XIII. Transportphänomene

Aus dem Alltag ist bekannt, daß Wärmeenergie auf verschiedene Weisen transportiert werden kann. Wärmeenergie kann durch Strahlung, Leitung oder Strömung (Konvektion) transportiert werden. Zuzüglich zu diesen drei Phänomenen gibt es noch die Diffusion. Das bedeutet anschaulich, dass ein Gas aus einem Volumen diffundiert, also sich verteilt, wenn das Volumen geöffnet wird. Obwohl die Phänomene Leitung, Konvektion und Diffusion zunächst unterschiedlich zu sein scheinen, haben sie alle etwas gemeinsam:
Der Zusammenhang mit der kinetischen Gastheorie zeigt, daß bei allen dreien räumliche Inhomogenität einer gewissen Größe den Transport einer anderen Größe auslöst.

Transportphänomen	**transportierte Größe**	**transportierende Größe**
Diffusion	Strömen von **Masse**	Konzentrationsgradient
Wärmeleitung	Strömen von **Wärmeenergie**	Temperaturgradient
Viskosität	Strömen von **Impuls**	Geschwindigkeitsgradient

Wie die Tabelle bereits zeigt, lassen sich alle drei Phänomene formal sehr ähnlich behandeln. Sie werden Transportphänomene genannt.
Diese drei Phänomene und die Wärmestrahlung wollen wir nun im einzelnen untersuchen und im Anschluß die Parallelitäten aufzeigen.
Um diese Phänomene zu untersuchen brauchen wir neben den bereits gewonnenen Ergebnissen aus der kinetischen Gastheorie noch einen weiteren wichtigen Begriff:

XIII.1 Mittlere freie Weglänge

Bisher sind wir in der kinetischen Gastheorie immer davon ausgegangen, daß ein Molekül auf eine Gefäßwand trifft und dort einen Stoß ausführt. In unseren Modellversuchen haben wir aber bereits gesehen, dass sich die Moleküle auch untereinander stoßen. Diese Stöße untereinander sind der Grund für das Gleichgewicht eines Gases. Durch den Austausch von Impulsen wird eine im Mittel gleiche Geschwindigkeit der Gasmoleküle erzielt.
Welchen Weg legt ein Molekül also zwischen zwei Stößen zurück ?
Um diese Frage zu beantworten müssen wir zunächst die Annahme fallen lassen, die Moleküle seien Massepunkte. In Wirklichkeit hat ein Molekül eine räumliche Ausdehnung, in unserem

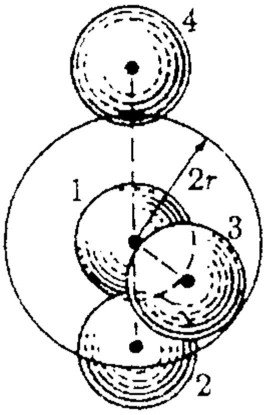


Abbildung XIII.1: Wirkungsquerschnitt eines Moleküls des Radius r.

Fall sei sein Radius r. Dann treten Stöße auf, wenn der Mittelpunkt einer Kugel näher als 2r an den Mittelpunkt einer anderen Kugel heran kommt. Diesen Abstand nennt man Stoßparameter und bezeichnet ihn mit b. Also erfolgt ein Stoß genau dann, wenn

$$b \leq 2r \,.$$

Die gedachte Fläche um die Kugel, in die ein Eindringen einen Stoß zur Folge hätte, nennt man den Wirkungsquerschnitt σ

$$\sigma = \pi (2r)^2$$

Merke: Der **Wirkungsquerschnitt** eines Moleküls des Radius r beträgt

$$\sigma = \pi (2r)^2 \,.$$

Der Wirkungsquerschnitt, manchmal auch Stoßquerschnitt genannt, ist ein zentraler Begriff der Physik. In diesem Beispiel ist er anschaulich zu verstehen als die Fläche, die das Molekül gegenüber dem stoßenden Molekül bietet. Sie wird im Allgemeinen verstanden als die Fläche, die den Stoß charakterisiert.

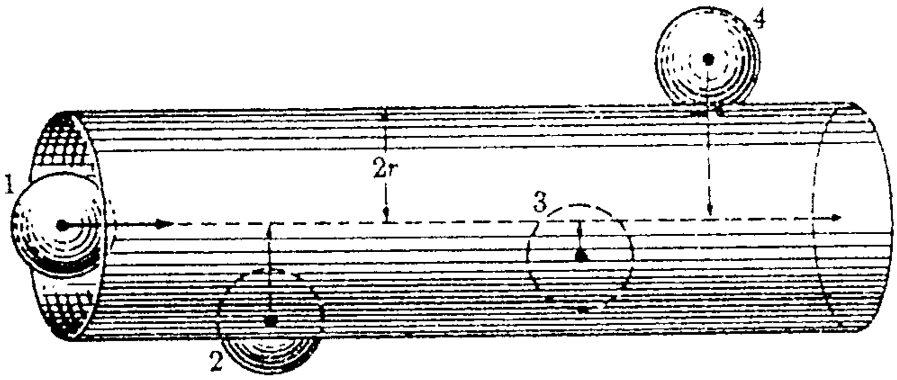


Abbildung XIII.2: Der Wirkungsquerschnitt überstreicht ein Volumen.

Betrachten wir nun ein Gas der Dichte n. Wenn ein Molekül dieses Gases den Weg s zurücklegt, dann überstreicht sein Wirkungsquerschnitt das Volumen V_s

$$V_s = \sigma \cdot s \,.$$

Dabei trifft es auf N_s Teilchen $\quad N_s = nV_s$

$$\Rightarrow \quad N_s = n \cdot \sigma \cdot s$$

Nun definiert man den Weg, den das Teilchen im Mittel zurücklegen kann, bis es auf ein anderes Teilchen trifft als mittlere Weglänge. Für

$$N_s = 1,$$

d.h. den Weg bis zum ersten Stoß gilt dann

$$1 = n \cdot \sigma \cdot s$$

Definition XIII.1a): Die mittlere freie Weglänge ℓ bezeichnet den Weg, den ein Teilchen in einem Gas der Dichte n zurücklegen kann, bis im Mittel ein Stoß mit einem anderen, ruhenden Teilchen auftritt: $\ell = \frac{1}{n\sigma}$.

Diese Formel gilt nur, wenn man davon ausgeht, daß das zweite Teilchen ruht. Man spricht von dem Stoß mit einem ruhenden Target. In Wirklichkeit bewegt sich das zweite Teilchen ebenfalls. Dann ergibt die Rechnung

Definition XIII.1b): Die mittlere freie Weglänge ℓ bezeichnet den Weg, den ein Teilchen in einem Gas der Dichte n zurücklegen kann, bis im Mittel ein Stoß mit einem anderen bewegten Teilchen auftritt: $\ell = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{n\sigma}$.

Bei festem Druck p und konstanter Teilchendichte n ergibt sich eine Abhängigkeit vom Druck p:

$$n = \frac{N}{V} \sim \rho \sim p$$

Damit folgt
$$\ell \sim \frac{1}{p}.$$

Um ein Verständnis für die Größenordnung der mittleren freien Weglänge zu bekommen berechnen wir sie am Beispiel Luft:

Luft besteht aus N_2 , O_2 mit einem Radius von $r \cong 10^{-10}\,\mathrm{m}$. Die Anzahl der Moleküle in einem Kubikmeter Luft unter Normalbedingungen wird durch die sogenannte **Loschmidtsche Zahl** angegeben:

$$N_L = \frac{N_A}{V_m} = 2{,}687 \cdot 10^{25}\,\mathrm{m}^{-3}$$

Dann beträgt der Wirkungsquerschnitt $\sigma = \pi(2r)^2$

$$\Rightarrow \qquad \sigma = 1{,}3 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{m}^2$$

mit
$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{n\sigma}$$

$$\Rightarrow \qquad \ell = 2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}.$$

Anschaulicher als diese Größe ist das Verhältnis der mittleren freien Weglänge zur Größe des Moleküls selber $\frac{\ell}{2r} \cong 1000$ bei dem Druck p_0. Mit steigendem Druck und damit steigender Dichte nimmt das Verhältnis mit $\frac{1}{p}$ ab.

XIII.2 Diffusion

Um die Diffusion zu verstehen, betrachten wir ein Gedankenexperiment:

Zwei Gasvolumen seien durch eine Wand voneinander getrennt. In Gas 1 herrsche die Teilchenzahldichte n_1. Sie sei größer als die Dichte n_2 in Gas 2.

$$n_1 > n_2$$

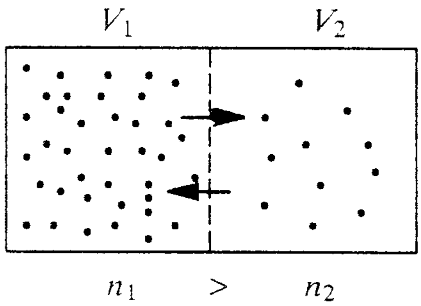


Abbildung XIII.3: Diffusion

Nun entfernen wir die Trennwand: Die Konzentration der Teilchen, sprich die Teilchenzahldichte gleicht sich aus, bis

$$n_1 = n_2.$$

Dabei fließt ein Teilchenstrom von Volumen 1 zu Volumen 2. Beschrieben wird dieser Fluß durch die Teilchenstromdichte j. Diese ist definiert als:

Definition XIII.2: Die Teilchenstromdichte j ist der Quotient aus der Zahl der Teilchen und dem Produkt aus Zeit und Fläche:

$$j = \frac{\text{Zahl der Teilchen}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}.$$

Da trotz der geringeren Konzentration in Gas 2 auch Teilchen von Gas 2 zu Gas 1 strömen, müssen wir den sogenannten Nettoteilchenstrom berechnen, d.h. den Teilchenstrom, der die endgültige Verschiebung der Teilchen angibt. Dieser ist immer positiv in Richtung des Konzentrationsgefälles:

Nettoteilchenstrom $$j = j(1 \to 2) - j(2 \to 1)$$

mit der Definition des Teilchenstroms und gleicher Zeit und Fläche für die Strömung in beide Richtungen gilt $$j = \Delta n$$

Allgemein gilt für die Diffusion das 1. Ficksche Gesetz:

$$\boxed{\text{1. Ficksches Gesetz:} \quad j = -D \cdot \frac{dn}{dx}.}$$

Wobei das Vorzeichen die Diffusion in Richtung des Konzentrationsgefälles beschreibt. D wird Diffusionskoeffizient genannt[1].

Vektoriell geschrieben lautet das 1. Ficksche Gesetz:

$$\boxed{\textbf{1. Ficksches Gesetz:} \quad \vec{j} = -D \cdot \operatorname{grad}\, n\,\textbf{.}}$$

Dieses Gesetz besagt, daß ein Teilchen in Richtung des Konzentrationsgefälles grad n fließt. Die kinetische Gastheorie liefert für D

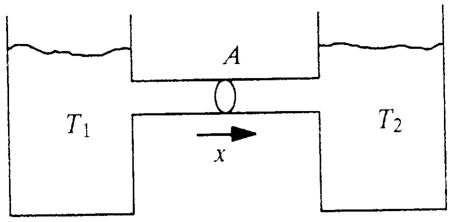
$$\boxed{\text{Diffusionskoeffizient } D = \frac{1}{3}\bar{v}\ell}$$

Anschaulich ist zumindest die Proportionalität verständlich: Die Teilchenstromdichte ist proportional zur mittleren Geschwindigkeit und zur mittleren freien Weglänge. Aus der kinetischen Gastheorie wissen wir, dass sie damit auch proportional zur Wurzel aus der Temperatur ($v \sim \sqrt{T}$) und mit der Überlegung aus XIII.1 proportional zu dem Kehrwert des Druckes ist ($\ell \sim \frac{1}{p}$). $$j \sim \sqrt{T} \cdot \frac{1}{p}$$

Der Faktor 1/3 rührt von den drei Dimensionen her.

XIII.3 Wärmeleitung

Auch zum Einstieg in dieses Kapitel betrachten wir ein Gedankenexperiment:



[1] Zur Herleitung dieses Gesetzes siehe Demtröder oder Gerthsen/ Vogel.

Zwei Behälter mit Wasser der Temperatur T_1 und T_2 werden durch einen Schlauch verbunden. Die Wärme strömt entlang des Temperaturgefälles. Zur Beschreibung dieses Vorgang definiert man den Begriff des Wärmestroms:

Abbildung XIII.4: Temperaturdifferenzen führen zu Wärmeleitung.

Definition XIII.3: Der Wärmestrom ist der Quotient aus Änderung der Wärme und der dafür benötigten Zeit: $\frac{dQ}{dt}$**.**

Beschrieben wird der Wärmestrom in Abhängigkeit von der Zeit durch eine Gleichung, die proportional sein muss zu der Fläche A, durch welche die Wärme strömen kann, und die proportional sein muß zur Temperaturdifferenz dT pro Weg dx. Die Proportionalitätskonstante wird Wärmeleitfähigkeit genannt und mit λ bezeichnet. Dann gilt

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dx}$$

Definiert man nun die Wärmestromdichte

Definition XIII.4: Die Wärmestromdichte j_Q ist der Quotient aus Wärmestrom und der Fläche, über die der Wärmestrom erfolgt:

$$j_Q = \frac{1}{A}\frac{dQ}{dt}.$$

Damit folgt

$$\Leftrightarrow \qquad j_Q = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

Allgemein gilt das Fouriersche Gesetz:

Fouriersches Gesetz: $\vec{j}_Q = -\lambda \cdot \operatorname{grad} T$

Aus Erfahrung weiß man, daß verschiedene Materialien verschiedene Wärmeleitfähigkeiten haben. Das zeigen wir kurz in einem Versuch:

Versuch XIII.1: Wärmeleitfähigkeit verschiedener Materialien

Vier gleich lange Stäbe unterschiedlichen Materials werden parallel in eine Halterung eingespannt. Nun werden die Stäbe gleich tief in flüssigen Stickstoff getaucht. Nach einigen Minuten, die zum Temperaturausgleich dienen, kann durch Anhauchen der Stäbe gezeigt werden, bis zu welcher Höhe deren Temperatur unter dem Gefrierpunkt liegt. Man beobachtet, daß Kupfer die Wärme viel besser leitet als Eisen oder Glas.

Die folgende Tabelle gibt die Wärmeleitfähigkeit für einige Materialien wieder:

Stoff	Wärmeleitfähigkeit in $\frac{W}{mK}$
Silber	421
Kupfer	384
Eisen	40
Glas	0,7
Wasser	0,6
Luft	0,03

Tabelle XIII.1: Wärmeleitfähigkeit verschiedener Materialien

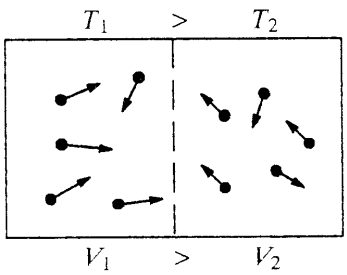


Abbildung XIII.5: Impulse der bewegten Teilchen

Die Erklärung der Wärmeleitung über das gaskinetische Bild macht das Phänomen der Wärmeleitung verständlich: Die kinetische Energie der Teilchen wird durch Stöße ausgeglichen. Die Rechnung[2] liefert die Beziehung

$$\lambda = \frac{1}{2} k n \bar{v} \ell$$

d.h. die Wärmeleitfähigkeit ist um so größer, je mehr Teilchen in dem Volumen sind und je schneller diese sich bewegen. Das Verhältnis $v \sim \sqrt{T}$ zeigt zudem, dass die Wärmeleitfähigkeit mit der Temperatur ansteigt.

In Metallen funktioniert die Wärmeleitung durch die Wärmeleitung der Elektronen. Die Anzahl der freien Elektronen ist damit nicht nur ein Maß der elektrischen Leitfähigkeit, sondern zudem ein Maß für die Wärmeleitfähigkeit.

XIII.4 Viskosität und Konvektionsstrom

Konvektion nennt man die Mitführung von Energie durch strömende Flüssigkeiten und Gase aufgrund eines Temperaturunterschiedes von einem Ort zum anderen. Im Gegensatz zur Wärmeleitung, die mikroskopischer Natur ist, ist die Konvektion makroskopisch. Sie überlagert deshalb häufig die Wärmeleitung. Durch Temperatur- oder Dichtunterschiede bilden sich sehr

[2] nachzulesen z.B. im Demtröder oder Gerthsen/Vogel

komplizierte Strömungsfelder, deren Beschreibung Aufgabe der Strömungslehre ist. Mit unseren Erkenntnissen aus Kapitel IX können wir ein Gesetz herleiten:

Für die innere Reibung galt $$F_R = A \cdot \eta \cdot \frac{dv}{dx}$$

mit $F = \dot{p}$ kann man $$\frac{F_R}{A} = \eta \cdot \frac{dv}{dx}$$

als Impulsstromdichte auffassen. Bezeichnet man die Impulsstromdichte mit j_p, so gilt

$$j_p = -\eta \cdot \frac{dv}{dx}$$

wobei das Vorzeichen wieder den Strom in Richtung des Geschwindigkeitsgefälles wiedergibt. Vektoriell:

$$\boxed{\textbf{Impulsstromdichte} \quad \vec{j}_p = -\eta \cdot \operatorname{grad} v}$$

Gaskinetisch kann man diese Gleichung deuten als Beschleunigung der Gasmoleküle quer zur Bewegungsrichtung zwischen fester und bewegter Fläche.

Nachdem wir die drei Transportphänomene besprochen haben, betrachten wir noch einmal die eingangs angesprochene Parallelität. Die Gesetze lauteten:

1. Ficksches Gesetz: $\vec{j} = -D \cdot \operatorname{grad} n$

Fouriersches Gesetz: $\vec{j}_Q = -\lambda \cdot \operatorname{grad} T$

Impulsstromdichte $\vec{j}_p = -\eta \cdot \operatorname{grad} v$

Diese Gesetze haben alle die Form

$$\vec{j}_i = -c \cdot \operatorname{grad} \varphi$$

wobei c eine Konstante und φ die transportierte Größe ist. Man kann diese Gesetze zusammenfassen in einer Tabelle:

$\vec{j}_i = -c \cdot \operatorname{grad} \varphi$			
	Diffusion	**Wärmeleitung**	**Konvektion**
$\vec{j}_i$	Teilchenstrom	Wärmestrom	Impulsstrom
φ	Teilchenzahldichte n	Temperatur T	Strömungsgeschwindigkeit v
c	Diffusionskoeffizient D	Wärmeleitfähigkeit λ	Viskosität η

Tabelle XIII.2: Zusammenfassung

XIII.5 Wärmestrahlung

Wie angekündigt wollen wir zum Schluß des Kapitels noch ein Phänomen betrachten, daß kein Transportphänomen in dem oben bezeichneten Sinn ist. In Abschnitt XIII.3 haben wir festgestellt, daß die Wärmeleitfähigkeit proportional zur Teilchendichte ist. Das bedeutet, daß Vakuum nicht leitet. Vor dem Hintergrund dieser Überlegung müssen wir uns fragen, warum dann unser Kaffee in der Thermoskanne, die einen Vakuummantel enthält, trotzdem abkühlt. Offensichtlich muß es noch ein anderes Phänomen geben, das Wärmeenergie transportiert.

Dieses Phänomen ist die Wärmestrahlung: Auch im Vakuum wird Wärme durch elektromagnetische Strahlung transportiert. Für einen schwarzen Körper gilt dabei das

Stefan-Boltzmann-Gesetz $$\frac{Strahlungsleistung\, S}{Fläche\, F} = \sigma \cdot T^4 .$$

σ bezeichnet hier nicht den Wirkungsquerschnitt sondern eine Konstante:

$$\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8} \frac{J}{m^2 s K^4} .$$

Genaue Messungen um die Jahrhundertwende führten zu der Entwicklung der Quantenmechanik. Ein Stichwort hier ist die Hohlraumstrahlung von Planck. Genaueres wird in Experimentalphysik III und IV besprochen.

An dieser Stelle sei nur der Zusammenhang zwischen der Wellenlänge der Strahlung und der Temperatur T angegeben:

Wiensches Gesetz: $$\lambda_{max} \cdot T = 2{,}898 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mK}$$

Der am besten ausgemessene Hohlraumstrahler ist die Hintergrundstrahlung unseres Alls. Bei einer Temperatur von T = 2,7 K ist die Wellenlänge des Strahlenmaximums $\lambda_{max} \cong 1\mathrm{mm}$. Die Sonne hat eine Temperatur von T = 6000 K und ein Strahlenmaximums $\lambda_{max} \cong 500\mathrm{nm}$.Das entspricht der Wellenlänge des grünen Lichts.

Nun betrachten wir noch zwei Versuche zur Wärmestrahlung:

Versuch XIII.2: Wunderkerzenanzünder

Bei diesem Versuch wird die Wärmestrahlung einer Heizsonne mittels eines Hohlspiegels fokussiert. In den Brennpunkt der Strahlung stellt man eine Wunderkerze. Die Wärme der Strahlung reicht aus, um die Wunderkerze zu entzünden.

Versuch XIII.3: Radiometer oder Lichtmühle

Eine Lichtmühle besteht aus einem kugelförmigen Gefäß, in dessen Mitte eine Achse steht. Auf dieser Achse sind vier quadratische Metallblättchen jeweils im rechten Winkel zueinander angebracht. Eine Seite der silbernen Blättchen ist geschwärzt, so dass sich je silberne und schwarze Flächen gegenüberstehen. Stahlt man nun mit einer Lampe auf diese Flügel, so beginnt die Mühle sich zu drehen und stoppt erst dann langsam wieder, wenn das Licht erlischt.

Diese Drehung wird nicht durch den Strahlungsdruck erzeugt. Wie bekannt ist, heizt sich eine schwarze Fläche durch die Wärmestrahlung stärker auf als eine helle. Somit werden die auf der schwarzen Fläche auftreffenden Moleküle stärker reflektiert als die auf einer hellen auftreffenden. Deshalb ist der Betrag der Impulsänderung der auf die schwarze Seite treffenden Moleküle größer. Es entsteht ein unterschiedlicher Kraftstoß, der einen Druckunterschied erzeugt. Die Flügel drehen sich so, daß die schwarze Seite sich von der Lichtquelle wegdreht.

Abschließend befassen wir uns noch einmal mit einer historischen Anwendung der Wärmestrahlung:

Archimedes, der bedeutendste griechische Physiker und Mathematiker, lebte von 285 v. Chr. bis 212 v. Chr. in Syrakus. Er ersetzte die statische Denkweise der Mathematik durch die dynamische und wurde so zum Begründer der Integralrechnung. Neben dem bereits besprochenen Archimedischen Prinzip fand der Grieche noch andere praktisch anwendbare Gesetzmäßigkeiten der Natur wie beispielsweise das Prinzip des Flaschenzugs. Eine dieser praktischen Anwendungen verhalf Archimedes einer Sage nach, die Belagerung der Hafenstadt von feindlichen römischen Schiffen niederzuschlagen. Hierzu soll er die feindlichen Schiffe mit riesigen Spiegeln in Brand gesteckt haben. Eine Rechnung mit den heute bekannten

Gesetzmäßigkeiten der Wärmestrahlung zeigt, dass dies trotz vieler Zweifel wirklich passiert sein könnte:

Die Solarkonstante beträgt $S = 1{,}37\,\frac{kW}{m^2}$.

Wenn Archimedes 100 Spiegel mit je 1 m^2 Fläche auf 1 m^2 Schiffswand fokussierte, so schaffte er einen Energiefluss auf die Schiffswand von $\frac{1}{A}\frac{dQ}{dt} = 137\,\frac{kW}{m^2}$.

Der Temperaturgradient in der Schiffswand errechnet sich dann mit

$$\frac{dQ}{dt} = \lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dx}.$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{dQ}{dt}\frac{1}{\lambda \cdot A} = \frac{dT}{dx}$$

mit einer Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 0{,}1\frac{W}{mK}$ und der Fläche von A = 1 m^2 folgt

$$\frac{dT}{dx} \cong 10^6\,\frac{K}{m}.$$

Für eine Oberflächentemperatur von 1000°C, also $\Delta T \cong 1000K$ ergibt sich Δx =1 mm

Schätzt man also die Eindringtiefe der Strahlung auf 1 mm ab, so ergibt sich aus

$$\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T$$

und dem Wert $c = 1{,}5\frac{J}{gK}$

eine Temperaturdifferenz von $\Delta T = 2 \cdot 10^2\,\Delta t$

In einer Zeit von 5 Sekunden kann damit eine Temperaturdifferenz von 1000 K erreicht werden: Genug um ein Schiff in Brand zu setzten.

Selbst wenn die Geschichte also stimmt, genützt hat der Trick Archimedes nichts: Der Mathematiker und Physiker starb 212 v. Chr., als er bei der Einnahme von Syrakus von einem römischen Soldaten erschlagen wurde.