3 Der Aufbau der Atome

3.1 Die Größe der Atome

Der Atombegriff wurde schon im Altertum von Demokrit eingeführt (atomos = unteilbar). Allerdings gab es keine konkreten Vorstellungen über ihr Wesen. Den ersten experimentellen Hinweis auf die Existenz von Atomen lieferte die Chemie:
J. Dalton um 1800: Gesetz der konstanten Proportionen, z.B. Sauerstoffanteile in Stickstoff-Sauerstoffverbindungen. N_2O, NO, N_2O_3, NO_2 verhalten sich wie 1 : 2 : 3 : 4.

Die erste Größenabschätzung für Atome stammt aus der van der Waals Gleichung für reale Gase:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

b: Korrektur durch Eigenvolumen der Gasatome, entspricht 4-fachem Atomvolumen

$\Longrightarrow$ Radien der Atome $\approx 1 - 2 \cdot 10^{-10}$m

Bestätigung durch z.B. Beugung von Röntgenstrahlen an Kristallgittern. Heute kann man einzelne Atome „sehen“ und zwar in Rastertunnel- und Rasterkraftmikroskopen.

Entdeckung des Elektrons durch Thompson (1897):

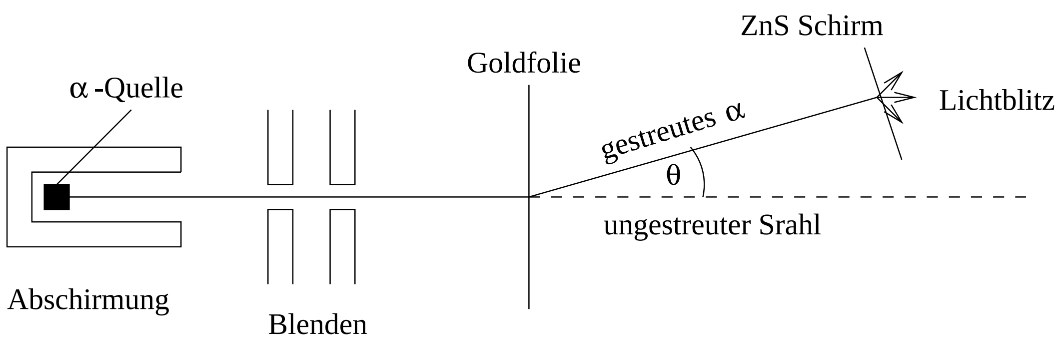
- alle Atome enthalten Elektronen
- das Elektron ist $\approx$ 2000 mal leichter als das leichteste Atom
- Elektronen sind elektrisch negativ geladen, Atome aber neutral

Erstes Atommodell von Thompson:
Atome sind Kugeln, die mit positiv geladener Materie gefüllt sind. Darin eingebettet sind die Elektronen.

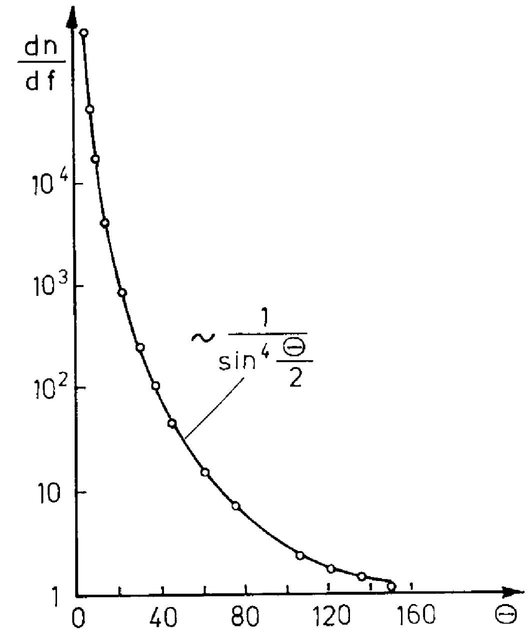
Problem: Schwere Atome sind kaum größer als leichte, z.B. ist das Uranatom 236 mal schwerer als das Wasserstoffatom!
Wie ist die Materie im Atom verteilt?

3.2 Das Rutherford Streuexperiment

Streuung von α -Teilchen an den Atomen einer dünnen Goldfolie. Versuchsaufbau:

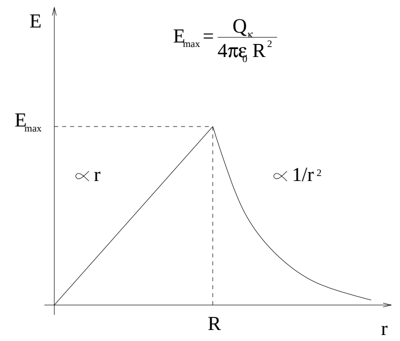


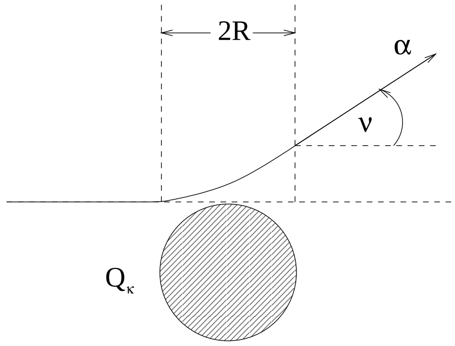
Versuchsergebnis: Zahl der detektierten α-Teilchen als Funktion des Streuwinkels θ:



Die meisten α-Teilchen durchdringen die Goldfolie ungestört. Einige wenige werden jedoch stark abgelenkt, auch Rückstreuung ($\theta = 180°$) tritt auf. Die Zahl der gesteuten α-Teilchen folgt einem $\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$ Verlauf. Das ist nicht verträglich mit der Vorstellung, dass das Atom eine homogen gefüllte, positiv geladene Kugel ist. Warum? Wir machen hier eine grobe Abschätzung des zu erwartenden Ablenkwinkels:

Elektrisches Feld einer geladenen Kugel:





Wir nehmen an, dass die maximale Kraft $F_{max} = Q_\alpha \cdot E_{max}$ über eine Strecke von zwei Atomradien auf das α-Teilchen wirkt ($Q_\alpha = +2e$). Das α-Teilchen erhält dann den transversalen Impuls

$$\Delta p = F_{max} \cdot \Delta t = 2e \frac{Q_\kappa}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{2R}{v_\alpha} = \frac{eQ_\kappa}{\pi\epsilon_0 R v_\alpha}$$

Die Geschwindigkeit des α-Teilchens ist $v_\alpha = \frac{p}{m_\alpha}$ und weil die kinetische Energie $T_\alpha = \frac{p^2}{2m_\alpha} = \frac{v_\alpha^2 m_\alpha}{2} = 5MeV$ sehr viel kleiner ist als die Ruheenergie, $m_\alpha c^2 = 3.7GeV$, dürfen wir nicht-relativistisch rechnen. Für den Ablenkwinkel erhalten wir dann

$$\theta \approx \frac{\Delta p}{p} = \frac{eQ_\kappa}{\pi\epsilon_0 R v_\alpha} \cdot \frac{1}{m_\alpha v_\alpha} = \frac{eQ_\kappa}{2\pi\epsilon_0 R T_\alpha}$$

Wenn man Zahlenwerte einsetzt (Gold $Q_\kappa = 79e, R = 10^{-10}m$) erhält man

$\theta = 0,02°$!!!

Das Rutherford-Experiment ist in Übereinstimmung mit der Erwartung für die Streuung an einer punktförmigen Ladung, dem Atomkern. Das Experiment wird beschrieben durch die Rutherfordsche Streuformel (Herleitung in Kap. 3.3):

$$\frac{dn}{d\Omega} = n \cdot N \cdot d \cdot \left(\frac{Q_\alpha Q_\kappa}{16\pi\epsilon_0 T_\alpha}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})}$$

n Zahl der α -Teilchen
Ω Raumwinkel
N Dichte der Goldatome
d Dichte der Folie

Rutherfordsches Atommodell:

Atome bestehen aus einem positiv geladenen Atomkern, dessen Radius sehr viel kleiner ist als der des Atoms. Praktisch die gesamte Masse ist im Atomkern konzentriert. Um diesen Kern sind Elektronen angeordnet.

Rutherford konnte nur eine obere Grenze für den Kernradius angeben. Bei einem zentralen Stoß ($\theta = 180°$) wird die kinetische Energie des α-Teilchens vollständig in potentielle Energie umgewandelt und der kürzeste Abstand der α-Teilchen zum Kern erreicht. Da die Streuformel auch für $\theta = 180°$ experimentell bestätigt wurde, muß der Atomkern kleiner als dieser Abstand sein:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_\alpha Q_\kappa}{r} = T_\alpha \Rightarrow r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_\alpha Q_\kappa}{T_\alpha}$$

Für den Kern des Goldatoms und mit $T_\alpha = 5MeV$ folgt dann
$r_{Gold} < 3 \cdot 10^{-14} m$

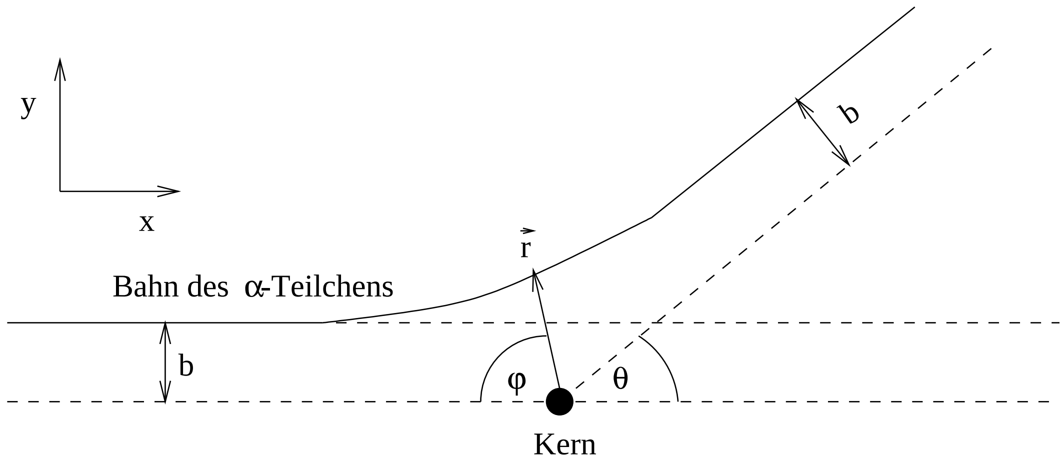
Eine andere Abschätzung für die maximale Größe der Atomkerne erhält man aus der de Broglie Wellenlänge der α-Teilchen: $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_\alpha T_\alpha}} = 6 \cdot 10^{-15} m$. Um eine Struktur des Kerns zu sehen, braucht man „Licht“ mit einer Wellenlänge, die kleiner ist, als diese Struktur. Da Rutherford keine Struktur sah, folgt also $r_{Gold} \leq 6 \cdot 10^{-15} m$. Später stellte man bei der Streuung höherenergetischer Elektronen an Kernen fest, dass der Goldkern tatsächlich einen Radius von etwa $r_{Gold} = 6 \cdot 10^{-15} m$ hat.

Merke: $r_{Atom} \approx 10^{-10} m \quad r_{Kern} \approx 10^{-15} m$

Atom- und Kernradien sind nicht scharf definiert. Atomradien sind gegeben durch die Verteilung der Bahnen, auf denen die Elektronen die Kerne umkreisen, Kernradien sind bestimmt durch die Verteilung der Kernbausteine: Protonen (Ladungsverteilung) und Neutronen.
Diesen Fragen werden wir uns im Folgenden widmen.

3.3 Herleitung der Rutherfordschen Streuformel

Wir betrachten die Ablenkung eines α-Teilchens an einem punktförmigen Kern der Ladung $Q_\kappa = Ze$. Wir nehmen an, dass der Kern viel schwerer ist als das α-Teilchen und sich nicht bewegt:



Zunächst berechnen wir die Abhängigkeit des Streuwinkels θ vom Stoßparameter b (= minimaler Abstand zum Kern, wenn das Teilchen nicht gestreut werden würde). Die Coulombkraft $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_\alpha Q_\kappa}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$ hat die gleiche Form, wie die Gravitationskraft. Deshalb bewegt sich das α-Teilchen auf einer Hyperbel mit dem Kern im Brennpunkt. Für die Kraft in y-Richtung auf das α-Teilchen am beliebigen Bahnpunkt $\vec{r}$ gilt:

$$F_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_\alpha Q_\kappa}{r^2}\cdot\sin\varphi = m_\alpha\frac{dv_y}{dt}$$ v_y: Geschwindigkeit des α-Teilchens in y-Richtung

Wir benutzen jetzt die Drehimpulserhaltung. Vor dem Stoß, d.h. bei $x = -\infty$, hat das α-Teilchen die Geschwindigkeit v_0 und relativ zum Kern den Drehimpuls $L = m_\alpha v_0 b$. An einem beliebigen Bahnpunkt ist $L = m_\alpha r^2\frac{d\varphi}{dt} = m_\alpha v_0 b$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{1}{v_0 b}\frac{d\varphi}{dt}$$

Eingesetzt erhält man: $$\frac{dv_y}{dt} = \frac{Q_\alpha Q_\kappa}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{m_\alpha v_0 b}\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

Wir integrieren über den gesamten Zeitraum des Stoßvorganges. Es gilt:

vor dem Stoß: $\varphi = 0$ und $v_y = 0$

nach dem Stoß: $\varphi = \pi - \theta$ und $v_y = v_0\cdot\sin\theta$,
denn wegen der Energieerhaltung ist nach dem Stoß wieder $T_\alpha = \frac{1}{2}m_\alpha v_0^2$

$$\int\frac{dv_y}{dt}dt = v_0\sin\theta$$

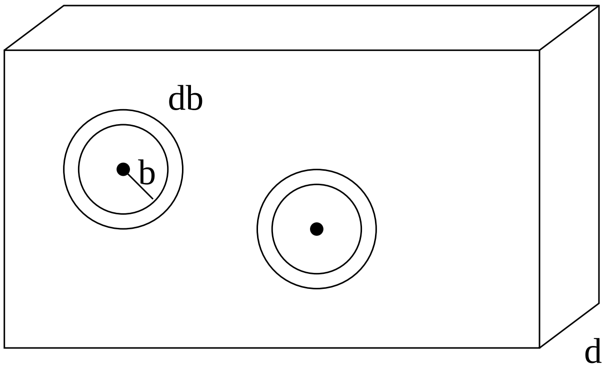
$$\int\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}dt = \int\sin\varphi d\varphi = -\cos(\pi-\theta)+\cos 0 = 1+\cos\theta$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}}_{=\tan\frac{\theta}{2}} = \frac{Q_\alpha Q_\kappa}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{m_\alpha v_0^2 b} = \frac{Q_\alpha Q_\kappa}{8\pi\epsilon_0 T_\alpha}\frac{1}{b}$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{Q_\alpha Q_\kappa}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{T_\alpha}\cot\frac{\theta}{2}}$$

Das ist ein eindeutiger Zusammenhang zwischen b und θ. Der Streuwinkel θ wächst mit abnehmendem Stoßparameter b.

Der Stoßparameter b ist experimentell nicht Stoß für Stoß zugänglich. Wir müssen unser Streuexperiment daher statistisch beschreiben. Dazu führen wir den wichtigen Begriff des Wirkungsquerschnitts ein. Wir denken uns die Goldfolie aufgebaut aus Streuzentren (Targets), um die man für jeden Stoßparameter b einen Kreis der Breite db konstruieren kann. Die α-Teilchen fliegen auf die Targets und wenn sie einen Ring (b, db) treffen,werden sie um den Streuwinkel $\theta(b)$ abgelenkt. Die Fläche des Ringes $d\sigma$ heißt differentieller <u>Wirkungsquerschnitt</u> $\boxed{\mathrm{d}\sigma = 2\pi\ \mathrm{b\ db}}$



Flache F

Der Wirkungsquerschnitt hat die Einheit einer Fläche, also m^2. Man benutzt in der Kern- und Elementarteilchenphysik die Einheit
$1barn = 1b = 10^{-28}m^2$, bzw. $mb, \mu b, \ldots$

Die Gesamtfläche aller Ringe (b,db) in der Folie ist
$d\Sigma = N \cdot F \cdot d \cdot d\sigma$ mit N = Zahl der Kerne/Volumen

Falls n α-Teilchen zufällig verteilt auf die Fläche F treffen, ist die Zahl der α-Teilchen, die zufällig den Stoßparameter b haben

$$dn = \frac{d\Sigma}{F} \cdot n = n \cdot N \cdot d \cdot 2\pi \cdot b \cdot db$$

Einsetzen von b und mit

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{Q_\alpha Q_\kappa}{16\pi\epsilon_0}\frac{1}{\epsilon_0}\frac{1}{T_\alpha}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

Wir ignorieren das negative Vorzeichen, weil uns der Betrag von db interessiert!

folgt

$$dn = n \cdot N \cdot d \cdot 2\pi \frac{Q_\alpha Q_\kappa}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{T_\alpha}\cot\frac{\theta}{2}\frac{Q_\alpha Q_\kappa}{16\pi\epsilon_0}\frac{1}{T_\alpha}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}d\theta$$

$$\frac{dn}{d\theta} = n \cdot N \cdot d \cdot \pi \left(\frac{Q_\alpha Q_\kappa}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{T_\alpha}\right)^2 \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}}$$

Diese dn α-Teilchen werden auf die Fläche $df = 2\pi(r\sin\theta)rd\theta = 2\pi r^2 \sin\theta d\theta$ gestreut. Wir führen noch den Raumwinkel Ω ein durch normieren auf r^2
$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$

Jetzt schreiben wir die Winkelfunktion um auf $\frac{\theta}{2}$

$$\sin\theta = 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow d\Omega = 4\pi\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$

und erhalten die Rutherfordsche Streuformel:

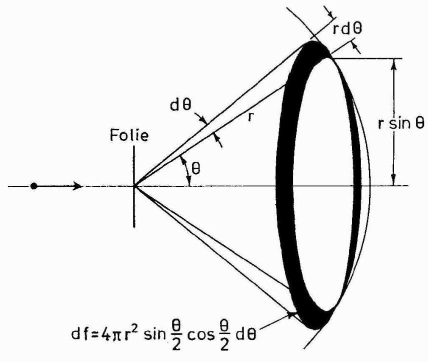


Fig. 2.6: *Zur Definition des Raumwinkels.*

$$\boxed{\frac{dn}{d\Omega} = n\cdot N\cdot d\left(\frac{Q_\alpha Q_\kappa}{16\pi\epsilon_0}\frac{1}{T_\alpha}\right)^2\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}}$$

Da wir nur einen Streuprozess pro α-Teilchen zugelassen haben, gilt diese Formel nur für dünne Folien (keine Mehrfachstreuung).

Die Rutherford-Formel divergiert für $\theta\to 0$, d.h. für $b\to\infty$. Hier ist die Gleichung aber nicht mehr anwendbar, da für große Stoßparameter b die Ladung des Kerns durch die Elektronen abgeschirmt wird. Abweichungen treten auch für $\theta\to 180^\circ$ auf, wenn die Energie der α-Teilchen ausreicht, die Substruktur der Kerne aufzulösen.

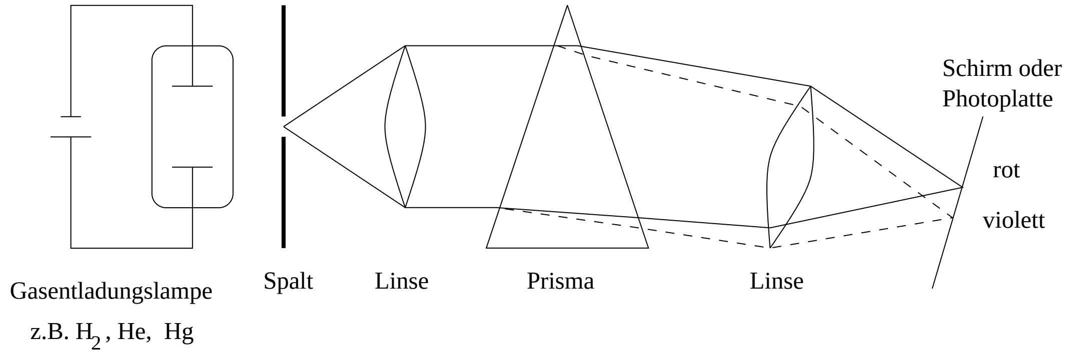
Ausgedrückt als differentiellen Wirkungsquerschnitt läßt sich die Rutherfordsche Formel auch unabhängig von den Versuchsbedingungen n, N, d schreiben
$dn = n\cdot N\cdot d\cdot d\sigma$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Q_\alpha Q_\kappa}{16\pi\epsilon_0 T_\alpha}\right)^2\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}}$$

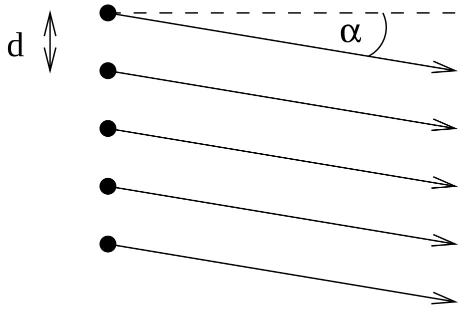
3.4 Atomspektren

Wir wenden uns nun der Aufklärung der Bahnen der Elektronen in Atomen zu. Dabei spielt die Untersuchung von Atomspektren eine entscheidende Rolle. Zunächst beschreiben wir kurz die experimentelle Anordnung:

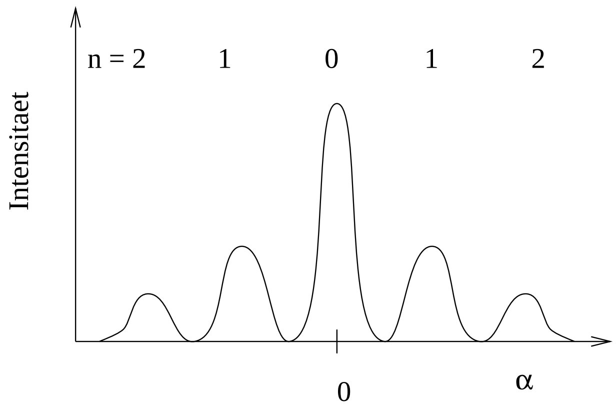
Prismenspektralapparat:



Mit den beiden Linsen wird ein Bild des Spalts auf dem Schirm oder der Photoplatte erzeugt. Da der Brechungsindex von der Wellenlänge λ abhängt, $n = n(\lambda)$ zerlegt das Prisma das Licht der Lampe. Kurze Wellenlängen (violettes Licht) werden stärker abgelenkt als große (blaues Licht).
Anstelle des Prismas benutzt man auch Gitter:



Konstruktive Interferenz falls $d \sin(\alpha) = n\lambda \quad n = 0, 1, 2, \ldots$



Intensitätsverteilung bei Beleuchtung mit einer Wellenlänge

Atome eines stark verdünnten Gases werden durch elektrische Entladung zum Leuchten angeregt. Man findet ein Spektrum, das aus einzelnen Linien besteht. Das steht im Gegensatz zu Festkörpern, die ein kontinuierliches Spektrum aussenden, z.B. bei Erwärmung (schwarzer Strahler).

- Das Linienspektrum ist charakteristisch für ein Gas, allgemein für <u>jedes chemische Element</u>
- Emissions- und Absorbtionslinien sind (teilweise) identisch

Beispiele:

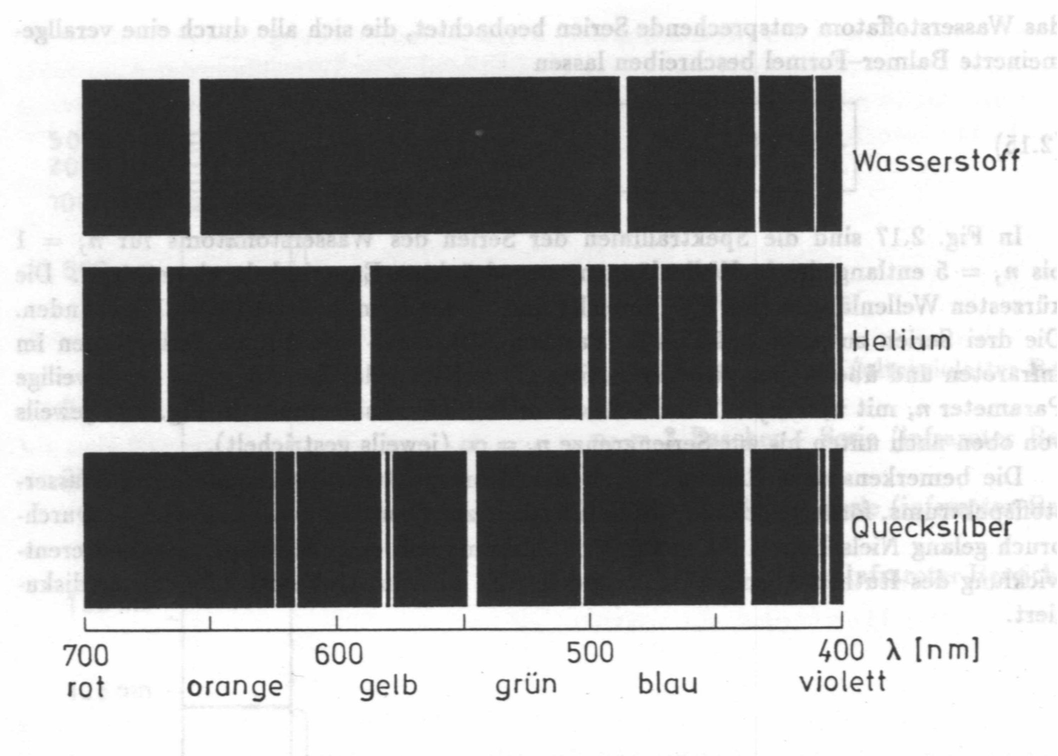


Fig. 2.14: *Emissionslinienspektren von Atomen.*

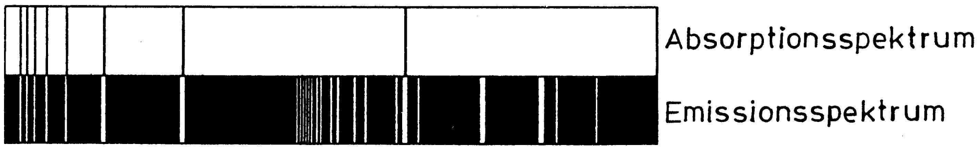


Fig. 2.16: *Emissions– und Absorptionsspektrum von Natriumdampf.*

Das Linienspektrum ist wie ein Fingerabdruck, unverwechselbar für jedes chemische Element, d.h. Atom. Spektralanalysen haben sehr vielfältige Anwendungen, z.B. kann man damit die chemische Zusammensetzung sehr weit entfernter Sterne bestimmen!

Das Wasserstoffspektrum

Wasserstoff ist das leichteste und einfachste Atom: 1 Elektron und 1 Proton.
Johann Balmer fand 1885 empirisch eine Gesetzmäßigkeit für Linien im sichtbaren Bereich des Wasserstoffspektrums

$$\boxed{\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)} \qquad n = 3, 4, \ldots \qquad \text{Balmer-Serie}$$

$R = 1,097 \cdot 10^7 m^{-1}$ ist die Rydberg-Konstante

Später wurden im Infraroten und Ultravioletten weitere Serien entdeckt:

UV: $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ $n = 2, 3, \ldots$ Lyman-Serie

IR: $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ $n = 4, 5, \ldots$ Paschen-Serie

$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ $n = 5, 6, \ldots$ Brackett-Serie

$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ $n = 6, 7, \ldots$ Pfund-Serie

$\Rightarrow$ Eine Theorie des Wasserstoffatoms muss die magische Formel erklären:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad m, n = 1, 2, 3, \ldots \qquad m < n$$

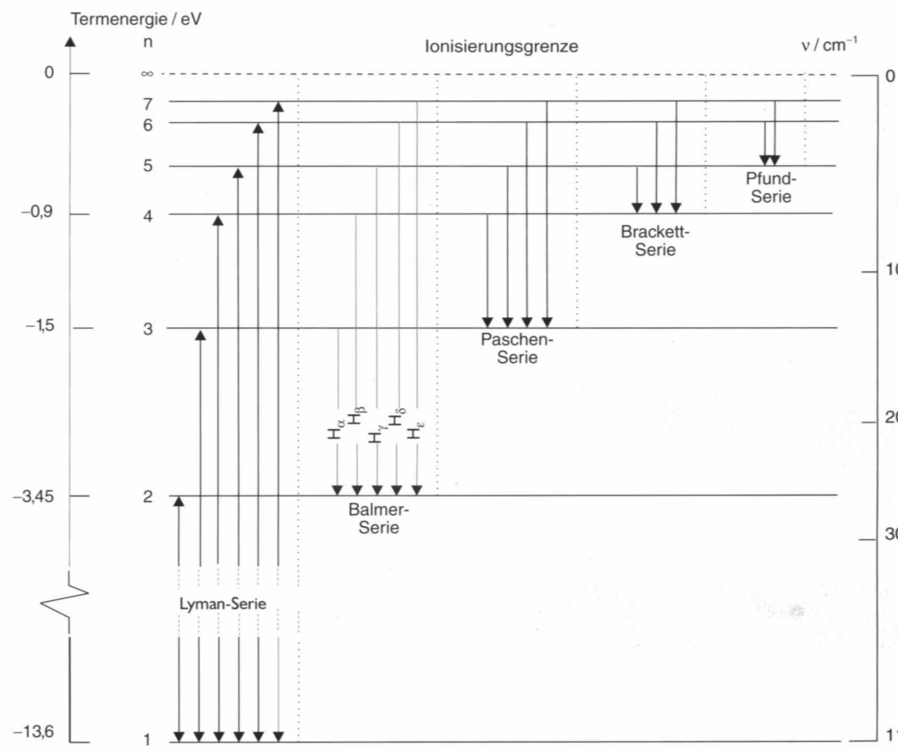


Abb. 3.27. Vereinfachtes Termschema des H-Atoms mit den verschiedenen Emissions- bzw. Absorptionsserien

3.5 Das Bohrsche Atommodell

Niels Bohr (1913): Planetenmodell des Atoms

Die Elektronen bewegen sich auf Kreisbahnen (oder Ellipsen) um den Kern in dessen Coulomb-Potential

$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r}$ Z: Kernladungszahl (Wasserstoff $Z = 1$)

Postulate:

1. Die Elektronen laufen auf den Kreisbahnen ohne Energie abzustrahlen
   Klassisch: eine beschleunigte Ladung strahlt elektromagnetische Wellen und damit Energie ab. Elektronen würden nach $\approx 10^{-16}s$ in den Atomkern fallen!

2. Es sind nur bestimmte, diskrete Bahnen erlaubt.
   Die erlaubten Radien folgen aus der Quantelung des Drehimpulses
   $L = n\hbar \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$ Hauptquantenzahl

3. Übergänge erfolgen unter Aussendung elektromagnetischer Wellen bzw. durch Absorption:
   $\Delta E = h\nu$
   Liefert die Erklärung für die diskreten Atomspektren.

Wir berechnen aus den Bohrschen Postulaten die erlaubten Bahnen und Energieniveaus des Wasserstoffatoms.
Annahmen: $m_k \gg m_e$, $E \ll m_e c^2$, Kreisbahnen
Zentrifugalkraft = Coulombkraft

$$m_e \omega^2 r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

Drehimpulserhaltung:

$$L = m_e \omega r^2 = n\hbar \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{n\hbar}{m_e r_n^2}$$

Eingesetzt folgt:

$$m_e \left(\frac{n\hbar}{m_e r_n^2} \right)^2 r_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_n^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{n^2 \hbar^2}{m_e r_n} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\boxed{r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e} n^2}$$

Der 1. Bohrsche Radius ist

$$r_1 = r_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e} = 0,53 \cdot 10^{-10} m \qquad \text{Radius des H-Atoms}$$

<u>Das Bohrsche Modell erklärt die Größe der Atome!</u>

Energieniveaus:

$$E_n = T + V \qquad \text{T: kinetische Energie}$$

$$= \frac{1}{2} m_e \omega^2 r_n^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_n} \qquad \text{Einsetzen des Kräftegleichgewichtes}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_n} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_n} \qquad \text{Virialsatz } T = -\tfrac{1}{2} V \text{ !}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_n} \qquad \text{Einsetzen von } r_n \text{ ergibt dann:}$$

$$\boxed{E_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \right)^2 m_e \frac{1}{n^2}} \quad = -13,6\text{eV} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Mit $E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$ schreiben wir $\frac{1}{\lambda} = \frac{-E_n}{hc} = -R\frac{1}{n^2}$ und finden für R

$$\boxed{R = \frac{e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 h^3 c} = 1,097 \cdot 10^7 m^{-1}}$$

Das Bohrsche Modell erklärt die Linien des Wasserstoffspektrums!

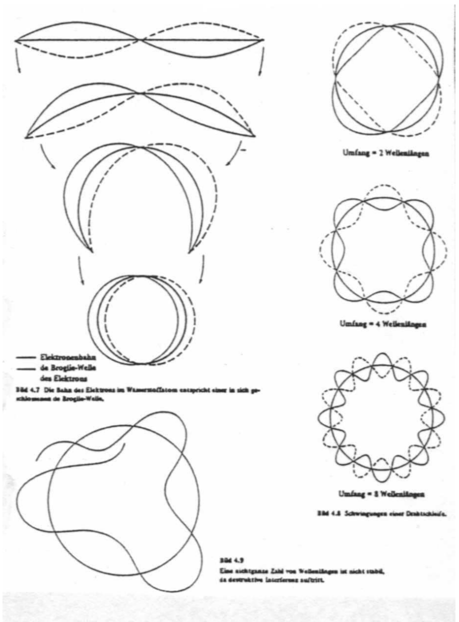
Für den genauen Wert von R muss man die Mitbewegung des Kerns berücksichtigen und die Elektronenmasse m_e durch die reduzierte Masse $m' = \frac{m_e \cdot m_k}{m_e + m_k}$ ersetzen.

Nochmals zurück zur Quantelung des Drehimpulses. Die Beschreibung des Elektrons als Teilchenwelle liefert die Erklärung.

$$n\hbar = L = pr = \frac{h}{\lambda} r = \frac{\hbar}{\lambda} 2\pi r \quad \Rightarrow \quad \boxed{2\pi r = n\lambda}$$

Nur solche Bahnen sind erlaubt, deren Umfang ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge des Elektrons ist (stehende Wellen). Alle anderen Wellenlängen interferieren weg und die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons auf solchen Bahnen verschwindet.

Die Wellennatur des Elektrons bestimmt die Größe der Atome!



Die Feinstrukturkonstante α:

$$\boxed{\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137}} \qquad \text{dimensionslos!}$$

Sie bestimmt die Stärke elektromagnetischer Wechselwirkungen von Elementarteilchen (siehe unten). Sie heißt auch Kopplungskonstante der Quantenelektrodynamik.
Damit können wir für die Energieniveaus des H-Atoms schreiben:

$$\boxed{E_n = -\frac{1}{2}\alpha^2 m_e c^2 \frac{1}{n^2}}$$

3.6 Wasserstoffähnliche Spektren

Das Bohrsche Atommodell ist nicht für komplizierte Atome mit Kernladungszahl $Z > 1$ geeignet. Dort sind Z Elektronen an den Kern gebunden (Vielkörperproblem!). Das Bohrsche Modell lässt sich aber anwenden auf Atome, die bis auf ein Elektron ionisiert sind. Beispiele He^+, Li^{++}, C^{5+} usw. Um die erlaubten Bahnen auszurechnen, muss man die Ladung des Wasserstoffkerns

$(+1e)$ ersetzen durch $+Ze$. Daraus folgt

$$E_n = -\frac{1}{2}\alpha^2 m_e c^2 \frac{Z^2}{n^2} = -13,6\text{eV} \cdot \frac{Z^2}{n^2}$$

Beispiel Uran $Z = 92$: $E_1 = -13,6\text{eV} \cdot 92^2 = -115\text{keV}$
Sehr hohe Bindungsenergie auf der innersten Bahn (Röntgenstrahlung!)

Das Bohrsche Modell ist auch anwendbar auf:

- Myonische Atome
  Das Myon μ ist ein instabiles Elementarteilchen mit genau den gleichen Eigenschaften wie das Elektron, nur mit viel höherer Masse: $m_\mu = 106MeV/c^2 \approx 200m_e$. In myonischen Atomen wird das Elektron durch ein Myon (μ^-) ersetzt.
  $r_n(\mu) = \frac{1}{200}r_n(e) \quad E_n(\mu) = 200E_n(e)$

- Positronium
  Wasserstoffähnliches Atom, das aus einem Elektron (e^-)und einem Positron (e^+) gebildet wird. Das Positron ist das Antiteilchen des Elektrons mit gleicher Masse, aber umgekehrter Ladung $+e$. Positronium ist instabil, weil sich Elektron und Positron vernichten:
  $e^+ + e^- \rightarrow \gamma\gamma \quad E_\gamma = 511\text{keV}$