

IX. Strömende Flüssigkeiten und Gase

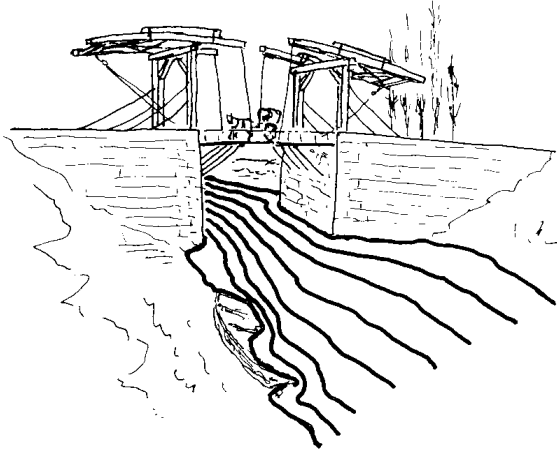


Abbildung IX.1: Im Alltag begegnet man oft strömenden Flüssigkeiten und kann deren Gesetzmäßigkeiten erkennen. In einem engen Querschnitt beispielsweise strömt das Wasser eines Flusses schneller als davor. Hinter Brücken bilden sich oft Wirbel. Dieses Verhalten strömender Flüssigkeiten wollen wir in diesem Kapitel näher untersuchen.

In Kapitel IIX haben wir nur ruhende Flüssigkeiten und Gase untersucht. Dabei konnten wir Gase und Flüssigkeiten meistens zusammen untersuchen. Das Gebiet der Physik, welches sich mit ruhenden Flüssigkeiten befasst wird *Hydrostatik*, die Beschäftigung mit ruhenden Gasen wird *Aerostatik* genannt.

Nun wollen wir die Bewegung von Flüssigkeiten und Gasen, also die Hydrodynamik und die Aerodynamik, untersuchen. Auch diese beiden Gebiete können weitgehend gemeinsam behandelt werden. Im Folgenden werden wir deshalb nur dann gesondert darauf hinweisen, wenn Aussagen, die für Flüssigkeiten hergeleitet werden, nicht für Gase

gelten. Da, wie wir gesehen haben, Gase eine recht große Kompressibilität besitzen, Flüssigkeiten hingegen inkompressibel sind, müssen wir bei den folgenden Berechnungen davon ausgehen, dass die betrachteten Geschwindigkeiten klein sind, und auch die wirkenden Drucke sollen so klein gewählt werden, dass die Kompression der Gase vernachlässigt werden kann. Eine vollständige Behandlung strömender Flüssigkeiten und Gase erfordert die Kenntnis aller wirkenden Kräfte, also insbesondere der Druckkräfte, der Schwerkraft und der Reibungskräfte.

Die hier hergeleiteten Näherungen sind also nur gut für kleine Geschwindigkeiten und kleine Drucke.

IX.1 Ideale stationäre Strömungen

Das Adjektiv "ideal" hatten wir bereits für Gase eingeführt. Dabei hatten wir ideale Gase definiert als Gase, in denen keine zwischenmolekularen Kräfte wirken. Analog wollen wir nun ideale Strömungen definieren als Strömungen, bei denen die Bindungskräfte zwischen den Molekülen ebenfalls vernachlässigt werden können, d.h. reibungsfreie Strömungen. Diese Darstellung stellt jedoch vor allem im Bezug auf Flüssigkeiten eine Vereinfachung dar, die in den folgenden Kapiteln korrigiert wird. Zunächst nehmen wir aber an, es sei bei der Bewegung

von Flüssigkeiten und Gasen keine Reibung und damit auch kein Verlust mechanischer Energie gegeben.

Strömungen können auf verschiedene Weisen dargestellt werden:

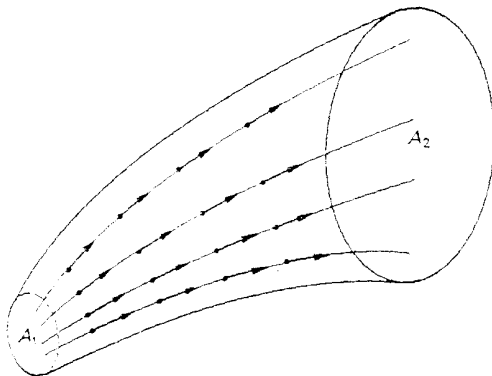


Abbildung IX.2: Stromröhre

Strombahnen, auch **Bahnlinien** genannt, geben die Bahn der Flüssigkeitsteilchen an. Man kann die Bahnlinien z.B. dadurch sichtbar machen, dass man Kork-Partikel in die Flüssigkeit gibt.

Stromlinien geben die Richtung der Geschwindigkeit Tangente an Stromlinie an. Aus der Mechanik können wir deshalb sagen, dass sie die Tangenten an die Stromlinien in jedem Punkt sind.

Aus dem Alltag weiß man, dass es verschiedene Arten von Strömungen gibt. Ein Beispiel ist die Wasserströmung in einem Fluss: Bei langsamer Strömung oder in der Mitte eines Flusses fließt das Wasser gradlinig. Ist ein Hindernis im Wasser, so strömt das Wasser darum herum und bildet unter Umständen Verwirbelungen. Diese verschiedenen Strömungen führen zu einer Dreierklassifizierung:

- Stationäre Strömung
- Laminare Strömung
- Turbulente Strömung

Beginnen wir zunächst mit der einfachsten Form der Strömung:

IX.1.1 Stationäre Strömungen

Bei stationären Strömungen fließen alle Wasserteile mit derselben Geschwindigkeit geradeaus in dieselbe Richtung. Gibt man kleine Kork- oder Aluminium- Körperchen in die Strömung, so fließen diese parallele Bahnen lang. Die Bahnlinien sind folglich Parallelen. Die Stromlinien, gegeben durch die Änderung der Geschwindigkeit, sind die Tangenten an diese Geraden, also mit den Parallelen identisch. Weder Stromlinien noch Strombahnen ändern sich mit der Zeit. Man kann bei stationären Strömungen deshalb das Geschwindigkeitsfeld sichtbar machen, denn sie entsprechen den Strombahnen.

Merke: Bei **stationären Strömungen** sind Stromlinien und Strombahnen identisch.

IX.1.2 Laminare Strömungen

Auch bei laminaren Strömungen kreuzen die Strombahnen sich nicht. Laminare Strömungen entstehen z.B. dadurch, dass Hindernisse in eine stationäre Strömung gebracht werden. Die Wasserteilchen müssen nun um das Hindernis herum strömen, sie ändern also ihre Richtung und auch ihre Geschwindigkeit.

Ist die Geschwindigkeit der stationären Strömung nicht zu groß, so entstehen hinter den

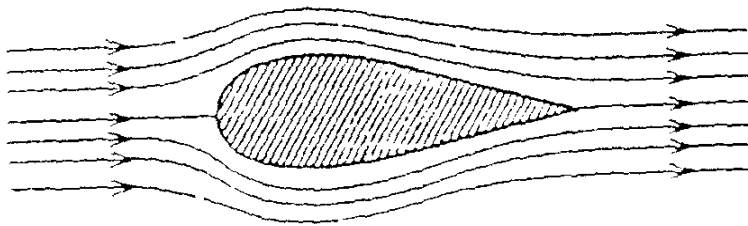


Abbildung IX.3: Strombahnen bei einer laminaren Strömung

Hindernissen keine Wirbel oder Turbulenzen. Dann werden diese Strömungen, bei denen Strombahnen nicht gleich Stromlinien sind, laminare Strömungen genannt.

Wir wollen in einem Versuch stationäre und laminare Strömungen sichtbar machen:

Versuch IX.1: Stromlinienapparat

Bei diesem Versuch wird ein Glaskasten von einer Flüssigkeit durchflossen. Zunächst befindet sich in dem oben offenen Kasten kein Hindernis. Da der Flüssigkeit emulgierende Teilchen zugesetzt sind, kann man die parallelen Strombahnen beobachten.

Nun werden nacheinander verschiedene Körper in die Strömung gebracht. Zunächst betrachten wir einen Quader: Wird der Quader mit einer Spitze in Strömungsrichtung gehalten, so teilt sich der Strom an dieser Spitze. Hinter dem Körper entstehen Wirbel. Dreht man den Quader mit einer Seite in die Strömung, so sind viel mehr Wirbel zu beobachten. Bei einem Keil hingegen, der auch mit der Spitze in Strömungsrichtung eingetaucht wird, entstehen nur wenig Wirbel an der flachen Rückseite. Zuletzt betrachten wir die Strömung um einen abgerundeten Keil, eine Art Flugzeugflügel herum. Hier entstehen keine Wirbel, man sieht eine laminare Strömung. Deutlich ist zu erkennen, dass die Teilchen um das Hindernis herumschwimmen und dabei ihre Richtung und Geschwindigkeit ändern.

Das ist einfach zu erklären: der Gesamtmassendurchfluss muss konstant bleiben, das bedeutet, dass jedes Wasserteilchen, das in den Behälter hineinfließt auch wieder herausfließen muss. Da das Volumen nicht verändert wird und auch die Dichte konstant bleibt, ist dies die logische

Schlussfolgerung. Die quantitative Untersuchung dieser Überlegung führt zur sogenannten *Kontinuitätsgleichung*:

IX.1.3 Kontinuitätsgleichung

Zur Berechnung der Änderung der Geschwindigkeit von Wasserteilchen, die einen veränderten Querschnitt passieren, gehen wir also von der Annahme aus, die Strömung sei laminar und die Kompressibilität κ sei null. Betrachten wir nun eine Flüssigkeit, die durch einen Schlauch fließt, der sich verengt.

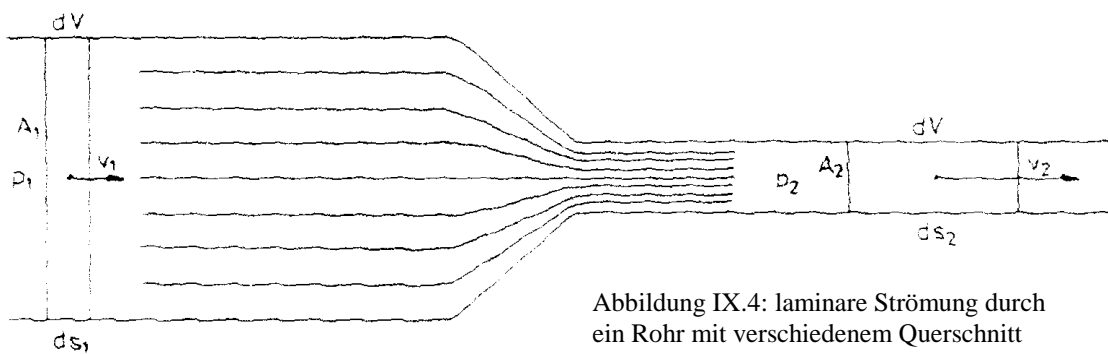


Abbildung IX.4: laminare Strömung durch ein Rohr mit verschiedenem Querschnitt

Für ein Volumenelement dV einer Flüssigkeit gilt:

$$dV = A_1 ds_1 = A_2 ds_2$$

Die in diesem Volumenelement befindliche Masse dM ist dann

$$dM = \rho dV$$

mit konstanter Dichte ρ .

Dann strömt durch die Fläche A_1 in der Zeit dt die Masse

$$\frac{dM}{dt} = \rho dV \frac{1}{dt}$$

Mit $dV_1 = A_1 ds_1$ folgt

$$\frac{dM}{dt} = \rho A_1 \frac{ds_1}{dt}$$

Die Massenerhaltung besagt, dass dieselbe Masse pro Zeit auch durch die geringere Querschnittsfläche A_2 fließen muss.

Also gilt

$$\rho A_2 \frac{ds_2}{dt} = \rho A_1 \frac{ds_1}{dt}$$

$$\Leftrightarrow A_2 \frac{ds_2}{dt} = A_1 \frac{ds_1}{dt}$$

mit $v_i = \frac{ds_i}{dt}$ $\Rightarrow A_2 v_2 = A_1 v_1$

wenn die Dichte konstant, also κ gleich null ist.

Das Verhältnis von Querschnittsfläche und der Geschwindigkeiten ist also umgekehrt proportional. Diese Formel wird Kontinuitätsgleichung genannt; sie gilt aber nur für $\kappa = 0$.

Kontinuitätsgleichung für inkompressible Flüssigkeiten: $\frac{A_1 v_1}{A_2 v_2} = 1$

Die Ursache der Geschwindigkeitserhöhung ist eine Druckdifferenz $\Delta p = p_2 - p_1$.

IX.2 Bernoullische Gleichung

Die Druckdifferenz wurde zuerst von D. Bernoulli (1700 - 1782) berechnet. Seine Lösung ist als Bernoullische Gleichung bekannt; auch sie gilt nur für ideale, inkompressible Flüssigkeiten.

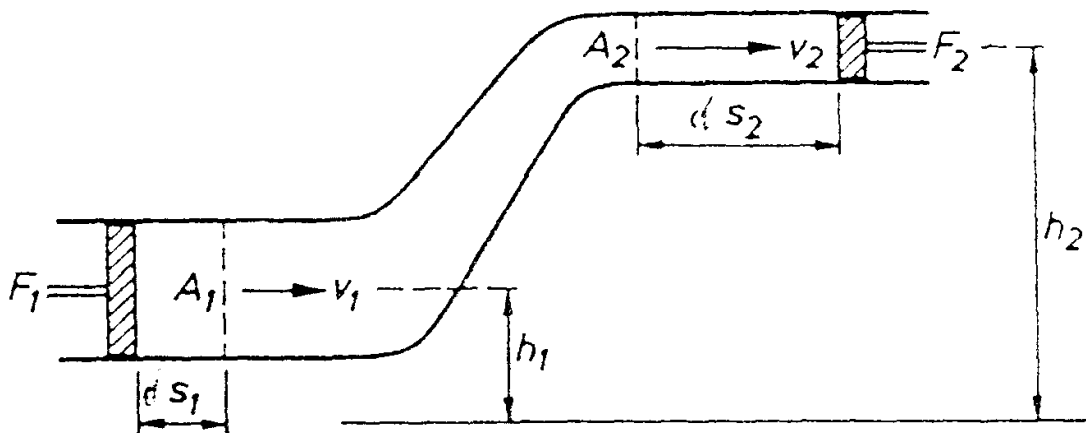


Abbildung IX.5: laminare Strömung durch ein ansteigendes Rohr mit verändertem Querschnitt

Um die Druckdifferenz $\Delta p = p_2 - p_1$ berechnen zu können, betrachten wir wieder Volumenelemente einer Flüssigkeit in einem Schlauch mit sich verengendem Querschnitt. Zugleich wollen wir aber die Annahme fallen lassen, der Schweredruck sei vernachlässigbar. Wir setzen also voraus, der Schlauch steige um eine Höhe Δh an. Der Schweredruck soll berücksichtigt werden.

Aus der Annahme der Inkompressibilität $\kappa = 0$ können wir mit

$$dm = \rho dV$$

direkt angeben
$$dV_1 = dV_2 = \frac{dm}{\rho}$$

Aus der Berechnung für die Kontinuitätsgleichung kennen wir die Gleichung

$$A_1 ds_1 = A_2 ds_2$$

Stellen wir uns vor, die Volumenänderungen dV würden durch Kolben vorgenommen. Die Verschiebungsarbeiten, die geleistet werden, um die Volumen zu verändern, sind gegeben als Produkt aus aufgewendeter (konstanter) Kraft und zurückgelegter (gradliniger) Strecke:

$$dW_1 = F_1 ds_1$$

Mit der Definition des Drucks als Kraft pro Fläche folgt

$$dW_1 = p_1 A_1 ds_1$$

und mit $dV_1 = A_1 ds_1$ folgt
$$dW_1 = p_1 dV.$$

Analog gilt
$$dW_2 = p_2 dV$$

Wegen der Energieerhaltung muss die zusätzliche Geschwindigkeit, bzw. kinetische Energie dW_k und die Höhe, bzw. potentielle Energie dW_p von der geleisteten Arbeit dW_1 aufgebracht werden:

$$dW_1 = dW_2 + dW_p + dW_k \text{ Energiesatz}$$

Die potentielle Energie im Schwerfeld können wir direkt angeben mit

$$dW_p = dm \cdot g(h_2 - h_1)$$

$$\Leftrightarrow dW_p = \rho \cdot dV \cdot g(h_2 - h_1)$$

Die kinetische Energie aufgrund der Strömungsgeschwindigkeit beträgt

$$dW_k = \frac{dm}{2}(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Leftrightarrow dW_k = \frac{1}{2}\rho \cdot dV(v_2^2 - v_1^2)$$

Einsetzen in die Gleichung der Energieerhaltung liefert:

$$p_1 dV = p_2 dV + \rho g (h_2 - h_1) dV + \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) dV$$

$$\Leftrightarrow p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$\Rightarrow \boxed{p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const}}$$

Merke: Für strömende, inkompressible und ideale Flüssigkeit gilt die **Bernoulli-Gleichung**

$$p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const}$$

Diese Gleichung gilt eigentlich nur für ideale Flüssigkeiten mit $\kappa = 0$, ist aber häufig auch für reale Flüssigkeiten eine sehr gute Näherung, solange v , κ und die innere Reibung nicht zu groß sind.

p gibt den **hydrostatischen Druck** an, also den Druck auf ein mitbewegtes Volumenelement.

$\rho g h$ gibt den **Schweredruck** an.

$\frac{1}{2} \rho v^2$ gibt den **hydrodynamischen Druck**, auch "Staudruck" genannt, an.

Mit dem Schweredruck haben wir uns schon beschäftigt: $\rho g h$ nimmt mit der Höhe zu, d.h. der hydrostatische Druck nimmt mit h ab.

Im Folgenden wollen wir den hydrodynamischen Druck, d.h. den Staudruck näher untersuchen. Da wir den Schweredruck bereits analysiert haben, setzen wir nun zur Vereinfachung den Höhenunterschied, den das Wasser überbrücken muss gleich null: $\Delta h = 0$. Wir betrachten damit wieder ein Rohr, dessen Querschnitt sich ändert, analog zu den Betrachtungen von Seite. Bei dieser Untersuchung hatten wir festgestellt, dass die Querschnitte des durchflossenen Rohres umgekehrt proportional sind zu den Strömungsgeschwindigkeiten.

Aus der Bernoulli-Gleichung
$$p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const.}$$

folgt mit $\Delta h = 0$
$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const.}$$

Betrachten wir ein Rohr mit dem Querschnitt A_1 , in dem eine Flüssigkeit mit der Strömungsgeschwindigkeit v_1 fließt. Dann herrscht dort ein hydrostatischer Druck p_1 . An dieser

Stelle des Rohres gilt nach Bernoulli
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \text{const.}$$

In einem engeren Stück des Rohres nimmt die Geschwindigkeit zu. Hier gilt

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = \text{const.}$$

Insgesamt gilt dann für das Verhältnis der beiden Gesamtdrucke

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_2 - p_1.$$

Mit $v_1 > v_2$ gilt
$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2 > 0$$

Daraus folgt
$$p_2 - p_1 > 0$$

$$\Leftrightarrow p_2 > p_1$$

An der Einschnürung eines von einer Flüssigkeit durchflossenen Rohres nimmt der hydrostatische Druck p also ab.

Merke: Der Querschnitt eines Rohres und die Geschwindigkeit einer darin strömenden Flüssigkeit sind umgekehrt proportional.

Der Querschnitt eines Rohres und der hydrostatische Druck einer darin strömenden Flüssigkeit sind proportional.

Zu diesem Phänomen können einige Versuche betrachtet werden:

Versuch IX.2: Statischer Druck

Ziel dieses Versuches ist es, qualitativ zu bewahren, dass bei einer Querschnittsverjüngung eines Rohres der hydrostatische Druck abnimmt. Hierzu betrachten wir folgenden Versuchsaufbau: Drei Röhren mit gleichem Durchmesser sind senkrecht auf einem dickeren Röhren befestigt, wobei eine Verbindung zum waagerechten Rohr besteht. Nun wird das waagerechte Rohr mit einem Schlauch verbunden und mit Wasser gefüllt. Trennt man dann die Wasserversorgung ab, ruht also die Flüssigkeit in dem Rohr, so steht die Flüssigkeit in allen drei Röhren gleich hoch.

Dann wird der Schlauch wieder angeschlossen und das Wasser strömt. Man kann beobachten, dass die Wassersäule im ersten Röhrchen höher steht als im zweiten, und in diesem wiederum höher als im dritten. Offensichtlich findet ein Druckabfall statt, obwohl keine Querschnittsverengung des Rohres existiert. Der lineare Druckabfall rührt offensichtlich von einer Art Reibung her, die im Innern der Flüssigkeit stattfinden muss. Diese Beobachtung werden wir später gesondert untersuchen. Zunächst markieren wir die so ermittelte Steighöhe in jedem Röhrchen. Die Verbindung der Höhenmarkierungen führt zu einer Geraden.

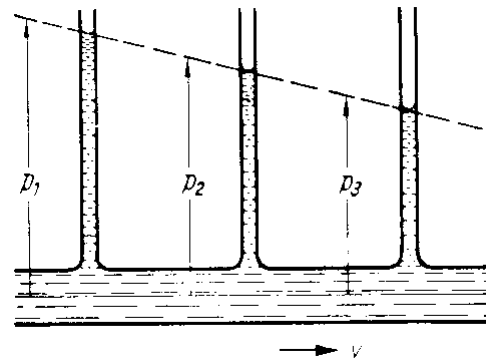


Abbildung IX.6a: Je weiter die Röhrchen in Strömungsrichtung verschoben sind, desto niedriger steigt das Wasser.

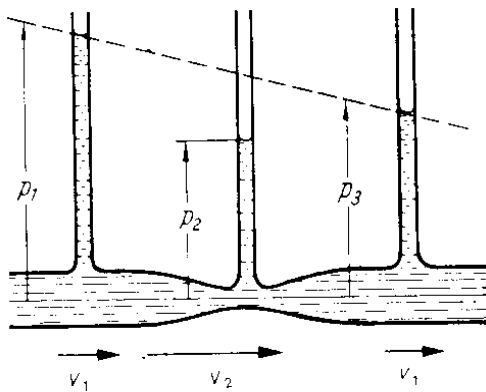


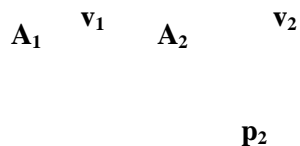
Abbildung IX. 6b: Druckverteilung in einem durchströmten Rohr mit einer Einschnürung.

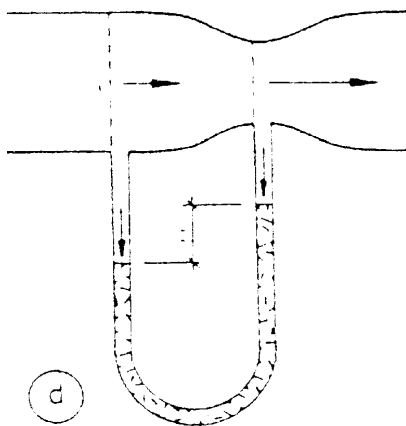
Nun verwenden wir einen anderen Versuchsaufbau, der nur durch eine Querschnittsverjüngung des waagerechten Rohres unterhalb des mittleren Röhrchens von dem ersten abweicht. Lassen wir nun Wasser durch das Rohr strömen, so sehen wir, dass im mittleren Rohr der niedrigste Pegel angezeigt wird. Die zuvor ermittelte Gerade, die den Druckabfall durch Reibung angibt, zeigt, dass Rohr 1 und Rohr 3 denselben hydrostatischen Druck haben, nur bei der Verringerung des Querschnitts sinkt die Wassersäule.

Analog kann man ein Rohr verwenden, das in der Mitte einen größeren Querschnitt hat, als an den Seiten. Dann steigt das Wasser in der Mitte höher.

Um die verschiedenen Drücke zu messen, die in einer strömenden Flüssigkeit herrschen, kann man verschiedene Druckmesssonden verwenden. Mithilfe dieser Druckmesssonden versuchen wir nun, die Druckverhältnisse experimentell zu bestimmen:

Versuch IX.3: Druckmesssonden





Zunächst betrachten wir noch einmal die Strömung durch ein horizontales Rohr mit Verengung. Wir hatten qualitativ ermittelt, dass der hydrostatische Druck in der Taille des Rohres am kleinsten sein muss, da die Strömungsgeschwindigkeit dort am größten ist. Um dies nun auch quantitativ zu messen, benutzen wir eine sogenannte **Venturi - Düse**. (Bild d) Diese Düse misst die Durchflussrate. Die Messung der Druckdifferenz vor und in der Verengung genügt uns, um die

Strömungsgeschwindigkeit berechnen zu können:

Aus

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v_2^2 = p_2 - p_1.$$

folgt mit $v_1 A_1 = v_2 A_2$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)$$

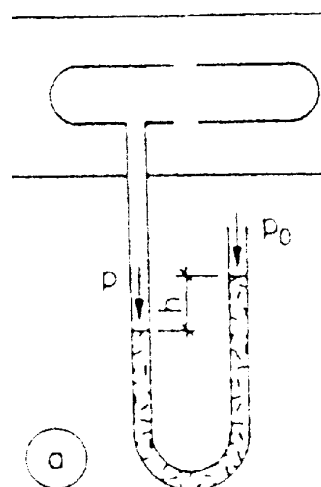
und damit gilt für die Geschwindigkeit

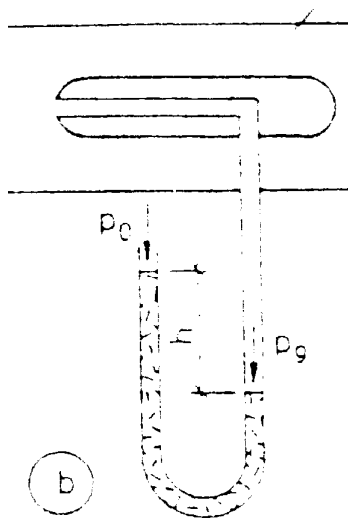
$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)}}.$$

Eine andere Möglichkeit, den hydrostatischen Druck zu messen, bietet die Sonde in Bild a. Mit dieser Sonde kann der statische Druck des vorbeiströmenden Mediums gemessen werden. Wenn der Außendruck p_0 bekannt ist, berechnet sich aus der Höhendifferenz der beiden Wassersäulen mit

$$p = p_0 + \rho_{\text{Fl}} g h$$

der hydrostatische Druck p .





Mit Hilfe des **Pilot-Rohres** (Bild b) misst man den Druck im Stauegebiet. Die Öffnung der Sonde ist vorn, wo die Stauung eintritt, so dass dort die Strömungsgeschwindigkeit $v_1 = 0$ herrscht.

Aus
$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_2 - p_1$$

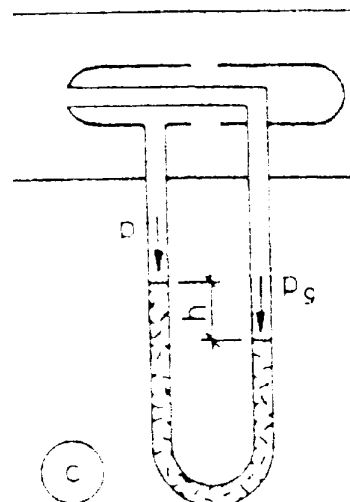
folgt mit $v_1 = 0$
$$-\frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_2 - p_1.$$

Der hydrostatische Druck p_1 in der Sonde ist damit

$$p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 .$$

Mit dieser Sonde kann man den Gesamtdruck messen.

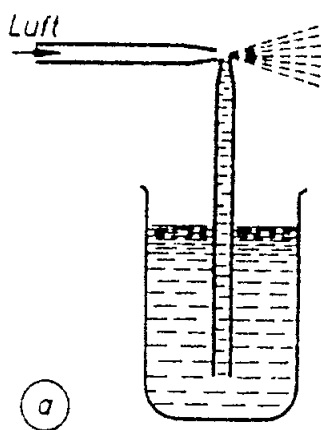
Eine Messung des Staudrucks kann man mit dem **Praudtl'schen Staurohr** (Bild c) vornehmen. Diese Sonde ist eine Kombination aus Sonde a und b. Hiermit misst man den Staudruck



$$\frac{1}{2}\rho v^2 = p_g - p .$$

Mit dieser Gleichung kann man dann die Strömungsgeschwindigkeit berechnen:

$$v = \sqrt{\frac{2(p_g - p)}{\rho}} .$$



Diese Eigenschaften strömender Flüssigkeiten und Gase macht man sich bei verschiedenen Anwendungen zu nutze. Bei einem Zerstäuber wird mit Hilfe des Unterdrucks eine Flüssigkeit aus einem Behälter hochgehoben.

Dieses Prinzip wird in großem Umfang bei Wasserstrahlpumpen verwandt: Ein

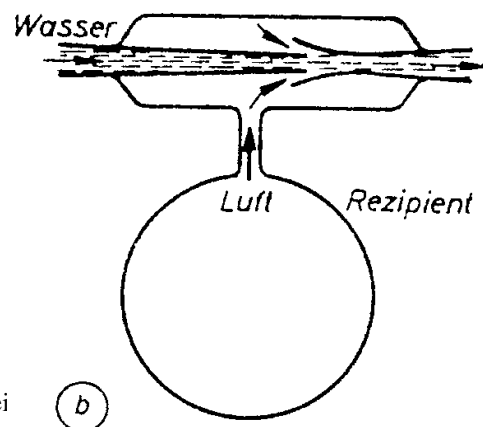


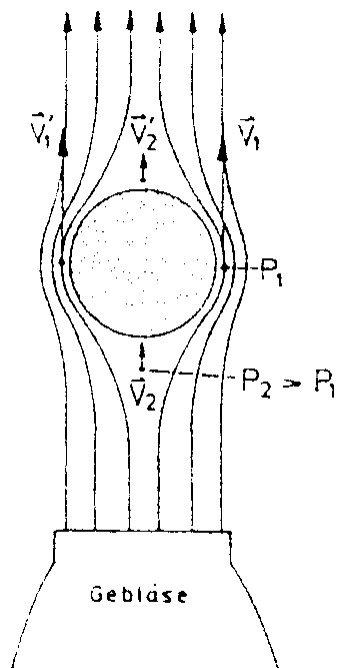
Abbildung IX.8: Zerstäuber als Anwendungsbeispiel für Unterdruck durch Querschnittsverengung

Abbildung IX.9: Wasserstrahlpumpe

Wasserstrahl fließt hierbei durch eine Verengung und erzeugt damit einen Unterdruck. Von diesem Unterdruck angesaugt, steigt eine Flüssigkeit oder ein Gas aus einem Behälter nach oben. Wendet man dieses Prinzip auf ein mit Gas gefülltes Gefäß an, so erhält man eine einfache Vakuumpumpe.

Versuch IX.4: Schwebender Styroporball

Durch Unterdruck kann man auch Körper in strömenden Gasen stabilisieren. Bei unserem Versuch wird ein Styroporball in den Luftstrahl eines Gebläses gebracht.



Der Styroporball wird im Luftstrahl durch Unterdruck stabilisiert da der Luftdruck p_2 , an der Stelle, an der sich die Luft unterhalb der Kugel staut, kleiner ist als der

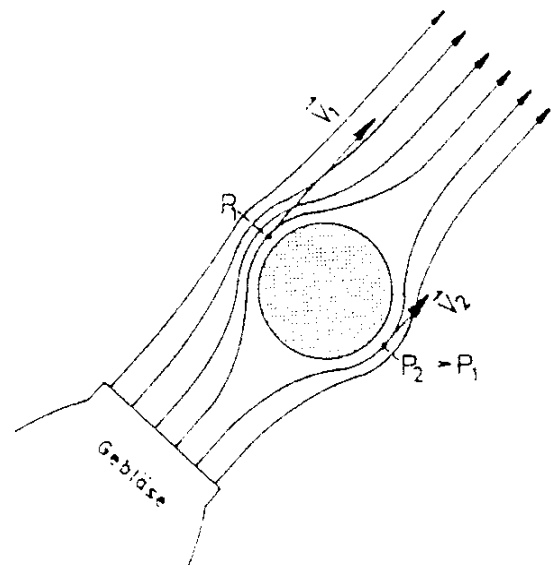


Abbildung IX.10: Ein leichter Ball kann in einem Luftstrom schweben.

vorbeifließenden Luft. So entsteht durch den Unterdruck eine Gleichgewichtslage, in die der Ball auch nach einer Ablenkung zurück fliegt. Auch in einem geneigten Luftstrom wird der Ball noch gehalten.

IX.3 Laminare Strömungen realer Flüssigkeiten

Wie wir bereits in Versuch IX.2 gesehen haben, kann die Reibung bei der Betrachtung von strömender Flüssigkeit nicht vernachlässigt werden. Im Folgenden werden wir deshalb von der

Idealisierung der Flüssigkeiten, also Flüssigkeiten ohne Reibung, zu realen Flüssigkeiten, d.h. Flüssigkeiten mit zwischenmolekularen Kräften und damit mit Reibung, übergehen.

IX.3.1 Das Newtonsche Reibungsgesetz

In einem Gedankenexperiment betrachten wir zwei parallele Platten, zwischen denen sich eine Flüssigkeit befindet. Die Platte (CD) wird mit einer konstanten Kraft F an Fläche (AB) entlanggezogen.

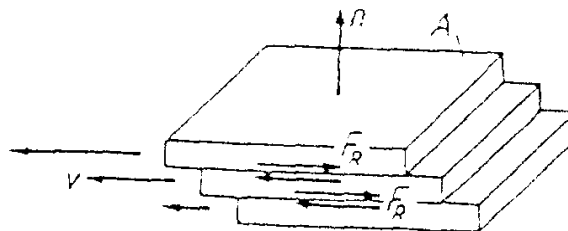
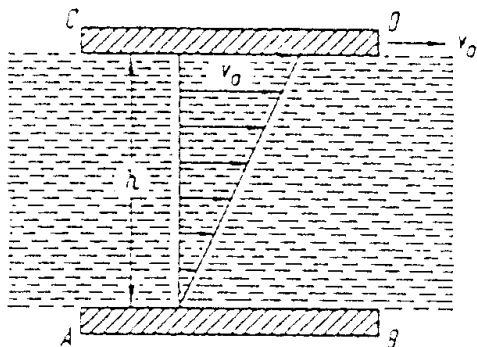


Abbildung IX.11: Die Flüssigkeitsschichten gleiten mit Reibung aneinander entlang (Schichten \rightarrow laminar).

Die Platte bewegt sich (nach kurzer Anfangsphase) mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{v}_0$.

Zwischen Platte und Fläche bildet sich ein Geschwindigkeitsgefälle $\frac{dv}{dh}$ aus, weil die Moleküle

an der bewegten Platte haften und mitgezogen werden. Obwohl eine konstante Kraft Ursache der Bewegung ist, findet keine Beschleunigung statt. Dieses Phänomen hatten wir schon bei der Reibung für Festkörper angesprochen. Offensichtlich wirkt eine Reibungskraft der Zugkraft F entgegen und ist dieser entgegengesetzt gleich groß.

Empirisch findet man zudem noch zwei weitere Besonderheiten:

1) Die Reibungskraft F_R ist proportional zur Fläche A der Platten:

$$F_R \sim A$$

2) Die Reibungskraft ist proportional zur Änderung der Geschwindigkeit mit dem Abstand h

von der bewegten Fläche:

$$F_R \sim \frac{dv}{dh}$$

Zusammengefasst führen diese Beobachtungen zu einem Kraftgesetz der Form

$$F_R \sim A \frac{dv}{dh}$$

Die Proportionalitätskonstante ist eine Materialkonstante. Sie ist der **Koeffizient der inneren Reibung** und wird **Viskosität** oder **dynamische Zähigkeit** genannt und mit η bezeichnet.

Der gesamte Vorgang wird also durch das empirische Gesetz beschrieben

$$\boxed{F_R = \eta A \frac{dv}{dh}} \quad \text{Newtonsches Reibungsgesetz}$$

Merke: Die Reibung innere Reibung einer Flüssigkeit wird angegeben durch das

$$\text{Newtonsche Reibungsgesetz: } F_R = \eta A \frac{dv}{dh}$$

Einheitenbetrachtung:

Die Einheit der Viskosität ist: $[\eta] = 1 \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ im SI.

Als alte Einheit wird gelegentlich noch 1 Poise verwendet mit $1 \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 10 \text{ Poise}$.

Notation IX.1: Der Kehrwert der Viskosität η wird **Fluidität** genannt.

Die Viskosität von Flüssigkeit ist stark temperaturabhängig. Bei Motorenöl z.b. wird die Viskosität für bestimmte Temperaturbereiche angegeben. Als Beispiel sei hier nur die Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Wasser und Glycerin angeführt:

	$\eta(t)$ von Wasser in m Pa s	$\eta(t)$ von Glycerin in m Pa s
$t = 0^\circ$	1.79	12100
$t = 20^\circ$	1.002	1480
$t = 100^\circ$	0.282	14.8

Tabelle IX.1: Temperaturabhängigkeit der Viskosität

Eine direkte Überprüfung dieses Reibungsgesetzes ist sehr schwer, obwohl es qualitativ einsichtig ist, z.B. wenn ein Löffel aus Honig gezogen wird. Um uns dennoch dem Gesetz quantitativ zu nähern, betrachten wir folgenden Spezialfall laminarer Strömung mit Reibung:

IX.3.2 Anwendung des Reibungsgesetzes: Strömung durch ein Rohr

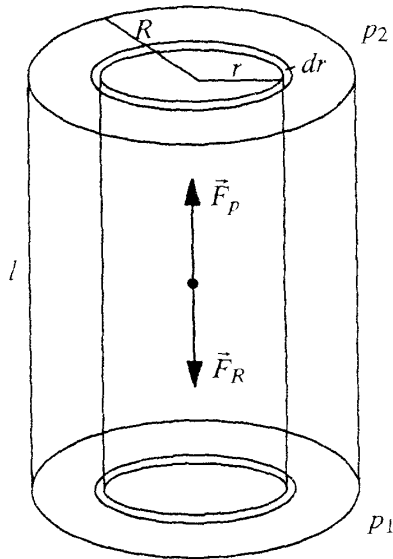


Abbildung IX.12:
zylindrisches
Flüssigkeitselement mit
Radius r in einem Rohr des
Radius R

Das Newtonsche Reibungsgesetz kann genutzt werden, um die Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit, z.B. durch ein Rohr zu berechnen. Diese Berechnung wurde von zwei Wissenschaftlern, Hagen, einem Ingenieur, und Poiseuille, einem Arzt, im Jahr 1840 durchgeführt.

Für die Berechnung betrachten wir ein Rohr mit dem Radius R . Das Rohr habe die Länge l .

Zwischen den beiden Enden des Rohres herrsche eine Druckdifferenz $p_2 - p_1$. Diese Druckdifferenz ist die Ursache für eine Strömung durch das Rohr, sie erzeugt eine Kraft F_p .

$$\text{Aus } p_1 - p_2 = \frac{F_p}{A} \text{ folgt}$$

$$F_p = \pi r^2 (p_1 - p_2)$$

Betrachten wir nun einen Ausschnitt der strömenden Flüssigkeit. Hierzu wählen wir einen Flüssigkeitszylinder, der konzentrisch im Rohr liegt. Zunächst berechnen wir mit dem Newtonschen Reibungsgesetz die Reibungskraft am Flüssigkeitszylinder mit Radius r und Länge l :

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dr}$$

mit der Mantelfläche

$$A = 2 \pi r l$$

folgt

$$F_R = \eta 2 \pi r l \frac{dv}{dr}$$

Die Reibungskraft F_R muss im Gleichgewicht (stationäre Strömung) entgegengesetzt gleich der Druckkraft F_p sein, mit der die Druckdifferenz $p_1 - p_2$ auf den Flüssigkeitszylinder wirkt:

$$\vec{F}_p = -\vec{F}_R$$

Wir können die Bewegung der Wasserteilchen als lineare Bewegung durch das Rohr ansehen, deshalb betrachten wir nur die Komponenten der Kräfte entlang ℓ .

Es folgt
$$\pi r^2 (p_1 - p_2) = -\eta 2 \pi r \ell \frac{dv}{dr}$$

Die Geschwindigkeitsverteilung $\frac{dv}{dr}$ ist noch unbekannt. Um zu berechnen, wie sich die

Strömungsgeschwindigkeit mit der Entfernung vom Rohrmantel verändert, müssen wir diese Formel nach v auflösen. Dazu berechnen wir die

Differentialgleichung für $v(r)$

$$\frac{dv(r)}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta\ell} r$$

$$\Leftrightarrow \int_{v_r}^{v_R} dv(r) = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta\ell} \int_r^R r dr$$

Mit den Randbedingungen $v_R = 0$, denn die äußersten Flüssigkeitsmoleküle haften am Rohr, ergibt sich daraus

$$0 - v_r = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta\ell} \frac{1}{2} (R^2 - r^2)$$

$$\Leftrightarrow v_r = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta\ell} (R^2 - r^2)$$

Diese Gleichung gibt die Geschwindigkeitsverteilung in Abhängigkeit

vom Abstand zum Rohr an.

Dieses Gesetz stellt eine parabolische Geschwindigkeitsverteilung $v_r(r)$ mit

$$v(R) = 0 \quad \text{und} \quad v_0(r=0) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta\ell} R^2 \quad \text{dar.}$$

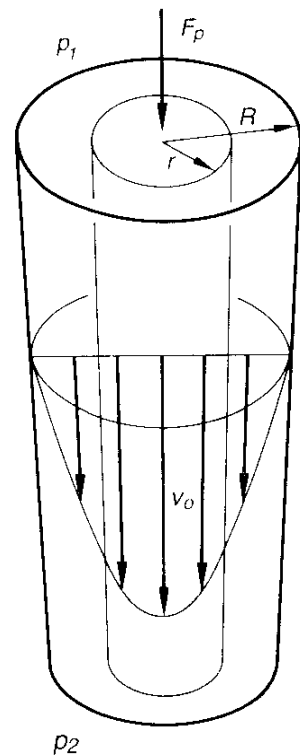


Abbildung IX.13:
parabolische
Geschwindigkeitsverteilung

Wie groß ist nun der Gesamtstrom durch das Rohr? Um diese Frage zu beantworten, berechnet man die Flüssigkeitsmenge dV , die in einer vorgegebenen Zeit t durch den Rohrquerschnitt zwischen r und $r + dr$ fließt:

$$dV = dA \cdot v(r) \cdot t$$

Mit

$$dA = 2\pi r \cdot dr$$

folgt

$$dV = 2\pi r dr v_r t.$$

Dann fließt durch das ganze Rohr

$$V = \int_0^{V(R)} dV$$

$$\Leftrightarrow V = 2\pi t \int_0^R r \cdot dr \cdot v(r)$$

$$\Leftrightarrow V = 2\pi t \int_0^R \frac{p_1 - p_2}{2\eta \ell} (R^2 - r^2) r \, dr$$

$$\Leftrightarrow V = t\pi \frac{p_1 - p_2}{2\eta \ell} \int_0^R (R^2 - r^2) r \, dr$$

$$\Leftrightarrow V = t\pi \frac{p_1 - p_2}{2\eta \ell} \left[\int_0^R R^2 r \, dr - \int_0^R r^3 \, dr \right]$$

Ausrechnen des Integrals und dividieren durch ergibt

Hagen-Poiseuille

$$I = \frac{V}{t} = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8\eta \ell} R^4$$

Dieses Gesetz gibt die Stromstärke im Rohr mit R an und ist nach den Wissenschaftlern benannt, die es zuerst aufstellten.

Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit \bar{v} ergibt sich aus der Definition

Definition IX.1: Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit \bar{v} ist definiert als
Stromstärke durch die durchflossene Fläche A : $I = A \cdot \bar{v}$

Mit dieser Definition berechnet sich die mittlere Strömungsgeschwindigkeit als

$$I = A \cdot \bar{v}$$

$$\Leftrightarrow I = \pi R^2 \bar{v}$$

Einsetzen von I führt zu

$$\pi R^2 \bar{v} = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8\eta \ell} R^4$$

$$\Leftrightarrow F_R = A (p_1 - p_2)$$

$$\Leftrightarrow F_R = \pi R^2 (p_1 - p_2)$$

$$\Leftrightarrow F_R = 8 \pi \eta \ell \bar{v}$$

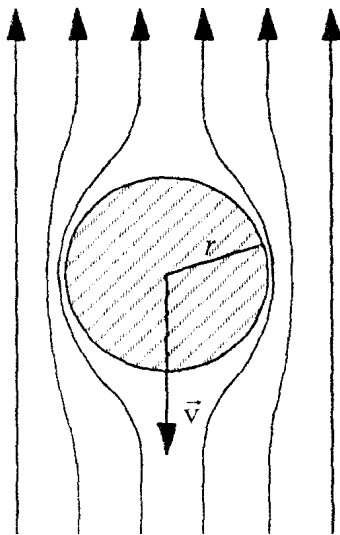
Der Druckabfall lässt sich berechnen aus

$$(p_1 - p_2) = 8 \eta \ell \bar{v} \frac{1}{R^2}$$

Dieser Reibungswiderstand ist für das lineare Druckgefälle in einem Rohr verantwortlich, welches wir bereits in Versuch IX.2 beobachtet haben.

Aus $\bar{v} = \text{const.}$ folgt
$$\Delta p = \frac{F_R}{A} = \text{const} \cdot \ell .$$

IX.3.3 Stokes'sches Gesetz



Eine ähnliche, aber leider kompliziertere Rechnung liefert für eine Kugel vom Radius r in einer laminaren Strömung das Reibungsgesetz

$$\vec{F}_R = -6\pi\eta r \vec{v}$$

wobei \vec{v} die Relativgeschwindigkeit der Kugel gegen die Flüssigkeit ist. Die Reibungskraft ist der Stokes'schen Reibung also proportional zur Geschwindigkeit.

Abbildung IX.14: Reibung einer Kugel, die sich relativ zu einer Flüssigkeit bewegt

Betrachten wir zu diesem Reibungsgesetz einen Versuch:

Versuch IX.5: Stokes'sche Reibung

Bei diesem Versuch soll die Sinkgeschwindigkeit verschiedener Kugel in einer zähen Flüssigkeit gemessen werden. Für den Versuchsaufbau benötigen wir einen Zylinder, der mit einer zähen Flüssigkeit gefüllt ist, mehrere Kugeln mit verschiedenem Durchmesser desselben Materials und eine Stoppuhr. Auf dem Zylinder sind zwei Messmarken angebracht. Während des Versuchs soll die Zeit gestoppt werden, die die Kugeln brauchen, um den Weg zwischen den beiden Markierungen zurückzulegen. Die erste Markierung ist nicht an der Oberfläche der Flüssigkeit angebracht, damit sich erst ein Gleichgewicht einstellen kann.

Die Kugeln werden von der Gewichtskraft F_G nach unten angezogen. Dem entgegen wirken die Reibungs- und Auftriebskraft F_R und F_A .

Für die Kräfte gilt
$$F_G = \rho_K V_K g ,$$

$$F_R = 6\pi\eta r \bar{v}$$

und

$$F_A = \rho_{FL} V_K g ,$$

wobei der Index $_K$ die Größen der Kugel und der Index $_{FL}$ die Konstanten der Flüssigkeit bezeichnet.

Für die Sinkgeschwindigkeit ergibt sich mittels der Kräftebetrachtung ein Wert von

$$\bar{v} = \frac{2}{9} g (\rho_K - \rho_{Fl}) r_K^2$$

Der Versuch mit verschiedenen Kugeln bestätigte, dass die Sinkgeschwindigkeit proportional zum Quadrat der Radien der Kugeln ist.

IX.4 Turbulente Strömungen

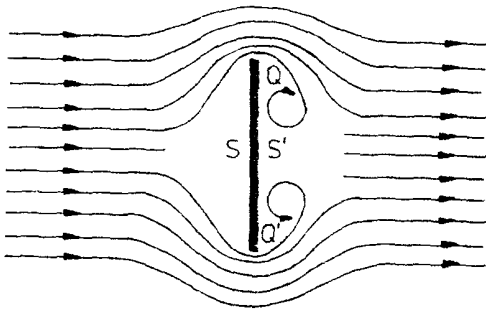


Abbildung IX.15: turbulente Strömung hinter einem Hindernis

Wir hatten am Anfang des Kapitels bereits festgestellt, dass man eine Strömung dann turbulent nennt, wenn die Flüssigkeit durchmischt wird. Das bedeutet, dass die Fortbewegung in die Strömungsrichtung überlagert wird von dazu quer verlaufenden Bewegungen.

Bei einem Versuch hatten wir beobachtet, dass laminare Strömung ab einer gewissen Geschwindigkeit in turbulente Strömung

umschlagen kann. Das liegt daran, dass die Druckdifferenz der strömenden Flüssigkeit vor und neben dem Hindernis so groß wird, dass dahinter Wirbel entstehen. Aufgrund der Drehimpulserhaltung setzen sich die Wirbel nach hinten fort.

Wir hatten ebenfalls festgestellt, dass an einem Körper in einer strömenden Flüssigkeit ein Reibungswiderstand entsteht. Unmittelbar am Körper haftet die Flüssigkeit fest. Die relative Geschwindigkeit zwischen Körper und Flüssigkeit ist also dort null. In der Grenzschicht steigt die Geschwindigkeit auf den Wert der ungestörten Strömung. In dieser Grenzschicht entsteht durch die innere Haftung der Flüssigkeit der Reibungswiderstand.

Neben dem Reibungswiderstand ist der sogenannte Druckwiderstand von größter Bedeutung. Bewegt ein Körper sich relativ zu einer Flüssigkeit, so bilden sich, wie eben erläutert, an seiner Rückseite Wirbel. Diese lösen sich vom Körper und wandern weg. Durch diese Wirbelbildung entsteht der Druckwiderstand.

Will man den Druckwiderstand verringern, so muss man dazu die Wirbel möglichst verhindern. Das kann durch eine geeignete Körperform, eine sogenannte Stromlinienform, realisiert werden.

Reibungswiderstand und Druckwiderstand addieren sich zum Strömungswiderstand. Der Betrag dieser Widerstandskraft ist bei größeren Geschwindigkeiten direkt proportional zur Stirnfläche A , das heißt zum größten Querschnitt des Körpers normal zur Strömungsrichtung, und zum Staudruck $\frac{1}{2} \rho v^2$.

$$F_w = c_w \cdot \frac{1}{2} \rho v^2 \cdot A \quad \text{Strömungswiderstand}$$

c_w wird der Widerstandsbeiwert genannt.

Ein Vergleich mit dem Gesetz von Stokes liefert

$$c_w \frac{1}{2} \rho v^2 \pi^2 R = 6 \pi \eta R v$$

$$\Rightarrow c_w = \frac{12}{Re} \quad \text{für laminare Strömung}$$

mit $Re = \frac{R \rho v}{\eta}$ Reynold'sche Zahl

Damit gibt die Reynold'sche Zahl das Verhältnis von kinetischer Energie des bewegten Volumens und verbrauchter Reibungsenergie bei der Bewegung an.

Merke: Die **Reynold'sche Zahl** $Re = \frac{R \rho v}{\eta}$ ist der Quotient aus der zweifachen kinetischen Energie des bewegten Volumens und der verbrauchten Reibungsenergie bei der Bewegung.

Die Reynold'sche Zahl ist damit ein Maß dafür, ob eine Strömung laminar oder turbulent ist. Ist die kinetische Energie kleiner als die Reibungsenergie, so ist die Strömung laminar. Bei großer kinetischer Energie, d.h. bei hoher Strömungsgeschwindigkeit schlägt die Strömung in eine turbulente Strömung um. Der Wert von Re , bei dem dies passiert, wird kritische Re -Zahl genannt. Der typische Wert wird bei $Re \cong 1160$ angesetzt, der kritische Wert der Rohrströmung ist $Re \cong 2300$.

IX.5 Gedämpfte Schwingungen

Um die Mechanik ganz abschließen zu können, müssen wir noch einmal auf Schwingungen zurückkommen. In Kapitel IX.8 hatten wir reine Sinusschwingungen betrachtet. Eine reine Sinusschwingung ist allerdings eine mathematische Abstraktion. Sie müsste nämlich nach ihrer Definition unendlich lange weiter schwingen. In Wirklichkeit hört aber jede freie Schwingung irgendwann auf, entweder allmählich in Folge einer Dämpfung, wie ein Glocken- oder Klavierton, den man nachschwingen lässt, oder plötzlich.

Da Reibungskräfte nie ganz vermeidbar sind, ist jede Schwingung mehr oder weniger gedämpft. Um eine unbegrenzte Schwingung zu erhalten, muss man der schwingenden Masse während einer Periode genau die Energie wieder zuführen, die sie in einer Periode durch Reibung verliert. In der Technik wird das durch Selbststeuerung oder Rückkopplung realisiert: durch das schwingende System werden in geeigneter Phase Kräfte ausgelöst, die den Energieverlust in jeder Periode ausgleichen. Diese Energie muss aufgrund der Energieerhaltung einem anderen Energievorrat entnommen werden. Ein Beispiel dafür ist allen bekannt: das Pendel einer Pendeluhr wird in der geeigneten Schwingungsphase über den Anker durch die Zähne des Steigrades beschleunigt. Die ihm dadurch zugeführte Energie stammt aus dem Energievorrat einer gespannten Feder oder eines gehobenen Gewichts der Uhr.

Die bisher betrachteten, reinen Sinusschwingungen hatten keinen Energieverlust durch Reibung. Eine solche Schwingung nennt man ungedämpft.

Merke: Eine Schwingung nennt man **ungedämpft**, wenn ihre Schwingungsenergie und damit ihre Amplitude konstant bleibt.

Eine Schwingung nennt man **gedämpft**, wenn ihre Schwingungsenergie und damit ihre Amplitude dauernd abnimmt.

Meistens ist die Ursache des Energieverlustes die Reibung. Wir hatten gelernt, dass es verschiedene Gesetze für Reibung gibt. In einer Flüssigkeit zum Beispiel ist die Reibung proportional zur Geschwindigkeit.

Im Folgenden wollen wir eine Schwingungsgleichung herleiten für ein mathematisches Pendel, das durch Reibung gedämpft wird. Die Reibungskraft ist dabei direkt proportional zur Geschwindigkeit und dieser entgegen gerichtet.

Zunächst betrachten wir noch einmal die ungedämpfte Schwingung:

Im Gegensatz zur Federschwingung stellt das mathematische Pendel kein lineares Problem dar, denn das Pendel bewegt sich in einer Ebene:

Das Pendel sei um den Winkel φ ausgelenkt, wenn es losgelassen wird. Auf die Masse m wirkt nun wie bei der Federschwingung nur noch die Gewichtskraft \vec{G} .

Die Tangentialkomponente G_t verursacht nach dem 2. Newtonschen Axiom nun eine Beschleunigung längs des Kreisbogens in Richtung der Ruhelage, $\varphi = 0^\circ$.

Die Tangentialkomponente $\vec{G}_t = m \vec{g} \sin\varphi$

wirkt als beschleunigende Kraft $F = m \vec{a}$.

$$\Rightarrow m \vec{g} \sin\varphi = m \vec{a}$$

mit $\vec{a} = \ddot{\vec{x}} = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$ $\Rightarrow m \vec{g} \sin\varphi = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$

Diese Differentialgleichung hängt nicht nur von einer Variablen ab, sondern von den beiden Variablen \vec{x} und φ . Um die Gleichung dennoch lösen zu können, mussten wir sie in die Form

$$mg \sin\varphi = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

überführen

$$\Leftrightarrow m \frac{d^2 s}{dt^2} + mg \sin\varphi = 0 \quad \neg$$

Mit $s = \varphi l$ $\Leftrightarrow \frac{d^2 \varphi}{dt^2} l + g \sin\varphi = 0$

$$\Leftrightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin\varphi = 0$$

Die Lösung dieser Gleichung ist kompliziert, sie erfolgt über die Reihenentwicklung für $\sin\varphi$:

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$$

Wenn man nach dem ersten Term alle weiteren vernachlässigt, gilt

(Kleinwinkelnäherung) $\sin\varphi = \varphi$.

Damit lautet die Schwingungsgleichung $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$.

Betrachten wir nun dieselbe Schwingung mit dem Unterschied, dass zuzüglich zu der oben diskutierten Tangentialkomponente der Gravitationskraft noch eine dem entgegengesetzte Reibungskraft wirkt. Die Reibungskraft sei proportional zur Geschwindigkeit, allgemein hat eine solche Reibung das Kraftgesetz $F_R = \beta \dot{s}$,

wobei β der Proportionalitätsfaktor ist. Dann müssen wir die Gleichung \neg erweitern um diesen

Reibungsfaktor $m \frac{d^2 s}{dt^2} + mg \sin\varphi = \beta \frac{ds}{dt}$

Mit $s = \varphi l$ und $\sin\varphi = \varphi$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} l + g = \frac{\beta}{m} \frac{d\varphi}{dt} l$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} = \frac{\beta}{m} \dot{\varphi}$$

Um diese Gleichung zu lösen definieren wir die Terme mit den Konstanten um. Wir definieren wie oben:

$$\omega_0^2 = -\frac{g}{l}$$

und als neue Konstante

$$\frac{\beta}{m} = 2\delta$$

Daraus folgt

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$$

In Kapitel IV hatten wir diese Gleichung dadurch gelöst, dass wir einen Lösungsansatz erraten hatten. Dieser musste die Bedingung erfüllen, dass seine zweite Ableitung einem konstanten Vorfaktor multipliziert mit dem eigentlichen Term ergibt. Die Lösung waren die Sinus- oder Cosinusfunktionen. Um diese neue Gleichung zu lösen, müssen wir nun eine Funktion suchen, die in ihrer ersten und ihrer zweiten Ableitung dem Ursprungsterm entspricht. Der hier zu erratene Lösungsansatz muss eine e-Funktion sein. Die richtige Lösung dieser Gleichung lautet

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\delta t} (\cos \omega t + \alpha)$$

Dabei sind φ_0 , die Amplitude, und α Integrationskonstante.

Diese Gleichung wird erfüllt mit

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$$

Analog zur reinen Sinusschwingung ist dies die Winkelgeschwindigkeit der Schwingung. Statt diese Lösung herzuleiten, was übrigens in jedem Lehrbuch nachzulesen ist, ist es an dieser Stelle wichtiger, dieses Ergebnis zu untersuchen, um die gedämpfte Schwingung qualitativ zu verstehen.

Betrachten wir die Gleichung $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$:

Für die Winkelgeschwindigkeit können wir drei markante Fälle angeben:

1) $\delta < \omega_0$: Da δ ein Maß für die Dämpfung ist, handelt es sich in diesem Fall um eine **gedämpfte Schwingung**, um eine Schwingung also, deren Amplitude mit der Zeit abklingt. Unser Ansatz zeigt, dass die Amplitude exponentiell mit der Zeit abnehmen muss. Dieser Fall wird **Schwingfall** genannt.

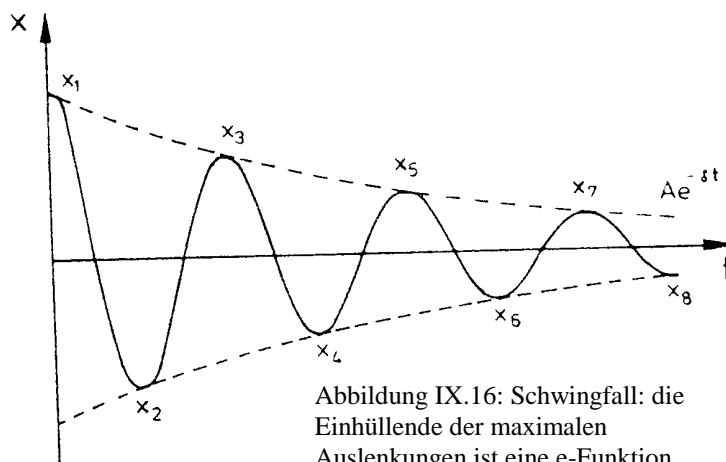


Abbildung IX.16: Schwingfall: die Einhüllende der maximalen Auslenkungen ist eine e-Funktion.

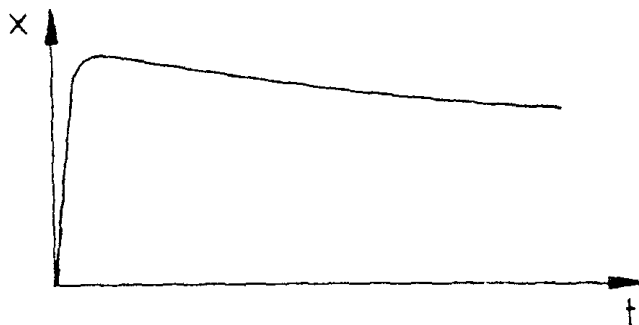


Abbildung IX.17: Kriechfall, die Abklingzeit ist proportional zur Dämpfung

2) $\delta > \omega_0$: Der Dämpfungsfaktor ist größer als der Faktor der Winkelgeschwindigkeit, es kommt keine Schwingung zustande. Das Pendel ist zu stark gedämpft um zu schwingen. Die Bewegung verläuft nicht periodisch, das heißt der Körper kehrt kriechend in seine Ausgangslage zurück, ohne über diese hinaus zu schwingen. Dieser Fall ist der **Kriechfall**.

3) $\delta = \omega_0$: Diesen Fall nennt man **aperiodischen Grenzfall**. Das Pendel kehrt in einer minimalen Abklingzeit in seine Ruhelage zurück. Dieser Fall ist besonders bei technischen Anwendungen interessant: in vielen Situationen möchte man die Schwingung von

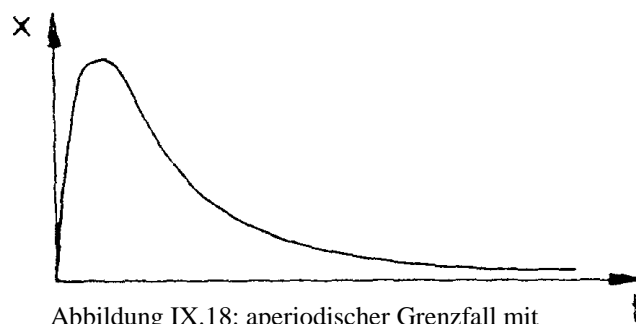


Abbildung IX.18: aperiodischer Grenzfall mit minimaler Abklingzeit

mechanischen Teilen unterdrücken. Wählt man dazu einen Dämpfungsfaktor, der kleiner ist als der des Grenzfalles, so klingt die Schwingung nur langsam exponentiell ab. Wählt man hingegen einen zu großen Dämpfungsfaktor, so dauerte es lange, bis er Körper in seine Ruhelage zurückkehrt.

Abschließend wollen wir eine gedämpfte Schwingung in einem Experiment betrachten:

Versuch IX.6 : gedämpfte Schwingung eines Fadenpendels

Bei diesem Versuch wählen wir denselben Aufbau, wie wir ihn bereits zur Untersuchung der ungedämpften Schwingung verwandt haben. Diesmal schwingt die Kugel jedoch nicht durch die Luft, sondern in einem mit Wasser gefülltem Gefäß. Durch die Reibung der Kugel mit dem Wasser ist die Pendelbewegung jetzt gedämpft. Dieses Mal zeigt die Computerauswertung eine Schwingung, deren Amplitude exponentiell mit der Zeit abnimmt. Um zu beweisen, dass der Funktionsgraph, die von den maximalen Amplitude beschrieben wird, wirklich eine Exponentialfunktion ist, tragen wir diese mit dem Computer auf einer exponentiellen Skala ab. Nun ist der Funktionsgraph eine Gerade: die Amplitude nimmt wie vermutet exponentiell ab. Eine mathematische Betrachtung zeigt, dass die Schwingungsperiode einer gedämpften Schwingung mit abklingender Amplitude länger wird. Diese Erscheinung ist bei unserem Versuchsaufbau leider zu gering, um sie zuverlässig nachweisen zu können.