung das Weg-Zeit-Gesetz aus einer gegebenen Beschleunigung und den Randbedingungen errechnet werden. Wie bei der Rechnung für die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit gezeigt, können die Komponenten der Vektoren $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ und $\vec{r} = (x, y, z)$ getrennt integriert bzw. differenziert werden. Die Randbedingungen werden auch durch Vektoren, $\vec{v}_0 = (v_{01}, v_{02}, v_{03})$ und $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, beschrieben.

In Vektorschreibweise gilt somit:

$$\vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt + \vec{v}_0$$

da $\vec{a}(t) = \vec{a}$ konstant $\Leftrightarrow$ $\vec{v}(t) = \vec{a} \cdot \int_{t_0}^{t} dt + \vec{v}_0$

mit $\int_{t_0}^{t} dt = (t - t_0)$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\vec{v}(t) = \vec{a}\,(t - t_0) + \vec{v}_0}$

mit $\vec{v}(t) = \vec{a}\,(t - t_0) + \vec{v}_0$ folgt $\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \left[\vec{a}(t - t_0) + \vec{v}_0\right]dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t - t_0)dt + \int_{t_0}^{t} \vec{v}_0 dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{r}(t) = \left[\frac{\vec{a}}{2}(t - t_0)^2\right]_{t_0}^{t} + \vec{v}_0\,(t - t_0) + \vec{r}_0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{r}(t) = \frac{\vec{a}}{2}(t - t_0)^2 + \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{r}_0}$$

In Komponentenschreibweise werden die einzelnen Komponenten a_i, v_i, x_i und von den Randbedingungen v_{0i} und x_0, y_0 bzw. z_0 betrachtet.

Notation II.11: x_i bezeichnet die i-te Komponente von.

$$v_i(t) = \int_{t_0}^{t} a_i(t)dt + v_{0\,i}$$

mit $a_i(t) = a_i$ konstant $\Leftrightarrow$ $v_i(t) = a_i \cdot \int_{t_0}^{t} dt + v_{0\,i}$

mit $\int_{t_0}^{t} dt = (t - t_0)$ $\Leftrightarrow$ $v_i(t) = a_i\,(t - t_0) + v_{0\,i}$

mit $v_i(t) = a_i\,(t - t_0) + v_{0\,i}$ folgt $x_i\,(t) = \int_{t_0}^{t} v_i(t)dt$

$$\Leftrightarrow \quad x_i\,(t) = \int_{t_0}^{t} \left[a_i(t - t_0) + v_{0i}\right]dt$$

$$\Leftrightarrow \quad x_i\,(t) = \int_{t_0}^{t} a_i(t - t_0)dt + \int_{t_0}^{t} v_{0i}dt$$

$$\Leftrightarrow \quad x_i\,(t) = \left[\frac{a_i}{2}(t - t_0)^2\right]_{t_0}^{t} + v_{0\,i}\,(t - t_0) + x_0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_i\,(t) = \frac{a_i}{2}(t - t_0)^2 + v_{0\,i}\,(t - t_0) + x_0$$

Auch hier ist die gradlinige Bewegung ein Sonderfall der dreidimensionalen Bewegung mit $i = 1$, und den Vektoren $\vec{a} = (a_1, 0, 0)$, $\vec{v} = (v_1, 0, 0)$ und $\vec{r} = (x, 0, 0)$, $\vec{v}_0 = (v_{01}, 0, 0)$ und $\vec{r}_0 = (x_0, 0, 0)$.

II.5.3 Geradlinige Bewegung mit konstanter Beschleunigung: schiefe Ebene

Versuch II.3: Schiefe Ebene

Ein weiterer Versuch zur gradlinigen, eindimensionalen Bewegung mit konstanter Beschleunigung ist die schiefe Ebene. Bei diesem Versuch wird ein Wagen auf der um den Winkel α geneigten Luftkissenbahn bei einer festen Höhe losgelassen und durch die Gravitation beschleunigt.

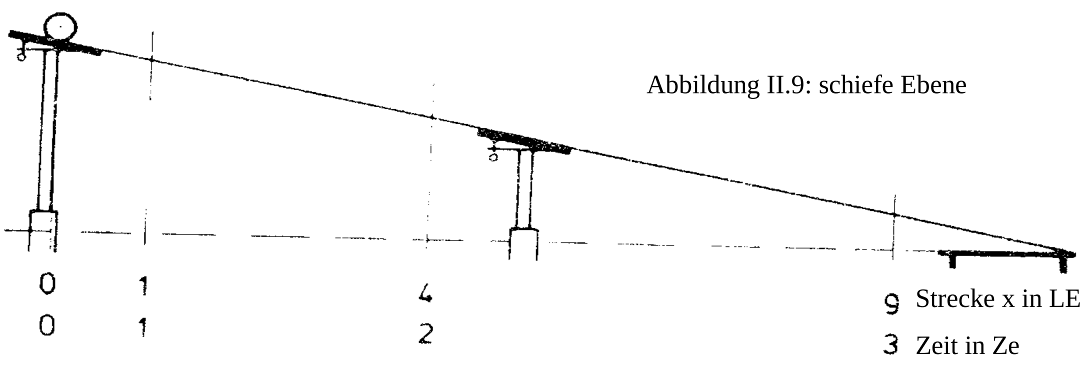


Abbildung II.9: schiefe Ebene

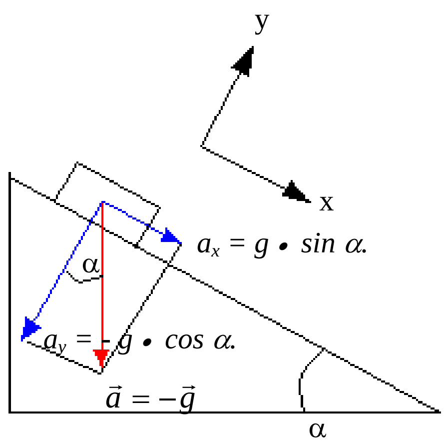
Diesmal können wir, nachdem wir schon berechnet haben, dass das Weg-Zeit-Gesetz quadratisch mit der Zeit verlaufen wird, die Lichtschranken entsprechen in den Abständen 1Längeneinheit (1LE), 4LE, 9LE usw. aufstellen. Jetzt müssten die Zeiten zum Durchlauf der einzelnen Wegstrecken je 1 Zeiteinheit (1 ZE) betragen, die Zeiten gemessen vom Loslaufen bei t = 0 entsprechen t_1 = 1ZE, t_2= 2ZE,

t_3 = 3ZE, usw. Bestätigt sich diese Theorie, so ist demonstriert, dass

$$x_1 / x_2 = t_1^2 / t_2^2 \qquad \text{gilt.}$$

Anhand der schiefen Ebene läßt sich auch die Zerlegung eines Vektors in seine Komponenten und die Wahl eines geeigneten Bezugssystems verdeutlichen.

Die Gravitation wirkt bei diesem Versuch nicht im rechten Winkel zur Bewegungsrichtung. deshalb dreht man zur Berechnung das Koordinatensystem, damit die x-Achse in Bewegungsrichtung zeigt. Der Vektor $\vec{a}$ muss dann in diesem System dargestellt werden. Eine Skizze des Problems, in der die Vektoren, ihre Komponenten und die wesentlichen Winkel eingezeichnet sind, zeigt bereits die Lösung des Problems:



a_x ist die Komponente des Beschleunigungsvektors in x-Richtung und kann bereits abgelesen werden:

$$a_x = g \bullet \sin\alpha.$$

Analog: $\qquad a_y = - g \bullet \cos\alpha.$

Da es sich bei der schiefen Bahn um ein zweidimensionales Modell handelt, gilt $a_z = 0$.

In Vektorschreibweise lautet der Vektor $\vec{a}$ also:

$$\vec{a} = (g \bullet \sin\alpha., - g \bullet \cos\alpha., 0\,)$$

II.5.4 Beispiel einer nichtlinearen Bewegung

Versuch II.4: Der horizontale Wurf

Der horizontale Wurf ist eine Überlagerung zweier Bewegungen in der Ebene:

1. Der Körper wird von der Erde beschleunigt und führt somit einen freien Fall aus in Richtung der Erde.

2. Der Körper wird mit einer festen Geschwindigkeit horizontal zur Erde losgeworfen und führt eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit in dieser Richtung aus.

Beschleunigung und Geschwindigkeit sind also gegeben durch

$\vec{a} = \vec{g} = (0,\ -g,\ 0)$. Es existiert nur eine Beschleunigung in y-Richtung, in x-Richtung wird in diesem Versuch die Kugel mit konstanter Geschwindigkeit unbeschleunigt geworfen, die z-Komponente ist in der Ebene trivialerweise null.

$\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$ v_x ist die konstante Geschwindigkeit, mit welcher der Körper geworfen wird und sei für die Rechnung gegeben.

Als Randbedingung legen wir fest:

Anfangsort der Bewegung sei der Ort $x_0 = 0$, also der Ursprung des Bezugssystems.

Zeit des Abwurfs sei die Zeit $t_0 = 0$, die Uhren messen die Zeit erst ab Beginn der Bewegung.

Betrachten wir nun komponentenweise die Bewegung, die z-Komponente wird nicht berücksichtigt, bzw. gleich null gesetzt:

	x-Komponente		y-Komponente	
$\vec{a}(t) = ($	0	,	$-g$	)
$\vec{v}(t) = ($	$v_x(t) = v_0$ (= constant)	,	$v_y(t) = a_y \cdot \int_{t_0}^{t} dt$	)
$= ($	v_0	,	$-g \cdot \int_{t_0}^{t} dt$	)
$= ($	v_0	,	$-g \cdot t$	)
$\vec{r}(t) = ($	$x(t) = \int_{t_0}^{t} v_x(t)dt$	,	$y(t) = \int_{t_0}^{t} v_y(t)dt$	)
$= ($	$v_0 t$	,	$\int_{t_0}^{t} -gt \cdot dt$	)
$= ($	$v_0 t$	,	$-\frac{1}{2}gt^2$	)

Der Ortsvektor zur Zeit t lautet also: $\vec{r}(t) = (v_0 t,, 0)$.

Durch Eliminierenen von t aus den x- und y- Komponenten kann eine Funktion der x-Komponente in Abhängigkeit von der y-Komponente aufgestellt werden:

aus $x = v_0 t$ und $y = -\frac{1}{2}gt^2$ folgt $\boxed{y(x) = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2} x^2}$

Diese Funktion gibt die Bahnkurve des horizontalen Wurfs an, sie beschreibt die Wurfparabel.

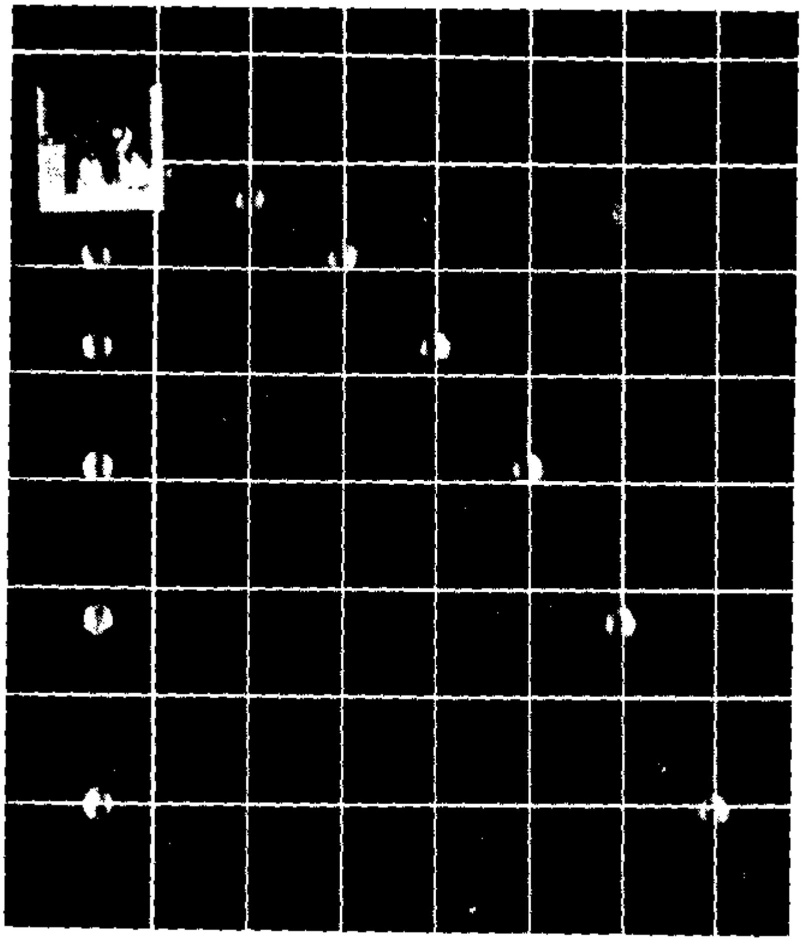


Abbildung II.9: Stroboskopische Aufnahme zweier Kugeln im freien Fall und horizontalem Wurf

Um die Unabhängigkeit der Bewegung in die verschiedenen senkrecht zueinander stehenden Richtungen zu demonstrieren, kann man eine Kugel im Freien Fall und eine Kugel im horizontalen Wurf beobachten, die beide zur selben Zeit am selben Ort ihre Bewegung beginnen. Eine stroboskopische Aufnahme zeigt die Bewegung der Kugeln.

In der Vorlesung wurde eine andere Variante des Versuchs gezeigt: Man läßt die Kugeln zur selben Zeit auf derselben Höhe, also y-Komponente, ihre Bewegung starten, verschiebt die Kugel für den freien Fall jedoch einige Zentimeter in Wurfrichtung der zweiten Kugel. Auf diese Weise müssen die Kugeln sich treffen. Unser Demonstrationsversuch bestätigte die Annahme für Kugeln unterschiedlicher Materialien und Größen.

II.6 Relativbewegung

Bisher hatten wir die Einschränkung gemacht, dass die Berechnungen der Bewegungsgleichung nur mit der Beschreibung durch ein ruhendes Bezugssystem Gültigkeit besitzen. Es ist jedoch auch interessant zu fragen, wie man die Bewegung in einem bewegten System beschreiben kann. Als Beispiel stelle man sich einen Menschen vor, der in einem Zug entgegen der Fahrtrichtung geht. In welche Richtung bewegt er sich, und wie sieht diese Bewegung für einen Beobachter im Zug, für einen Beobachter draußen oder sogar für einen Beobachter in einem entgegenkommenden Zug aus?
Diese gradlinige Bewegung kann man sich noch aus verschiedenen Blickpositionen vorstellen, bei einer Kreisbewegung wird es schwieriger.

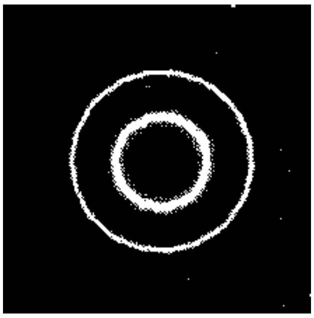


Abbildung II.11: Kreisbewegung in einem ruhenden System

In der Vorlesung wurde als Beispiel ein Punkt auf einem Kreis gezeigt, der sich um die Mitte des Kreises drehte, während der Wagen sich mit konstanter Geschwindigkeit geradeaus bewegte. In beiden Fällen beobachtete man eine Kreisbewegung. Die nebenstehende Graphik zeigt eine solche Kreisbewegung für zwei Punkte auf konzentrischen Kreisen, beobachtet in einem relativ zum Beobachter ruhenden Bezugssystem.

Die Projektion der Bewegung des Punktes auf eine Ebene aber zeigte, dass es sich dabei um eine Täuschung handelt. So sieht die Kreisbewegung auf einem mit konstanter Relativgeschwindigkeit zum Beobachter fahrenden System wirklich aus:

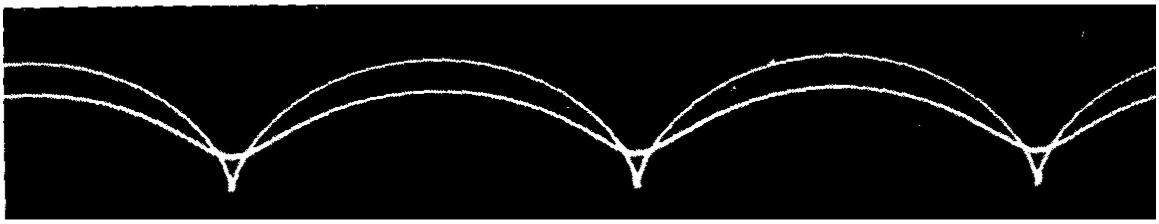


Abbildung II.12: Kreisbewegung von einem mit konstanter Geschwindigkeit fahrendem System aus.

Wie sieht eine Bewegung also allgemein für einen mitbewegten Beobachter aus?
Wie bereits zuvor eingeführt, erfordert auch hier eine analytische Beschreibung ein Koordinatensystem. Als Laborsystem wählt man zumeist das System, indem der Beobachter ruht.
Bezeichnen wir dieses Laborsystem S jetzt wie gewohnt mit den Koordinaten (x, y, z. Dazu definieren wir ein bewegtes Bezugssystem S', welches wir mit den Koordinaten (x', y', z') beschreiben. Als Vereinfachung setzen wir den Nullpunkt der beiden Koordinatensysteme auf den Ursprung, der zur Zeit t_0 übereinstimmen soll. Ferner gehen wir davon aus, dass die Zeit invariant gegenüber einem Systemwechsel ist. Die Uhr soll also in beiden Systemen stets

dieselbe Zeit anzeigen. Für große Geschwindigkeiten ist dies keinesfalls immer gegeben. Wird die Geschwindigkeit nahezu so groß wie die Lichtgeschwindigkeit, gilt die relativistische Mechanik; der Effekt der verschieden laufenden Uhren wird z.b. im sogenannten Zwillingsparadox behandelt.

Das System S' bewege sich jetzt mit konstanter Relativgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$ gegenüber S.

Wie in Kapitel II.2 gezeigt, kann der Ortsvektor $\vec{r}$ bei Kenntnis der Geschwindigkeit dargestellt werden als $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$.

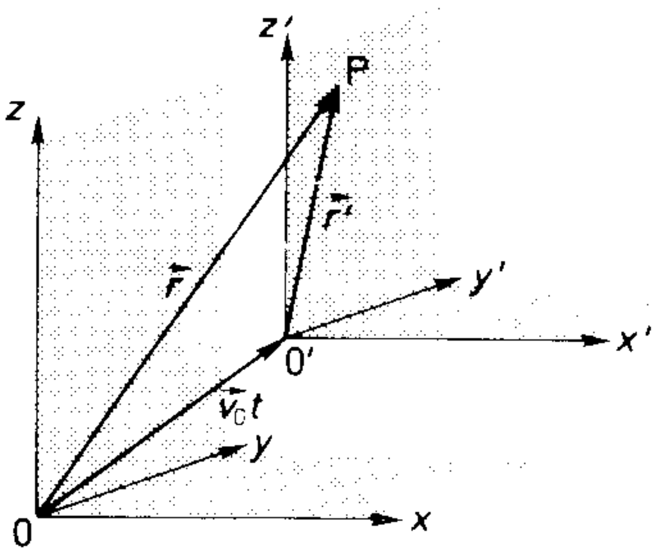


Abbildung II.13: Inertialsysteme

Der Ortsvektor vom Ursprung des Systems S' ist hier der Vektor $\vec{r}\,'$.

In Vektorschreibweise gilt:

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{r}(t) - \vec{v}_0 \cdot t$$

Mit $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ folgt

$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{v}_0 .$$

Nochmaliges Differenzieren liefert $\vec{a}\,' = \vec{a}$ wegen v_0 = constant.

In Komponentenschreibweise gilt dann:

$$x' = x - v_{xo}\,t \qquad v_x' = v_x - v_{xo} \qquad a_x' = a_x$$
$$y' = y - v_{yo}\,t \qquad v_y' = v_y - v_{yo} \qquad a_y' = a_y$$
$$z' = z - v_{zo}\,t \qquad v_z' = v_z - v_{zo} \qquad a_z' = a_z$$

Die Beschleunigung ändert sich also nicht bei dem Wechsel in ein mit konstanter Relativgeschwindigkeit bewegtes Bezugssystem. Diese Art der Transformation von Ortsvektoren in ein anderes System heißt Galilei-Transformation. Wie der Film zeigte, ist keines der Systeme, die sich mit konstanter Relativgeschwindigkeit zueinander bewegen bevorzugt. Alle zueinander gradlinig gleichförmig bewegten Systeme sind äquivalent, man bezeichnet sie als Inertialsysteme.

Definition II.6: Inertialsysteme sind gradlinig gleichförmig gegeneinander bewegte Bezugssysteme.

Merke: Die Beschleunigung ist invariant gegenüber Galilei-Transformationen.

Versuch II.5: Auffangtrichter eines Wagens

Bei diesem Versuch soll gezeigt werden, wie zwei Körper in verschiedenen (Inertial-)systemen sich bei verschiedenen Bewegungsformen zueinander bewegen. Hierzu wird ein Wagen mit einer Abschussvorrichtung und mit Auffangtrichter senkrecht zur Bodenplatte eine Kugel mit v_y und a_y abschießen. Sobald die Kugel den Wagen verlassen hat, wirkt auf sie nur noch die Gravitation. Untersucht werden soll, wo die Kugel landet.

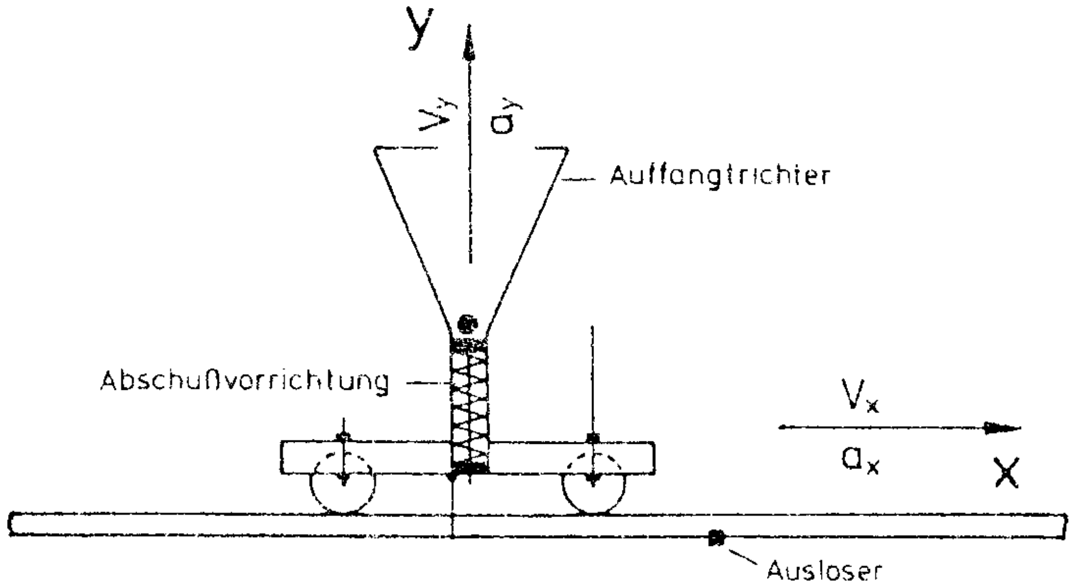


Abbildung II.14: Versuchsskizze zum Abschußversuch

1. Abschuss im Stand:

Für den ersten Versuchsteil verläuft die Schiene parallel zur Erde. Die Kugel wird im Stand abgeschossen, also mit $v_x = 0$ und $a_x = 0$. Wie nicht anders zu erwarten, fällt die Kugel in den Trichter zurück.

2. Der Wagen fährt mit konstanter Geschwindigkeit:

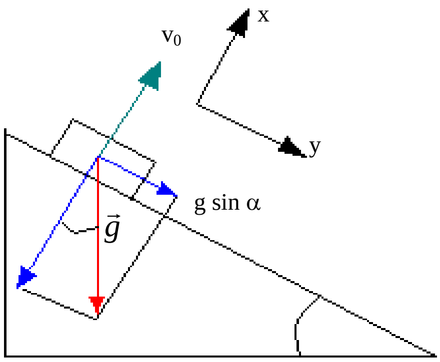
Die beiden Bezugssysteme, Laborsystem und mitbewegtes Wagensystem, sind Inertialsysteme, da mit $a_x = 0$ keine Beschleunigung längs der Bewegungsrichtung existiert. Keines der Systeme ist bevorzugt, im mitbewegten System läuft der Vorgang wie bei Versuchsteil 1. ab und die Kugel fällt folglich in den Trichter zurück.

3. Der Wagen wird beschleunigt in x-Richtung:

Das mitbewegte Bezugssystem ist kein Inertialsystem, da der Wagen mit $a_x \neq 0$ längs der Bewegungsrichtung beschleunigt wird. Die Bewegung der Kugel ist nicht invariant gegenüber einer Transformation in dieses System und die Kugel fällt hinter den Wagen.

4. Abschuss senkrecht zur schiefen Ebene:

Für diesen Versuch wird die Schiene um einige Grad geneigt. Der Wagen rollt jetzt von der Erdanziehung beschleunigt nicht mehr mit konstanter Geschwindigkeit die schiefe Ebene hinab. Die Kugel wird senkrecht zur Bodenplatte, also senkrecht zur schiefen Ebene abgeschossen, als der Wagen die Geschwindigkeit v_{0w} hat. Obwohl es sich um kein Inertialsystem mehr handelt (der Wagen wird beschleunigt), fällt die Kugel in den Trichter zurück. Das kann mittels komponentenweiser Betrachtung mathematisch verifiziert werden:



Der Wagen wird längs der schiefen Ebene beschleunigt mit

$$\frac{d^2 x_w}{dt^2} = g \cdot \sin\alpha \,.$$

Damit errechnet sich die Geschwindigkeit als

$$v_w(t) = g \sin\alpha \; t + v_{0w} \,.$$

Der Wagen legt damit die Strecke

$$x_w(t) = \frac{1}{2} g \sin\alpha \cdot t^2 + v_{0w} t$$

zurück.

Die Kugel wird längs der schiefen Ebene ebenfalls mit $\frac{d^2 x_k}{dt^2} = g \cdot \sin\alpha$ beschleunigt.

Ihre Geschwindigkeit errechnet sich dann als $v_k(t) = g \sin\alpha \; t + v_0$.

Da die Geschwindigkeitskomponenten von Kugel und Wagen in Richtung der schiefen Ebene gleich sind, folgt mit $v_{0w} = v_0$

$$x_k(t) = \frac{1}{2} g \sin\alpha \cdot t^2 + v_{0w} t \,.$$

Es gilt als $x_k(t) = x_w(t)$. Kugel und Wagen sind zur Zeit t an derselben Komponente des Ortes längs der schiefen Ebene. Da die Kugel zusätzlich noch eine Bewegung senkrecht zu dieser

Graden ausführt, trifft sich den Wagen genau an der Stelle, wo die Bewegungskomponente senkrecht zur Bewegungsrichtung des Wagens null wird.

5. Abschuss von der schiefen Ebene senkrecht zur Erde:

Bei diesem Versuchsteil wird die Kugel nicht mehr senkrecht zur Bewegungsrichtung des Wagens, sondern senkrecht zur Erde abgeschossen. Die Geschwindigkeitskomponenten längs der schiefen Ebene stimmen damit nicht mehr überein. Die Differentation zweier verschiedener Geschwindigkeits-Zeit-Gleichungen führt zu zwei differierenden Orts-Zeit-Gleichungen. Die Kugel und der Wagen sind zur Zeit t nicht an derselben Ortskomponente längs der schiefen Ebene und treffen sich folglich nicht mehr. Die Kugel fällt hinter den Wagen.

Fazit aus den Versuchsteilen 3, 4 und 5.:

Falls das mitbewegte System kein Inertialsystem ist, kann man keine einfache Vorhersage über den Vorgang im mitbewegten System mehr machen.