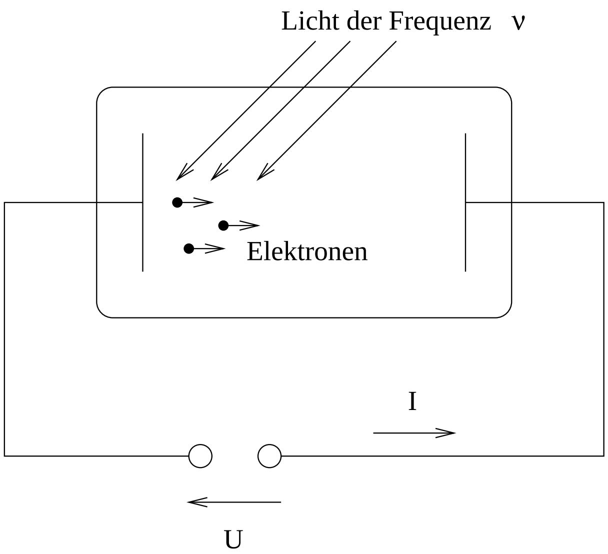
1 Teilchen-Welle-Dualismus

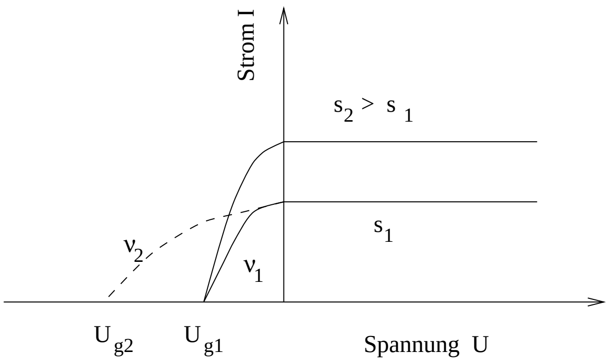
1.1 Der Photoeffekt

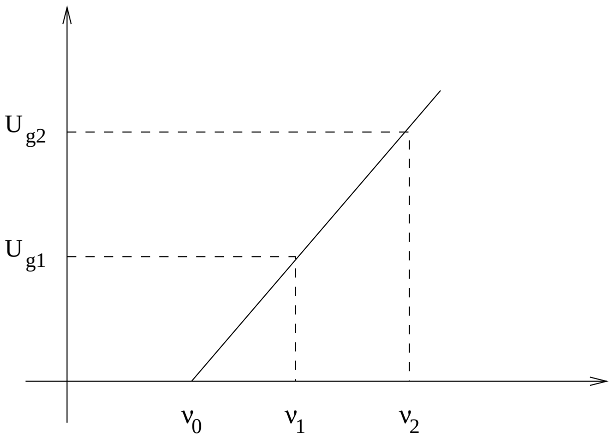


Versuch:
Eine Metallplatte wird mit kurzwelligem Licht (UV) bestrahlt. Elektronen treten aus der Oberfläche aus und erreichen eine zweite Metallplatte. Der zwischen den beiden Platten fließende Strom I wird als Funktion der angelegten Spannung U gemessen:

Versuchsergebnisse:

1. Der Strom I ist proportional zur Intensität des Lichtstrahls
2. Die Grenzspannung U_{g} und damit die kinetische Energie der Elektronen ist unabhängig von der Lichtintensität s
3. Die Grenzspannung U_{g} ist proportional zur Frequenz des Lichtes ν
4. Es gibt eine Grenzfrequenz ν_0 unterhalb derer auch bei hohen Spannungen U kein Strom fließt
5. Die Grenzfrequenz ν_0 ist materialabhängig
6. Auch bei Bestrahlung mit sehr kleinen Intensitäten mit Frequenzen $\nu > \nu_0$ fließt sofort ein (kleiner) Strom

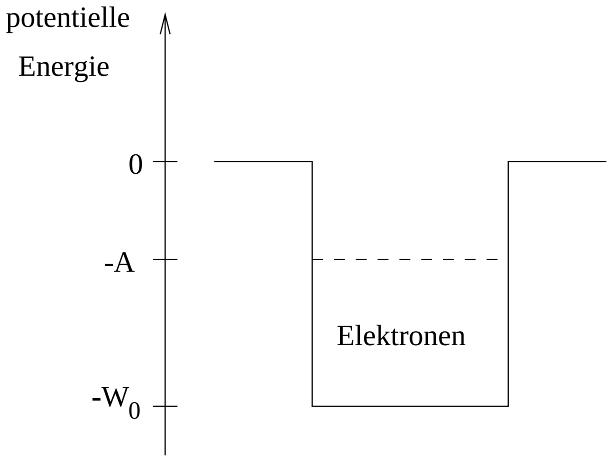




Erklärung durch Albert Einstein, der dafür 1921 den Nobelpreis für Physik erhielt:

Licht besteht aus Quanten der Energie $E = h\nu$, genannt Photonen. Ein Photon kann ein

Elektron aus der Metalloberfläche lösen, falls seine Energie ausreicht, die Bindungsenergie zu überwinden.



Darstellung der Bindunsenergie der Elektronen durch Potentialtopf: Die Elektronen müssen mindestens die Energie $E_0 = h\nu_0 = A$ aufnehmen, um aus dem Metall auszutreten. Bei höherer Energie, d.h. größerer Frequenz ν , verbleibt die kinetische Energie $h\nu - A$ um gegen die angelegte Spannung U anzulaufen.

$$\mathrm{e}U_\mathrm{g} = h\nu - A$$

$\Longrightarrow$ Licht besteht aus Teilchen (Photonen) der Energie $E = h\nu$

Das Plancksche Wirkungsquantum h:
h ist eine Naturkonstante. Ihr Wert bestimmt die charakteristische Größe von Effekten der Quantentheorie. Sie hat die Einheit Energie $\times$ Zeit:

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

In der Atom-, Kern und Elementarteilchenphysik messen wir Energien praktischerweise in $\mathrm{eV}, \mathrm{keV}, \mathrm{MeV}, \ldots$, wobei $\mathrm{e} = 1.602 \cdot 10^{-19}$ As die Elementarladung ist. Beachte: 1 J = 1 Ws = 1 VAs. Damit können wir h auch schreiben als

$$h = 4.14 \cdot 10^{-15} \text{ eV s}$$

Beispiel: Sichtbares Licht hat Wellenlängen zwischen 400 nm und 700 nm. Für das rote Licht eines Helium-Neon-Lasers ist $\lambda = 633$ nm:

$$\nu = \frac{\mathrm{c}}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{633 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 4.74 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Energie der Photonen:

$$E = h\nu = 4.14 \cdot 10^{-15} \text{ eVs} \cdot 4.74 \cdot 10^{14} \text{ 1/s} = 1.96 \text{ eV}$$

Relativistische Beziehungen für Energie und Impuls:
Teilchen der Ruhemasse m_0 und Geschwindigkeit v:
Abkürzungen: $\beta = v/\mathrm{c} \quad \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$

$$E = m\mathrm{c}^2 = \gamma m_0 \mathrm{c}^2 \qquad p = mv = \gamma m_0 \beta \mathrm{c} \qquad \Longrightarrow \qquad E^2 = m_0^2\mathrm{c}^4 + p^2\mathrm{c}^2$$

Beweis:

$$E^2 = m_0^2\mathrm{c}^4 + m_0^2\mathrm{c}^4\gamma^2\beta^2 \qquad \gamma^2\beta^2 = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{1}{1-\beta^2} - \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2} = \gamma^2 - 1$$

$$E^2 = m_0^2 c^4 (1 + \gamma^2 - 1) = (m_0 \gamma c^2)^2 = (mc^2)^2$$

Kinetische Energie:

$$E_\mathrm{k} = E - m_0 c^2 = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} - m_0 c^2 \quad \neq \frac{p^2}{2m} \text{ (!!!)}$$

Photonen bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit c. Wie groß ist ihre Ruhemasse m_0?
$\beta = 1$ und $\gamma \to \infty$, aber die Energie der Photonen $E = h\nu = \gamma m_0 c^2$ ist endlich! Also muß gelten $m_0 = 0$.

$\Longrightarrow$ **Photonen haben keine Ruhemasse**

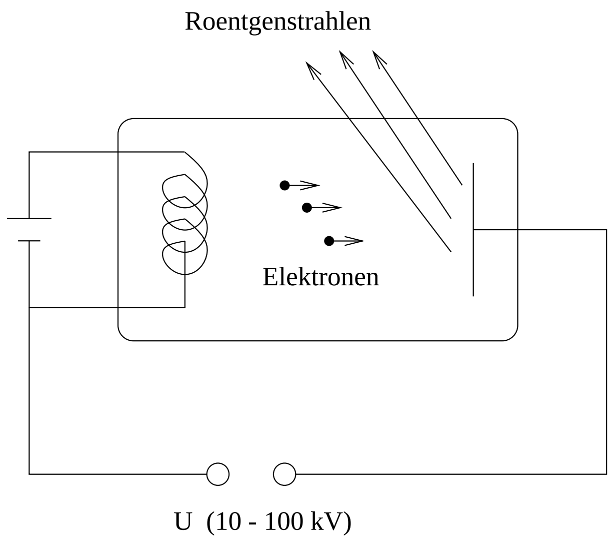
1.2 Der Compton-Effekt

Impuls der Photonen Mit $m_0 = 0$ gilt $E^2 = p^2 c^2$ $\Longrightarrow p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$

$\Longrightarrow$ **Photonen haben den Impuls** $\boldsymbol{p = \frac{h}{\lambda}}$

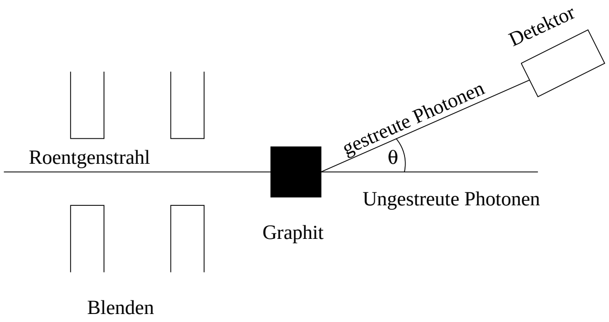
Diese Behauptung wird in der Streuung von Photonen an quasi-freien Elektronen überprüft (A.H. Compton 1923)

Benutze Röntgenstrahlung mit hoher Frequenz, d.h. hoher Energie, $(10 - 100$ keV), so daß die Bindungsenergie der Elektronen (einige eV) vernachlässigt werden kann.
Erzeugung von Röntgenstrahlen:

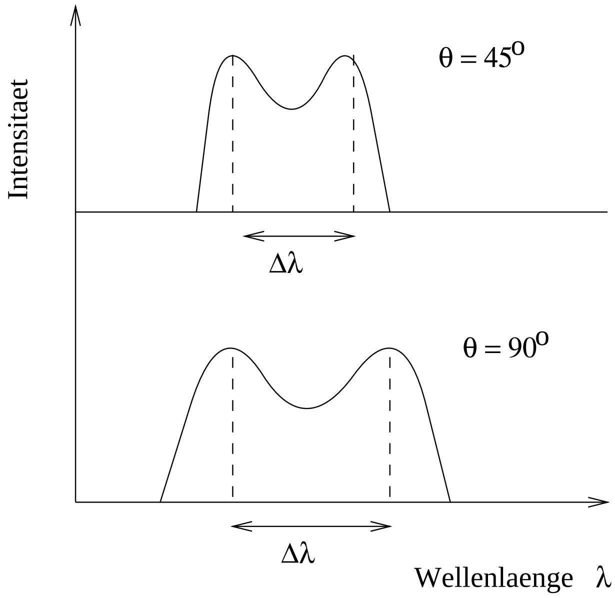


Elektronen aus einer Glühkathode werden in einem elektrischen Feld bis zur Energie $E = eU$ beschleunigt und auf eine Wolframanode geschossen. Die Elektronen werden abgebremst und geben ihre kinetische Energie als Strahlung ab (Bremsstrahlung). Die maximale Energie der emittierten Photonen ist $E_\mathrm{max} = h\nu_\mathrm{max} = eU$, falls der Energieübertrag in einem einzigen Bremsvorgang passiert, sonst gilt $h\nu < eU$.

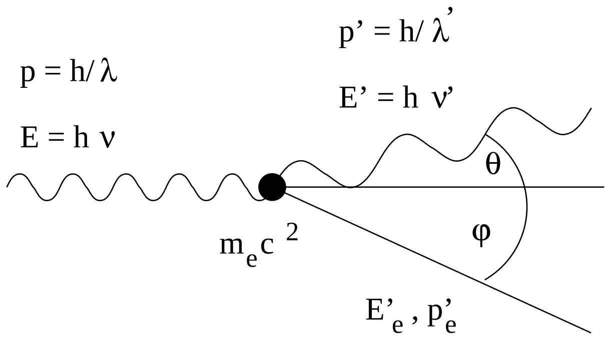
Versuchsaufbau zur Compton-Streuung:



Gemessene Photonspektren:



Das Spektrum der gestreuten Photonen wird gemessen, d.h. die Intensität als Funktion der Wellenlänge. Neben der Wellenlänge der Röntgenquelle λ tritt ein weiteres Maximum bei einer grösseren Wellenlänge λ' auf. Die Differenz $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ hängt von Streuwinkel Θ ab.
Erkärung der Beobachtung, besonders der Winkelabhängigkeit, durch elastischen Stoß eines Photons mit einem Elektron:



Zunächst Impulserhaltung: Der Impuls wird aufgeteilt in die Komponenten parallel und senkrecht zur Richtung des einfallenden Photons:

$p = p'\cos\theta + p'_\mathrm{e}\cos\varphi$ oder $p'_\mathrm{e}\cos\varphi = p - p'\cos\theta$

$0 = p'\sin\theta - p'_\mathrm{e}\sin\varphi$ $\qquad p'_\mathrm{e}\sin\varphi = p'\sin\theta$

Quadrieren und Addieren ergibt:

$p'^2_\mathrm{e} = p^2 - 2pp'\cos\theta + p'^2\cos^2\theta + p'^2\sin^2\theta = p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\theta$

Multipliziere mit c^2 und benutze, daß für das masselose Photon gilt $E = p\mathrm{c}$ bzw. $E' = p'\mathrm{c}$

$p'^2_\mathrm{e}\mathrm{c}^2 = E^2 + E'^2 - 2EE'\cos\theta \quad (*)$

Jetzt Energieerhaltung:

$E + m_\mathrm{e}\mathrm{c}^2 = E' + E'_\mathrm{e} \qquad \Longrightarrow E'_\mathrm{e} = E - E' + m_\mathrm{e}\mathrm{c}^2$

$E'^2_\mathrm{e} = (E - E')^2 + 2(E - E')m_\mathrm{e}\mathrm{c}^2 + m_\mathrm{e}^2\mathrm{c}^4$

$E'^2_\mathrm{e} - m_\mathrm{e}^2\mathrm{c}^4 = E^2 + E'^2 - 2EE' + 2(E - E')m_\mathrm{e}\mathrm{c}^2$

Gleichsetzen mit $(*)$ eliminiert E'_e und p'_e:

$-2EE'\cos\theta = -2EE' + 2(E - E')m_\mathrm{e}\mathrm{c}^2 \qquad \Longrightarrow EE'(1 - \cos\theta) = (E - E')m_\mathrm{e}\mathrm{c}^2$

$$1 - \cos\theta = \frac{E - E'}{EE'} m_e c^2 = \left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{E}\right) m_e c^2 = \left(\frac{\lambda'}{hc} - \frac{\lambda}{hc}\right) m_e c^2$$

$$\boxed{\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)}$$

$\lambda_c = \dfrac{h}{m_e c} = 2.43 \cdot 10^{-12}$ m   Compton-Wellenlänge des Elektrons
Die maximale Änderung der Wellenlänge tritt auf bei Rückstreuung des Photons $\theta = 180°$: $\Delta\lambda = 2\lambda_c$. Das entspricht dem maximalen Energieübertrag auf das Elektron. Compton-Streuung kann auch am Atomkern auftreten. Auf Grund der großen Masse der Kerne ist aber die Wellenlängenänderung sehr viel kleiner, z.B. ist die Masse eines Kohlenstoffkerns im Graphit etwa $m_C \approx 20\,000 m_e$. Analogie: Elastischer Stoß an einer starren Wand.
Der Teilchencharakter des Lichtes, oder allgemeiner elektromagnetischer Wellen, ist durch viele andere Experimente und Beobachtungen bestätigt, z.B. Wärmestrahlung schwarzer Körper, Gravitationsrotationsverschiebung.

1.3 Wellencharakter der Teilchen

Louis de Broglie schlug 1924 vor, die duale Beschreibung des Lichts auf alle Teilchen zu verallgemeinern und den Teilchen Welleneigenschaften zuzuordnen. Die Wellenlänge eines Teilchens mit dem Impuls $p = mv$ ist:

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p} \quad \text{oder} \quad \lambda = \hbar k}$$

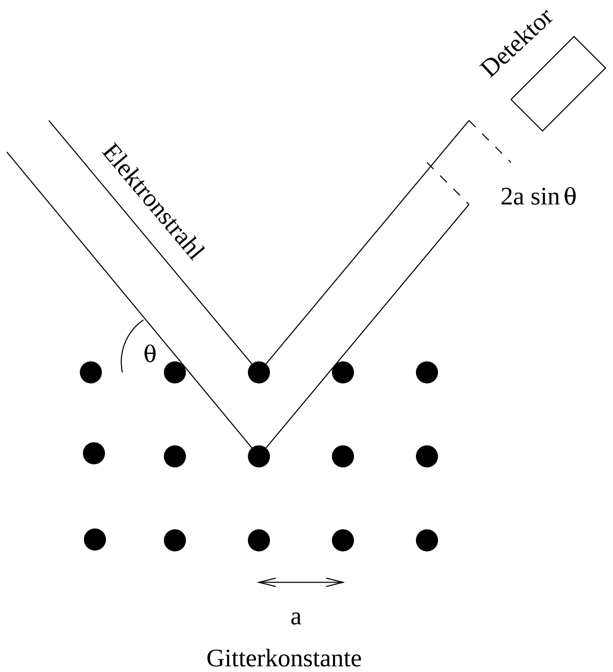
$\hbar = h/2\pi$ und Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$
Beispiele:

1. Wellenlänge eines Elektrons mit kinetischer Energie $E_k = 10$ eV. Weil E_k sehr viel kleiner ist als die Ruheenergie des Elektrons $m_e c^2 = 511$ keV können wir klassisch rechnen
   $E_k \approx \dfrac{p^2}{2m_e} \quad \Longrightarrow p = \sqrt{2 m_e E_k}$
   $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{\sqrt{2m_e E_k}} = \dfrac{4.14 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}}{\sqrt{2 \cdot 511 \text{ keV}/c^2 \cdot 10 \text{ eV}}} = \dfrac{4.14 \cdot 10^{-15} \text{ eVs} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{2 \cdot 511 \text{ keV} \cdot 10 \text{ eV}}} =$
   $3.9 \cdot 10^{-10}$ m
   $\lambda = 3.9 \cdot 10^{-10}$ m

   Das ist die Größenordnung von Atomdurchmessern

2. Makroskopischer Körper der Masse 1 g und der Geschwindigkeit 1 m/s
   $\lambda = \dfrac{6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{10^{-3} \text{ kg m/s}} = 6.6 \cdot 10^{-31}$ m   (!!!)

Der Wellencharakter von Teilchen spielt nur bei atomaren und subatomaren Phänomenen eine Rolle.
Experimentelle Bestätigung der Materiewellen im Experiment von Davisson und Germer (1928):



Beobachtetes Interferenzmuster der Intensität der detektierten Elektronen entspricht Beugungsmuster am Raumgitter des Kristalls.
konstruktive Interferenz $2a\sin\theta = n\lambda$
destruktive Interferenz $2a\sin\theta = (n+\frac{1}{2})\lambda$
$(n = 1, 2, 3, \ldots)$

1.4 Darstellung einer Teilchenwelle

Dazu führen wir die komplexe Wellenfunktion $\Psi(\vec{r}, t)$ ein. Eine ebene Welle wird beschrieben durch

$$\Psi(\vec{r}, t) = A\mathrm{e}^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$$

Wellenzahlvektor $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$ Ortsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Mit $E = h\nu = \hbar\omega$ und $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ ergibt sich:

$$\Psi(\vec{r}, t) = A\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r}-Et)}$$

Die Wellenfunktion $\Psi(\vec{r}, t)$ enthält alle physikalischen Informationen über das Teilchen, ist aber keine eigentliche Meßgröße. Aus der Quantenmechanik folgt, daß nur der absolute Betrag der Wellenfunktion $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$ meßbar ist.

$\Psi^*(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 \equiv |\Psi|^2$ gibt die Wahrscheinlichkeitsdichte $\mathrm{d}W/\mathrm{d}V$ an, daß Teilchen zur Zeit t am Ort $\vec{r}$ zu finden. Die Wahrscheinlichkeit ist gegeben durch $\mathrm{d}W = |\Psi(\vec{r}, t)|^2\,\mathrm{d}V$. Ein Beispiel dafür sind die Interferenzmuster im Davisson-Germer-Experiment.

Für eine ebene Welle $\Psi(\vec{r}, t) = A\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r}-Et)}$ gilt

$|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = \Psi(\vec{r}, t)^*\Psi(\vec{r}, t) = |A|^2 = \mathrm{const}$

d.h. das Teilchen hat zu jeder Zeit die gleiche Aufenthaltswahrscheinlichkeit an jedem Ort des Raumes. Lokalisierbare Teilchen müssen wir durch Wellenpakete beschreiben. Ein Wellenpaket läßt sich durch Überlagerung ebener Wellen aufbauen. Betrachte ein Teilchen, daß sich in x-Richtung ausbreitet $\Psi(x, t) = \phi(x)\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}Et}$. Der Ortsanteil des Wellenpaketes setzt sich zusammen aus der Überlagerung aller möglichen ebenen Wellen mit Wellenzahlen $k_x = k$:

$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k\, f(k)\,\mathrm{e}^{ikx}$

Die Amplituden $f(k)$ sind die Fouriertransformierte des Wellenpaketes:
$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \phi(x)\, \mathrm{e}^{-ikx}$$

<u>Geschwindigkeit des Wellenpaketes:</u>
Die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Wellenpaketes ist die Gruppengeschwindigkeit v_g des Wellenpaketes $\quad v_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \frac{m\mathrm{c}^2}{h} = \gamma \frac{m_0\mathrm{c}^2}{\hbar} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{\hbar} = \gamma\beta \frac{m_0\mathrm{c}}{\hbar}$$

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\beta} \bigg/ \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\beta} = \beta\mathrm{c} = v$$

Die Gruppengeschwindigkeit des Wellenpaketes entspricht der Geschwindigkeit des Teilchens.

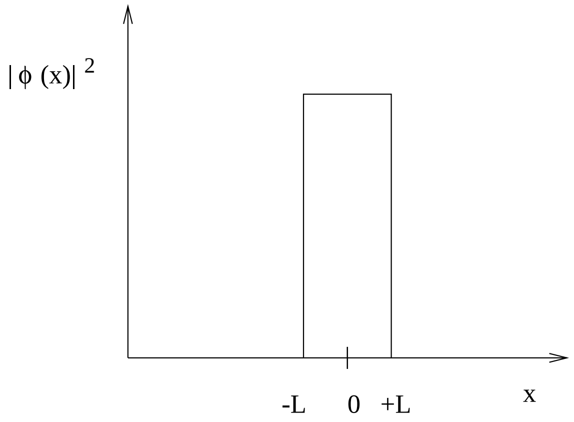
Die Phasengeschwindigkeit $\quad v_p = \lambda\nu = \dfrac{h}{p}\dfrac{E}{h} = \dfrac{\gamma m_0 \mathrm{c}^2}{\gamma\beta m_0 \mathrm{c}} = \dfrac{\mathrm{c}}{\beta} = \dfrac{\mathrm{c}^2}{v} > c$
hat keine physikalische Bedeutung.

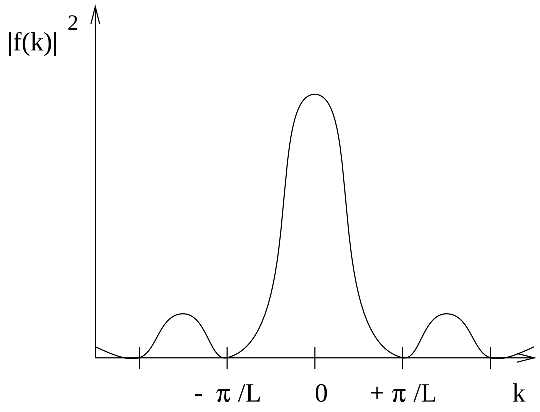
1.5 Die Unschärferelation von Heisenberg

Aus dem Teilchen-Well-Dualismus folgt, daß man den Impuls in einer gewählten Richtung und den Ort in der gleichen Richtung prinzipiell nie gleichzeitig beliebig genau messen kann. Für das Produkt der Unschärfen auf Impuls und Ort gilt

$$\Delta p_x\, \Delta x \geq \hbar$$

Die Unschärferelation ist ein Naturgesetz und kann nicht umgangen werden.
Wir betrachten ein Teilchen, das innerhalb $-L \leq x \leq +L$ eine konstante Aufenthaltswahrscheinlichkeit hat. Das Wellenpaket, das dieses Teilchen beschreibt, ist ebenfalls in $-L \leq x \leq +L$ lokalisiert.





Die Fouriertransformierte $f(k)$ gibt die Beiträge der ebenen Wellen mit Wellenzahl zum Paket an. Wir können abschätzen, daß Wellenzahlen $-\pi/L \leq k \leq +\pi/L$ Beiträge liefern, also
$\Delta k\, \Delta x \approx (\pi/L)L = \pi \qquad$ und mit $\Delta p = \hbar\Delta k$ folgt $\Delta p\, \Delta x = \pi\hbar > \hbar$.
Wenn das Wellenpaket stärker lokalisiert ist, verbreitert sich die Verteilung der Wellenzahlen. Zur Beschreibung eines perfekt lokalisierten Teilchen werden unendlich viele k-Werte benötigt,

der Impuls dieses Teilchens ist daher völlig unbestimmt. Umgekehrt, wenn das Teilchen durch eine einzige ebene Welle mit der Wellenzahl k beschrieben wird, ist es nicht lokalisierbar, das heißt die Ortsunschärfe ist unendlich groß(siehe Kapitel 1.4).

Bei Gaußverteilung des Wellenpakets gilt die Unschärferelation in der Form $\Delta p_x \, \Delta x = \hbar$.