

IIX. Ruhende Flüssigkeiten und Gase

In diesem Kapitel wollen wir versuchen, die Reaktion von Gasen und Flüssigkeiten auf äußere Einflüsse, insbesondere auf Druck, zu untersuchen. In Kapitel VII hatten wir dieses Verhalten für Festkörper bereits untersucht und kurz den atomaren Aufbau von Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen erörtert.

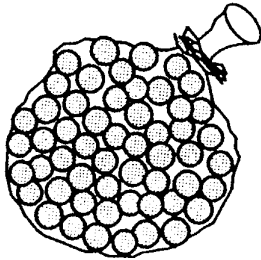


Abbildung IIX.1: Modell der Moleküle in einer Flüssigkeit

Wir hatten ein Modell für Flüssigkeiten entwickelt, bei dem Atome der Flüssigkeit gegeneinander verschiebbar sind. Eine Nahordnung ist noch vorhanden und auch das Volumen ist konstant, aber der Körper hat keine feste Gestalt, weil die Atome bzw. Moleküle ihre festen Gitterplätze verlassen haben und gegeneinander verschiebbar sind, die Bindungskräfte sind noch vorhanden. Anschaulich kann man sich dieses Modell auch als einen Sack mit Murmeln vorstellen: Die Kugeln berühren sich, man kann den Sack in verschiedene Formen bringen, sein Volumen jedoch nur sehr

schwer verändern.

Dabei hatten wir festgestellt, dass bei Flüssigkeiten die Moleküle annähernd so dicht gepackt sind, wie bei Festkörpern. Deshalb ändert sich die Dichte eines Körpers, wenn er schmilzt, nicht wesentlich. Wir können somit erwarten, dass die Flüssigkeiten ebenso wie die Festkörper einer Volumenänderung, also einer Annäherung ihrer Moleküle, erheblichen Widerstand entgegen setzen.

IIX.1 Kompressibilität

Mit den so gewonnenen Feststellungen können wir die Kompressibilität von Flüssigkeiten analog zu den Festkörpern angeben:

Das Volumen einer Flüssigkeit sei V . Wirkt dann eine Druckänderung Δp auf das Volumen, so ändert sich das Volumen um ΔV . Für das Verhältnis des Volumens zur Volumenänderung gilt

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \Delta p$$

oder differentiell geschrieben:

$$\frac{dV}{dp} = -\kappa V$$

κ gibt dabei die Kompressibilität bei Flüssigkeiten an.

Merke: Die **Kompressibilität κ bei Flüssigkeiten** wird analog zu Festkörpern

berechnet als $\frac{dV}{dp} = -\kappa V$

Die Kompressibilität κ bei Flüssigkeiten ist etwa $10 \div 100$ mal größer als bei Festkörpern. Man braucht z.B. 1000 bar, um das Volumen von Wasser um 5% zu verkleinern. Weitere Werte sind in der folgenden Tabelle zusammen gestellt.

Flüssigkeit	K [10^9 N m^{-2}]	$\kappa = 1/K$ [$10^{-12} \text{ m}^2 \text{ N}^{-1}$]
Alkohol	0,9	1100
Wasser	~ 2,0	500
Quecksilber	25	40
zum Vergleich:		
Kupfer	125	8
Luft	10^{-4}	10^7

Tabelle IIX.1: K-Module

Merke: Die Kompressibilität κ bei Flüssigkeiten ist größer als im Festkörper. Im Verhältnis zur Kompressibilität bei Gasen ist κ von Flüssigkeiten immer noch sehr klein. Man spricht deshalb von einer **‘praktischen Inkompressibilität’ von Flüssigkeiten.**

Wird die Druckänderung zurückgenommen, so nimmt die Flüssigkeit ihr ursprüngliches Volumen wieder ein, Flüssigkeiten besitzen also wie feste Körper eine Volumenelastizität. Die Flüssigkeiten unterscheiden sich von festen Körpern im wesentlichen durch die größere Verschiebbarkeit der Moleküle gegeneinander. Wie die Murmeln in unserem Modell können die Moleküle einer Flüssigkeit leicht aneinander vorbei gleiten. Anders als bei Festkörpern, bei denen eine Formänderung aufgrund der festen Gitterstruktur nur mit großem Kraftaufwand möglich ist, passen sich Flüssigkeiten von selbst der Gefäßform an, das Schubmodul G ist folglich gleich null. Die große Beweglichkeit der Moleküle bedingt ebenfalls die Einstellung eines gleichen Flüssigkeitsniveaus und eine allseitige Druckausbreitung. Diese Phänomene wollen wir im folgenden untersuchen:

IIX.2 Druckausbreitung in Flüssigkeiten

Zunächst werden bei der Betrachtung der Druckausbreitung die Kompressibilität κ und die Schwerkraft vernachlässigt.

Betrachten wir nun ein Gedankenexperiment:

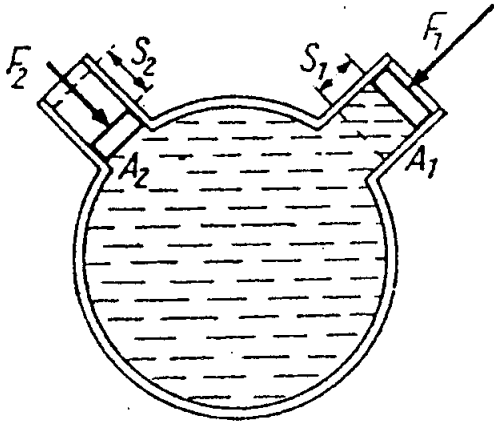


Abbildung IIX.2: Schematische Darstellung des Gedankenexperimentes

Ein mit einer Flüssigkeit gefülltes, rundes Gefäß sei an zwei Stellen mit je einem verschiebbaren Kolben versehen. Die Fläche der Kolben sei A_1 und A_2 . Nun wird Kolben 1 bei einem festen Druck p_1 auf Kolben 1 und p_2 auf Kolben 2 langsam um eine Strecke s_1 bzw. s_2 verschoben, wobei das Volumen konstant bleibt: $V = \text{const.}$

Für die Änderung des Drucks gilt

$$\Delta p_1 = \Delta p_2 = 0.$$

Bei diesem Verschieben der Kolben muss Arbeit geleistet werden. Wie bereits bekannt,

berechnet man für konstante Krafteinwirkung, hier also für konstanten Druck, Arbeit als Produkt aus Kraft und Weg. Damit ist die Arbeit

$$W = F s$$

Die Kraft an Kolben 1 hat mit der Definition des Drucks den Wert

$$F_1 = p_1 A_1$$

Der Kolben werde um die Strecke s_1 verschoben, somit wird die Arbeit

$$W_1 = F_1 s_1 \quad \text{geleistet.}$$

$$\Rightarrow W_1 = p_1 A_1 s_1$$

Die Volumenänderung in einem Kolben wird berechnet als

$$V_i = A_i s_i.$$

Damit gilt für die Arbeit an Kolben 1

$$\Rightarrow W_1 = p_1 V_1$$

Analog berechnet man die Arbeit, die an dem zweiten Kolben verrichtet werden muss:

$$W_2 = p_2 V_2$$

Der Kolben soll so langsam verschoben werden, dass die Flüssigkeit keine kinetische Energie erhalte. Die Arbeit wird also nur aufgewendet, um den anderen Kolben zu verschieben. Mit dieser Voraussetzung gilt der Energieerhaltungssatz.

Der Energiesatz liefert die Beziehung

$$W_1 = W_2.$$

Mit den oben gewonnen Ausdrücken für die Arbeit gilt

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

Da das Volumen konstant bleibt, die Flüssigkeit sei als inkompressibel angenommen, gilt mit der Beziehung für die Volumina der beiden Kolben

$$V_1 = V_2.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{p_1 = p_2}$$

Der Druck in der Flüssigkeit ist also in alle Richtungen konstant.

Merke: Druck breitet sich in ruhenden Flüssigkeiten gleichmäßig nach allen Richtungen aus, wenn die Flüssigkeit als inkompressibel betrachtet wird und die Schwerkraft und der daraus resultierende Schweredruck vernachlässigt wird.

Druck kann somit, wie bereits ohne Begründung von uns angewandt, als skalare Größe behandelt werden.

Trotzdem hat die vom Druck erzeugte Kraft oder die druckerzeugende Kraft eine Richtung.

Merke: Kräfte stehen in ruhenden Flüssigkeiten immer senkrecht auf den Grenzflächen. Die tangentielle Kraftkomponente muss anschaulich null sein, weil sonst eine Verschiebung längs der Grenzfläche entstehen würde.

Versuch IIX.1: Hydraulische Presse

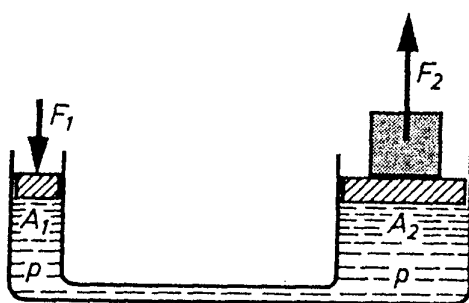


Abbildung IIX.3: Hydraulische Presse

Die bei dem Gedankenexperiment abgeleitete Formel

$$p_1 = p_2$$

kann mittels der Definition des Drucks geschrieben

werden als
$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

$$\Leftrightarrow F_2 = A_1 \frac{F_2}{A_2}.$$

Diese Formel zeigt, dass sich mit kleinen Kräften F_1 große Kräfte F_2 erzeugen lassen, indem man die Flächen, auf die der Druck wirkt, geschickt wählt. Angewandt wird diese Tatsache bei

den sogenannten hydraulischen Pressen. In unserem Versuch wollen wir einen massiven Holzbalken durchbrechen, indem wir nur den Druck des Wasser aus der Wasserleitung verwenden.

Die schematische Darstellung zeigt eine allgemeine Form der hydraulischen Presse. Wir verwenden als wirkende Kraft, die durch den Wasserdruck der Leitung auf eine Querschnittsfläche A_1 eines Wasserschlauchs wirkende Kraft. Die Fläche A_2 realisieren wir durch eine große Gummiblase in einem festen Metallzylinder. Die Kraft F_2 , die von dieser Blase aus wirkt, drückt einen Holzbalken nach oben. Da der Balken an den Enden fest eingespannt ist, kann nur die Mitte unter dem Druck nachgeben. Die so erzeugte Kraft ist so groß, dass der Balken in der Mitte durchbricht.

IIX.3 Schweredruck

Bisher hatten wir den Druck, der durch das Gewicht der Flüssigkeit selbst entsteht, vernachlässigt. In der Realität aber kommt zum äußeren Druck der Schweredruck aufgrund des Gewichtes der Flüssigkeit hinzu. Im Folgenden wollen wir versuchen, die dadurch entstehenden Druckverhältnisse im Inneren einer Flüssigkeit zu beschreiben. Hierzu betrachten wir eine Flüssigkeit im Gleichgewicht. Innerhalb der Flüssigkeit untersuchen wir die Kräfte auf eine infinitesimale Scheibe der Fläche A und der Dicke dy .

Wenn das so gewählte Flüssigkeitselement in Ruhe ist, bedeutet das, dass keine resultierende Kraft in irgendeine Richtung wirken kann. Folglich heben horizontale Drucke sich gegenseitig auf, so dass die Resultierende null ist. In y -Richtung gilt für die wirkenden Kräfte deshalb

$$F_y = 0.$$

Betrachten wir nun die einzelnen Kräfte:

Zunächst wirkt auf unser Element der von außen ausgeübte Druck

$$F_o = pA.$$

F_o wirkt in nach unserer Konvention in positive y -Richtung, also 'nach unten'.

Durch die Druckänderung wirkt dem entgegen eine Kraft F_u

$$F_u = (p+dp) A.$$

Durch das Gewicht unseres Elementes wirkt ferner die Gewichtskraft F_G

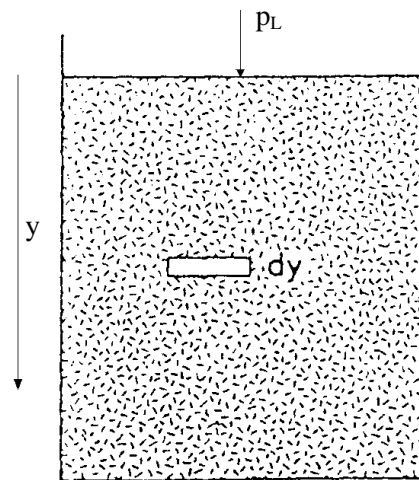


Abbildung IIX.4: Infinitesimale Scheibe einer Flüssigkeit der Fläche A und der Dicke dy .

$$F_G = dm g$$

Das Massestück dm habe die Dichte ρ . Dann gilt

$$F_G = \rho dV g.$$

Mit $dV = A dy$ folgt

$$F_G = \rho A dy g.$$

Die Gewichtskraft wirkt ebenfalls in positive y -Richtung.

Insgesamt beträgt die resultierende Kraft in y -Richtung dann

$$F_y = F_o + F_G - F_u$$

$$\Leftrightarrow F_y = pA + \rho A dy g - (p+dp) A$$

Mit $F_y = 0$

$$\Rightarrow pA + \rho A dy g = (p+dp) A$$

$$\Leftrightarrow \rho dy g = dp$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dp}{dy} = \rho g}$$

Da die Dichte und die Gravitation als konstant angenommen werden können, nimmt die Druckänderung dp mit der zunehmenden Tiefe dy proportional zu. Wichtig ist hierbei die Unabhängigkeit des Querschnitts A des Gefäßes.

Merke: Der **Schweredruck** nimmt proportional zur Tiefe zu

$$\text{unabhängig vom Querschnitt } A: \quad \frac{dp}{dy} = \rho g.$$

Um den Schweredruck berechnen zu können betrachtet man das Integral

$$\Delta p = \int_0^h \rho g dy$$

$$\Leftrightarrow \Delta p = \rho g h$$

Der Druck in 10 m Wassertiefe berechnet sich damit z.B. als

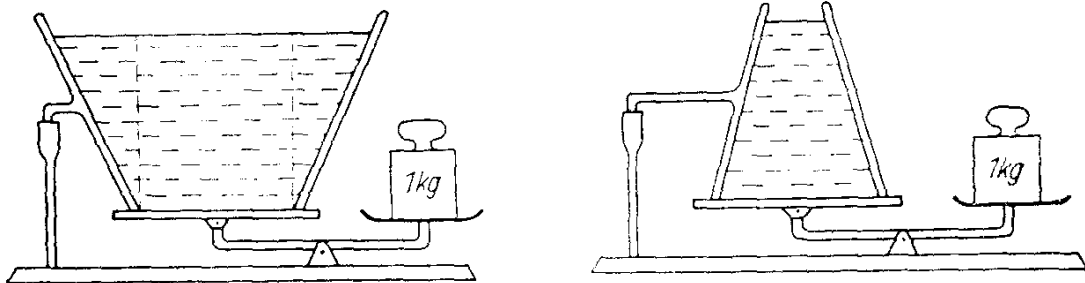
$$\Delta p = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m} = 10^5 \text{ N} / \text{m}^2 = 1 \text{ bar}$$

Der Druck in 10 Meter Wassertiefe entspricht damit etwa einen Atmosphärendruck.

Aus der Unabhängigkeit der Schweredrucks von der Querschnittsfläche des Gefäßes resultiert das 'Hydrostatische Paradoxon'. Dieses soll in einem Versuch verdeutlicht werden:

Versuch IIX.2: Hydrostatisches Paradoxon

Gefäße unterschiedlicher Form haben den gleichen Bodendruck, da dieser nur von der Höhe der Wassersäule abhängt. Falls die Querschnitte der Böden verschiedener Gefäße gleich sind, also



$A_1 = A_2$, so ist auch die Kraft auf die Böden gleich, da Druck nur von Füllhöhe h abhängt und die Kraft von Druck und Fläche. Das vermeintliche Paradoxon besteht darin, dass das Gewicht auf einen Punkt der Bodenfläche unterschiedlich ist und dennoch derselbe Druck herrscht.

Um diese Aussage zu verifizieren, wird in diesem Versuch ein Gefäß mit Wasser gefüllt und auf eine Waage gestellt. Ein Zeiger schlägt entsprechend der Kraft aus, die auf den Gefäßboden wirkt. Dieser Versuch wird mit verschiedenen Gefäßen wiederholt, wobei vorher überprüft wurde, ob alle Gefäße die gleiche Grundfläche und einen gleichen Wasserstand haben. Der Zeiger zeigt wirklich bei allen Gefäßen dieselbe Kraft an, obwohl der Inhalt der Gefäße verschieden groß ist.

Auf demselben Prinzip beruht auch der folgende Versuch:

Versuch XII.3: Kommunizierende Röhren

Bei diesem Versuch wird ein Gefäß, wie nebenstehend schematisch dargestellt, mit einer Flüssigkeit gefüllt. Am unteren Ende des Gefäßes besteht eine offene Verbindung zu anderen, beliebig geformten Gefäßen.

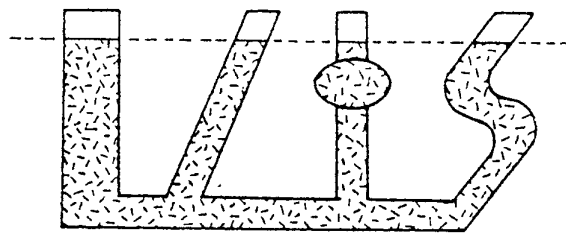


Abbildung IIX.6: Kommunizierende Röhren

Man kann beobachten, dass die Flüssigkeit in allen miteinander verbundenen Röhren

gleichmäßig auf einer Ebene ansteigt, unabhängig von der Fassungsmenge. Aufgrund der Tatsache, dass überall dieselbe Höhe angezeigt wird, wissen wir, dass auf jede Oberfläche derselbe Druck wirkt. An jedem Querschnitt der Röhren, z.B. ganz unten, muss der Druck $p = \rho g h$ beiderseits gleich sein, damit ein Gleichgewicht herrscht und die Flüssigkeit nicht mehr von einer in die andere Röhre fließt. Bei Auffüllen mit nur einer Flüssigkeit, also gleicher Dichte ρ ist das nur dann der Fall, wenn die Höhe der Wassersäule auf beiden Flächen gleich groß ist. Querschnitt und Form sind hierbei beliebig.

Bei ungleichen Dichten der Flüssigkeit in den Rohren kann dieser Aufbau genutzt werden, die Dichte zu messen, indem man die Höhendifferenz misst.

Versuch IIX.4: Weinheber

Dieses Bestreben der Flüssigkeiten, die Wassersäulen auszugleichen, kann man sich zunutze machen, um Flüssigkeiten zu heben. Ein Beispiel hierfür ist der sogenannte Weinheber. Zwei Messbecher werden bei diesem Versuch auf verschiedene Niveaus gestellt. Dann füllt man die Gefäße mit einer Flüssigkeit. Verbindet man die Gefäße jetzt mit einem hochgelegten und vollständig mit derselben Flüssigkeit gefüllten Schlauch, so beginnt die Flüssigkeit aus dem höher liegenden Gefäß in das tiefer gelegene zu strömen. Die Erklärung folgt wieder aus dem Schweredruck: Auf die Querschnittsfläche

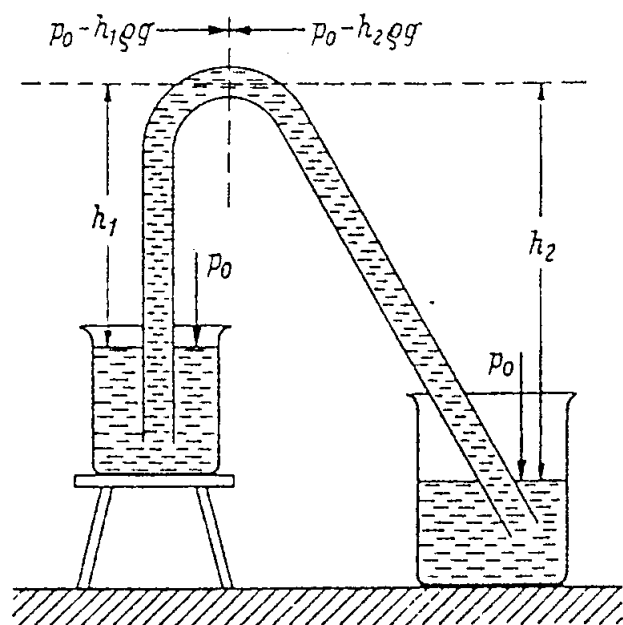


Abbildung IIX.7: Weinheber - der Flüssigkeitsspiegel gleicht sich aus

A des Schlauchs wirkt von beiden Seiten der Druck $p_1 = p_0 - \rho gh_1$ bzw. $p_2 = p_0 - \rho gh_2$. Diese beiden Drucke bewirken je eine Kraft $F_1 = A(p_0 - \rho gh_1)$ bzw. $F_2 = A(p_0 - \rho gh_2)$. Die Differenz $F_2 - F_1$ dieser Kräfte ist Ursache für die Bewegung der Flüssigkeit. Aus $F_1 - F_2 = \rho g(h_2 - h_1)$ folgt, dass die Pegel in den Gläsern sich solange ausgleichen bis die Höhen h_1 und h_2 gleich sind (was hier natürlich zum Überlaufen führen würde), denn dann gilt $F_2 - F_1 = 0$ und damit auch $\Delta p = 0$.

Versuch IIX.5: Schlauchwasserwaage

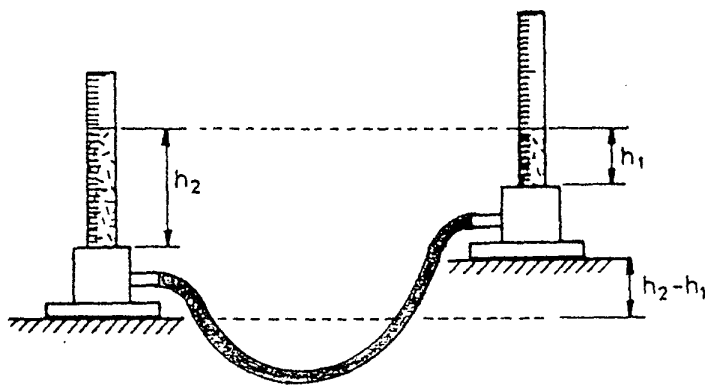


Abbildung IIX.8 Schlauchwasserwaage

Dieses Prinzip macht man sich bei einer Schlauchwasserwaage zunutze.

Bei dem von uns verwendeten Versuchsaufbau werden zwei Zylinder mit einem transparenten Schlauch verbunden. Der Schlauch kann beliebig verlaufen; wir hängen ihn über ein Gestell, welches

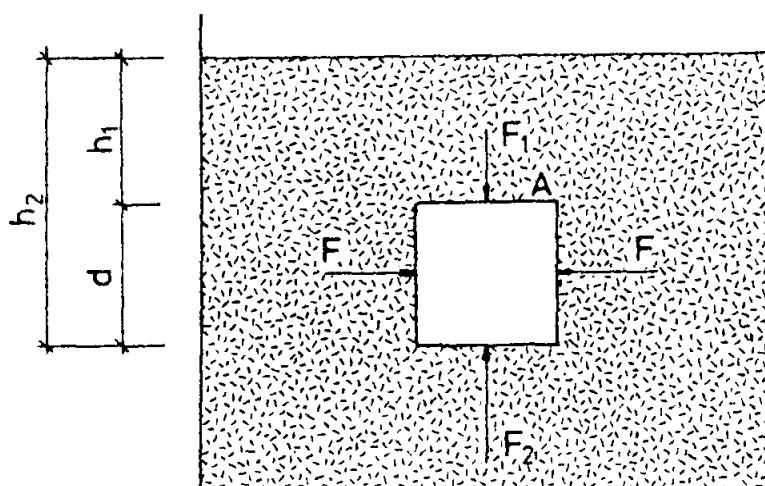
sich über den Zylinder befindet. Nun wird ein Zylinder mit einer gefärbten Flüssigkeit gefüllt, der andere Zylinder ist leer. Wenn man nun die Flüssigkeit im Schlauch ansaugt, fließt die gefärbte Flüssigkeit durch den Schlauch in das andere Gefäß, bis das Niveau des Flüssigkeitspegels in beiden Zylindern gleich ist. Man kann sich diesen Aufbau, der eine Konsequenz der allgemeinen Druckausbreitung ist, also gut als Höhenmessung zunutze machen.

IIX.4 Auftrieb

Aus dem Alltag ist bekannt, dass Flüssigkeiten scheinbar an Gewicht verlieren. Ein einfaches Beispiel dafür ist ein Stück Holz, das auf dem Wasser schwimmt, anstatt auf den Boden zu fallen. Diese Eigenschaft von Flüssigkeiten wollen wir nun quantitativ untersuchen.

Hierzu betrachten wir ein Gedankenexperiment:

Ein Körper werde in eine Flüssigkeit getaucht. Wir gehen im Allgemeinen davon aus, dass die Dichte des Körpers nicht gleich der Dichte der Flüssigkeit ist. Die Dichte des Körpers bezeichnen wir mit ρ , die Dichte der Flüssigkeit mit ρ_{Fl} .



Aufgrund des Tiefendrucks wirken an Ober- und Unterkante des Körpers unterschiedliche Kräfte. Die Differenz der beiden Kräfte ist die Auftriebskraft

$$F_A = F_2 - F_1.$$

Abbildung IIX.9: Welche Kräfte wirken auf einen tauchenden Körper ?

Mit

$$F_i = p_i A$$

und

$$p_i = \rho_{F1} \cdot g h_i$$

folgt

$$F_A = p_2 A - p_1 A$$

und damit

$$F_A = \rho_{F1} g A (h_2 - h_1)$$

Definiert man nun die Differenz der beiden Höhen $h_2 - h_1 = d$

so folgt

$$F_A = \rho_{F1} g A d$$

Das Volumen des Prismas beträgt

$$V = A d, \quad \text{also gilt für die Auftriebskraft}$$

$$F_A = \rho_{F1} g V$$

Mit der Masse M der verdrängten Flüssigkeit

$$M_{F1} = \rho_{F1} V$$

folgt

$$F_A = M_{F1} \cdot g.$$

Dieses Produkt entspricht der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit. Dieses Ergebnis wird im Archimedischen Prinzip zusammen gefasst. Die aus einem Prisma hergeleitete Formel gilt für beliebig geformte Körper.

Archimedisches Prinzip: Der Auftrieb eines beliebig geformten Körpers ist gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit:

$$F_A = \rho_{F1} \cdot g V = M_{F1} \cdot g = G_{F1}$$

Merke: Der Auftrieb greift im Schwerpunkt der Flüssigkeit S_{F1} an und ist entgegengesetzt gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit.

Nun wollen wir das alles Archimedische Prinzip an Hand eines Versuchs nachweisen.

Versuch IIX.6: Nachweis des Archimedischen Prinzips

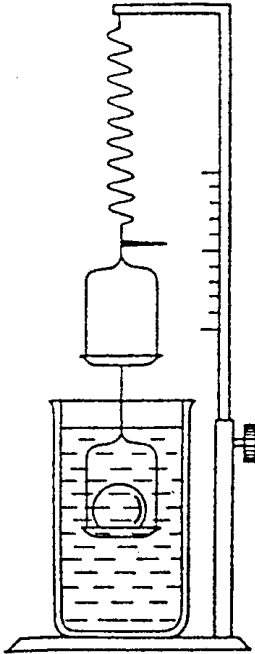


Abbildung IIX.10:
Jollysche Federwaage zum
Nachweis des
Archimedischen Prinzips

Bei diesem Versuchsaufbau werden zwei Waagschalen untereinander an eine Federwaage gehängt. Ein Zeiger gibt die Auslegung der Feder und damit die wirkende Gewichtskraft an. Zunächst wird ein Körper in die obere Waagschale gelegt. Die angezeigte Gewichtskraft wird notiert. Danach wird der Körper auf die untere Schale gelegt, die in Wasser getaucht ist. Durch das Eintauchen des Körpers wird Flüssigkeit verdrängt. Diese Flüssigkeit wird noch aufgefangen. Die weniger als vorher gedehnte Feder misst jetzt Gewichtskraft minus den Auftrieb. Addiert man zu diesem verringerten Gewicht das Gewicht des aufgefangen Wassers, so entspricht diese Summe der Gewichte der ursprünglichen Gewichtskraft des Körpers. Diese Messungen bestätigen das Archimedische Prinzip. Der Versuchsaufbau ist auch unter dem Namen *Jollysche Federwaage* bekannt.

Zusammenfassend können wir festhalten, dass ein Körper auf einer Flüssigkeit schwimmt, wenn seine Gewichtskraft kleiner ist als die Auftriebskraft. Ein Körper sinkt in der Flüssigkeit hingegen, wenn seine Gewichtskraft größer ist als Auftriebskraft. Sind Auftriebskraft und Gewichtskraft hingegen gleich groß, so schwebt der Körper in der Flüssigkeit. Mit der Aussage des Archimedischen Prinzips, Auftriebskraft entspricht Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit, können wir damit Aussagen über die Verhältnisse der Dichten machen.

Demnach schwimmt ein Körper in einer Flüssigkeit, wenn seine Dichte geringer ist als die Dichte der Flüssigkeit. Ein Körper sinkt, wenn der eine größere Dichte hat, als die ihn umgebende Flüssigkeit. Im Grenzfall des Schwebens sind die Dichte der Flüssigkeit und die Dichte des Körpers gleich.

Merke:

Schwimmt ein Körper in einer Flüssigkeit, so gilt:	$F_A > G$ also $\rho < \rho_{\text{Fl}}$.
Sinkt ein Körper in einer Flüssigkeit, so gilt:	$F_A = G$ also $\rho = \rho_{\text{Fl}}$.
Schwebt ein Körper in einer Flüssigkeit so gilt:	$F_A > G$ also $\rho > \rho_{\text{Fl}}$.

Ein Beispiel hierfür ist das Schwimmen im Toten Meer. Im Gegensatz zu anderen Gewässern hat das Tote Meer eine größere Dichte, als der menschliche Körper. Deshalb schwimmt ein unbeweglicher menschlicher Körper auf dem Toten Meer.

Um den Zusammenhang von Schwimmen und Sinken eines Körpers mit seiner Dichte zu zeigen, betrachten wir jetzt noch einen Versuch.

Versuch IIX.7: Wasserteufelchen

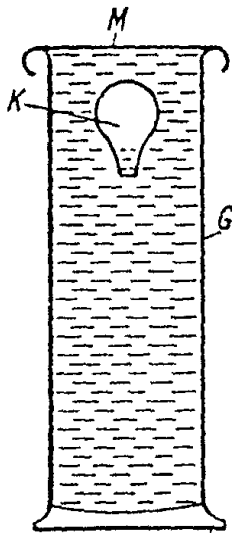


Abbildung IIX.11:
Wasserteufelchen

Für diesen Versuch benötigen wir einen großen Glaszylinder, der oben mit einem Gummistopfen verschlossen wird, und ein kleines Reagenzglas. Das Reagenzglas wird mit Luft gefüllt und in den mit Wasser gefüllten Glaszylinder eingelassen. Dabei ist das Reagenzglas genauso weit mit Luft gefüllt, dass es gerade schwebt. Wir wissen also, dass die Dichte des Reagenzglases der Dichte der Flüssigkeit in entspricht. Nun drückt man auf den Gummistopfen. Der so ausgeübte zusätzliche Druck auf die Wasseroberfläche pflanzt sich durch das Wasser fort und drückt die im Reagenzglas eingeschlossene Luft zusammen. Dadurch steigt der

Flüssigkeitsspiegel im Reagenzglas, und seine Dichte ändert sich. Die Gewichtskraft des Reagenzglases ist jetzt größer als Auftriebskraft, das Glas sinkt. Nimmt man den Druck weg, so expandiert die Luft und das Glas steigt wieder.

Betrachten wir jetzt noch einmal schwimmende Körper. Jeder an der Wasseroberfläche schwimmende Körper nimmt eine bestimmte Lage ein. Ein Stab, der senkrecht ins Wasser getaucht wird, fällt um. Ein Brett, das hochkant eingetaucht wird, legt sich auf seine Seite. Offensichtlich nimmt jeder Körper eine Gleichgewichtslage beim Schwimmen ein. Versuchen wir nun, mit Hilfe der Betrachtung von Kräften, diese Gleichgewichtslage zu analysieren. Auf den Körper wirkt ein Kräftepaar, das aus Gewichtskraft und Auftrieb besteht. Am Schwerpunkt des Körpers zieht die Gewichtskraft senkrecht nach unten,

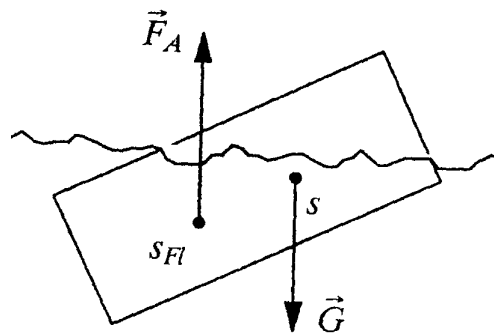


Abbildung IIX.12: auf einen schwimmenden Körper wirkende Kräfte

im Schwerpunkt des verdrängten Wassers greift die gleich große Auftriebskraft an und zieht nach oben. Wir wissen, dass die Gewichtskraft und Auftrieb gleich groß sind. Damit sind die Bedingungen für ein Kräftepaar gegeben. Aus diesen Kräften resultiert ein Drehmoment. Beide Kräfte drehen deshalb den Körper.

Ob eine Schwimmelage stabil oder labil ist, entscheidet man mit Hilfe eines neu eingeführten Zentrums, des Metazentrums. Befindet sich der schwimmende Körper in seiner Gleichgewichtslage, so liegen der Schwerpunkt des Körpers und der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit übereinander. Die Verbindungslinie der beiden Punkte denke man sich nun fest am Körper angeheftet. Liegt der schwimmende Körper nicht in seiner Gleichgewichtslage, so liegt diese Verbindung schräg. Liegt das Metazentrum oberhalb des Schwerpunkts, dann ist die ursprüngliche Schwimmelage stabil, anderenfalls ist sie labil. Es wirkt ein Drehmoment, der Körper wird in eine stabile Gleichgewichtslage gedreht.

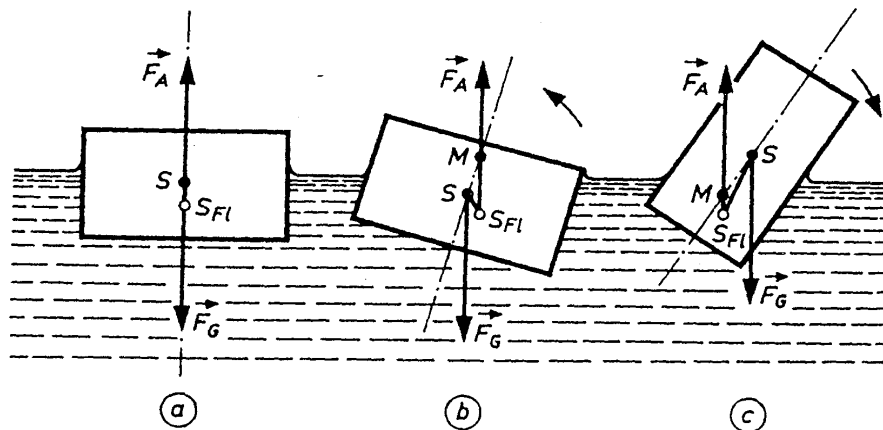


Abbildung IIX.13: a) Stabile Schwimmelage b) Drehmoment dreht in Ausgangslage zurück, das Metazentrum liegt höher als der Schwerpunkt, sonst ist die Schwimmelage instabil wie in Bild c)

IIX.5 Druck in Gasen

Bisher haben wir Druck nur in festen Körpern und Flüssigkeiten besprochenen. Im Gegensatz zu Gasen sind Festkörper und Flüssigkeiten inkompressibel. Diese Tatsache haben wir bereits bei dem Versuch mit dem Wasserteufel betrachtet. Ferner haben wir festgestellt, dass Gas weder eine Form- noch eine Volumen-Elastizität besitzen. Das lag darin begründet, dass die Moleküle eines Gases im Gegensatz zum festen und flüssigen Aggregatzuständen einen verhältnismäßig großen Abstand haben. Die zwischenmolekularen Kräfte sind daher in Gasen außerordentlich klein. Im Grenzfall des sogenannten Idealen Gases werden diese Kräfte völlig vernachlässigt.

Definition IIX.1: Ein Ideales Gas ist ein Gas, in dem die zwischenmolekularen Kräfte null sind.

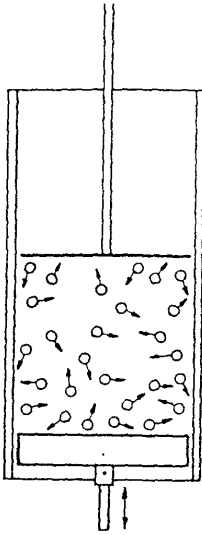


Abbildung IIX.14:
Modellversuch
zum Gasdruck

Als Modell eines idealen Gases kann man sich ein geschlossenes Volumen vorstellen, in dem elastische Kugeln ohne sich zu berühren regellose Bewegungen ausführen.

Selbstverständlich sind die Kugeln nicht immer gleichmäßig über den Raum verteilt. Stellt man sich dem Druck nun so vor, dass die Kugeln an die Gefäßwand treffen, so folgt aus dieser ungleichen Verteilung eine statistische Schwankungen der Kraft, die ein eingesperres Gas auf einen Kolben ausübt.

Die Druckausbreitung in Gasen erfolgt, genauso wie die Druckausbreitung in Flüssigkeiten, in alle Richtungen gleich.

Da zwischen den Molekülen eines Gases im

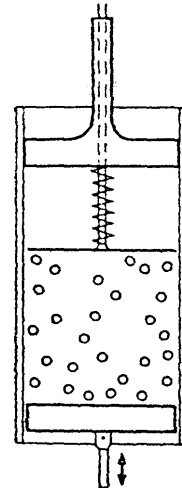


Abbildung IIX.15:
Statistische Schwankungen
der Verteilung der Teilchen
in einem abgeschlossenen
Volumen

idealen Fall keine Abstoßungskräfte mehr wirken, lassen sich Gase im Vergleich zu Flüssigkeiten sehr stark zusammendrücken. Die Kompressibilität ist sehr groß, sie haben jedoch keine Volumenelastizität mehr. Die Erfahrung zeigt, dass man trotzdem einen nicht unerheblichen Druck aufwenden muss, um das Volumen eines Gases zu ändern.

Empirisch findet man für ideale Gase, dass bei konstanter Temperatur der doppelte Druck aufgewendet werden muss, um das Volumen zu halbieren. Dies gilt natürlich nur, wenn die Menge des Gases konstant gehalten wird.

Diese Gesetzmäßigkeit wird *Gesetz von Boyle-Mariotte* oder auch nur *Boylesches Gesetz* genannt.

Merke: Bei gleicher Menge eines Gases und konstanter Temperatur ist das Produkt aus Volumen und Druck konstant:
 $p \cdot V = \text{const}$ Boyle-Mariotte

eine genaue Untersuchung dieses Gesetzes wird später in der kinetischen Gastheorie vorgenommen.

Mit diesem Gesetz können wir die Kompressibilität eines Gases angeben:

Allgemein hatten wir für die Kompression die Formel

$$\kappa = \frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \quad \text{hergeleitet.}$$

Aus dem Boyle - Mariott'schen Gesetz $p V = p_0 V_0$

$$\Leftrightarrow V = p_0 V_0 \frac{1}{p}$$

folgt

$$\frac{dV}{dp} = - \frac{V_0 p_0}{p^2}.$$

Damit gilt

$$\kappa = \frac{1}{V} \frac{V_0 p_0}{p^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\kappa = \frac{1}{p}}$$

Merke: Die **Kompressibilität idealer Gase** ist gleich dem Kehrwert des komprimierenden Drucks: $\kappa = 1/p$

Das bedeutet, dass die Kompressibilität idealer Gase bei kleinen Drucken sehr groß ist. Je größer der Druck ist, desto geringer ist die Kompressibilität.

Um den Luftdruck nachzuweisen, wurden bereits im 17. Jahrhundert spektakuläre Versuche vorgenommen.

Einen Versuch unternahm Otto von Guericke (1602 - 1686): den Versuch der *Magdeburger Halbkugeln*. Bei diesem Versuch vor dem Reichstag 1654 setzte Otto von Guericke zwei Halbkugeln lose aufeinander. Die Halbkugeln wurden dann ausgepumpt. An jeder Hälfte der Kugel wurde ein Seil befestigt, an dem Seil zogen auf jeder Seite 8 Pferde. Die Kraft der 16 Pferde reichte nicht aus, um die leergepumpten Halbkugeln gegen den Luftdruck auseinander zu ziehen.

Einen ähnlichen Versuch wollen wir in der Vorlesung auch zeigen:

Versuch IIX.8: Magdeburger Halbkugeln

Da wir in der Vorlesung keine Pferde zur Verfügung haben, müssen wir den Versuch mit Professoren durchführen. Um die Proportion zu wahren, verwenden wir natürlich kleinere Halbkugeln. Doch auch unseren Professoren gelingt es nicht, die Halbkugeln gegen den Luftdruck auseinander zu ziehen.

Der Luftdruck wurde quantitativ zuerst von Toricelli im Jahre 1643 bestimmt. Wir führen zur quantitativen Untersuchung des Luftdrucks folgenden Versuch durch:

Versuch IIX.9: Messung des Drucks

Für diesen Versuch verwenden wir ein Rohr, das mit einem verschließbaren Kolben verschlossen ist. Durch Herausziehen des Kolbens kann das Rohr leergepumpt werden. Statt mit einem Seil an dem Kolben zu ziehen, verwenden wir nun eine Federwaage. Damit kann direkt abgelesen werden, welche Kraft wirkt, so kann errechnet werden, welcher Druck herrscht.

Bereits ohne exakte Werte zu messen, kann man beobachten, dass das Zusammendrücken des Kolbens leichter geht, je mehr Volumen noch eingeschlossen ist. Ist der Kolben sehr weit in das Rohr geschoben, so ist eine weitere Kompression nur sehr schwer zu erzielen.

IIX.6 Barometrische Höhenformel

Bisher haben wir nur den Schweredruck von Flüssigkeiten berechnet. Dabei gingen wir davon aus, dass die Dichte von Flüssigkeiten als konstant angenommen werden kann. Diese Annahme ist allerdings für große Tiefen falsch. Begründet hatten wir diese Einschränkung damit, dass Flüssigkeiten praktisch inkompressibel sind. Wie wir gesehen haben, sind Gase jedoch nicht

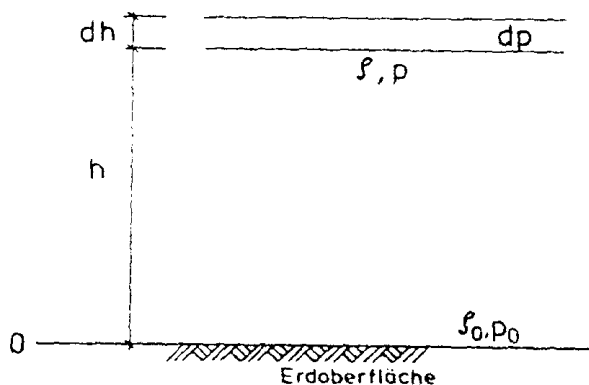


Abbildung IIX.16: geometrische Betrachtung einer dünnen Gasschicht im Schwerfeld der Erde

inkompressibel. Wir müssen deshalb die Dichte in Gasen als nicht konstant ansehen. Für den Schweredruck der Luft unserer Erde folgt daraus, dass höhere Luftschichten die unteren zusammen drücken. Die Luftdichte ist deshalb eine Funktion der Höhe.

Betrachten wir nun eine unendlich dünne Luftschicht der Höhe dh . In dieser unendlich dünnen Schicht können wir die Dichte als konstant

voraussetzen. Bei konstanter Dichte ρ ändert sich der Druck dp wie bei Flüssigkeiten:

$$dp = -\rho g dh$$

Die Höhe h soll dabei nach oben positiv gemessen werden.

Daraus folgt für die Höhe

$$dh = -\frac{1}{\rho g} dp.$$

Ferner gehen wir davon aus, dass die Temperatur in allen Luftschichten konstant sein soll.

Diese Annahme ist für große Höhen, wie wir bereits wissen, falsch. Auch die Masse des Gases soll als konstant angenommen werden. Aus dem Boyleschen Gesetz wissen wir, dass

$$p \cdot V = \text{const} \quad \text{gilt.}$$

Mit
$$V = \frac{m}{\rho}$$

folgt
$$p \frac{m}{\rho} = \text{const.}$$

und mit konstanter Masse m
$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} = \text{const}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \frac{1}{p}$$

p_0 und ρ_0 bezeichnen dabei z.B. Dichte und Druck der Luft an der Erdoberfläche.

Damit folgt für die Dicke der Luftschicht dh

$$dh = -\frac{1}{g} dp \frac{p_0}{\rho_0 p}$$

Durch Integration folgt dann für eine beliebige Höhe

$$h = \int_0^h dh$$

$$h = -\frac{p_0}{\rho_0 g} \int_{p(0)}^{p(h)} \frac{dp}{p}$$

$$\Leftrightarrow h = -\frac{p_0}{\rho_0 g} (\ln p(h) - \ln p_0)$$

$$\Leftrightarrow h = -\frac{p_0}{\rho_0 g} \ln \frac{p(h)}{p_0}$$

$$\Rightarrow p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g h}{p_0}\right)$$

Diese Formel gibt den Luftdruck in Abhängigkeit von der Höhe an. Es ist wichtig, zu beachten, dass diese Formel hergeleitet wurde unter der Annahme, dass Temperatur und Masse der Luft konstant sind. Die unter dem Namen Barometrische Höhenformel bekannte Formel stellt deshalb eine Idealisierung dar.

Die **Barometrische Höhenformel** gibt den Luftdruck in Abhängigkeit von der Höhe an.

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g h}{p_0}\right)$$

Als Beispiel berechnen wir den Luftdruck, der in acht Kilometer Höhe herrscht. Die Dichte der Luftschicht nehmen wir mit $\rho_0 = 1.29 \text{ kg/m}^3$ an, der Druck an der Erdoberfläche sei $p_0 = 1.013$ bar. Dann ist der Luftdruck in acht Kilometern Höhe

$$\frac{p_0}{\rho_0 g} \approx 8 \text{ km}$$

Daraus folgt

$$p(h) = p_0 e^{-h/8 \text{ km}}$$

Für $h = 8 \text{ km}$

$$p(8 \text{ km}) \cong \frac{p_0}{e}$$

Für $h = 5,5 \text{ km}$ gilt

$$p(5,5 \text{ km}) \cong \frac{p_0}{2}$$

In einer Höhe von 500 Kilometern haben wir also noch ungefähr die Hälfte des Luftdrucks von dem an der Erdoberfläche herrschenden Luftdruck.

Die folgende Abbildung zeigt den Verlauf des Schweredruckes in Wasser und in Luft. Man sieht, dass im Wasser das Volumen als konstant angenommen wird.

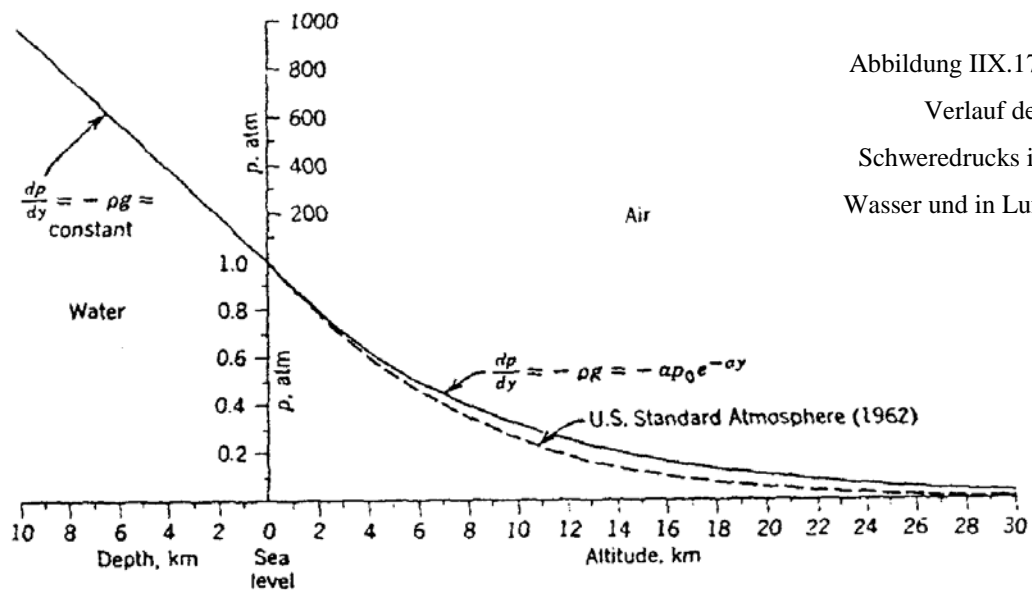


Abbildung IIX.17:
Verlauf des
Schweredruckes in
Wasser und in Luft

IIX.7 Oberflächenspannung

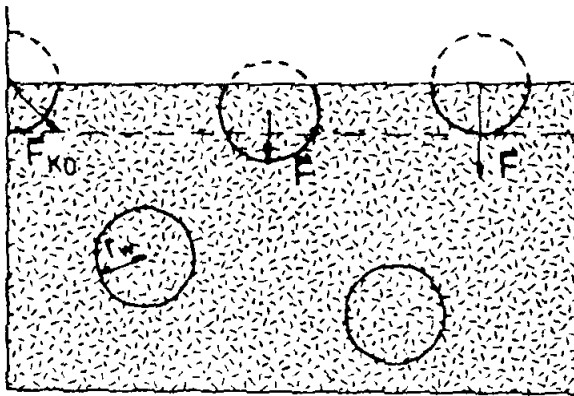


Abbildung IIX.18: Flüssigkeitsmoleküle im Innern und an der Oberfläche einer Flüssigkeit

Wie wir bereits festgestellt haben, wirken zwischen den Molekülen von Flüssigkeiten Kräfte. Nun wollen wir versuchen, die Eigenschaften von Flüssigkeitsoberflächen zu beschreiben, die durch diese zwischenmolekulare Anziehungskraft hervorgerufen werden.

Auf ein Flüssigkeitsmolekül im Innern einer Flüssigkeit wirkt die Anziehungskraft nach allen Seiten. Wir wissen, dass Druck sich in Flüssigkeiten

gleichmäßig ausbreitet. Im Gleichgewicht verschwindet also die resultierende Kraft. Betrachten wir nun aber ein Teilchen, das an der Oberfläche der Flüssigkeit ist. An diesem Teilchen wirken von oben keine Anziehungskräfte. Die resultierende Kraft zieht deshalb nach unten. Aufgrund dieser Kraft werden die Randmoleküle zur Flüssigkeit hin gezogen, die Kraft versucht also, die Oberfläche zu verkleinern.

Wie kann man das quantitativ erfassen? Um die Oberfläche zu vergrößern, muss man Arbeit gegen diese resultierende Zugkraft leisten:

Dabei ist die Arbeit zur Vergrößerung der Oberfläche ΔW proportional zu der Vergrößerung der Oberfläche ΔA $\Delta W \sim \Delta A$.

Diesen Proportionalitätsfaktor definieren wir jetzt als Oberflächenspannung:

Definition IIX.2: Die Oberflächenspannung oder „spezifische Oberflächenenergie“ ist der Quotient aus geleisteter Arbeit zur Vergrößerung der Oberfläche und der

$$\text{Vergrößerung der Oberfläche: } \sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A}$$

Einheitenbetrachtung:

Die Dimension der Oberflächenspannung ist $[\sigma] \frac{[W]}{[A]} = \frac{J}{m^2} = \frac{N}{M} = \frac{[Kraft]}{[Länge]}$

Wie man an den Einheiten sieht, ist der Begriff der Oberflächenspannung irreführend. Die Oberflächenspannung oder spezifische Oberflächenenergie hat die Einheit Kraft durch Länge.

Merke: Da zur Vergrößerung der Oberfläche Arbeit erforderlich ist, sind Flüssigkeiten bestrebt, die Oberfläche zu minimieren.

Die mechanische Arbeit, die verwendet worden ist, um die vergrößerte Oberfläche zu bilden, ist also in ihr gespeichert. Eine ebene Flüssigkeitsoberfläche zeigt das Bestreben, sich möglichst zu verkleinern. Das ist gleichbedeutend mit der Aussage: die Oberflächenenergie strebt einem möglichst kleinen Wert zu. Das wollen wir an Hand eines Versuchs zeigen.

Versuch IIX.10: Verkleinern der Oberfläche von Seifenhäuten

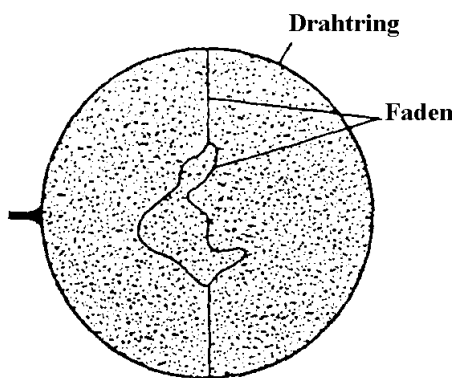


Abbildung IX.19a: geschlossene Seifenlamelle in einem Drahtring

In einem runden Drahtrahmen wird eine Haut aus Seifenwasser hergestellt. In dem Rahmen ist ein nicht gespannter geschlossener Fasern festgebunden. Die Haut geht über den ganzen Ring. Wird nun die Haut innerhalb des Fadens durchstochen, so wird der Faden zu einem vollkommen

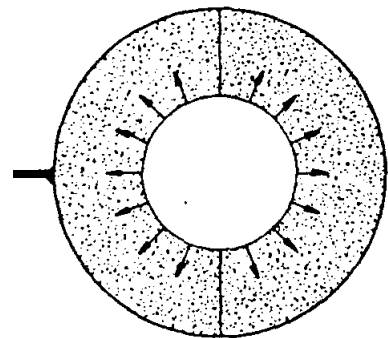


Abbildung IX.19b: Um die Oberfläche zu minimieren spannt die Seifenhaut den Faden zu einem Ring

Kreis auseinander gezogen. Das basiert auf dem Bestreben der Flüssigkeit, die kleinst mögliche Oberfläche zu haben. Der Kreis ist dabei die geschlossene Kurve, die bei gegebenem Umfang den größten Flächeninhalt einschließt.

Bei einem anderen Versuch wird in ein Uhrglas, das stark verdünnte Schwefelsäure enthält, ein kleiner Tropfen Quecksilber gegeben. Das Quecksilber wird dann mit einem Glasstab umgerührt. Die dadurch entstehenden kleinen Tropfen schließen sich schnell zu einem größeren zusammen, der allmählich alle kleineren aufnimmt. Auch hier ist die Flüssigkeit bestrebt, die Oberflächen zu minimieren. Dabei hat das insgesamt eingeschlossene Volumen dann die kleinste Oberfläche, wenn nur eine Kugel vorhanden ist.

Nun versuchen wir, die Oberflächenspannung quantitativ zu erfassen.

Versuch IIX.11: Messung der Oberflächenspannungen

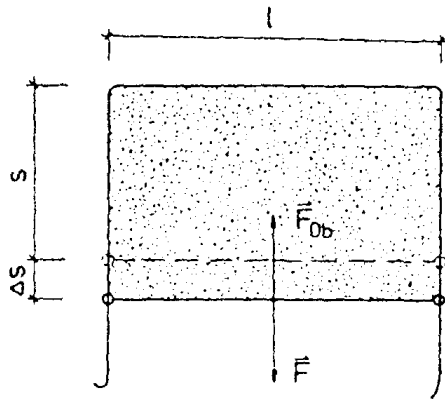


Abbildung IIX.20: Drahtbügel mit Flüssigkeitshaut

Bei diesem Versuch wird ein Drahtbügel senkrecht in Seifenlauge getaucht. Danach wird der Bügel langsam herausgezogen, so dass sich eine Flüssigkeitshaut bildet.

Vernachlässigt man die Ränder, und beachtet man, dass die Haut zwei Seiten hat, so hat die Haut die Fläche $A = 2\ell s$

Nun ziehen wir den Bügel um ein kleines Stück Δs heraus. Um auf diese Weise die Oberfläche zu vergrößern, müssen wir Arbeit leisten. Mit der

Definition von Arbeit als Kraft mal Fläche

$$\Delta W = F \cdot \Delta s$$

folgt für die Oberflächenspannung

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A}$$

$$\Leftrightarrow \sigma = \frac{F \Delta s}{2\ell \Delta s}$$

$$\Leftrightarrow \sigma = \frac{F}{2\ell}$$

Auf diese Weise kann man für verschiedene Flüssigkeiten die Oberflächenspannung berechnen.

Einige typische Werte von σ sind:

Wasser	$70 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}} = \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}$	temperaturabhängig
--------	---	--------------------

Seifenlösung ca.	$30 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}} = \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}$
------------------	---

Quecksilber	$480 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}} = \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}$
-------------	--

Betrachten wir noch einen weiteren Versuch:

Versuch IIX.12: Überdruck einer Seifenblase

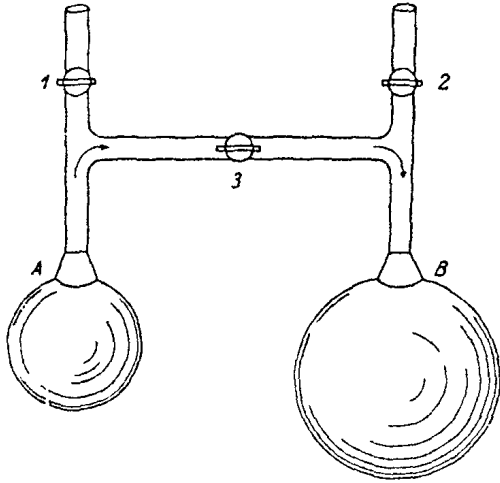


Abbildung IIX.21: die große Blase saugt die kleine auf

Bei diesem Versuch werden eine große und eine kleine Seifenblase miteinander verbunden. Die Verbindung kann durch eine Dichtung verschlossen werden. Zunächst sei die Verbindung geschlossen, die Seifenblasen behalten ihre Größe bei. Nun wird die Verbindung geöffnet: man kann beobachten, dass die große Blase die kleine aufsaugt. Betrachten wir nun die Erklärung:

Im Inneren der Blase herrscht ein Überdruck Δp vom Aufblasen, der sich mit der Oberflächenspannung die Waage hält. Für die

Arbeit, die ich leiste, um r und dr zu vergrößern, gilt:

$$\begin{aligned} \Delta W_{\Delta p} &= F \, dr \\ \Leftrightarrow \Delta W_{\Delta p} &= \frac{F}{A} \, A \, dr \\ \Leftrightarrow \Delta W_{\Delta p} &= \Delta p \, dV \end{aligned}$$

Diese Arbeit führt zu einer Erhöhung der Oberflächenenergie:

$$dW_{\sigma} = \sigma \cdot dA$$

Diese Oberflächenenergie entspricht der aufgenommenen Energie.

Aus dem Energiesatz folgt:

$$dW_{\sigma} = dW_{\Delta p}$$

also

$$\Delta p \, dV = \sigma \, dA$$

wobei $dW_{\Delta p}$ die geleistete Arbeit bezeichnet.

Mit der Fläche einer Kugel

$$A = 4\pi r^2 \cdot 2$$

und dem Volumen

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Die Seifenblase hat eine innere und eine äußere Oberfläche. Deshalb beträgt die Änderung der Oberfläche

$$dA = 16\pi r \, dr$$

und die des Volumens

$$dV = 4\pi r^2 \, dr$$

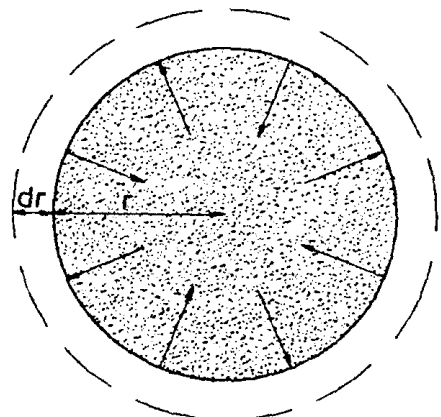


Abbildung IIX.22: Vergrößerung der Blase um dr

Eingesetzt in

$$\Delta p dV = \sigma dA$$

folgt

$$\sigma \cdot 16 \pi r dr = \Delta p 4\pi r^2 dr$$

\Leftrightarrow

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{r}$$

d.h. Innendruck der Seifenblase nimmt mit $1/r$ ab.

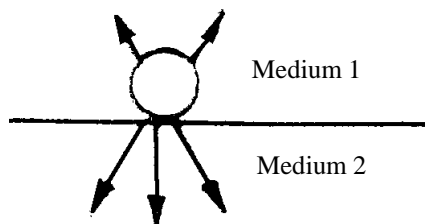
Das Ergebnis lässt sich für beliebige Oberfläche verallgemeinern. Für nur eine Oberfläche gilt

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r}.$$

Merke: Eine Flüssigkeit übt einen Druck $\Delta p = 2\sigma/r$ zum Inneren der Flüssigkeit aus, wobei r der Radius der Kugel ist, welche die Oberfläche im betrachteten Punkt beschreibt.

IIX.8 Grenzflächenspannung und Kapillarität

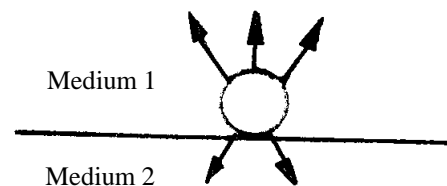
In diesem Kapitel wollen wir den hergeleiteten Begriff der Oberflächenspannung verallgemeinern. Bisher haben wir nur die Oberflächenspannungen einer Flüssigkeit gegen Luft, genau genommen gegen Vakuum, betrachtet, nun gehen wir davon aus, dass die Grenzfläche allgemein von zwei Medien, Medium 1 gegen Medium 2, aufgespannt wird. Eine solche Grenzfläche besteht z.B. zwischen zwei Flüssigkeiten, zwischen einer Flüssigkeit und einem Festkörper oder zwischen einer Flüssigkeit und einem Gas. Um zu kennzeichnen, zwischen welchen Medien die Grenzfläche besteht, kennzeichnen wir die Oberflächenspannung jetzt mit zwei Indizes σ_{12} . Diese Oberflächenspannung bezeichnet jetzt die Spannung, die von Oberfläche 1 nach Oberfläche 2 wirkt. Die Oberflächenspannung ist dabei ein Maß für die Energie, die man aufwenden muss oder gewinnt, wenn man Veränderungen der Grenzfläche von Medium 1 gegen Medium 2 vornimmt.



zu minimieren.

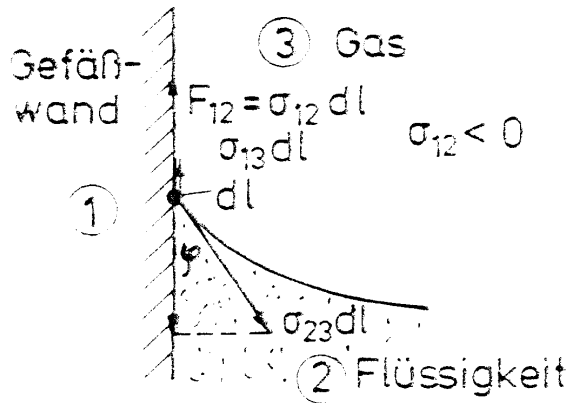
Ist die Oberflächenspannung größer 0, so wird ein Oberflächenmoleküle in Medium 2 stärker von dem eigenen Medium, also Medium 2 angezogen, als von Medium 1. Wie bereits besprochenen, versucht die Grenzfläche, sich

Ist die Oberflächenspannung hingegen negativ, so wird das Oberflächenmolekül stärker von Medium 1 als von Medium 2 angezogen. In diesem Fall versucht die Grenzfläche sich zu maximieren.



Besteht die Grenzfläche zwischen zwei Flüssigkeiten, so ist eine Durchmischung möglich.

Dieses Phänomen betrachten wir nur in einem Beispiel. Hierzu überlegen wir uns, wie die



Oberflächenspannung auf eine Oberfläche einer Flüssigkeit gegen eine Gasphase an einer Gefäßwand wirkt

Die erste Abbildungen zeigt die Grenzfläche einer Flüssigkeit gegen ein Gas an einer Gefäßwand, wobei die Oberflächenspannung positiv ist.

Abbildung IIX.23: Oberflächenspannung, die auf eine Oberfläche einer Flüssigkeit (2) gegen eine Gasphase (3) an einer Gefäßwand (1) wirkt

Nun betrachten wir das Linienelement $d\ell$ der Begrenzungslinie zwischen den 3 Medien; an dieser Begrenzungslinie greifen

3 Kräfte an: $F_{ik} = \sigma_{ik} d\ell$.

Dabei liegen $F_{13} = \sigma_{13} d\ell$ und $F_{12} = \sigma_{12} d\ell$ in einer Wirkungslinie, sind jedoch entgegengesetzt.

Die in diese Richtung wirkende Kraftkomponente von $F_{23} = \sigma_{23} d\ell$ berechnet man mit Hilfe des Cosinus.

Für $\sigma_{12} > 0$ versuchen alle 3 Kräfte, die zugehörige Oberfläche zu reduzieren. Im Gleichgewicht gilt an der Gefäßwand

$$\begin{aligned} \sum F_{ik} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sigma_{13} d\ell - \cos\varphi \sigma_{23} d\ell &= \sigma_{12} d\ell \\ \Leftrightarrow \sigma_{13} - \sigma_{12} &= \sigma_{23} \cos\varphi \\ \Leftrightarrow \cos\varphi &= \frac{\sigma_{13} - \sigma_{12}}{\sigma_{23}} \end{aligned}$$

$\sigma_{13} - \sigma_{12}$ nennt man auch Haftspannung.

Es gibt vier verschiedene Möglichkeiten, wie die Oberflächenspannungen sich zueinander verhalten:

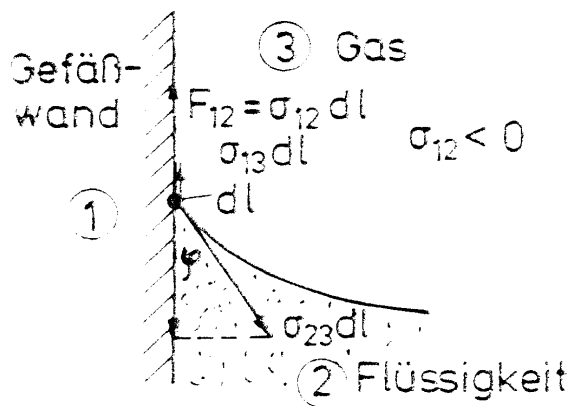


Abbildung IIX.24a: $\sigma_{12} < \sigma_{13}$, $\varphi < 90^\circ$, benetzend

2. Fall: $\sigma_{12} > \sigma_{13}$. Der Winkel den die Flüssigkeit mit der Gefäßwand einschließt ist $\varphi > 90^\circ$. Die Flüssigkeit ist benetzend. Dieser Fall ist in Abbildung IIX.24b dargestellt. Ein Beispiel hierfür ist Seifenlauge.

1. Fall: $\sigma_{12} < \sigma_{13}$. Der Winkel den die Flüssigkeit mit der Gefäßwand einschließt ist $\varphi < 90^\circ$. Die Flüssigkeit ist nicht benetzend. Dieser Fall ist in Abbildung IIX.24a dargestellt. Ein bereits verwendetes Beispiel ist Quecksilber.

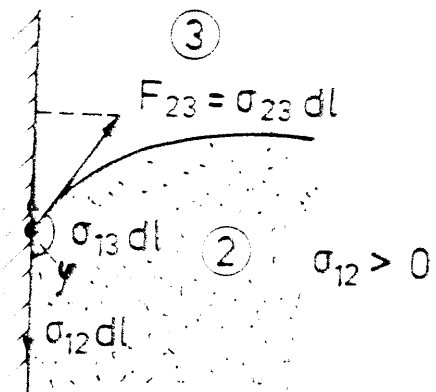


Abbildung IIX.24b: $\sigma_{12} > \sigma_{13}$, $\varphi > 90^\circ$, nicht benetzend

3. Fall: Ein Gleichgewicht nur möglich falls $|\sigma_{13} - \sigma_{12}| \leq \sigma_{23}$ ist.

4. Fall: Falls $\sigma_{13} - \sigma_{12} > \sigma_{23}$ ist, kriecht die Flüssigkeit an der Gefäßwand hoch und benetzt sie vollständig. Diese Eigenschaft hat z.B. Kriechöl.

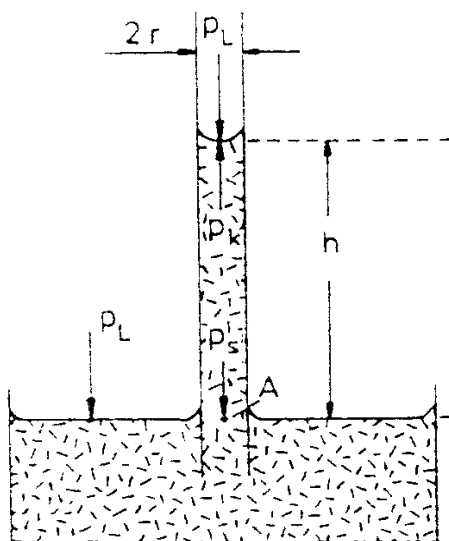


Abbildung IIX.25: Kapillarität

Die unterschiedliche Benetzung von Oberflächen mit Flüssigkeiten hat zur Folge, dass Flüssigkeiten in engen Gefäßen ein anderes Niveau einnehmen, als die Flüssigkeit außerhalb des Gefäßes. Diese Eigenschaft wird Kapillarität genannt.

Betrachten wir diese Konsequenz der Grenzflächenspannung in einem Gedankenexperiment:

Eine Flüssigkeit steigt in einem engen Rohr des Radius r um das Stück h an. Die Oberfläche bildet

einen Teil einer Kugelschale mit dem Radius R. Dieser Radius R entspricht nur im Grenzfall eines sehr kleinen Benetzungswinkels φ .

Aus dem Versuch mit der Seifenblase wissen wir, dass durch das Verringern der Oberfläche ein Druck wirkt. Der Druck der gekrümmten Flüssigkeitsoberfläche ist

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}$$

Für den Anstellwinkel φ der Flüssigkeit an der Wand gilt

$$\cos \varphi = \frac{r}{R}$$

Damit folgt für den Druck

$$\Delta p = \frac{2\sigma \cos \varphi}{r}$$

Im Gleichgewicht halten sich Schwerkraft und Oberflächenspannung die Waage:

$$\frac{2\sigma}{R} = \rho g h$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sigma}{r} \cos \varphi = \rho g h$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{2\sigma}{\rho g} \cos \varphi = h$$

Fasst man $r/\cos \varphi$ zusammen zu r' , so folgt das

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g} \cdot \frac{1}{r'} \quad \text{Kapillargesetz}$$

Für den Grenzfall $\varphi = 0$ lautet das Kapillargesetz

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g} \cdot \frac{1}{r}$$

Die Steighöhe ist also umgekehrt proportional zum Radius des Rohres.

σ ist die Oberflächenspannung der Flüssigkeit gegen Luft. Für nicht benetzende Flüssigkeiten wirkt der Druck in die entgegengesetzte Richtung: Der Flüssigkeitsspiegel wird herabgedrückt. Man spricht in diesem Fall von einer 'Kapillardepression'

Betrachten wir nun zwei Versuche zum Kapillargesetz.

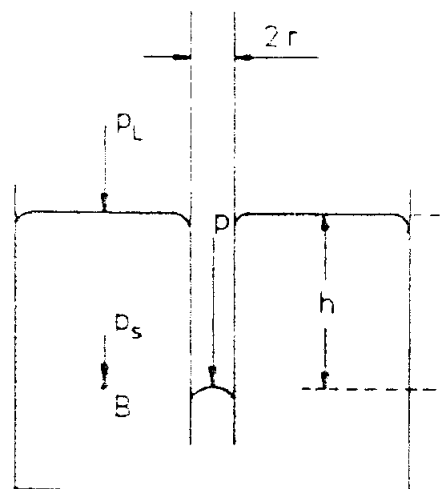
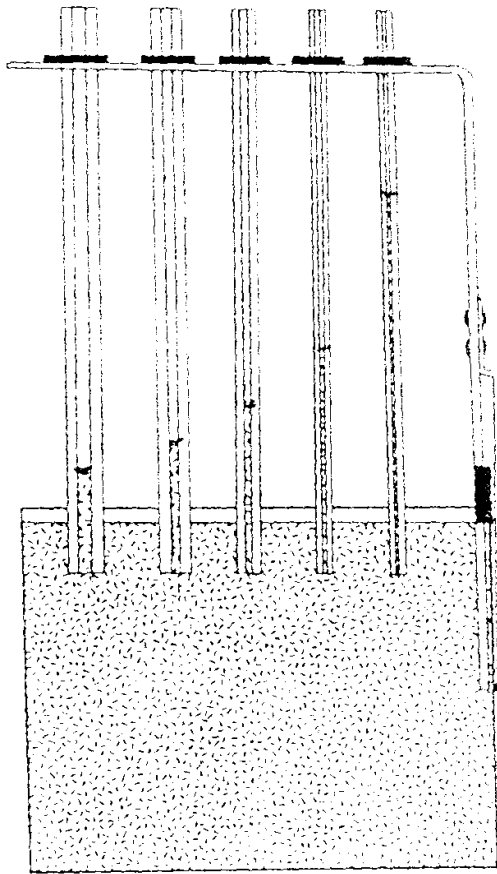


Abbildung IIX.26: Kapillardepression

Versuch IIX.13: Steighöhe in Kapillaren



Bei diesem Versuch werden fünf Röhre mit verschiedenen Radien gleich tief in eine Flüssigkeit getaucht. Aufgrund der Kapillarwirkung steigt das Wasser in den Röhren nach oben. Man kann beobachten, dass die Flüssigkeit in den Röhren mit kleineren Radien höher steigt. Betrachtet man ein Rohr mit zwei Millimeter und eines mit einem Millimeter Durchmesser, so sieht man das umgekehrte Verhältnis von Steighöhe und Durchmesser des Rohres bewahrheitet: in dem dünneren Rohr steht das Wasser doppelt so hoch.

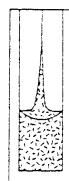
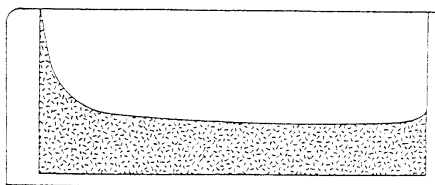
Abbildung IIX.27: Die Steighöhe in Kapillaren ist umgekehrt proportional zum Durchmesser der Röhre

In einem weiteren Versuch betrachten wir ein Keil aus Glas:

Versuch IIX.14: Keilglas

Zwei Glasplatten sind so miteinander befestigt, dass sie einen Winkel einschließen. Sie bilden einen Keil. In dem Keil ist in einem Fall Wasser, in einem anderen Fall Quecksilber eingelassen. Geometrische Überlegungen zeigen, dass die Steighöhe hyperbelförmig

zunehmenden muss, je mehr man sich der Spitze des Keils nähert.



Beim Wasser sehen wir wie zu erwarten eine steigende Hyperbel; je geringer Abstand der Platten wird, desto höher steigt das Wasser.

Abbildung IIX.28a: **Wasser** im Keilglas

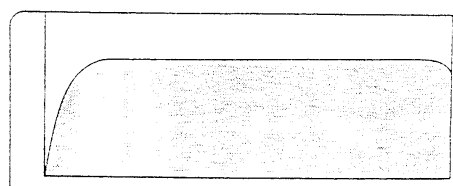


Abbildung IIX.28b: **Quecksilber** im Keilglas

Das Quecksilber hingegen ist nicht benetzend, bei sinkendem Abstand der Platten sinkt auch die Steighöhe.