Didaktische und fachliche Ausarbeitung des Vorlesungsskripts "Elektrizitätslehre"

Schriftliche Hausarbeit
im Rahmen der Ersten Staatsprüfung
für das Lehramt für die Sekundarstufe II
dem
Staatlichen Prüfungsamt für Erste Staatsprüfungen
für Lehrämter an Schulen
- Aachen -
vorgelegt von

Cornelia Decker

Aachen, im Dezember 1994

Gutachter: Prof. Dr. G. Flügge

Institut/Lehrstuhl: Experimentalphysik IIIb, RWTH Aachen

Diese Hausarbeit besteht aus 2 Bänden!

Vorwort

Als Grundlage der vorliegenden Arbeit “ Didaktische und fachliche Ausarbeitung des Vorlesungsskripts “Elektrizitätslehre” ” diente eine Mitschrift der Vorlesung “Experimentalphysik II für Physiker” aus dem Sommersemester 1990. In dieser Vorlesung werden die Grundlagen der Elektrizitätslehre und des Elektromagnetismus vermittelt.

Die folgende Ausarbeitung beschränkt sich auf den ersten Teil dieser Vorlesung – die Einführung in die Elektrizitätslehre.
Im Hinblick auf die Mitschrift aus dem Sommersemester 1990 wurden eine Reihe von Umstellungen vorgenommen, Schwerpunkte teilweise etwas anders gesetzt sowie einige Teilgebiete neu aufgenommen.
So wurde bei dieser Ausarbeitung z.B. schon im ersten Kapitel auf den Unterschied von Leiter und Isolator hingewiesen. Die in der Mitschrift aus dem Sommersemester 1990 aufgeführten Kapitel “Das elektrostatische Potential”, “Potential einer beliebigen Ladungsverteilung” und “Berechnung der Feldstärke aus dem Potential” wurden in ein Kapitel integriert.
Eine wesentliche Umstellung ist die Einführung des Satzes von GAUSS schon in dem Kapitel über das elektrische Feld. Bislang folgte dieser Satz erst nach den Kapiteln über das Potential, aber bei der Beschreibung des elektrischen Feldes wird ein Integral hergeleitet, das ohne diesen Satz nicht weiter berechnet werden kann. Hier wurde dann auf die momentane Unlösbarkeit verwiesen und das Integral nicht weiter beachtet. Deshalb entschied ich mich dafür, an der Stelle, and der das Problem auftritt, es direkt zu behandeln und die dazu benötigte Mathematik bereit zu stellen. Der Darstellung der Leitungsmechanismen wurde ein wesentlich breiterer Raum zugewiesen.
Bei diesen Änderungen und Ergänzungen wurden insbesondere die Anforderungen des Anfängerpraktikums berücksichtigt (z.B. Halbleiter: Diode und Transistor).

Neben diesen inhaltlichen und redaktionellen Umstellungen und Änderungen wurden alle für diesen Vorlesungsabschnitt benötigen Versuche dokumentiert. Diese Dokumentation beinhaltet eine Auflistung der für die Versuchsdurchführung benötigten Materialien, eine von mir angefertigte Fotografie des Aufbaus, wo erforderlich einen Schaltplan sowie Hinweise für die Durchführung.
Die Versuche sind auf die experimentellen Möglichkeiten, die die Vorbereitung Physik an

der RWTH Aachen bisher aufweist, abgestimmt. Alle Versuche wurden von mir aufgebaut und auf ihre Durchführbarkeit getestet. Entsprach das Experiment nicht den Erwartungen, so wurde Alternativen gewählt.

Die Arbeit wurde mit der Textverarbeitung LaTeXverfaßt. Die in dem Vorlesungsskript verwendeten Abbildungen sind größtenteils aus Lehrbüchern eingescannt, der Rest wurde von mir mit einem Zeichenprogramm erstellt. Die Abbildungen wurden direkt mit in das LaTeX-File eingebunden. Die bei den Versuchsbeschreibungen verwendeten Fotos wurden von mir gemacht und für weitere Exemplare dieser Arbeit eingescannt. Alle bei dieser Arbeit verwendeten Textfiles, Abbildungen und Fotos sind im Lehrstuhl für Experimentalphysik IIIb auf einem Magnetband hinterlegt.

Ich würde mich freuen, wenn dieses überarbeitete Skript den Hörern der Vorlesung "Physik II" zur Aufbereitung und Vertiefung des gehörten Stoffes dient.

Inhaltsverzeichnis

1 Elektrische Ladungen **1**
1.1 Positive und negative Ladungen . . . 1
1.2 Leiter und Isolatoren . . . 4
1.3 Ladungsmessung . . . 5
1.4 Mehr zu Leitern und Isolatoren . . . 6
1.5 Ladungserhaltung . . . 10
1.6 Erzeugung hoher Ladungsmengen . . . 12

2 Das Coulombsche Gesetz **15**
2.1 Die $1/r^2$- Abhängigkeit . . . 15
2.2 Experimentelle Überprüfung des COULOMBschen Gesetzes . . . 17
2.3 Dimension der Ladung . . . 18
2.4 Vektorielle Schreibweise und Superposition . . . 20
2.5 Vergleich von COULOMB- und Gravitationskraft . . . 21

3 Das elektrische Feld **23**
3.1 Das elektrische Feld . . . 23
3.2 Beschreibung des elektrischen Feldes . . . 24
3.3 Das homogene Feld . . . 28
3.4 Beliebiges elektrisches Feld . . . 33
3.5 Der elektrische Fluß und der Satz von GAUSS . . . 34

4 Das elektrostatische Potential **45**
4.1 Das Potential . . . 45
4.2 Potential einer beliebigen Ladungsverteilung . . . 52
4.3 Berechnung der Feldstärke aus dem Potential . . . 53
4.4 Der elektrische Dipol . . . 55

5 Der Kondensator **61**
5.1 Die Kapazität . . . 61
5.2 Kondensatoren . . . 62
5.2.1 Der Plattenkondensator . . . 62

5.2.2 Der Kugelkondensator 63
5.2.3 Der Zylinderkondensator 64
5.3 Schaltung von Kondensatoren 65
5.3.1 Schaltsymbol 65
5.3.2 Parallelschaltung 65
5.3.3 Reihenschaltung 66

6 Materie im elektrischen Feld 69
6.1 Leiter im elektrischen Feld 69
6.2 Isolatoren im elektrischen Feld 72
6.2.1 Polarisationseffekte 77

7 Energie des elektrischen Feldes 83

8 Elektrische Stromstärke 85
8.1 Der elektrische Strom 85
8.2 Energie und Leistung des elektrischen Stromes 89

9 Widerstand 91
9.1 Widerstand eines Metalldrahtes 91
9.2 Temperaturabhängigkeit von R 93
9.3 Supraleitung 95
9.4 Technische Widerstände 98

10 Netzwerke 99
10.1 Die Kirchhoffschen Gesetze 99
10.2 Strom– und Spannungsmessung 103
10.2.1 Innenwiderstand 103
10.2.2 Strommessung 103
10.2.3 Spannungsmessung 104
10.2.4 Vorwiderstand und Potentiometerschaltung 105
10.2.5 Widerstandmessung 107
10.3 RC- Kreis 108
10.3.1 Der Ladevorgang 108
10.3.2 Der Entladevorgang 109

11 Leitung in Flüssigkeiten 111
11.1 Elektrolytische Leitfähigkeit 111
11.2 Galvanische Elemente 116

12 Leitung in Festkörpern **121**
12.1 Leitung in Metallen . . . 121
12.2 Leitung in Halbleitern . . . 123
12.2.1 p,n- Halbleiter . . . 123
12.2.2 Der pn- Übergang . . . 126
12.2.3 Die Halbleiterdiode . . . 127
12.2.4 Der Transistor . . . 129

13 Leitung in Hochvakuum und Gasen **133**
13.1 Ladungstransport im Hochvakuum . . . 133
13.1.1 Glühemission . . . 133
13.1.2 Photoemission . . . 135
13.1.3 Sekundärelektronenemission . . . 136
13.2 Leitung in Gasen . . . 136
13.2.1 Die Gasentladung . . . 136
13.2.2 Plasmaströme . . . 142

Kapitel 1

Elektrische Ladungen

Bisher haben wir uns in der Vorlesung mit der Mechanik und der Thermodynamik beschäftigt. Nun wollen wir uns mit Erscheinungen befassen, die sich nicht mit Hilfe der Mechanik und der Thermodynamik erklären lassen, dem Elektro-Magnetismus.
In der Mechanik ist das zentrale Thema die Gravitationskraft (Schwerkraft und Planetenbewegung). Im Folgenden werden wir zwei weitere Kräfte, die elektrische und die magnetische Kraft kennenlernen. Später werden noch die schwache Kraft (radioaktiver Zerfall) und die starke Kraft (Kernkraft) hinzukommen. Es wird sich eine zentrale Frage der Physik auftun: Lassen sich diese Kräfte zu einer einzigen Kraft vereinen?

1.1 Positive und negative Ladungen

Schon im Altertum war Thales von Milet (um 600 v. Chr.) die Eigenschaft von Bernstein bekannt, nach dem Reiben leichte Gegenstände anzuziehen. Ein ähnliches Verhalten zeigen auch andere Materialien.

Versuch

> Wir reiben einen Hartgummistab an einem Katzenfell und halten ihn über Papierschnipsel. Wir beobachten, daß die Schnipsel von dem Stab angezogen werden (s. Abb. 1.1).

Diese neue Eigenschaft der Materie nannte man nach dem Stoff, an dem man sie beobachtete $\eta\lambda\varepsilon\kappa\tau\varrho o\nu$, lies "Elektron" (griechisches Wort für Bernstein) - also **Elektrizität**. Die neue Eigenschaft soll nun genauer untersucht werden:

Versuch

1. Wir reiben mit einem Fell über einen Luftballon und einen PVC-Stab. Wir nähern den Stab dem Luftballon und beobachten, daß der Luftballon von dem Stab abgestoßen wird.

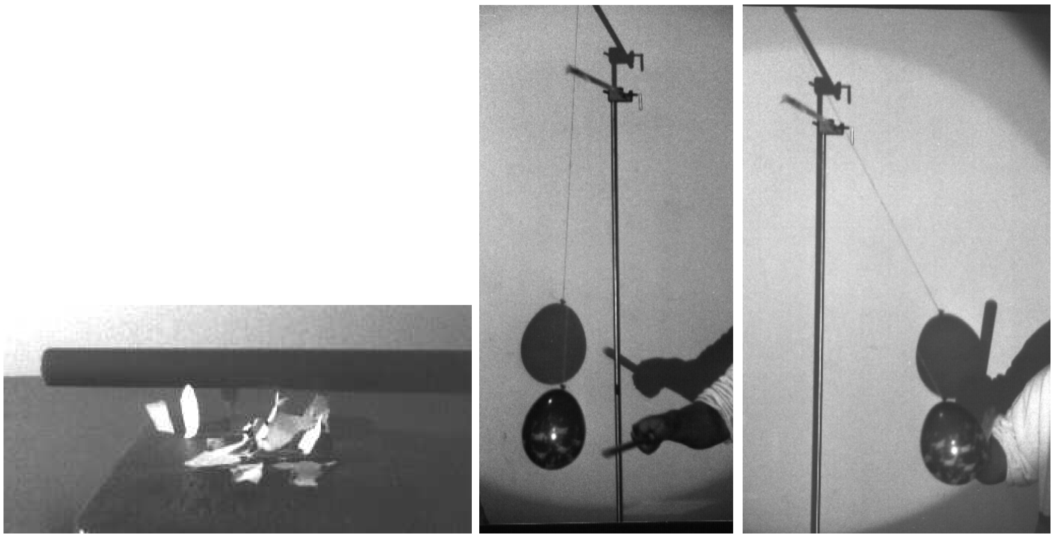


Abbildung 1.1: Versuchsergebnisse

2. Nun reiben wir einen Plexiglasstab an einem Seidentuch und nähern ihn dem Luftballon. In diesem Fall wird der Luftballon angezogen (s. Abb. 1.1).

Der gleiche Effekt zeigt sich, wenn man anstelle des Luftballons Stäbe aus gleichem Material, z.B. Plexiglas nimmt (s. Abb 1.2, entnommen aus [7]). Reibt man diese an einem Siedentuch, so stoßen sich die Stäbe ab. Tauscht man einen Plexiglasstab gegen das Seidentuch aus, so ziehen sie sich an.

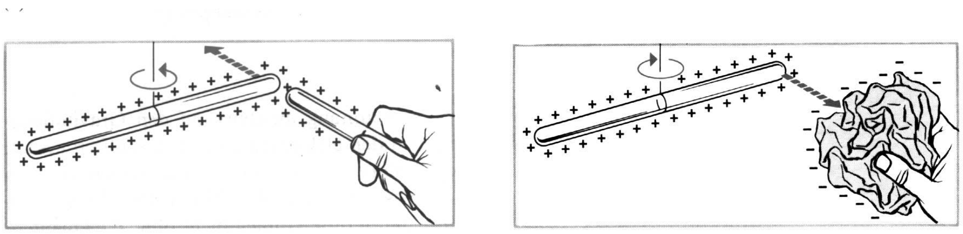


Abbildung 1.2: Gleiche Ladungen stoßen sich ab, ungleiche ziehen sich an

Diese Erkenntnisse wurden zuerst um 1733 von Du Fay (1698 – 1739) und dem amerikanischen Physiker B. Franklin (1707 – 1790) gewonnen. Sie erkannten, daß es zwei Arten von Elektrizität gibt und legten folgende Konvention fest:

Bernstein-, PVC-, Seide-	Elektrizität:	$-$	**Ladung**
Plexiglas-, Katzenfell-	Elektrizität:	$+$	**Ladung**

Im letzten Versuch haben wir gesehen, daß die elektrischen Ladungen Kräfte aufeinander ausüben. Gleichgeladene Körper stoßen sich ab, entgegengesetzt geladene ziehen sich an. Die Abbildung 1.3 (aus [15]) zeigt die Wechselwirkungen zwischen gleichen und entgegengesetzten Ladungen und die auf sie wirkenden Kräfte. Wir halten fest:

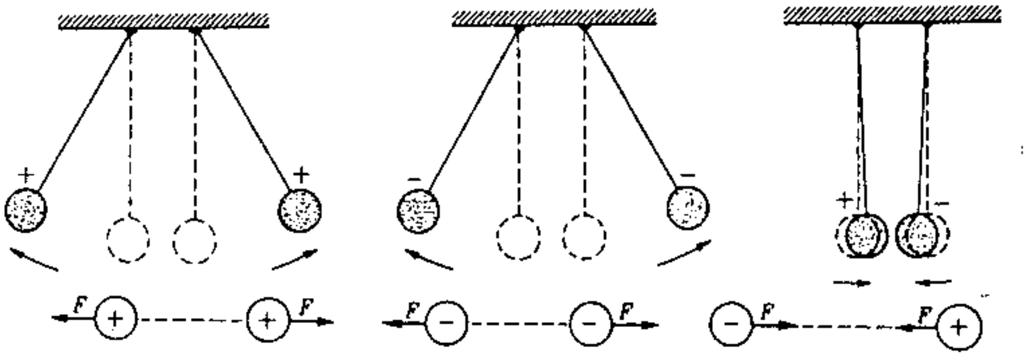


Abbildung 1.3: Kräfte auf Ladungen

Zwei Körper mit gleicher Ladung (positiv oder negativ) stoßen sich ab; haben sie entgegengesetzte Ladung, so ziehen sie sich an.

Ladungstrennung

Offensichtlich besitzen alle Körper eine Menge elektrischer Ladungen. Im allgemeinen merken wir nichts davon, da die Wirkungen der positiven und negativen Ladungen sich kompensieren.
Um Ladungen beobachten zu können, müssen wir sie trennen und die positiven Ladungen irgendwo anhäufen und die negativen irgendwo anders anhäufen. Alle Vorgänge bei den bisherigen Versuchen mit der **Reibungselektrizität** beruhen auf **Ladungstrennung**.

- Wird ein Kunststoffstab an einem Katzenfell gerieben, so werden Elektronen an das Harz gebunden.

- Aus einem Teflontrichter tropfendes Wasser ist positiv geladen, weil die OH^-- Ionen am Trichter hängen bleiben.

Bei der Ladungstrennung müssen die negativen Ladungen von den positiven Ladungen losgerissen werden, und außerdem die positiven auf einem Haufen und die negativen auf einem anderen Haufen gehalten werden. Dazu ist eine Kraft bzw. Arbeit erforderlich.

Bei den bisherigen Versuchen haben wir gesehen, daß bei mehrfachem Reiben (= größerer Arbeit!), auch größere Ladungsmengen entstehen.
Es scheint also so, daß man immer nur einen Bruchteil der einen oder anderen Ladung entfernt. Entfernt man Elektronen, so bleibt positive Ladung zurück, fügt man Elektronen von einem anderen Körper hinzu, wird der Körper negativ geladen.
Wenn wir also hier von Ladung sprechen, dann meinen wir damit "Überschußladung".

1.2 Leiter und Isolatoren

Versucht man, von einem geriebenen Kunststoffstab durch Berührung Ladung auf einen Metallstab zu übertragen, so gelingt dies nicht, wenn der Metallstab in der Hand gehalten wird. In diesem Fall fließt die gesamte Ladung des Metallstabes in die Hand ab. Hält man den Stab jedoch an Kunststoffgriffen, so üben die beiden Stäbe Kräfte aufeinander aus, und das Aufladen gelingt. Bei der Berührung mit der Hand wird der Metallstab sofort wieder vollständig entladen. Bei dem Kunststoffstab hingegen ist es anders. Er kann nur in dem Bereich entladen werden, der durch die Hand berührt wird. Die unterschiedliche Ladungsverteilung auf einer geladenen Metallplatte und einer geladenen Kunststoffplatte zeigt folgender Versuch.

Versuch

1. Wir laden eine isoliert gehaltene Metallplatte mit einem geriebenen PVC-Stab auf. Bringen wir nun eine Glimmlampe an eine Stelle der Platte, so leuchtet die Lampe auf. Wiederholen wir diesen Vorgang an unterschiedlichen Plattenstellen so führt es jedoch zu keinem weiteren Aufleuchten.

2. Bei einer geladenen Kunststoffplatte kann das Lämpchen wiederholt an verschiedenen Stellen der Platte zum Leuchten gebracht werden.

Aufgrund dieser unterschiedlichen Materialeigenschaft unterscheidet man zwischen **Leiter** (Metallplatte) und **Nichtleiter** bzw. **Isolator** (Kunststoffplatte).
Die Ladungen in einem Leiter, hier also im Metallstab und dem menschlichen Körper, sind quasi frei beweglich. Daher fließt bei Berührung die Ladung vom Metallstab sofort über die Hand und den übrigen menschlichen Körper zur Erde ab. Auf einem Leiter breitet sich eine an einer Stelle aufgebrachte Ladung in mehr oder weniger kurzer Zeit über den gesamten Körper aus. Bei einem Isolator (Kunststoffstab) ist die Ladung hingegen nicht frei beweglich, sondern fest an die Atome gebunden. Bei Berührung fließt nur jeweils ein Teil der Ladungsmenge ab. Eine Auflistung verschiedener Leiter und Isolatoren findet man in nachstehender Tabelle.

Gute Leiter	Metalle, Kohle, Wasser, Säure- und Salzlösungen, der menschliche Körper, stark erhitzte Gase, ...
weniger gute Leiter	Holz, Papier, Stroh, Alkohol, ...
Isolatoren	Quarz, Glas, Porzellan, Kunststoff, Bernstein, Seide, Öle, Luft, Gase, ...

Es gibt keine vollkommenen Isolatoren, jedoch kommen einige Stoffe (z.B. Bernstein und Quarz) diesem Grenzfall praktisch sehr nahe. Daß Luft nicht leitet, ist gerade die Voraussetzung dafür, daß eine durch Reiben erzeugte Ladung beobachtet werden kann. Ist jedoch die Luftfeuchtigkeit zu hoch, fließt die Ladung schnell wieder ab, da die Luft nun besser leitet.

1.3 Ladungsmessung

Die beobachtete Abstoßung gleichnamiger Ladungen wird zum Erkennen und Messen elektrischer Ladungen herangezogen. Einige **Elektroskope** zeigt Abb. 1.4 (aus [1]).

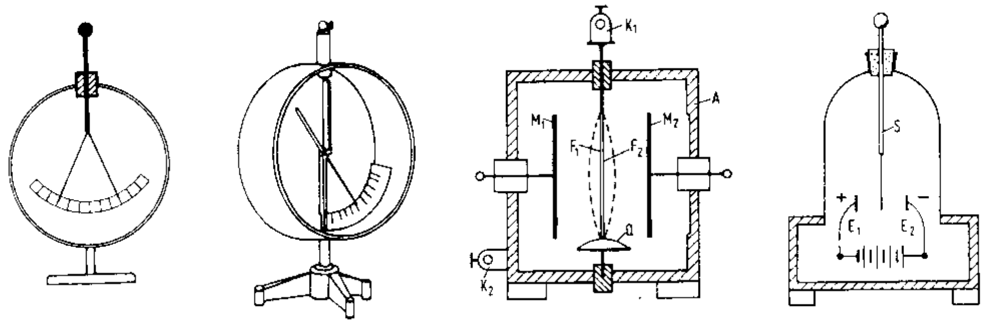


Abbildung 1.4: Elektroskope

1. **Blättchen-Elektroskop**
   Im Inneren eines Metallgehäuses hängen an einer von oben isoliert eingeführten Metallstange zwei Blättchen aus Aluminium- oder Goldfolie. Wird das kugelförmige Ende der Metallstange mit einem geladenen Körper berührt, so spreizen sich die Folien, da sich die Ladungen auf der Kugel, der Stange und den Folien verteilen. Da die Folien die gleiche Ladung haben, stoßen sie sich ab, d.h. spreizen auseinander, und zwar um so mehr, je größer die Ladung ist. Eicht man das Instrument, so erhält man einen einfachen Ladungsmesser, das **Elektrometer**.

2. **BRAUNsches- Elektrometer**
   Statt zweier beweglicher Blättchen wird hier ein leichter, in Spitzen gelagerter, Aluminiumanzeiger benutzt. Der Zeiger wird von dem feststehenden Teil abgestoßen, sobald über diesen Ladung zugeführt wird, da nun beide gleichnamig geladen sind. Das Rückstellen erfolgt durch das Gewicht des Zeigers. (F.BRAUN, 1891)

3. **WULFsches- Zweifadenelektrometer**
   Der Aufbau dieses empfindlicheren Elektrometers geht aus der Abb. 1.4 hervor. Durch die Deckplatte eines Metallgehäuses (A) ist, sehr gut isoliert, ein Metallstift (E) geführt, der an seinem oberen Ende die Anschlußklemme K_1 trägt, und von dessen unterem Ende zwei sehr dünne Drähte von ca. $4\,\mu$m Durchmesser und 5 bis 10 Zentimeter Länge herabhängen. Die beiden Drähte sind mit ihren unteren Enden an einem elastischen Quarzbügel (Q) befestigt, durch den sie schwach gespannt werden. Führt man den Fäden F_1, F_2 über die Klemme eine elektrische Ladung zu, so spreizen sie sich auseinander. Ihr Abstand kann in der Fadenmitte, wo er maximal ist, mit Hilfe eines Mikroskops sehr genau gemessen werden. Damit die Fäden beim Auseinandergehen in der Bildebene des Mikroskops bleiben, sind beiderseits in der Fadenebene zwei schmale Metallplatten (M_1 und M_2) angebracht, die mit dem geerdeten Gehäuse verbunden sind und somit die geladenen Fäden anziehen.

4. **BOHNENBERGsches- Elektroskop**
   Im Gegensatz zu den bisher beschriebenen Instrumenten, die das Vorhandensein von Ladung und ihre Menge nachweisen, liefert dieses auch das Vorzeichen. Zwischen zwei Platten, den sogenannten Elektroden (E_1 und E_2), hängt an einer von oben isoliert eingeführten Metallstange (S) ein einzelnes schmales Aluminiumplättchen. Die beiden Elektroden (E_1 und E_2) sind durch eine besondere, meist im Gerät eingebaute Elektrizitätsquelle dauernd entgegengesetzt geladen. Infolgedessen wird das Aluminiumplättchen bei Aufladung von der einen Elektrode angezogen und von der anderen abgestoßen. Die Richtung des Ausschlages läßt dann einen Schluß auf das Vorzeichen zu.

1.4 Mehr zu Leitern und Isolatoren

Sitz der Ladung auf einem Leiter

Die Ladungsverteilung auf elektrischen Leitern läßt sich an folgendem einfachen Versuch diskutieren.

Versuch

Drei Elektroskope werden mit Metallbügeln untereinander verbunden. Auf ein Elektroskop wird mit Hilfe eines geriebenen Hartgummistabes Ladung aufge-

bracht. Man beobachtet auf allen drei Elektroskopen den gleichen Ausschlag, d. h. die auf ein Elektroskop aufgebrachte Ladung hat sich gleichmäßig auf alle Elektroskope verteilt.
Berührt man nun ein Elektroskop mit dem Finger, so verteilt sich die Ladung auf den Körper und den Fußboden (Bem.: Man sagt: Das Elektroskop ist **geerdet**). Auf allen Elektroskopen ist der Ausschlag auf Null zurückgegangen.

Aus dem ersten Teil des Versuches folgt, daß die Ladungen versuchen sich zu trennen und einen größtmöglichen Abstand einzunehmen. Dies gelingt ihnen nur, wenn sie auf der Oberfläche sitzen. Daraus folgt auch, daß das Innere von Leitern ladungsfrei ist. Dies gilt auch für Hohlräume, wie folgender **Versuch** zeigt:

Versuch

Auf einem Elektroskop wird ein FARADAY-Becher angebracht (s. Abb 1.5, entnommen aus [15]). Dieser Becher wird mit Hilfe der Reibungselektrizität geladen. Nun wird mit einem **elektrischen Löffel** versucht, aus dem Inneren des Bechers Ladung zu entnehmen und auf ein zweites Elektroskop zu übertragen. Dies gelingt nicht, da im Inneren keine Ladungen vorhanden sind!

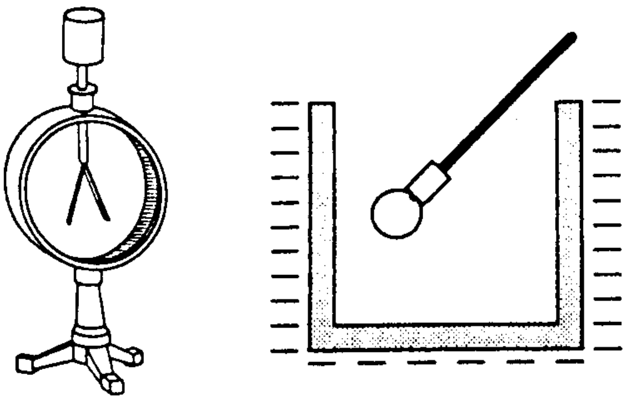


Abbildung 1.5: Faradaybecher

Die **Feldfreiheit** wurde zuerst von B. FRANKLIN (1706 – 1790) entdeckt. Er benutzte dazu einen positiv geladenen Korkball und einen Silberbecher, in den er den Korkball einführte (analog zum Löffelversuch). Er schrieb 1755 an seinen Freund J. PRIESTLY (1733 - 1804):

> I electrifed a silver pint cann, on an electric stand, and then lowered into it a cork-ball, of about an inch diameter, hanging by a silk string, till the cork touched the bottom of the cann. The cork was not attracted to the inside of the cann as it would have been to the outside, and though it touched the bottom, yet when drawn out, it was not found to be electrified by that touch, as it would have been by touching the outside. The fact is singular. You require the reason; I do not know it ...

Qualitativ überprüft wurde die Feldfreiheit zuerst von H. CAVENDISH (1731-1810). Er stellte bei seinen Messungen die Feldfreiheit mit einer Meßgrenze unterhalb von 2 % fest. Die Ergebnisse wurden jedoch nicht veröffentlicht. Heutige Präzisionsmessungen bestätigen die Feldfreiheit mit einer Genauigkeit unterhalb von 10^{-9}.

Die Influenz

Versuch

> Wir führen einen geladenen Plexiglasstab an ein geerdetes Elektroskop heran, ohne dieses jedoch zu berühren. Obwohl keine Ladung übertragen wurde, beobachten wir am Elektroskop einen Ausschlag. Entfernen wir den Stab aus dem Umfeld des Elektroskopes, geht der Ausschlag auf Null zurück.

Offensichlich ist bei dem Versuch **keine Ladung übertragen** worden, sonst hätte das Elektroskop auch noch einen Ausschlag angezeigt, als der Plexiglasstab entfernt wurde. Wie läßt sich nun dieses Phänomen erklären? Bedenken wir folgendes: a) Der Plexiglasstab ist positiv durch die Reibung aufgeladen. b) Der Teller, der feststehende Teil und der Zeiger des Elektroskops bestehen aus einem metallischen Leiter, in dem sich Ladungen frei bewegen können.

Nähert man also nun den positiv geladenen Plexiglasstab dem Teller des Elektroskops,

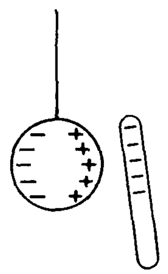


Abbildung 1.6: Influenz

so werden in dem Elektroskop die negativen Ladungen zu dem Stab gezogen, während die positiven abgestoßen werden und deshalb in den feststehenden Teil und den Zeiger wandern. Da in diesen beiden Teilen nun gleichnamige Ladung vorliegt, wird der Zeiger abgestoßen. Man beobachtet einen Ausschlag. Wird nun der Plexiglasstab wieder entfernt, so gleicht sich die Ladungsverteilung im Elektroskop wieder aus und der Ausschlag geht auf Null zurück (s. auch Abb. 1.6, entnommen aus [1]).

Halbieren von Ladungsmengen

Wir haben gesehen, daß durch Berührung Ladung übertragen werden kann. Was passiert, wenn man einen geladenen und einen ungeladenen Leiter in Kontakt bringt? Diese Frage soll in dem folgenden Versuch geklärt werden.

Versuch

> Wir verbinden zwei gleich große Konduktorkugeln jeweils mit einem Elektroskop. Eine der Kugeln wird nun geladen und ihre Ladung mit dem Elektroskop angezeigt. Jetzt wird die gleich große ungeladene Kugel mit der geladenen Kugel in Berührung gebracht. Auf beiden Elektroskopen beobachten wir nun den gleichen Ausschlag (s. Abb. 1.7 aus [15]).

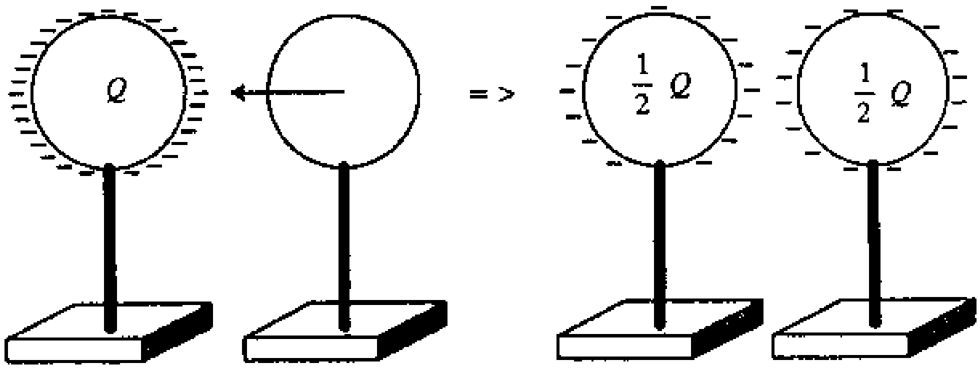


Abbildung 1.7: "Teilen" von Ladungsmengen

Beim Kontakt der beiden Kugeln findet ein Ladungsübertrag statt, und zwar so, daß jede Kugel die gleiche Menge an Ladung besitzt. Auf jeder der beiden gleichgroßen Kugeln befindet sich nach dem Berühren $\frac{1}{2}$ Q.

1.5 Ladungserhaltung

Bei der Ladungshalbierung kommt sofort die Frage auf, ob diese unendlich oft erfolgen kann oder ob es eine kleinste Ladungsportion gibt. In diesem Fall würde die Größe einer solchen Elementarladung interessieren.

Versuch

> Ein Hartgummistab wird an einem Katzenfell gerieben und anschließend wird das Fell auf ein Elektroskop gelegt. Das Elektroskop schlägt aus. Nun wird der geladene Stab am Elektroskop abgestreift und man sieht, daß der Zeigerausschlag auf null zurück geht.

Offensichtlich treten beim Reiben positive und negative Ladungen in gleicher Menge auf. B. Franklin und J. D. Watson schlossen 1747 aus ähnlichen Beobachtungen:

Die Summe aller Ladungen in einem abgeschlossenen System ist erhalten. Insbesondere ist die Summe aller Ladungen im Kosmos gleich.

Bei allen Vorgängen der Ladungstrennung gilt dieser fundamentale Satz der Ladungserhaltung.
Ein sehr anschauliches Beispiel für die Ladungserhaltung bietet die Paarerzeugung in der Elementarteilchenphysik. Beim **Paarbildungseffekt** 1.8 (aus [15]) zerfällt im Feld eines Kerns ein energiereiches Photon in ein Elektron- Positron ($e^- - e^+$)- Paar, wenn gilt:

$$E_\gamma = W_{Ph} > W_0 = 2m_e c^2 \approx 1,02 \cdot 10^6 eV,$$

wobei m_e die Masse des Elektrons bedeutet. (1 eV ist die Energie, die ein Elektron gewinnt, wenn es die Spannung von 1 V durchläuft.) Die bedeutet, daß die Energie des Photons

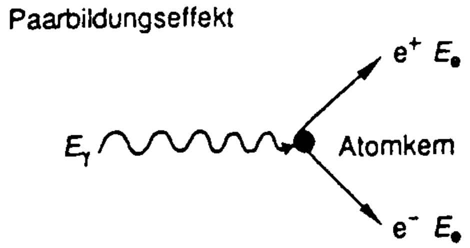


Abbildung 1.8: Paarbildung

vollkommen in Masse umgewandelt wird. Diese Umwandlung von Energie in Materie (und umgekehrt) ist aufgrund der Relativitätstheorie, insbesondere $E = mc^2$ möglich. Bei der Paarbildung muß beachtet werden, daß Ladungen nur paarweise entstehen können, dies bedeutet, daß zwar neue Ladungen entstehen können, aber nur paarweise und sie müssen entgegengesetzt geladen sein. Abb. 1.9 (aus [15]) zeigt eine Blasenkammer-Aufnahme einer e^+e^-- Paarerzeugung in den BROOKHAVEN NATIONAL LABORATORY (USA).

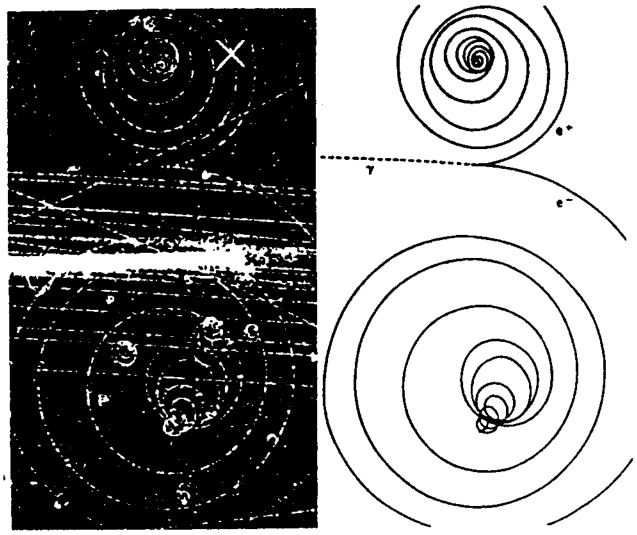


Abbildung 1.9: Blasenkammeraufnahme

Elementarladung

Um den Ladungszustand eines Körpers zu charakterisieren, benutzt man den Begriff der **Ladungsmenge Q** bzw. **q**. Man verbindet mit der elektrischen Ladung die Vorstellung einer nichtmateriellen Substanz (ähnlich wie bei der Wärmemenge), die in verschiedenen Mengen in einem Körper vorliegen kann. Die Ladungsmenge läßt sich im allgemeinen in kleinere Ladungsmengen unterteilen, wobei es eine untere Grenze gibt, die **Elementarladung e** oder **elektrisches Elementarquantum**, welche zuerst von R. A. MILLIKAN (1868 – 1953) gemessen wurde. Er erhielt dafür 1923 den Nobelpreis. Seine Versuche (s. später) zeigten, daß die Ladung **quantisiert** ist, d.h. es gibt eine kleinste elektrische Ladung, die eine **Naturkonstante** ist und folgenden Wert hat:

$$e = 1,6021892 \cdot 10^{-19}\mathrm{C} \qquad \text{mit } \mathrm{C} = \text{Coulomb}$$

d.h. **Ladung existiert nur als ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung e**, die genau der Ladung des Elektrons entspricht. Die Ladung von e^- und e^+ oder e^- und

Proton p sind entgegengesetzt gleich. Es entstehen immer gleich viele positive wie negative Ladungen. Dieser Sachverhalt wird heute experimentell mit einer Genauigkeit von 10^{-20} bestätigt.
Bei theoretischen Betrachtungen zum Aufbau der Elemetarteilchen wurden jedoch 1964 von M. Gell-Mann (∗1929) Quarks mit Ladungen von $-\frac{1}{3}$e und $+\frac{2}{3}$e postuliert (Nobelpreis 1969). Diese Ladungen wurden bisher noch nicht frei nachgewiesen, obwohl ihre Existenz außer Zweifel steht. Die Quarks scheinen nur in Bindungszuständen mit ganzzahligen Ladungen zu existiern.

1.6 Erzeugung hoher Ladungsmengen

Benötigt man größere Ladungsmengen, dann erzeugt man diese mit Hilfe eines Van-de-Graaff- oder **Bandgenerators**.
Die ersten Entwicklungen dieses Gerätes gehen auf Lord Kelvin (1870) zurück, bekannt wurde der Hochspannungsgenerator aber erst durch Van-de-Graaff (1932).
Einen derartigen Bandgenerator zeigt Abb. 1.10 (aus [8]). Er enthält ein endloses Band

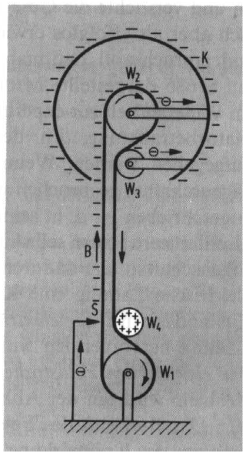


Abbildung 1.10: Bandgenerator

B aus einem isolierenden Stoff (meist Gummi), das über vier drehbare Walzen läuft. Die Walzen W_1, W_2 und W_3 sind aus Metall, Walze W_4 (auch Erregerwalze genannt) hingegen ist aus isolierendem Kunststoff, z.B. Plexiglas. Durch eine Handkurbel mit Übersetzungsgetriebe oder durch einen Motor kann die Walze W_1 angetrieben werden, so daß sich das Band in Pfeilrichtung bewegt. Durch die innige Berührung zwischen Band und Erregerwalze und der nachfolgenden Trennung werden beide elektrisch geladen, und zwar das Band negativ und die Walze positiv (oder umgekehrt). Gegenüber der Erregerwalze befindet sich ein Spitzenkamm (S), auf dem durch die positiv geladene Erregerwalze eine negative Influenzladung erzeugt wird, die aufgrund der Spitzenwirkung auf das, sich nach oben bewegende, Band aufgesprüht wird. Die oben ankommende negative Ladung wird dem Band durch die Metallwalzen W_2 und W_3 entnommen und auf eine große, isoliert aufgestellte, metallische Hohlkugel K abgeleitet, auf deren äußeren Oberfläche sie sich verteilt. Das Transportband verläßt die Kugel ungeladen; der Vorgang wiederholt sich dann in gleicher Weise. Durch laufende Zuführung weiterer Ladung kann die Elektrizitätsmenge auf der Kugel immer wieder gesteigert werden; die Kugel nimmt die ihr auf der Innenseite zugeführten neuen Ladungen ohne weiteres auf, da diese sofort auf die äußere Oberfläche abgeleitet werden.

Versuch

> Wir nehmen den Bandgenerator in Betrieb und nähern seinem Dom eine kleine Konduktorkugel, die an einem isolierenden Stab befestigt ist. Befindet sich auf dem Dom genügend Ladung, so springt ein Funke von dem Dom zur Konduktorkugel über.

Auf diese Weise können sehr hohe Flächenladungsdichten erzeugt werden. Mit solchen Bandgeneratoren werden Hochspannungen bis $12 \cdot 10^6$ Volt erzeugt. In der Kernphy-

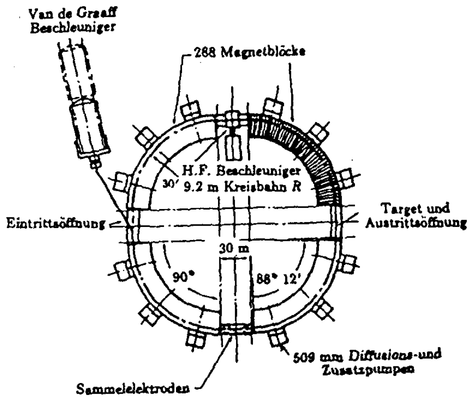


Abbildung 1.11: Kosmotron

sik werden VAN-DE-GRAAFF-Generatoren zur Beschleunigung von Elektronen und den leichtesten Atomkernen eingesetzt. Die Abb. 1.11 (aus [15]) zeigt das KOSMOTRON der BROOKHAVEN NATIONAL LABORATORY mit einem VAN-DE-GRAAFF-Beschleuniger, bei dem die Paarerzeugung nachgewiesen wurde.

Kapitel 2

Das Coulombsche Gesetz

Wir haben gesehen, daß elektrische Ladungen Kräfte aufeinander ausüben. Im folgenden sollen nun die Abhängigkeiten dieser Kräfte näher untersucht werden.

2.1 Die $1/r^2$- Abhängigkeit

Als erster erkannte bereits C. F. Gauss (1777-1855), daß ein $1/r^2$-Gesetz für das elektrische Feld gelten muß, wenn jeder Punkt im Inneren einer geladenen Kugel feldfrei ist. Hier soll mit Hilfe einer Argumentation von J.Priestly (1733-1804) gezeigt werden, daß diese Annahme richtig ist.

Wir führen in das Innere einer geladenen Hohlkugel mit Radius R, deren Ladung

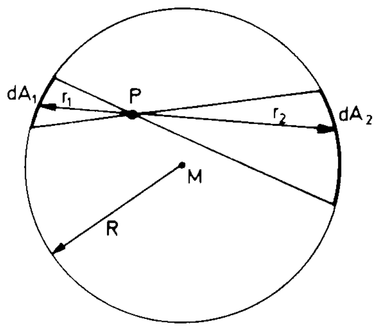


Abbildung 2.1: Zur Herleitung der 1/r- Abhängigkeit

gleichmäßig über die Oberfläche ist, eine Ladungsmenge Q ein. Sie befinde sich am Ort P (s. Abb. 2.1, entnommen aus [17]). Die Ladung Q der Kugel pro Flächeneinheit A, auch

Ladungsdichte σ genannt, beträgt daher

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4\pi R^2}.$$

Nun wählen wir ein beliebiges Flächenelement dA_1 auf der Kugel aus und verbinden seine Begrenzung mit dem Punkt P und darüber hinaus, so daß ein Doppelkegel entsteht. Der Doppelkegel schneidet aus der Kugeloberfläche die Flächen $dA_1 = r_1^2 \cdot d\Omega$ und $dA_2 = r_2^2 \cdot d\Omega$ heraus; wobei $d\Omega$ der Raumwinkel des Kegels und r_1 und r_2 die auf einer Geraden liegenden Abstände der infinitisimalen Flächen dA_1 und dA_2 vom Scheitel des Kegels sind. Aufgrund der gleichmäßigen Ladungsverteilung befinden sich auf den beiden Flächenelementen die Ladungen $Q_1 = \sigma \cdot dA_1$ und $Q_2 = \sigma \cdot dA_2$. Diese üben auf die dritte Ladung Q, die sich im Punkt P befindet, Kräfte aus, deren Wirkungen sich aufheben müssen, da sie von den, sich auf gegenüberliegenden Flächenstücken befindlichen, Ladungen herrühren, denn nur dann ist gewährleistet, daß in dem beliebig gewählten Punkt P in keiner Richtung eine Kraftwirkung auftritt. Für die Beträge der von Q_1 und Q_2 auf Q ausgeübten Kräfte F_1 und F_2 gilt:

$$F_1 = Q_1\, Q_3\, f_{r_1} \qquad \text{bzw.} \qquad F_2 = Q_2\, Q_3\, f_{r_2}$$

wobei f_{r_1} und f_{r_2} noch zu bestimmende Funktionen der Abstände der jeweiligen Ladungen von einander sind. Beide Kräfte müssen gleich sein, also

$$F_1 = F_2 \qquad \leftrightarrow \qquad Q_1\, Q_3\, f_{r_1} = Q_2\, Q_3\, f_{r_2}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{f_{r_1}}{f_{r_2}} = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\sigma\, dA_1}{\sigma\, dA_2} = \frac{r_1^2 \cdot d\Omega}{r_2^2 \cdot d\Omega} = \frac{r_1^2}{r_2^2},$$

und daraus

$$f(r_1)\, r_1^2 = f(r_2)\, r_2^2 = k.$$

Diese Beziehung liefert

$$f(r_1) = \frac{k}{r_1^2} \qquad \text{und} \qquad f(r_2) = \frac{k}{r_2^2},$$

so daß für die beiden Kräfte jetzt geschrieben werden kann:

$$F_1 = k\frac{Q_1\, Q_3}{r_1^2} \qquad \text{und} \qquad F_2 = k\frac{Q_2\, Q_3}{r_2^2}$$

Aus diesem Ergebnis folgt, daß zwei Punktladungen Q und Q', die sich im Abstand r voneinander befinden, aufeinander die Kraft

$$F = k\frac{Q\, Q'}{r^2}$$

ausüben. ||

2.2 Experimentelle Überprüfung des COULOMBschen Gesetzes

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, daß aus der beobachteten Feldfreiheit im Inneren von Leitern auf die $1/r^2$- Abhängigkeit der wirkenden elektrischen Kräfte geschlossen werden kann.
Die erste direkte Messung der elektrischen Kraft wurde von C. A. DE COULOMB (1736-1806) vorgenommen. Die dazu benutzte Drehwaage ist in Abb. 2.2 (entnommen aus [1])

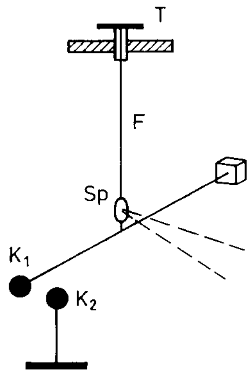


Abbildung 2.2: COULOMBsche Drehwaage

schematisch dargestellt.

Versuch

An einem sehr dünnen Metallfaden (F) hängt waagerecht ein dünner Kunststoffstab. Dieser trägt an einem Ende eine kleine Metallkugel (K_1) , am anderen Ende ein gleichschweres Gegengewicht. Eine zweite, gleichgroße Metallkugel (K_2) wird elektrisch geladen und dicht neben die erste Kugel gestellt. Durch eine kleine Drehung am Torsionskopf (T) kann man leicht erreichen, daß die Kugel (K_1) gerade eben die Kugel (K_2) berührt. Diese gibt nun die Hälfte der Ladung an (K_1) ab, da beide Kugeln gleich groß sind. An der Vergrößerung des Abstandes von (K_1) und (K_2), der mit Hilfe eines am Spiegel (Sp) reflektierten Lichtstrahls gemessen werden kann, kann man nun die Kräfte ermitteln, mit denen die Kugeln abgestoßen werden. Der Ausschlag des Lichtzeigers (A_0) wird markiert. Die Größe der Kraft hängt von der Ladung ab, die zu Anfang auf die Kugel (K_2) übertragen wurde. Nun wird die Ladung auf der Kugel (K_2) mit Hilfe einer gleichgroßen neutralen Kugel halbiert bzw.

geviertelt, worauf hin sich auch der Abstand halbiert bzw. viertelt. Die bisherigen Versuch wurden mit einem Radius $r = 20$ cm durchgeführt. Nun wird der Radius auf $r = 14,14$ cm bzw. $r = 10$ cm verkürzt und man beobachtet, daß der Ausschlag sich verdoppelt bzw. vervierfacht.

Wir haben gesehen, daß die Kraft zwischen zwei elektrisch geladenen Körpern dem Produkt der beiden Elektrizitätsmengen, die auf den Körpern sitzen, direkt und dem Quadrat ihrer Entfernung umgekehrt proportional ist. Die Kraft hat die Richtung der Verbindungslinie der beiden Ladungen. Die Gesetzmäßigkeit lautet also:

$$\mathrm{F} \sim \frac{\mathrm{Q_1 \cdot Q_2}}{\mathrm{r}^2},$$

wobei Q_i die Ladungen sind und r der Abstand. Das COULOMBsche Gesetz ist heute bis zu Abständen von 10^{-16}m (d.h. 1/10 des Proton-Durchmessers) experimentell überprüft worden (z.B. durch $e^+ - e^-$ Streuung im Speicherring PETRA im DESY).

2.3 Dimension der Ladung

Im Prinzip ist die Dimension der Ladung frei wählbar. Sie kann z.B. dadurch festgelegt werden, daß man in

$$\mathrm{F} = \mathrm{k}\frac{\mathrm{Q_1 \cdot Q_2}}{\mathrm{r}^2}$$

$k = 1$ setzt, wie es das elektrostatische (GAUSSsche) **cgs-System** macht. Die Dimension der Ladung wird hier aus den **mechanischen Grundeinheiten** abgeleitet:

$$[\mathrm{Q}] = [\sqrt{\mathrm{Kraft}}] \cdot [\mathrm{Länge}] = \sqrt{\mathrm{dyn}} \cdot \mathrm{cm} = \mathrm{g}^{\frac{1}{2}}\mathrm{cm}^{\frac{3}{2}}\mathrm{s}^{-1}.$$

Diese Einheit wird als (absolute) **elektrostatische Ladungseinheit esu** (elektrostatic unit) bezeichnet. Man kann auch **statcoulomb** benutzen:

$$\mathrm{g}^{\frac{1}{2}}\mathrm{cm}^{\frac{3}{2}}\mathrm{s}^{-1} = 1\ \mathrm{esu} \mathrel{\hat{=}} 1\ \mathrm{statcoulomb}.$$

Dieses System ist in der Atom- und Kernphysik sowie in der theoretischen Physik noch sehr gebräuchlich, es entspricht aber nicht dem SI- System und soll daher hier nicht benutzt werden.

Im **SI-System** wird die Ladung über den Strom definiert:

$$\mathrm{Strom}\ \mathrm{I} = \frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dt}}.$$

Der Strom wird im SI-System als **elektrische Grundgröße** über seine **magnetische Wirkung** eingeführt (siehe auch später):

Definition: **1 Ampere (A)** ist der Strom, der in zwei unendlich langen Leitern in 1m Abstand die Kraft von $2 \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ hervorruft.

Damit ist die Einheit der Ladung:

$$[\text{Ladung}] = [\text{Strom}] \cdot [\text{Zeit}] = \mathrm{A} \cdot \mathrm{s} = \mathrm{C} = \text{Coulomb}$$

$$1\ \mathrm{C} \stackrel{\wedge}{=} 3 \cdot 10^9\ \text{esu}.$$

Hiermit ergibt sich für die Konstante k

$$\mathrm{k} = 8,988 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2} \simeq 9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}.$$

Im allgemeinen definiert man k folgendermaßen (Erklärung später):

$$\mathrm{k} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad \text{mit} \qquad \varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2},$$

wobei der Faktor 4π die Kugelsymmetrie berücksichtigt und ε_0 die **elektrische Feldkonstante** (oder **Dielektrizitätskonstante** oder **Influenzkonstante**) heißt.
Damit lautet das COULOMBsche Gesetz:

$$\mathrm{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathrm{Q}_1 \cdot \mathrm{Q}_2}{\mathrm{r}^2} \qquad (\text{im SI} - \text{System})$$

Beispiel

Als Beispiel wollen wir ein Gedankenexperiment unternehmen. Nehmen wir einmal an, es wäre möglich, alle positiven Ladungen, die in 1 g Kupfer enthalten sind an einer Stelle im Raum zu sammeln und die negativen Ladungen an einer anderen Stelle etwa 1 m davon entfernt. Mit welcher Kraft würden sich die beiden Ladungsansammlungen anziehen?
Jedes Kupferatom besteht aus 29 Elektronen und genauso vielen Positronen. Die Atommasse beträgt 63,5 u. Aus der Atommasse in u können wir entnehmen, daß in 63,5 g Cu $6,023 \cdot 10^{23}$ Atome enthalten sind (LOSCHMIDTsche Zahl). Damit sind in 1 g Kupfer $9,49 \cdot 10^{21}$ Atome enthalten. Da jedes Atom aus je 29 Elektronen und Protonen besteht, sind also insgesamt je $9,49 \cdot 10^{21} \cdot 29 = 2,75 \cdot 10^{23}$ Elektronen und Protonen in dem Gramm Kupfer enthalten. Da Elektronen und Positronen betragsmäßig dieselbe Ladung $\mathrm{e} = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C haben, liegt eine Ladungsmenge von je

$$2,75 \cdot 10^{23} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} = 44055\ \mathrm{C}$$

vor. In einem Abstand von 1 m wirkt dann eine COULOMBkraft von

$$\mathrm{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathrm{Q}_1 \cdot \mathrm{Q}_2}{\mathrm{r}^2} \approx 8,988 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{N\,m}^2}{\mathrm{C}^2} \cdot \frac{44055\ \mathrm{C} \cdot 44055\ \mathrm{C}}{1\mathrm{m}^2} = 1,74 \cdot 10^{19}\mathrm{N}.$$

2.4 Vektorielle Schreibweise und Superposition

Die Abb. 2.3 (aus [15]) zeigt zwei gleich geladene Ladungsmengen im Abstand r_{12}. Die Kraft $\vec{F}_{12}$ bezeichne die Kraft, die von Q_1 auf Q_2 ausgeübt wird. Für die Kraft $\vec{F}_{12}$ gilt:

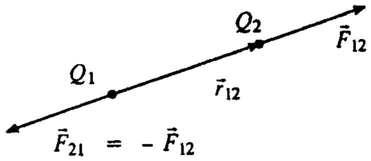


Abbildung 2.3: Kraft zwischen zwei Ladungen

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

Nach dem 3. NEWTONschen Axiom gilt: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ Um die Gesamtkraft von mehreren Ladungen Q_i zu berechnen, müssen die Einzelkräfte, analog zu Kräften in der Mechanik, aufaddiert werden.

Betrachten wir dazu ein Beispiel:
Drei Ladungen Q_1, Q_2 und Q_3 befinden sich an den Eckpunkten eines gleichschenkligen Dreiecks, wie es in Abb. 2.4 (entnommen aus [3]) dargestellt ist.
Die Ladungen seien betragsmäßig gleich, Q_1 und Q_3 seien positiv und Q_2 negativ. Gesucht

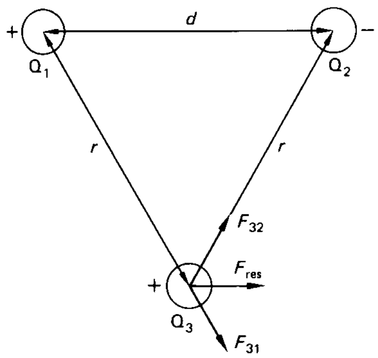


Abbildung 2.4: Wie groß ist die Kraft auf Q_3?

ist die auf Q_3 wirkende Kraft.
Das Ladungsdreieck $Q_1\,Q_2\,Q_3$ ist dem Kräftedreicke $F_{res}\,F_{32}\,F_{31}$ ähnlich, sodaß gilt:

$$\frac{|F_{res}|}{|F_{31}|} = \frac{d}{r}.$$

$$\text{Daraus folgt :} \qquad |F_{res}| = \frac{d}{r}|F_{31}| = \frac{d}{r}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1\,Q_3}{r^2}. = \frac{d}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1\,Q_3}{r^3}.$$

2.5 Vergleich von Coulomb- und Gravitationskraft

Die Coulombkraft weist mathematisch dieselbe Struktur auf wie die Gravitationskraft. Sie ist

- eine Zentralkraft,
- symmetrisch bezüglich der Ladungen und
- nimmt quadratisch mit der Teilchenentfernung ab.

Eine Gegenüberstellung von Coulomb- und Gravitationskraft zeigt folgende Tabelle:

Unterscheidungsmerkmale	Coulomb-Kraft	Gravitationskraft
Formel	$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$ mit $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}\frac{Nm^2}{C^2}$	$F = \gamma\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ mit $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kgs^2}$
Ursache	zwei Ladungen	zwei Massen
Kraftrichtung	Anziehung und Abstoßung	Anziehung
Stärke	groß	sehr klein
Abschirmbarkeit	ja	nein
Bedeutung	Zusammenhalt der Atome	Zusammenhalt des Makrokosmos

Beispiel:
Vergleicht man die Kraftwirkung des elektrischen und des Gravitationsfeldes im H-Atom, so erkennt man

$$\frac{F_G}{F_{el}} \simeq 4 \cdot 10^{-40},$$

d.h. die elektrische Kraft ist ungefähr $4 \cdot 10^{-40}$ mal größer als die Gravitationskraft!

Kapitel 3

Das elektrische Feld

3.1 Das elektrische Feld

Durch die Anwesenheit einer Ladung wird der Raum verändert: Auf jede weitere elektrische Ladung wirkt eine Kraft, deren Größe und Richtung mit Hilfe des COULOMBschen Gesetzes angegeben werden kann. In Analogie zu den früher betrachteten Veränderungen des Raumes bei Anwesenheit einer Masse (Gravitationsfeld), sagen wir, es herrscht ein Feld, und da es von elektrischen Ladungen erzeugt wird, ein "elektrisches Feld". Bei der Beschreibung des elektrischen Feldes erfolgt die Vorgehensweise analog zu der bei dem Gravitationsfeld.

Dazu betrachten wir eine **Probeladung q** in der Umgebung von Q. Eine Probeladung

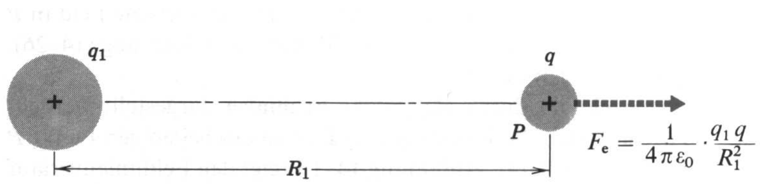


Abbildung 3.1: Kraft auf eine Ladung

ist ein geladener Körper mit verschwindend kleiner räumlicher Ausdehnung und Ladung, dessen Lage im Raum hinreichend durch die Koordinaten eines mathematischen Punktes angegeben werden kann. Nach dem COULOMBschen Gesetz wirkt nun eine Kraft von (s. Abb. 3.1, entnommen aus [7]):

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q\,q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

Diese elektrische Kraft wirkt nicht nur am Ort der Ladung selbst, sondern auch in deren Umgebung. Es ist deshalb ein **elektrisches Feld** vorhanden. Es wird mathematisch durch ein Vektorfeld beschrieben. Analog zum Gravitationsfeld ist nun eine von der Probeladung q unabhängige Größe gesucht. Das elektrische Feld ist also durch eine Vektorgröße charakterisiert, die man **elektrische Feldstärke** $\vec{\mathrm{E}}$ nennt. Sie ist definiert als:

$$\vec{\mathrm{E}} \stackrel{!}{=} \frac{\vec{\mathrm{F}}}{\mathrm{q}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{Q\,q}}{\mathrm{r}^2}\cdot\frac{\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{r}}.$$

$$\boxed{\vec{\mathrm{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{r}^2}\cdot\frac{\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{r}}} \qquad \text{elektrische Feldstärke.} \tag{3.1}$$

Diese Definition der elektrischen Feldstärke setzt eine Punktladung voraus und gilt für beide Arten von Ladungen, wenn Q als vorzeichenbehaftete Größe betrachtet wird, d.h. es gilt $\vec{\mathrm{E}} = \vec{\mathrm{F}}/\mathrm{q}_+$ für eine **positive** Ladung und $\vec{\mathrm{E}} = -\vec{\mathrm{F}}/\mathrm{q}_-$ für eine **negative** Ladung (s. Abb. 3.2, entnommen aus [7]). Es muß beachtet werden, daß die Probeladung q gegenüber

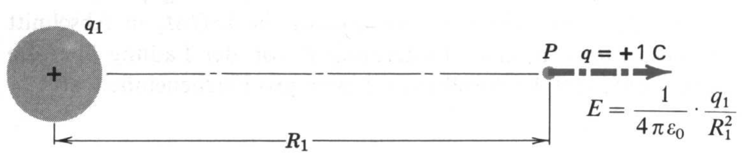


Abbildung 3.2: Zur elektrischen Feldstärke

der Ladung Q hinreichend klein angenommen wird, damit deren Feld nicht gestört wird. Es muß also ein Grenzübergang bezüglich der Ausdehnung und der Ladung von q gemacht werden, d.h.

$$\vec{\mathrm{E}} = \lim_{\mathrm{q}\to 0}\frac{\vec{\mathrm{F}}}{\mathrm{q}}.$$

Die **Dimension der elektrischen Feldstärke** ist somit:

$$[\mathrm{E}] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{As}}.$$

3.2 Beschreibung des elektrischen Feldes

Aus dem vorherigen Abschnitt geht hervor, daß die elektrischen Kräfte nicht nur am Ort der Ladung wirken, sondern auch in der Umgebung. Sie bauen ein elektrisches Feld auf, das mathematisch durch ein Vektorfeld beschrieben wird. Das elektrische Feld ist also erst bestimmt, wenn an jeder Stelle des Raumes die Feldstärke nach Größe und Richtung bekannt ist. Konstruiert man im elektrischen Feld Kurven, deren Tangenten in jedem

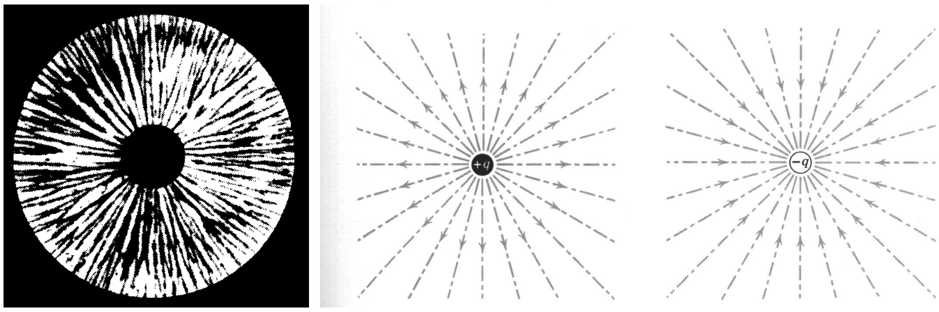
Punkt mit der Richtung der dort herrschenden Feldstärke übereinstimmten, so geben diese **elektrischen Feldlinien** ein anschauliches Bild von der Struktur des Feldes, das die Ladungen umgibt.
Der Verlauf der elektrischen Feldlinien wird im folgenden Versuch sichtbar gemacht.

Versuch

In eine mit einem dickflüssigen, gut isolierenden Öl, hier Rizinusöl, gefüllte Glasschale (Kristallisationsschale) wird feinkörniger Grieß gestreut. Auf den Boden der Glasschale werden metallische Leiter gelegt und elektrisches Feld erzeugt. Bei eingeschaltetem Feld werden die Körner polarisiert (Influenz), richten sich aus und ordnen sich längs der Feldlinien an.
Bemerkung: Die Ergebnisse zeigen einen qualitativen Überblick über den Feldverlauf in der Ebene (Die Abbildungen sind entnommen aus [1] und [7]).

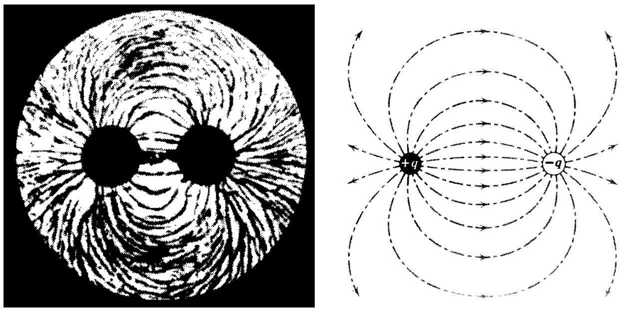
Versuchsergebnisse

1. Feldlinienbild einer Punktladung

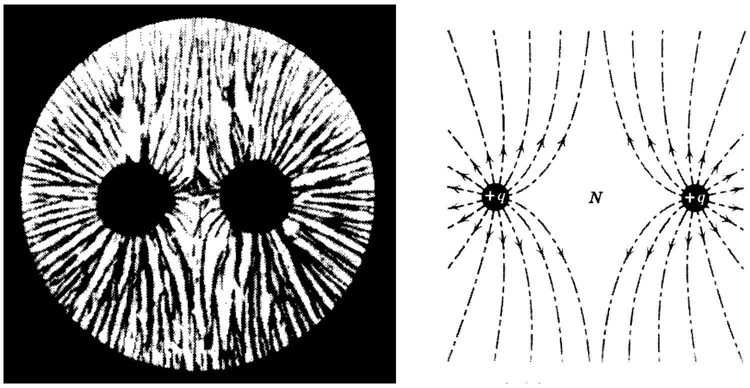


Die Feldlinien gehen radial nach außen.

2. Feldlinienbild zweier entgegengesetzt geladener Punktladungen



3. Feldlinienbild zweier gleich geladener Punktladungen



Aus den Feldlinienbildern lassen sich folgende **Eigenschaften der elektrischen Feldlinien** ablesen:

- die Richtung der Tangente an die Feldlinien gibt die Kraftrichtung, bzw. die Richtung der elektrischen Feldstärke an,
- die Pfeilrichtung ist (per Definition) gleich der Richtung der Kraft auf die **positive** Ladung,
- die Kraftwirkung ist eindeutig, d.h. die Feldlinien schneiden sich nicht,
- die Feldliniendichte ist ein Maß für die Größe der elektrischen Feldstärke bzw. deren Betrag,
- die Feldlinien stehen stets senkrecht auf den Leiteroberflächen (da die Elektronen in einem metallischen Leiter frei beweglich sind, werden sie solange verschoben, bis keine tangentiale Kraftkomponente mehr vorhanden ist),
  Befinden sich metallische Leiter im elektrischen Feld, so sitzen die Ladungen immer an der Oberfläche. Dies bedeutet, daß das Innere eines metallischen Körpers immer feldfrei ist. Mit metallischen Umhüllungen können deshalb elektrische Felder abgeschirmt werden. (FARADAYscher Käfig),
- Feldlinien enden nie frei im Raum, sie beginnen bei positiven Ladungen und enden bei negativen (willkürliche Festlegung).

Die letztgenannte Feststellung bedeutet, daß es keine geschlossenen Feldlinien gibt. Gäbe es eine geschlossene Feldlinie, so würde eine Ladung längs dieser Feldlinie einen Antrieb erfahren, der sie entlang derselben, d.h. auf der geschlossenen Bahn, bewegen würde. Das elektrische Feld würde also durch Herumbewegen der Ladung bis zu ihrem Ausgangspunkt zurück positive Arbeit leisten. Durch Wiederholung dieses Vorgangs ließe sich aus dem

Feld dauernd Arbeit gewinnen. Dies ist erfahrungsgemäß nicht der Fall, folglich kann es keine geschlossenen Feldlinien geben. Ein solches Feld nennt man **wirbelfrei**. Das **elektrostatische Feld** im Vakuum ist ein **wirbelfreies Quellenfeld**.

Die bisher gezeigten Versuche geben nur einen Überblick über den Feldverlauf in der Ebene. Die zwei folgenden Versuche sollen den räumlichen Feldlinienverlauf einer Punktladung demonstrieren.

Versuch 1

> Für den ersten Versuch befestigen wir ein Papierbüschel an einer Metallstange, die wiederum in den Dom eines Bandgenerators gesteckt wird. Wird nun die erforderliche Hochspannung erzeugt, so beobachtet man, daß die Papierstreifen radial in alle Richtungen abstehen, wie in Abb. 3.3.a, entnommen aus [1], zu sehen ist.

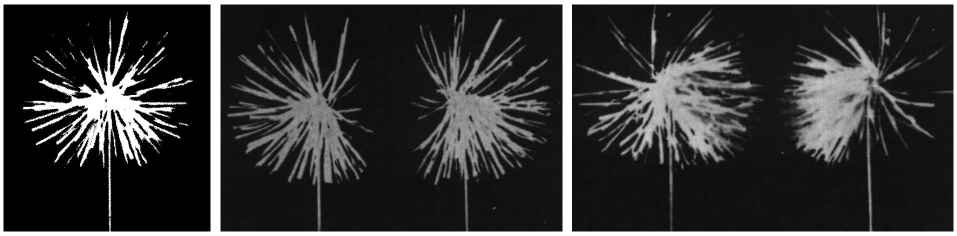


Abbildung 3.3: Papierbüschel veranschaulichen die Feldlinien im Raum

Würde man ein weiteres Papierbüschel hinzu nehmen und es mit der gleichen Ladung aufladen, so ergäbe sich ein Feldlinienverlauf wie in Abb. 3.3.b. Lädt man die Papierbüschel entgegengesetzt auf, so wäre der Feldlinienverlauf wie in Abb. 3.3.c dargestellt.

Versuch 2

> Beim zweiten Versuch stellt sich eine Versuchsperson auf eine isolierte Platte und berührt mit einer Hand den Dom des Bandgenerators. Beim Hochfahren des Generators wird die Person aufgeladen und die Haare richten sich im elektrischen Feld aus (s. Abb. 3.4, entnommen aus [12]). Obwohl mit dem Generator Hochspannungen von ca. 60 kV erreicht werden, ist der Versuch ungefährlich, da nur kleine Ströme von ca. 30 μA erzeugt werden können.

Abbildung 3.4: Versuchsperson wird mit Bandgenerator aufgeladen

Zusammenfassung

Man kann also mittels einer Probeladung den ganzen Raum abtasten um festzustellen, welche Kraft dort wirkt. An jedem Ort kann man dementsprechend einen Vektor $\vec{E}$ abtragen. Diese $\vec{E}-$ Vektoren schließen sich zu Feldlinien zusammen, deren Tangentialvektoren sie bilden. Alle Versuche, sich darüber hinaus eine "anschauliche" Vorstellung vom elektrischen Feld zu machen, es z.B. als Spannungszustand eines elastischen Mediums, des „Äthers", darzustellen, sind gescheitert. Man sollte daher auch hinter dem Feldbegriff nichts anderes suchen als was er ist, nämlich ein bequemes Darstellungsmittel für die Kräfte, die auf Ladungen wirken.

3.3 Das homogene Feld

Von besonderer Bedeutung für spätere Anwendungen ist das elektrische Feld zwischen zwei parallelen Platten.
Zunächst wollen wir uns das Feldlinienbild dieses Feldes anschauen.

Versuch

> In die Schale mit dem Gries und dem Rizinusöl legen wir zwei parallele Metallplättchen und erzeugen ein Feld. Die Grieskörner richten sich, wie in Abb. 3.5 (entnommen aus [1] und [7]) dargestellt, aus.

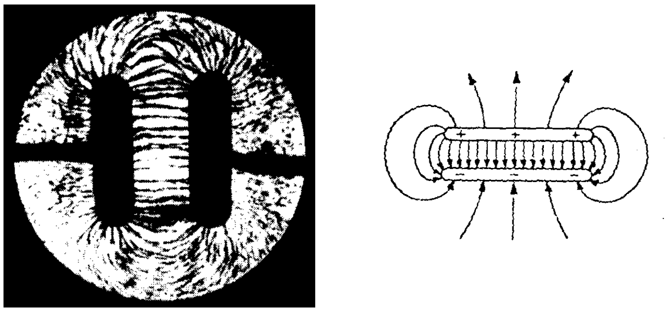


Abbildung 3.5: Versuchergebnis und theoretischer Verlauf

Das Feld zwischen zwei entgegengesetzt geladenen, unendlich ausgedehnten Platten heißt **homogenes Feld**. Die Kraft hat in allen Punkten zwischen den Platten die gleiche Richtung und die gleiche Stärke, wie folgender Versuch zeigt.

Versuch

Wir hängen einen mit Graphit behandelten Tischtennisball an einem isolierten Faden in die Mitte eines homogenen Feldes, das mit Hilfe eines Plattenkondensators erzeugt wird. Mit einem elektrischen Löffel, der seine Ladung von einem geriebenen Kunststoffstab erhält, wird der Tischtennisball langsam aufgeladen. Durch die Ladung wird der Ball immer weiter ausgelenkt, bis er eine Platte berührt. In diesem Moment nimmt er die Ladung der Platte auf und wird dadurch zur anderen Platte abgestoßen. Dieser Vorgang wiederholt sich

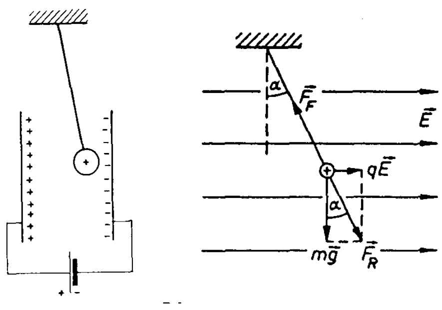


Abbildung 3.6: Graphitierter Tischtennisball im Plattenkondensator

nun laufend, da er immer die erforderliche Ladung erhält, die er benötigt, um die jeweils andere Platte zu erreichen. Die Abb. 3.6 zeigt im linken Teil den schematischen Versuchsaufbau und im rechten Teil die auf den Ball wirkenden Kräfte und das elektrische Feld (entnommen aus [2]und [15]).

Die Auslenkung des Pendels erfolgt durch die Kraftwirkung des elektrischen Feldes. Das Gleichgewicht liegt vor, wenn die resultierende Kraft $\vec{F}_R$ aus der Feldkraft $q\,\vec{E}$ und der Gewichtskraft $m\,\vec{g}$ in Richtung des Fadens wirkt und durch dessen Spannkraft $\vec{F}_F$ kompensiert wird.

Anwendung homogener elektrischer Felder

Der Versuch von Millikan zur Elementarladung

An dieser Stelle soll nun der Versuch von R.A. MILLIKAN erklärt und gezeigt werden.
Ein Plattenkondensator mit Plattenabstand $d = 6$ mm wird horizontal aufgestellt und durch eine Kunststoffkappe gegen äußere Einflüsse geschützt. In dieser Kappe befinden sich zwei kleine Löcher, durch die mittels eines Zerstäubers feine Öltröpfchen eingestäubt werden. Beim Einstäuben werden einige der Öltröpfchen durch Reibungselektrizität ne-

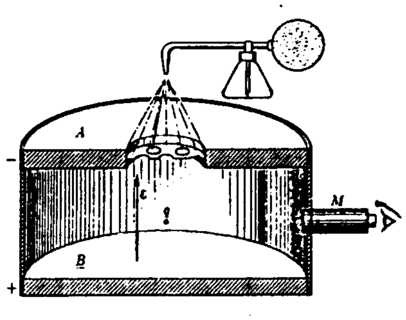


Abbildung 3.7: Millikan-Versuch im schematischen Aufbau

gativ aufgeladen. Die Bewegung, d.h. der Fall unter der Wirkung der Schwerkraft oder der Anstieg unter der Wirkung des elektrischen Feldes von einer Platte zur anderen, kann bei entsprechender Beleuchtung durch ein Mikroskop beobachtet werden. Die Geschwindigkeit wird durch Stoppen der Laufzeit gemessen, wobei eine Skala, die am Mikroskop befestigt ist, zur Streckenmessung zur Verfügung steht. Der schematische Aufbau ist in Abb. 3.7 dargestellt (entnommen aus [15]).
Im ersten Versuchsteil ist das Feld ausgeschaltet und die Öltröpfchen fallen unter der Wirkung der Schwerkraft mit einer konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}_1$. Diese kommt dadurch zustande, daß insgesamt keine Kraft wirkt, d.h die nach oben zeigende Reibungskraft $\vec{F}_R$ auf Grund des STOKEschen Gesetzes und der Auftrieb der Luft $\vec{F}_A$ (wird zum Schluß

berücksichtigt), sind der Gewichtskraft des Tröpfchens gleich (s. Abb 3.8, entnommen aus [15]). Für die wirkenden Kräfte ergibt sich somit bei Gleichgewicht:

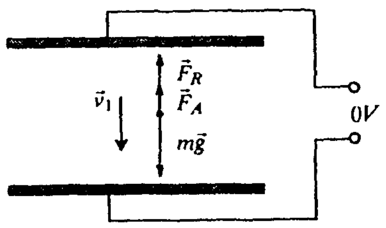


Abbildung 3.8: Wirkende Kräfte ohne E-Feld

$$\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{R}} = \vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{G}} - \vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{A}} = 6\,\pi\,\eta\,\mathrm{r}\,\vec{\mathrm{v}}_1 = \frac{4}{3}\,\pi\,\mathrm{r}^3\,\varrho\,\vec{\mathrm{g}}, \tag{3.2}$$

wobei r der Tröpfchenradius, ϱ die Dichte mit $\varrho = \varrho_{\text{Öl}} - \varrho_{\text{Luft}}$und η die Viskosität der Luft ist.

Im zweiten Versuchsteil wird das elektrische Feld eingeschaltet. Zu den bereits betrach-

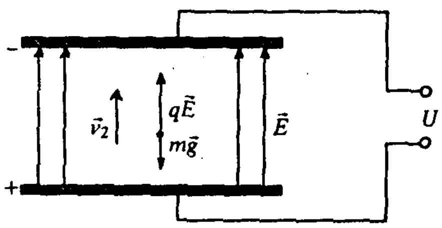


Abbildung 3.9: Wirkende Kräfte mit E-Feld

teten Kräften kommt nun noch die elektrische Kraft hinzu (s. Abb. 3.9, entnommen aus [15]):

$$\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{R}} = \vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{G}} + \vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{el}} - \vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{A}} = 6\,\pi\,\eta\,\mathrm{r}\,\vec{\mathrm{v}}_2 = \frac{4}{3}\,\pi\,\mathrm{r}^3\,\varrho\,\vec{\mathrm{g}} + \mathrm{q}\,\vec{\mathrm{E}}. \tag{3.3}$$

Überwiegt hierbei die Kraft des elektrischen Feldes die Schwerkraft, so bewegt sich das Tröpfchen mit der Gewindigkeit $\vec{v}_2$ nach oben. Aus den Gleichungen 3.2 und 3.3 folgt für die Bewegung des Tröpfchens

$$6\,\pi\,\eta\,\mathrm{r}\,(\vec{\mathrm{v}}_1 + \vec{\mathrm{v}}_2) = \mathrm{q}\,\vec{\mathrm{E}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{q} = (\vec{\mathrm{v}}_1 + \vec{\mathrm{v}}_2)\,\frac{6\,\pi\,\eta\,\mathrm{r}}{\mathrm{E}}$$

Der Tröpfchenradius r läßt sich mit Gleichung 3.2 bestimmen.

$$r = 3\sqrt{\frac{\eta\,\vec{v}_1}{2\,\varrho\,g}}.$$

Somit können wir allein durch Messen der Fall- und der Steiggeschwindigkeit die Ladung q bestimmen.

Die Braunsche Röhre

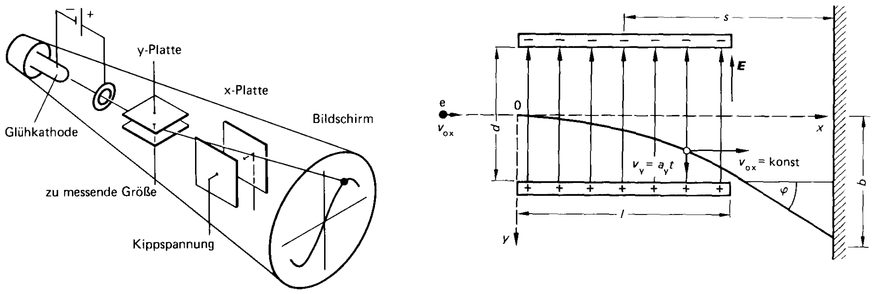


Abbildung 3.10: Elektronenröhre

Als weiteres Beispiel der Anwendung homogener Felder soll die BRAUNsche Röhre, benannt nach ihrem Erfinder F. BRAUN (1850-1918), genannt werden. Ihre Anwendung findet sie im **Kathodenstrahloszillograph**, wie er z. B. in der Vorlesung benutzt wird (s. Abb. 3.10, entnommen aus [3]). Als weiteres, weit verbreitetes Beispiels, ist der Fernseher zu nennen. In diesen Röhren werden Elektronen aus der Glühkathode ausgelöst und durch zwei um 90^o versetzt angeordnete Ablenkkondensatoren in horizontaler und vertikaler Richtung abgelenkt. Die Elektronen treffen anschließend auf einen Fluoreszenzschirm.

Versuch

In einer Elektronenablenkröhre werden die Elektronen durch das Auftreffen auf einem Floureszenzschirm sichtbar gemacht. Der Schirm ist parallel zu dem

Elektronenstrahl ausgerichtet, so daß er als horizontaler Strich zu sehen ist. Wird nun senkrecht zu dem Strahl ein homogenes Feld erzeugt, so wird der Strahl abgelenkt, und zwar um so stärker, je stärker das elektrische Feld ist.

3.4 Beliebiges elektrisches Feld

Wir können allgemein schließen, daß **jede** elektrische Ladungsverteilung durch ein Vektorfeld $\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}}) = \vec{\mathrm{E}}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$ beschrieben wird. Jedem Raumpunkt $\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$ mit dem Ortsvektor

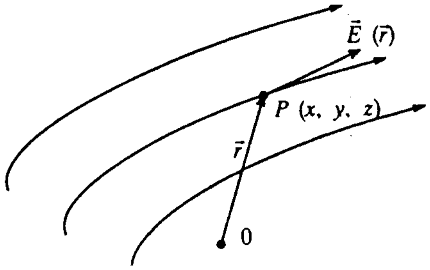


Abbildung 3.11: Jedem Raumpunkt ist ein Vektor zugeordnet

$\vec{\mathrm{r}}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$ ist ein Vektor $\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}})$ zugeordnet, wie in Abbildung 3.11 (entnommen aus [15]) dargestellt ist. Um ein beliebiges Vektorfeld zu berechnen, ist es sinnvoll, ein geeignetes Koordinatensystem zu wählen. So legt man beispielsweise

- bei Punktladungen den Ursprung des Koordinatensystems auf die Ladung;
- bei homogenen Feldern eine Achse in die Richtung des Feldes.

Bei der Berechung komplizierter Felder, z.B. bei der Überlagerung mehrerer Punktladungen, gilt, ebenso wie für Kräfte, das Superpositionsprinzip, denn:

$$\text{Wegen} \qquad \vec{\mathrm{F}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{i}} \qquad \text{gilt:} \qquad \vec{\mathrm{E}} = \frac{\vec{\mathrm{F}}}{\mathrm{q}} = \frac{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{i}}}{\mathrm{q}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \vec{\mathrm{E}}_{\mathrm{i}}. \tag{3.4}$$

Für die elektrische Feldstärke $\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}}_0)$ in 3.4 ergibt sich somit:

$$\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{Q}_{\mathrm{i}}}{|\vec{\mathrm{r}}_0 - \vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{i}}|^2} \cdot \frac{\vec{\mathrm{r}}_0 - \vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{i}}}{|\vec{\mathrm{r}}_0 - \vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{i}}|}.$$

Bei einer **kontinuierlichen Ladungsverteilung** im Raum muß man von der Summe zum Integral ($\sum \rightarrow \int$) übergehen. Um diese Ladungsverteilung zu charakterisieren, wird eine neue Größe eingeführt, die (Raum-) Ladungsdichte ϱ :

$$\varrho(\vec{r}) = \frac{\text{Ladung}}{\text{Volumen}} = \frac{dQ}{dV}$$

In der obigen Formel wird nun die Ladung Q_i durch die infinitisimale Ladung $dq = \varrho dV$ am Punkt $\vec{r}$ ersetzt. Man erhält dann das Feld einer **kontinuierlichen Ladungsverteilung**:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{\text{Volumen}} \frac{\varrho(\vec{r})\ (\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} dV} \tag{3.5}$$

Um dieses Integral lösen zu können, sind einige mathematische Klimmzüge erforderlich. Doch zunächst benötigen wir noch einen weiteren physikalischen Begriff, den **elektrischen Fluß Φ**.

3.5 Der elektrische Fluß und der Satz von Gauss

Es wurde gezeigt, daß die Dichte der Feldlinien ein anschauliches Maß für die elektrische Feldstärke darstellt. Der elektrische Fluß Φ durch eine gegebene Fläche hängt mit der Feldstärke $\vec{E}$ genauso zusammen wie der Volumenstrom einer Flüssigkeit mit der Strömungsgeschwindigkeit v. Nimmt man nun eine Fläche, die beispielsweise senkrecht

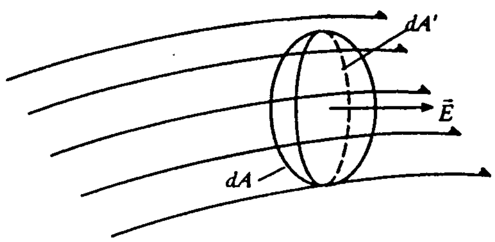


Abbildung 3.12: Anzahl der durch eine Fläche laufenden Feldlinien

zu den Feldlinien verläuft und bildet daraus das Produkt, so erhält man - anschaulich gesprochen! - die **Gesamtzahl der Feldlinien**, die durch die Fläche hindurchtreten

$$\Phi = AE$$

(s. auch Abb. 3.12, entnommen aus [15]). Diese Betrachtungsweise wollen wir nun verfeinern. Wir betrachten dazu eine beliebig geformte Fläche A, in einem Gebiet, in dem ein elektrisches Feld vorliegt. Diese Fläche unterteilen wir in so kleine Flächenelemente dA, so daß wir diese als eben ansehen können. Der Vektor $d\vec{A}$ des Flächenelementes sei ein Normalenvektor auf diese Fläche mit der Länge dA (s. Abb. 3.13, entnommen aus [15]). Wird die Fläche im Sinne einer Rechtsschraube umfahren, so zeigt $d\vec{A}$ in Richtung der

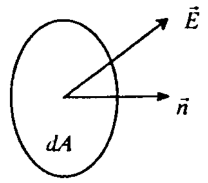


Abbildung 3.13: Normalenvektor

Fortbewegung dieser Schraube. Liegt am Ort von dA die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ vor, so ist der elektrische Fluß durch diese Fläche

$$d\Phi = \vec{E}\, d\vec{A} = E \cdot dA \cdot \cos\alpha,$$

wobei α der Winkel zwischen $\vec{E}$ und $d\vec{A}$ ist.
Der **gesamte Kraftfluß** Φ durch eine endliche Fläche A ergibt sich aus der Summe der Kraftflüsse durch die einzelnen Flächenelemente:

$$\boxed{\Phi = \iint\limits_{\text{Fläche}} \vec{E} d\vec{A}.} \tag{3.6}$$

$\iint$ bedeutet, daß über eine Fläche, d.h. über zwei Variablen integriert wird.

Elektrischer Feldfluß einer Punktladung

Wir wollen den Fluß durch eine konzentrische Kugelschale mit Radius r berechnen, in deren Mittelpunkt sich eine positive Ladungsmenge Q befindet (s. Abb. 3.14, entnommen aus [15]). In jedem Punkt der Kugelfläche erzeugt die Ladung eine Feldstärke

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

$\vec{E}$ und der Vektor des Flächenelementes $d\vec{A}$ sind in jedem Punkt der Kugelfläche gleichgerichtet, d.h. $\alpha = 0$ bzw. $\cos\alpha = 1$, und die elektrische Feldstärke hat in jedem Punkt den gleichen Betrag. Damit ist der gesamte Kraftfluß durch die Kugelfläche der Größe $4\pi r^2$:

$$\Phi = \oint\limits_{\substack{\text{geschl.}\\ \text{Kugelfläche}}} \vec{E}\, d\vec{A} = \oint\limits_{\substack{\text{geschl.}\\ \text{Kugelfläche}}} E \cdot dA \cdot \cos\alpha \overset{\alpha=0}{=} \oint\limits_{\substack{\text{geschl.}\\ \text{Kugelfläche}}} E \cdot dA = E \oint\limits_{\substack{\text{geschl.}\\ \text{Kugelfläche}}} dA = E \cdot 4\pi r^2.$$

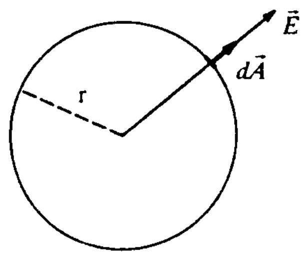


Abbildung 3.14: Feldfluß durch eine Kugelschale

Mit

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

erhält man dann:

$$\Phi = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

$$\boxed{\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}} \qquad \text{Fluß durch eine Kugeloberfläche um eine Punktladung Q} \qquad (3.7)$$

Der Kraftfluß ist also proportional zu Q und unabhängig vom Radius der Kugelfläche. Dieser Zusammenhang ist eine direkte Folge der $1/r^2$- Abhängigkeit von E und somit die einfachste Form des COULOMBschen Gesetzes (aufgrund der Kompensation von $4\pi r^2$ und $1/4\pi r^2$).

Kraftfluß durch eine beliebige geschlossene Fläche

Das gleiche Ergebnis erhält man auch für den gesamten Kraftfluß durch eine beliebige geschlossene Fläche um eine Punktladung Q:

$$\oint\limits_{\substack{\text{geschl.}\\ \text{Fläche}}} E \cdot \cos\alpha \, dA = \oint\limits_{\substack{\text{geschl.}\\ \text{Fläche}}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \cdot \cos\alpha \, dA = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \oint\limits_{\substack{\text{geschl.}\\ \text{Fläche}}} \frac{\cos\alpha \, dA}{r^2}.$$

Der Integrand ist gleich dem vom Q ausgehenden Raumwinkel $d\Omega$, den das Flächenelement dA aufspannt:

$$d\Omega = \frac{\cos\alpha \, dA}{r^2}.$$

Damit wird

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \oint\limits_{\substack{\text{geschl.}\\ \text{Fläche}}} d\Omega.$$

Der gesamte Raumwinkel um einen Punkt ist gleich 4π, d.h. $\oint \mathrm{d}\Omega = 4\pi$. Somit folgt:

Der durch eine geschlossene Oberfläche A gehende elektrische Fluß Φ ist gleich der Summe der von dieser Fläche eingeschlossenen Ladungen Q_{in} multipilziert mit $1/\varepsilon_0$.

$$\boxed{\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}} \qquad \text{Fluß durch eine beliebige geschlossene Fläche} \tag{3.8}$$

Zu dem selben Ergebnis gelangt man auch durch folgende Überlegungen:
Der Fluß durch das Flächenelement dA der Kugel war $\mathrm{d}\Phi = \mathrm{E}\,\mathrm{dA}$. Der Fluß durch ein

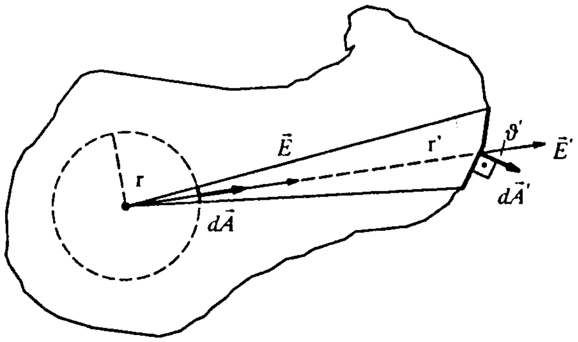


Abbildung 3.15: Feldfluß durch eine beliebige Fläche

beliebiges Oberflächenstück dA' einer beliebig gestalteten Fläche (s. Abb 3.15, entnommen aus [15]) ist

$$\mathrm{d}\Phi' = \vec{\mathrm{E}}'\mathrm{d}\vec{\mathrm{A}}' = \mathrm{E}'\,\mathrm{dA}'\cos\vartheta.$$

Aus $\mathrm{E} \sim \frac{1}{\mathrm{r}^2}$ folgt

$$\mathrm{E}\,\mathrm{r}^2 = \mathrm{E}'\,\mathrm{r}'^2 = \mathrm{const.} \Leftrightarrow \mathrm{E}' = \frac{\mathrm{r}^2}{\mathrm{r}'^2}\mathrm{E}.$$

Für differentiell kleine Flächen kann der Strahlensatz angewandt werden: $\mathrm{dA}'\cos\vartheta = \mathrm{dA}\frac{\mathrm{r}'^2}{\mathrm{r}^2}$. Damit ist

$$\mathrm{d}\Phi' = \vec{\mathrm{E}}'\mathrm{d}\vec{\mathrm{A}}' = \mathrm{E}'\,\mathrm{dA}'\cos\vartheta = \frac{\mathrm{r}^2}{\mathrm{r}'^2}\mathrm{EdA}\frac{\mathrm{r}'^2}{\mathrm{r}^2} = \mathrm{E}\,\mathrm{dA} = \mathrm{d}\Phi.$$

Allgemein gilt also:

$$\boxed{\Phi = \oint\limits_{\substack{\text{beliebig}\\ \text{geschl. Fläche}}} \mathrm{d}\Phi = \oint \vec{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}\vec{\mathrm{A}} = \frac{Q}{\varepsilon_0}.} \qquad \textbf{Gaußscher Satz der Elektrostatik} \tag{3.9}$$

Anschaulich bedeutet der GAUSSsche Satz der Elektrostatik, daß die Zahl der Feldlinien durch eine beliebige, die Ladung Q umschließende, Fläche konstant ist (s. Abb. 3.16, entnommen aus [15]). Obwohl der Satz eigentlich nur eine andere Formulierung des COU-

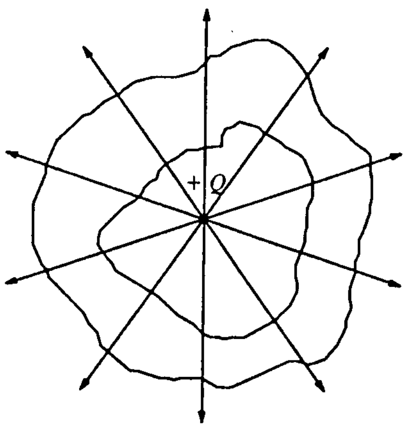


Abbildung 3.16: Die Zahl der Feldlinien ist konstant

LOMBschen Gesetzes ist, ist er für die einfache Formulierung der Elektrostatik sehr wichtig. Für mehrere Ladungen Q_i gilt nach dem Superpositionsprinzip:

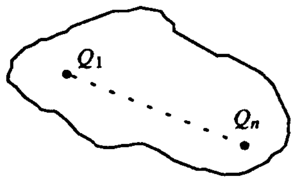


Abbildung 3.17: Superpositionsprinzip

$$\Phi = \oint \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} Q_i .$$

Betrachten wir nun eine **kontinuierliche Ladungsverteilung**. Für sie gilt mit $dQ = \varrho(\vec{r})\, dV$

$$\Phi = \oint\limits_{\substack{\text{beliebig} \\ \text{geschl. Fläche}}} \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint\limits_{\text{Volumen}} \varrho(\vec{r})\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint\limits_{\text{Volumen}} \varrho(x, y, z)\, dxdydz$$

$$\Rightarrow \Phi = \oint\limits_{\substack{\text{beliebig} \\ \text{geschl. Fläche}}} \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

mit Q_{in} = eingeschlossene Ladung (s. Abb. 3.17, entnommen aus [15]).
Dies ist die allgemeine Integralform des Gaußschen Satzes und besagt:

Der durch eine geschlossene Oberfläche A gehende elektrische Fluß Φ ist gleich der Summe der von dieser Fläche eingeschlossenen Ladungen Q_{in} multipliziert mit $1/\varepsilon_0$.

Spezialfall: Q=0

$$\Rightarrow \Phi = \oint\limits_{\substack{\text{beliebig} \\ \text{geschl. Fläche}}} \vec{E}\, d\vec{A} = 0,$$

d.h. der Fluß durch eine geschlossene Fläche verschwindet, falls keine Ladungen eingeschlossen sind.

Dies soll an folgendem Beispiel verdeutlicht werden:
Die Abb. 3.18 (entnommen aus [3]) zeigt eine geschlossene Fläche, durch die die Feldlinien

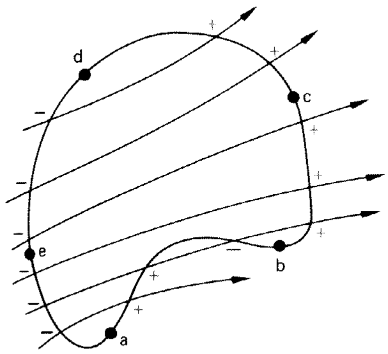


Abbildung 3.18: Die Zahl der ein- und austretenden Feldlinien ist gleich

hindurchgehen. Da Feldlinien nur an Ladungen beginnen oder enden, gehen genausoviele Feldlinien in die Fläche hinein, wie hinaus. Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Feldlinien, die in die Fläche hinein gehen negativ und die, die hinausgehen, positiv gezählt werden.
Mit Hilfe einer mathematischen Identität, die auch Satz von GAUSS heißt (und Gegenstand der Mathematikvorlesung des 3. Semesters sein wird), läßt sich der GAUSSsche Satz umformen:

$$\boxed{\Phi = \oint\limits_{\substack{\text{beliebig} \\ \text{geschl. Fläche}}} d\Phi = \oint \vec{E}\, d\vec{A} = \iiint\limits_{\text{Volumen}} \operatorname{div} \vec{E}\, dV} \qquad \text{Satz von Gauß in der Mathematik} \qquad (3.10)$$

wobei die elektrische Feldstärke $\vec{\mathrm{E}}$ ein beliebiges Vektorfeld in einem von der Oberfläche A begrenzten Volumen V ist. Damit läßt sich die Gleichung von Seite 38 schreiben als

$$\iiint\limits_{\text{Volumen}} \mathrm{div}\,\vec{\mathrm{E}}\,\mathrm{dV} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint\limits_{\text{Volumen}} \varrho(\vec{\mathrm{r}})\mathrm{dV}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{E}} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}}$$

Bedeutung von div $\vec{\mathrm{E}}$:

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{E}} = \frac{\partial \mathrm{E_x}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{E_y}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \mathrm{E_z}}{\partial \mathrm{z}}$$

Um die Bedeutung von div $\vec{\mathrm{E}}$ zu erklären, betrachten wir das infinitesimale Volumenelement in Abb. 3.19 (entnommen aus [15]). Für den Nettofluß in eine Richtung, z.B. in x-

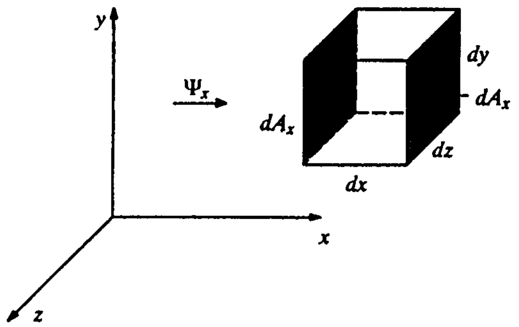


Abbildung 3.19: Nettofluß durch ein Volumenelement

Richtung, gilt:

$$\mathrm{d_x}\Phi = \frac{\partial \mathrm{E_x}}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{dx\,dA_x} \qquad \text{mit } \mathrm{dA_x} = \mathrm{dy}\cdot\mathrm{dz}$$

$\mathrm{d_x}\Phi$ ist also die Änderung von $\mathrm{E_x}$ entlang dx multipliziert mit $\mathrm{dA_x}$. Für den eindimensionalen Nettofluß in x-Richtung gilt somit:

$$\boxed{\mathrm{d_x}\Phi = \frac{\partial \mathrm{E_x}}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{dV}} \tag{3.11}$$

Dies gilt entsprechend für $\mathrm{d_y}\Phi$ und $\mathrm{d_z}\Phi$. Für den gesamten Nettofluß in x, y, z- Richtung erhält man:

$$\mathrm{d}\Phi = \mathrm{d_x}\Phi + \mathrm{d_y}\Phi + \mathrm{d_z}\Phi$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{dV}} = \frac{\partial \mathrm{E_x}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{E_y}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \mathrm{E_z}}{\partial \mathrm{z}} = \mathrm{div}\,\vec{\mathrm{E}}.} \tag{3.12}$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes ist der Nettofluß in einem infinitesimalen Volumenelement, d.h. der Nettofluß aus diesem Volumen.

Beweisskizze für den mathematischen Satz von C.F. Gauss

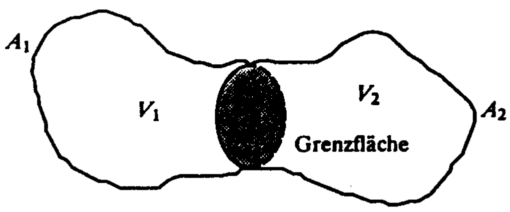


Abbildung 3.20: Das Volumen V wird in Teilvolumina aufgeteilt

Die Abb. 3.20 (aus [15]) zeigt ein Volumen V mit der Oberfläche A. Dieses Volumen wird in zwei Teilvolumina $\mathrm{V_1}$ und $\mathrm{V_2}$ unterteilt. Mit dieser Unterteilung erhält man:

$$\oint_{\mathrm{A}} \vec{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}\vec{\mathrm{A}} = \oint_{\mathrm{A_1}} \vec{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}\vec{\mathrm{A}}_1 + \oint_{\mathrm{A_2}} \vec{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}\vec{\mathrm{A}}_2,$$

da sich die Integrale über die Grenzfläche aufheben.

$$\oint \vec{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}\vec{\mathrm{A}} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \oint_{\mathrm{A_i}} \vec{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}\vec{\mathrm{A}}_\mathrm{i} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{V_i} \frac{\oint_{\mathrm{A_i}} \vec{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}\vec{\mathrm{A}}_\mathrm{i}}{\mathrm{V_i}} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{V_i} \frac{\Phi_\mathrm{i}}{\mathrm{V_i}}.$$

Bildet man nun den Grenzübergang für $\mathrm{V_i} \to 0$ und $\mathrm{n} \to \infty$, so strebt $\mathrm{V_i}$ gegen dV und Φ_i gegen $d\Phi$. Es gilt also dann:

$$\boxed{\Phi = \oint_{\substack{\text{beliebig}\\ \text{geschl. Fläche}}} \vec{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}\vec{\mathrm{A}} = \iiint_{\text{Volumen}} \mathrm{dV}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{dV}} = \iiint_{\text{Volumen}} \mathrm{div}\,\vec{\mathrm{E}}\,\mathrm{dV}.} \qquad \text{mathematische Identität} \tag{3.13}$$

Damit können wir nun den (physikalischen) Satz von Gauss umformen (s.S. 42):

$$\iiint_{\text{Volumen}} \mathrm{div}\,\vec{\mathrm{E}}\,\mathrm{dV} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\text{Volumen}} \varrho(\vec{\mathrm{r}})\,\mathrm{dV} = \iiint_{\text{Volumen}} \mathrm{div}\,\vec{\mathrm{E}}\,\mathrm{dV}.$$

Da diese Integralgleichung für beliebige Volumina gilt, müssen die Integranden der Volumenintegrale gleich sein.

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{\mathrm{E}} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}} \qquad \text{differentielle Form des Gaußschen Satzes der Elektrostatik} \qquad (3.14)$$

D.h. die lokale Änderung des Flusses (Divergenz des Feldes) ist gleich $1/\varepsilon_0$ mal der Ladungsdichte ϱ. Eine lokale Änderung des Flusses bedeutet, daß Feldlinien neu entstehen

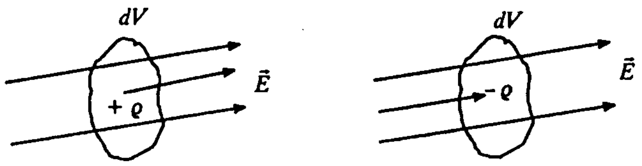


Abbildung 3.21: Quellen und Senken

oder verschwinden. Man nennt daher die positve Ladungsdichte $+\varrho$ auch **Quelle des elektrischen Feldes**, da aus ihr zusätzliche Feldlinien kommen. Eine negative Ladungsdichte $-\varrho$ heißt **Senke des elektrischen Feldes**, weil hier die Feldlinien verschwinden. Daraus folgt, daß in einem Volumenelement dV die Ladungsdichte von Null verschieden ist. Ist die Ladungsdichte gleich Null und damit auch $\operatorname{div}\vec{\mathrm{E}} = 0$, so sagt man, daß das Feldgebiet **quellenfrei** ist.

Was folgt für elektrische Leiter aus dem Gaußschen Satz?

Wir betrachten einen geladenen Leiter, auf dem die Ladung ruhen soll, d.h. der sich im elektrischen Gleichgewicht befinden soll. In diesen Fall muß die elektrische Feldsärke im Inneren des Leiters gleich Null und die elektrische Feldsärke in Tangentenrichtung auf der Oberfläche gleich null sein. Wäre dies nicht der Fall, so würden auf die Ladungen Kräfte wirken; es käme zu Ladungsverschiebungen, d.h. zu Strömen im Leiter oder auf der Oberfläche und damit läge kein elektrisches Gleichgewicht mehr vor. Daraus folgt weiter, daß sich im elektrostatischen Gleichgewicht die Ladungen nur auf der Oberfläche befinden. Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Gaussschen Satzes:
Wegen $\vec{\mathrm{E}} = 0$ im Inneren des Leiters ist der elektrische Kraftfluß durch eine beliebig dicht unter der wahren Oberfläche liegenden geschlossenen Fläche

$$\varrho = \oint \vec{\mathrm{E}}\, \mathrm{d}\vec{\mathrm{A}} = 0.$$

Nach dem GAUSSschen Satz gilt

$$\varrho = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} Q_i,$$

damit ist im Inneren des Leiters

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = 0,$$

also keine Ladung vorhanden. Die gesamte Ladung verteilt sich auf der Oberfläche. Die folgenden Versuche sollen das Problem veranschaulichen.

Versuche

1. Wir wiederholen den bereits auf Seite 7 beschriebenen Versuch mit dem FARADAY-Becher. Der Becher wird mittels Reibung aufgeladen, und nun versuchen wir, aus dem Inneren des Bechers mit dem elektrischen Löffel Ladung zu entnehmen. Dies gelingt nicht. Nur von außen können wir Ladung entnehmen und auf einem Elektroskop nachweisen.

2. In diesem Versuch wird der Feldlinienverlauf in einem geschlossenen Leiter gezeigt. Dazu wird wieder die mit Gries und Rizinusöl gefüllte Glasschale genommen und ein

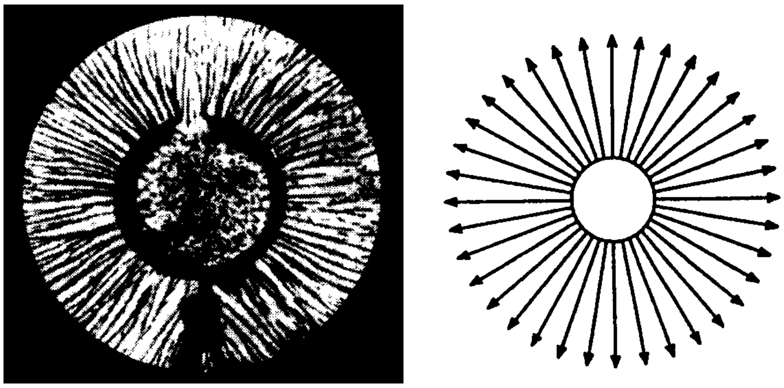


Abbildung 3.22: Versuchsergebnis und theoretischer Feldverlauf

Ring hineingelegt. Am Rand der Schale befindet sich ein weiterer Ring, der geerdet werden muß, damit ein elektrisches Feld entsteht. Der Versuch zeigt anschaulich, daß in einem geschlossenen leitenden Ring kein elektrisches Feld existiert. Der theoretische Verlauf der Feldlinien und das experimentelle Ergebnis sind in Abb. 3.22 dargestellt (entnommen aus [1] und [15]).

3. Für den letzten Versuch wird ein großer Drahtkäfig benötigt, in den eine Versuchsperson hineinpaßt. Der Käfig wird auf einen, zum Hörsaalboden isoliert aufgestellten, Metallteller gesetzt und geerdet. Um möglichst hohe Ladungen auf den Käfig durch Funkenüberschlag zu bekommen, wird neben ihm ein VAN-DE-GRAAFF-Generator plaziert. Nachdem sich die Versuchsperson in den Käfig gestellt hat, wird er mit dem Bandgenerator aufgeladen. Der Funkenüberschlag ist deutlich sichtbar. Auch bei noch so kräftigem Aufladen des Käfigs ist keinerlei elektrische Wirkung auf die Versuchsperson zu sehen. Auch das große Einstiegsloch läßt das elektrische Feld nicht soweit eindringen, daß die Person etwas davon merkt. Ein solches Drahtnetz heißt FARADAY-Käfig und ist nach M. FARADAY (1791-1867) benannt, der diesen Versuch 1836 als erster durchgeführt hat. Die Wirkung des FARADAY-Käfigs ist in Abb. 3.23 dargestellt (entnommen aus [15]). Da elektrische Felder, wie wir gesehen haben, nicht in das Innere von Leitern eindringen können, sind Räume, die von einem metallischen Kasten oder einem engmaschigen Drahtnetz umgeben sind, wie z.B. die Fahrgastzelle eines Autos, elektrisch abgeschirmt.

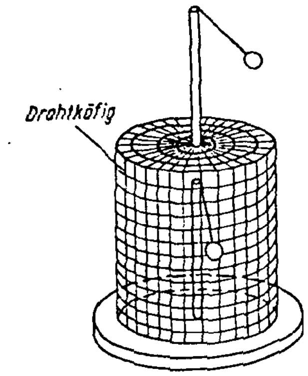


Abbildung 3.23: Faradaykäfig

Kapitel 4

Das elektrostatische Potential

4.1 Das Potential

Erinnern wir uns noch einmal an die Gravitation. Dort haben wir folgende Begriffe eingeführt und miteinander verknüpft:

$$
\begin{array}{ccc}
\boxed{\textbf{Kraft } \vec{\mathrm{F}}} & \longleftarrow \vec{\mathrm{F}} = -\mathrm{grad}\, \mathrm{W_p} \longrightarrow & \boxed{\textbf{potentielle Energie } \mathrm{W_p}} \\
\uparrow & & \uparrow \\
\vec{\mathrm{F}} = \mathrm{m}\, \vec{\mathrm{G}} & & \mathrm{W_p} = \mathrm{m}\, \mathrm{V} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\boxed{\textbf{Feldstärke } \vec{\mathrm{G}}} & \longleftarrow \vec{\mathrm{G}} = -\mathrm{grad}\, \mathrm{V} \longrightarrow & \boxed{\textbf{Potential } \mathrm{V}}
\end{array}
$$

Wir führen nun zum Gravitationsfeld analoge Betrachtungen beim elektrischen Feld durch. Um nun eine positive, punktförmige Probeladung Q im elektrischen Feld von Punkt A nach B zu verschieben (s. Abb. 4.1, entnommen aus [3]), muß gegen das Feld eine Ver-

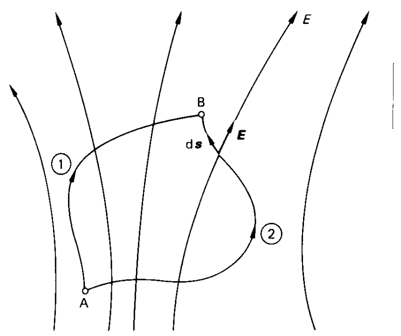


Abbildung 4.1: Auf einem geschlossenen Weg wird keine Arbeit verrichtet

schiebungsarbeit geleistet werden:

$$\mathrm{W_{AB}} = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{\mathrm{F}}(\vec{\mathrm{r}})\,\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}} \qquad \text{mit} \qquad \vec{\mathrm{F}}(\vec{\mathrm{r}}) = -\mathrm{q}\cdot\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}}).$$

Aufgrund des Energieerhaltungssatzes muß die Verschiebungsarbeit unabhängig von dem gewählten Weg von A nach B sein. (Es macht also keinen Unterschied, ob man in Abb. 4.1 den Weg 1 oder 2 wählt). Daraus folgt:

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{\mathrm{F}}(\vec{\mathrm{r}})\,\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}} + \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} \vec{\mathrm{F}}(\vec{\mathrm{r}})\,\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}} = \oint \vec{\mathrm{F}}(\vec{\mathrm{r}})\,\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}} = 0,$$

d.h., bei der Bewegung einer Punktladung auf einem geschlossenen Weg (angedeutet durch den Kreis im Integralzeichen) wird keine Arbeit verrichtet. Für das Kraftfeld bedeutet dies, analog zur Mechanik:

$$\begin{aligned} \mathrm{W} = 0 \;&\Leftrightarrow\; \vec{\mathrm{F}}(\vec{\mathrm{r}}) \text{ ist ein konservatives Kraftfeld} \\ &\Leftrightarrow\; \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{\mathrm{F}}(\vec{\mathrm{r}}) \text{ ist wegunabhängig.} \end{aligned}$$

Wie bei der Gravitation können wir dementsprechend neben der **potentiellen Energie** $\mathrm{W_p}$ auch ein **elektrisches Potential** φ definieren. Die Arbeit $\mathrm{W_{AB}}$, die beim Verschieben der Ladung von A nach B eingebracht wird, erhöht die potentielle Energie $\mathrm{W_p}$, und es gilt:

$$\mathrm{W_{AB}} = \mathrm{W_p(B)} - \mathrm{W_p(A)} = -\mathrm{q}\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}})\,\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}. \tag{4.1}$$

Das **elektrische Potential** φ ist definiert als der Quotient aus der potentiellen Energie $\mathrm{W_p}$ und der Ladung Q:

$$\varphi = \frac{\mathrm{W_p}}{\mathrm{Q}}$$

Hiermit läßt sich Gleichung 4.1 schreiben als:

$$\varphi(\mathrm{B}) - \varphi(\mathrm{A}) = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}})\,\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}$$

Mit dieser Gleichung kann man nun eine weitere wichtige Größe des Elektromagnetismus definieren, die **Spannung**:

$$\boxed{\mathrm{U} = \varphi(\mathrm{B}) - \varphi(\mathrm{A}) = \text{Potentialdifferenz} = \text{elektrische Spannung.}} \tag{4.2}$$

Die Dimension des elektrischen Potentials und der elektrischen Spannung ist

$$[\varphi] = [\mathrm{U}] = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{As}} = \mathrm{V} = \mathrm{Volt}.$$

(In esu -Einheiten ist 1 statvolt = 300 V).

Zwischen zwei Punkten herrscht eine Spannung von U = 1 V, wenn bei der Überführung der Ladungsmenge von 1 C zwischen diesen Punkten die Arbeit W = 1 Nm verrichtet wird. Ausgehend vom Volt sind auch noch folgende Spannungseinheiten gebräuchlich:

1 Mikrovolt = 1 μV=10^{-6} V	1 Kilovolt = 1 KV=10^{3} V
1 Millivolt = 1 mV= 10^{-3} V	1 Megavolt = 1 MV= 10^{6} V
	1 Gigavolt = 1 GV=10^{9} V

Das elektrische Potential $\varphi(\vec{\mathrm{r}})$ ist ein Skalarfeld, das aufgrund der gegebenen Definition nur bis auf eine beliebige additive Integrationskonstante bestimmt ist. Man kann für einen Ortspunkt ein bestimmtes Potential festlegen, wenn man einen Nullpunkt für das Potential festsetzt. Um möglichst einfach mit diesen Gleichungen arbeiten zu können, definiert man häufig $\varphi(\vec{\mathrm{r}}) = 0$ für $\mathrm{r} \to \infty$. Damit ist das elektrostatische Potential:

$$\boxed{\varphi(\vec{\mathrm{r}}_0) = \varphi(\vec{\mathrm{r}}_0) - \varphi(\vec{\mathrm{r}}_\infty) = -\int\limits_{\infty}^{\vec{\mathrm{r}}_0} \vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}})\, \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}} = \int\limits_{\vec{\mathrm{r}}_0}^{\infty} \vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}})\, \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}.} \tag{4.3}$$

Man beachte, daß es sich bei $\varphi(\vec{\mathrm{r}}_0)$ um ein **Skalarfeld**, bei $\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}})$ hingegen um ein **Vektorfeld** handelt! Nach dieser Definition stellt $\varphi(\vec{\mathrm{r}})$ die Spannung im Punkt r gegen das Unendliche dar. Die Bedeutung des Potentials liegt darin, daß bei Kenntnis dieser skalaren Größe als Funktion des Ortes sowohl Spannungen zwischen verschiedenen Punkten als auch die elektrische Feldstärke $\vec{\mathrm{E}}$ in jedem Punkt ermittelt werden kann. Dabei kommt jedoch der Größe des Potentials in einem Punkt keinerlei physikalische Bedeutung zu, was auch schon aus der willkürlichen Wahl des Nullpunktes für das Potential folgt. **Spannungen und elektrische Feldstärken werden allein durch Potentialdifferenzen bestimmt**, also nur diese besitzen einen physikalischen Aussagewert.

Beispiele:
Als erstes Beispiel berechnen wir das **Potential einer Punktladung**. Für unsere Betrachtung ist es sinnvoll, den Ursprung des Koordinatensystems auf die Ladung Q zu legen. Die elektrische Feldstärke ist

$$\vec{\mathrm{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{r}^2}\frac{\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{r}}.$$

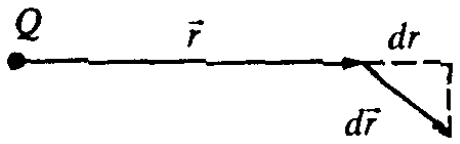


Abbildung 4.2: dr ist die Komponente von $d\vec{r}$ in Richtung $\vec{r}$

Damit berechnet sich das Potential als

$$\varphi(\vec{r}_0) = \int_{\vec{r}_0}^{\infty} \vec{E}(\vec{r})\, d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\vec{r}_0}^{\infty} \frac{\vec{r} d\vec{r}}{r^3}.$$

Es ist $\vec{r} d\vec{r} = r\, dr$, denn dr ist die Komponente von $d\vec{r}$ in Richtung von $\vec{r}$ (s. Abb 4.2, entnommen aus [15]). (Achtung: Nicht mit $|d\vec{r}|$ verwechseln!). Damit ist

$$\varphi(\vec{r}_0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\vec{r}_0}^{\infty} \frac{\vec{r} d\vec{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\vec{r}_0}^{\infty} \frac{r\, dr}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\vec{r}_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r}\right]_{\vec{r}_0}^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(0 + \frac{1}{r_0}\right).$$

$$\boxed{\varphi(\vec{r}_0) = \varphi(r_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r_0}.} \qquad \textbf{Potential einer Punktladung} \qquad (4.4)$$

Das Potential einer Punktladung ist also genau wie ihr Feld kugelsymmetrisch. Wir können somit elektrische Felder auch durch **Äquipotentiallinien** oder **-flächen** veranschaulichen. Diese Linien oder Flächen enthalten alle Punkte gleichen Potentials. Bei der Verschiebung einer Ladung zwischen zwei Punkten derselben Äquipotentialfläche ist für jeden beliebigen Weg die erforderliche Arbeit Null:

$$W_{12} = q\,[\varphi(2) - \varphi(1)], \quad \text{da } \varphi(1) = \varphi(2), \quad \text{folgt } W_{12} = 0$$

Aus der Tatsache, daß für das Verschieben einer Ladung auf einer Äquipotentialfläche keine Arbeit nötig ist, folgt weiter, daß diese Flächen senkrecht zu den elektrischen Feldlinien verlaufen. Elektrische Felder können also auch durch ihre Äquipotentiallinien bzw. -flächen veranschaulicht werden. In Abb. 4.3 (links) sieht man das Potential und die Niveauflächen einer Punktladung in zweidimensionaler Darstellung. Abb. 4.3 (mitte) zeigt das Potential einer Punktladung dreidimensional. Die Kreise stellen die Niveauflächen dar und müßten eigentlich Kugeln sein, da es sich um eine Punktladung handelt, d.h. eigentlich müßte die Darstellung 4- dimensional sein. Abb. 4.3 (rechts) zeigt die Projektionen auf die (x,y)- Ebene bzw. die (φ,x)- Ebene. Alle Abbildungen stammen aus [9]

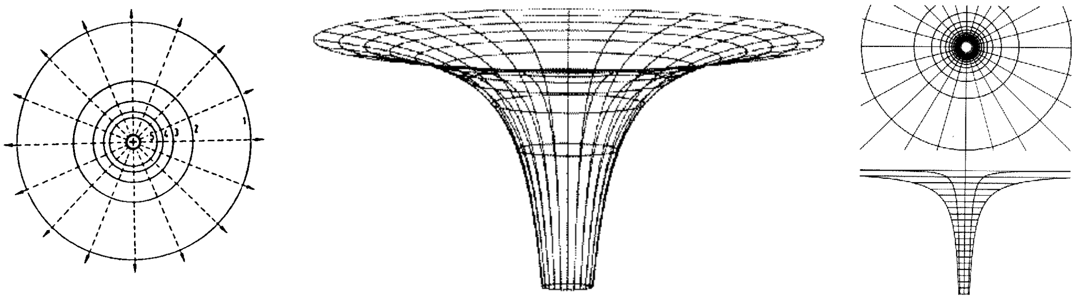


Abbildung 4.3: Potential einer Punktladung

Kann man das Potential messen?

Bisher haben wir das Potential nur als eine Rechenvorschrift analog zur Gravitation kennengelernt. Daraus ergibt sich die Frage, ob das Potential auch meßbar ist, oder ob es nur einen Formalismus darstellt. Um diese Frage beantworten zu können, wollen wir versuchen, das Potential einer Punktladung in Form einer Kugel mit einem Durchmesser von etwa 20 cm zu messen. Bevor wir dies tun können, müssen wir uns mit der Meßtechnik vertraut machen.
Um in einem elektrischen Feld das Potential eines Punktes zu messen, benutzen wir eine Meßsonde. Desweiteren benötigen wir einen Bezugspunkt, z. B. die Erde (als Nullpotential), deshalb wird die Meßsonde mit der Erde verbunden. Nimmt man als Meßsonde einen Metalldraht, so kann die Messung verfälscht werden, da auf dem Draht ebenfalls Ladungen sitzen können. Diese Ladungen können verschiedene Ursachen haben, z.B. Influenzladung. Das Elektroskop nimmt daher nicht das Potential an, das dem Sondenort bei ungestörter Ladungsverteilung entspricht. Das Potential kann sich nur dann einstellen, wenn die Überschußladung entfernt wird. Dies gilt auch für die Influenzladungen, die vom Draht bis zum Elektroskop auf die Sonde fließen, wenn diese ins Feld geführt wird, da sich das Potential erst einstellen muß. Um die überflüssigen Ladungen zu beseitigen, läßt man an der auszumessenden Raumstelle eine kleine Flamme brennen, in die man die Sonde hineinhält. Die Flamme macht durch Ionisation die Luft leitend, weshalb man solche Sonden auch **Flammensonden** nennt. Hierdurch fließen die überschüssigen Ladungen zu ihren Bildladungen (s. später) und neutralisieren sich dort mit diesen. Ist die Sonde also dünn genug, so verteilen sich die Ladungen so, als ob keine Sonde vorhanden wäre. Somit muß das Elektrometer jetzt das richtige Potential anzeigen.

Versuch

Wir benötigen eine Hochspannungsquelle, eine Flammensonde und ein Voltmeter (hier: Elektroskop) und eine Konduktorkugel. Den Pluspol der Hoch-

spannungsquelle verbinden wir mit der Konduktorkugel. Der negative Pol der Spannungsquelle, die Flammensonde und eine Seite des Voltmeters werden auf Erde gelegt. Der andere Teil der Sonde wird ebenfalls mit dem Voltmeter verbunden.
Im ersten Teil des Versuches führen wir die Flammensonde in konstantem Abstand um die Kugel, im zweiten Teil entfernen wir uns radial von der Kugel. Im ersten Fall beobachten wir eine konstante Spannung, also ein konstantes Potential, im zweiten Fall nimmt die Spannung mit 1/r ab.

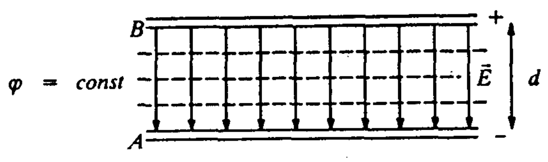


Abbildung 4.4: Plattenkondensator

Bei dem zweiten Beispiel wollen wir uns das homogene Feld eines Plattenkondensators anschauen. Der Kondensator habe den Plattenabstand d und es herrsche eine Spannung U zwischen den Platten, wie in Abb 4.4 dargestellt (entnommen aus [15]). Dann ist:

$$\mathrm{U} = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{\mathrm{E}}\, \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}} = \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} \vec{\mathrm{E}}\, \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}} = \mathrm{E} \cdot \mathrm{d}.$$

$$\boxed{\mathrm{E} = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{d}}}.$$

Mit dem folgenden Versuchen wollen wir die 1/d-Proportionalität der elektrischen Feldstärke beim Plattenkondensator überprüfen.

Versuch 1

Hierzu nehmen wir den gleichen Versuchsaufbau wie beim homogenen Feld (s. S. 29). Es wird jedoch folgende Änderung vorgenommen: Der Plattenabstand wird vergrößert und der leitende Tischtennisball wird asymmetrisch zwischen die Platten gehängt (s. Abb. 4.5, entnommen aus [15]). Mit einer Hochspannungsquelle wird im Kondensator ein elektrisches Feld aufgebaut und der Tischtennisball mit einem elektrischen Löffel geladen. Durch diese aufgebrachte Ladung erfährt der Ball keine Auslenkung, da seine Ladung bzw.

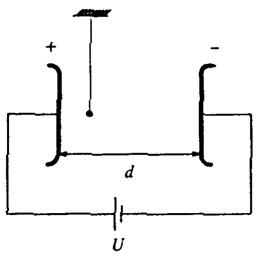


Abbildung 4.5: Versuch zum Nachweis der 1/d-Abhängigkeit im Plattenkondensator

die wirkenden Kräft nicht groß genug sind. Anschließend wird der Plattenabstand verringert und man sieht, daß der Ball langsam ausgelenkt wird. Ist der Abstand klein genug, stößt er an die Platte und wird zur anderen Platte abgestoßen. Dieser Vorgang wiederholt sich nun fortlaufend. Wir sehen, daß die elektrische Feldstärke bei zunehmendem Plattenabstand d mit 1/d abnimmt.

Versuch 2

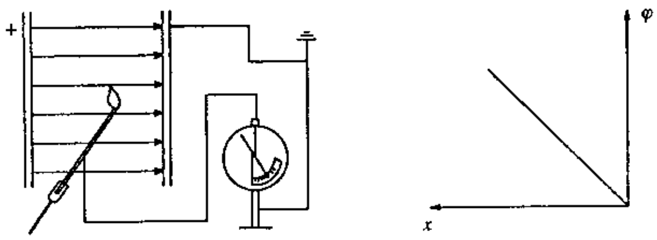


Abbildung 4.6: Potentialmessung mittels Flammensonde

Im zweiten Versuch überprüfen wir das Potential mit Hilfe der Flammensonde, in Analogie zu der Punktladung. Der Aufbau ist in Abb. 4.6 (links) schematisch dargestellt. Zuerst führen wir die Sonde entlang einer Äquipotentialfläche, also parallel zu den Platten. Wir beobachten, daß das Potential konstant ist. Auf dieser Äquipotentiallinie führen wir nun die Sonde aus dem Feld heraus und anschließend am Feld entlang, also senkrecht zu den Platten. In beiden Fällen beobachten wir einen Abfall des Potentials. Im zweiten Fall fällt das Potential ganz gut linear von der positiven Platte zur negativen Platte hin ab, d. h. φ ist linear zum Plattenabstand d. Eine graphische Darstellung des erwarteten Ergebnisses ist in Abb. 4.6 (rechts) dargestellt.

4.2 Potential einer beliebigen Ladungsverteilung

Für die elektrische Kraft und das elektrische Feld gilt das Superpositionsgesetz:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \quad \text{und} \quad \vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i.$$

Es soll nun gezeigt werden, daß dieses Prinzip auch für das Potential seine Gültigkeit behält.

$$\varphi = \int \vec{E}\, d\vec{r} = \int \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i\, d\vec{r} = \sum_{i=1}^{n} \int \vec{E}_i\, d\vec{r} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i.$$

Das Superpositionsprinzip überträgt sich also auf das Potential. Für mehrere Punktladungen ergibt sich somit:

$$\varphi(P_0) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i.|}$$

Kontinuierliche Ladungsverteilung

Genauso wie beim elektrischen Feld ersetzen wir $\sum Q_i$ durch $\int dQ$, wobei wieder $dQ = \varrho(\vec{r})\, dV$ ist. Für das Potential ergibt sich hiermit:

$$\boxed{\varphi(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{\text{Volumen}} \frac{\varrho(\vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} dV.} \tag{4.5}$$

Hierbei ist $\vec{r}_0$ der Ortsvektor des Aufpunktes und $\vec{r}$ der Ortsvektor des Volumenelementes

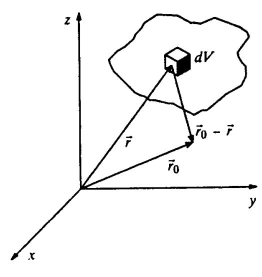


Abbildung 4.7: Kontinuierliche Ladungsverteilung

(s. Abb. 4.7, entnommen aus [15]). Eine andere Schreibweise für das Potential erhält man, wenn man die Definition der Flächenladungsdichte

$$\sigma = \frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche}} = \frac{dQ}{dA}$$

für dQ einsetzt. Damit ist das Potential

$$\boxed{\varphi(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{\text{Fläche}} \frac{\sigma(\vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} \mathrm{d}A.} \tag{4.6}$$

4.3 Berechnung der Feldstärke aus dem Potential

Die Beschreibungen des elektrischen Feldes durch den Vektor der elektrische Feldstärke $\vec{E}$ und durch das Potential φ sind äquivalent. Bei Kenntnis von $\vec{E}$ in einem Punkt kann für diesen Punkt das Potential φ als $\varphi = -\int \vec{E}\,\mathrm{d}r$ bestimmt werden. Häufig lassen sich aber Potentiale leichter messen als elektrische Feldstärken. Deshalb stellt sich die Frage, wie man aus einem bekannnten Potential die Feldstärke in diesem Punkt ermitteln kann. Bisher haben wir schon folgenden differentiellen Zusammenhang hergeleitet:

$$\mathrm{d}W_p = -q\,\vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = -\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r},$$

d.h. durch Integration kann man aus der COULOMBschen Kraft $\vec{F}$ oder aus der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ die potentielle Energie W_p berechnen. Kann man umgekehrt auch $\vec{F}$ oder $\vec{E}$ durch Differenzieren von W_p berechnen?
Betrachten wir zunächst beispielsweise eine Punktladung mit $F(\vec{r}) = F_r(r)$. Dann ist

$$\mathrm{d}W_p = -F_r(r)\,\mathrm{d}r \quad \Leftrightarrow \quad F_r(r) = -\frac{\mathrm{d}W_p}{\mathrm{d}r}.$$

Dividiert man diese Gleichung durch q, so erhält man

$$E_r(r) = \frac{F_r(r)}{q} = -\frac{1}{q}\frac{\mathrm{d}W_p}{\mathrm{d}r} = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}.$$

Wie läßt sich dieses Verfahren für den Vektor $\vec{E}(\vec{r})$ verallgemeinern? Erhält man etwas in der Form

$$??? \; \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\vec{r}} \; ???$$

Um das Problem mathematisch richtig anzugehen, betrachten wir zunächst die Komponentenschreibweise:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W_p &= -q\,(E_x, E_y, E_z)(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) \\ &= -q\,(E_x\,\mathrm{d}x + E_y\,\mathrm{d}y + E_z\,\mathrm{d}z). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Nun betrachten wir die **partiellen Ableitungen** der einzelnen Komponenten, d.h. die Gleichung wird entweder nach x, y oder z abgeleitet und die beiden anderen Komponenten werden wie Konstanten behandelt. Für das partielle Differential $d_x W_p$ wird also nur x variiert, d.h. $dx \neq 0$, während dy und dz null sind. Damit ist

$$d_x W_p = -q E_x dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d_x W_p}{dx} = -q E_x .$$

Um das **totale Differential** dW_p von der **partiellen Ableitung** unterscheiden zu können, benutzt man folgende Schreibweise für die partielle Ableitung

$$\frac{d_x W_p}{dx} \equiv \frac{\partial W_p}{\partial x} = -q E_x .$$

Analog lauten die partiellen Ableitungen nach y und z

$$\frac{\partial W_p}{\partial y} = -q E_y \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial W_p}{\partial z} = -q E_z .$$

Division durch q liefert:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -E_x \, ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -E_y \, ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -E_z$$

oder in Vektorschreibweise

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = -\text{grad}\, \varphi = -\nabla \varphi .} \tag{4.8}$$

$\vec{E}(\vec{r})$ ist der Vektor aus den partiellen Ableitungen des Potenials, man sagt, $\vec{E}(\vec{r})$ ist der **Gradient des Potentials.**

Was bedeutet der Gradient?

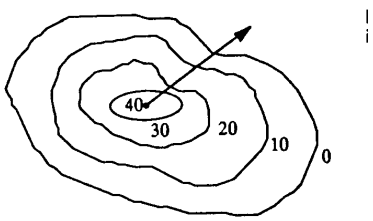


Abbildung 4.8: Der Gradient zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs

Der Gradient ist der Vektor in Richtung der größten Steigung, somit zeigt $\vec{E}(\vec{r})$ in die Richtung des stärksten Potentialgefälles. Stellt man sich das Potential als eine hügelige

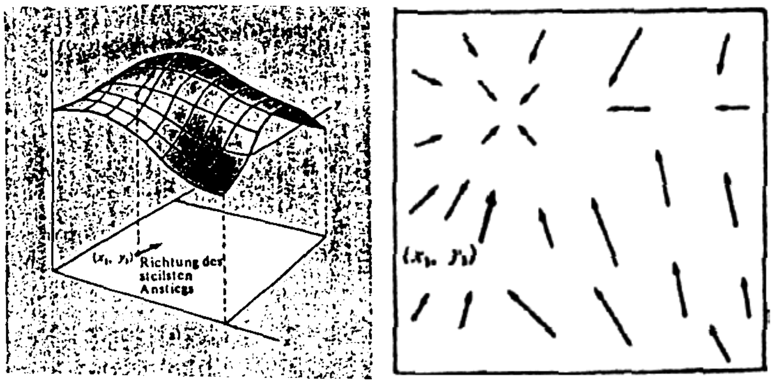


Abbildung 4.9: Veranschaulichung des Gradienten einer skalaren Funktion f(x,y)

Landschaft vor, so sind die Höhenlinien gleich den Äquipotentiallinien und die Falllinien entsprechen den Feldlinien (s. Abb. 4.8, entnommmen aus [15]). Der Gradient zeigt dann in Richtung des steilsten Anstieges und steht immer senkrecht auf den Äquipotentiallinien (bzw. Höhenlinien). In Abb. 4.9 (links) ist eine skalare Funktion F(x,y) als Fläche dargestellt, Abb. 4.9 (rechts) zeigt die Darstellung des Vektorfeldes ∇f durch Pfeile: $\nabla \mathrm{f} = \mathrm{grad}\,\mathrm{f} = (\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}, \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}})$. In Abb. 4.16 auf Seite 60 wird das Gravitationsfeld mit dem elektrischen Feld verglichen (entnommen aus [3]).

4.4 Der elektrische Dipol

Unter einem Dipol versteht man zwei kleine, entgegengesetzt geladene und gleich große Punktladungen +Q und −Q, die sich im Abstand l voneinander befinden, der klein ist

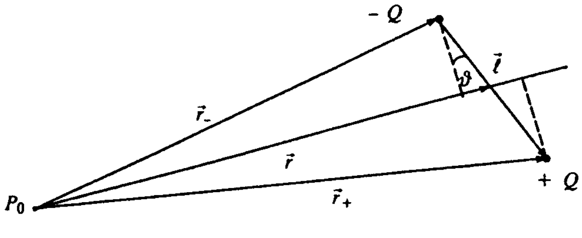


Abbildung 4.10: Der elektrische Dipol

gegen die Entfernung r des Aufpunktes P_0 von der Dipolmitte. $\vec{l}$ sei ein Vektor, der durch seine Richtung von $-Q$ nach $+Q$ die Orientierung des Dipols bestimmt. Eine solche Ladungsverteilung und das zugehörige Feldlinienbild haben wir bereits auf Seite 25 kennengelernt (s. auch Abb. 4.10 aus [15]). Da sich die Potentiale, die von $+Q$ und $-Q$ im Aufpunkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ hervorgerufen werden, algebraisch addieren, ist das Potential:

$$\varphi(P_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r_+} - \frac{Q}{r_-}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_- - r_+}{r_- \cdot r_+}\right),$$

wobei r_+ und r_- die Abstände des Aufpunktes P_0 von $+Q$ und $-Q$ bedeuten. Unter der Voraussetzung, daß r_+ und r_- groß gegen l sind, können folgende Näherungen gemacht werden:

$$r_+ \cdot r_- = r^2 \qquad \text{und} \qquad r_+ - r_- \simeq l \cdot \cos\vartheta = \vec{l} \cdot \frac{\vec{r}}{r},$$

wobei ϑ der Winkel zwischen R und $\vec{l}$ ist. Somit läßt sich das Potential eines Dipols für $r \gg l$ schreiben als

$$\varphi(P_0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{l} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l\cos\vartheta}{r^2}.$$

Den Vektor $\vec{P} = Q \cdot \vec{l}$ nennt man **Dipolmoment**. Das Potential des elektrischen Dipols ist also proportional zum Betrag des Dipolmomentes $Q \cdot l$ und variiert mit $\cos\vartheta$ und $1/r^2$. Das Zeigerdiagramm in Abb. 4.11 (aus [15]) zeigt die Winkelabhängigkeit von φ

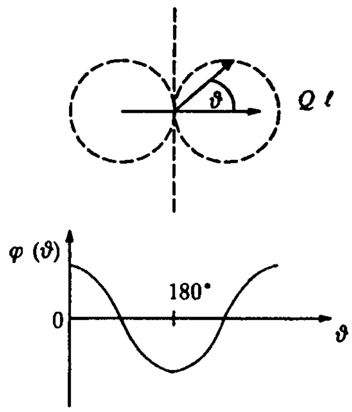


Abbildung 4.11: Zeigerdiagramm

und $\cos\vartheta$ für ein festes r. Die Länge des Zeigers ist proportional zu $\cos\vartheta$. Das Potential eines Dipolfeldes und seine Feldlinien sind in Abb. 4.12 dargestellt (entnommen aus [9]).

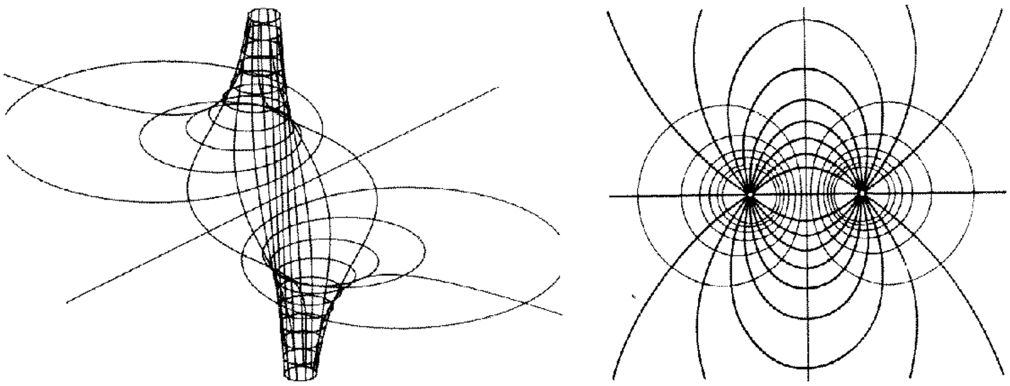


Abbildung 4.12: Das Dipolfeld

Der Dipol im homogenen Feld

Wir betrachten nun einen elektrische Dipol im homogenen Feld, dessen Ursprung in den Mittelpunkt von l gelegt wird. Das elektrische Feld wirkt mit entgegengesetzten gleich großen Kräften $\vec{\mathrm{F}} = \mathrm{Q}\,\vec{\mathrm{E}}$ und $-\vec{\mathrm{F}} = -\mathrm{Q}\,\vec{\mathrm{E}}$ auf die Ladungen des Dipols. Die resultierende Kraft ist daher Null, d.h. der Dipol ändert seinen translatorischen Bewegungszustand im Feld nicht. Das Kräftepaar erzeugt jedoch ein Drehmoment $\vec{\mathrm{M}}$ um die Mittelachse senkrecht zu der von $\vec{\mathrm{P}}$ und $\vec{\mathrm{E}}$ aufgespannten Ebene (s. Abb. 4.13, entnommen aus [15]). Es ist:

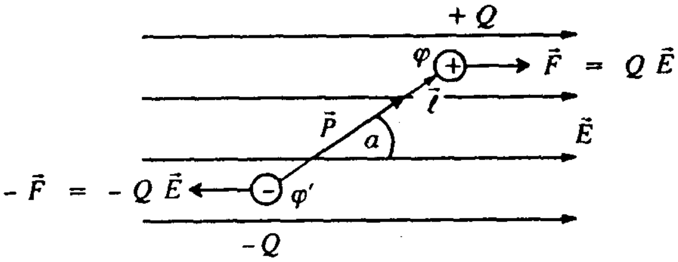


Abbildung 4.13: Dipolmoment

$$\mathrm{M} = 2\,\mathrm{F}\frac{\mathrm{l}}{2}\sin\alpha = \mathrm{F}\,\mathrm{l}\sin\alpha = \mathrm{Q}\,\mathrm{E}\,\mathrm{l}\,\sin\,\alpha = \mathrm{P}\,\mathrm{E}\,\sin\,\alpha$$

$$\text{oder} \qquad \boxed{\vec{\mathrm{M}} = \vec{\mathrm{P}} \times \vec{\mathrm{E}} = \mathrm{Q}\,\vec{\mathrm{l}} \times \vec{\mathrm{E}}.} \tag{4.9}$$

Versuch

Zwischen einem Plattenkondensator befinden sich als Dipol zwei graphitierte,

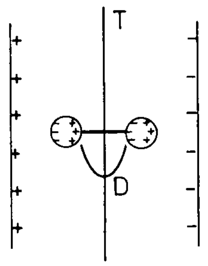


Abbildung 4.14: Dipol im homogenen Feld

starr miteinander verbundene Tischtennisbälle. Sie sind an einem Torsionsdraht aufgehängt und befinden sich parallel zu den Kondensatorplatten. Nun wird auf die Bälle unterschiedliche Ladung aufgebracht und ein homogenes Feld erzeugt. Der Dipol richtet sich nun senkrecht zu den Platten aus. Dreht man das Feld um, so dreht sich auch der Dipol (s. Abb. 4.14 aus [2]).

Ein freier Dipol wird also im Feld so gedreht, daß $\vec{P}$ und $\vec{E}$ parallel stehen. Nun wird das Drehmoment null.

Dipolanwendungen

1. Entstaubungsanlage:

   Versuch

   Wir lassen den Rauch einer Pfeife durch einen Metallzylinder treten, durch den konzentrisch ein Draht geführt ist. Erzeugt man nun mittels einer Spannung ein radiales, also inhomogenes Feld, so werden die Rauchpartikel polarisiert und bewegen sich zum Zylinder bzw. zum Draht, wo sie sich ablagern (s. Abb. 4.15 aus [2]).

2. Antennen: Dipole haben als Ultrakurzwellen-Antennen sehr große Bedeutung. Sie sind in der Mitte unterbrochen und erhalten beim Sender ihre Hochfrequenzenergie zugeführt, die sie abstrahlen. Die Ladungsverteilung wechselt im Rhythmus der Hochfrequenz. Sie nimmt z.B. von der Mitte über die Länge des Dipols nach den beiden Enden hin sinusförmig zu und hat zu einem bestimmten Zeitpunkt ihr Maximum. Sie ist dann in der Mitte null ($\lambda/2$- Dipol). Beim Empfänger-Dipol wird

von der unterbrochenen Mitte die empfangene Energie über eine Zweidrahtleitung dem Verstärker zugeführt. Die (horizontale oder vertikale) Lage des Sende-Dipols bestimmt die Richtung der Polarisation der Strahlung. Der empfangende Dipol muß für den optimalen Empfang die gleiche Lage wie der Sende-Dipol haben, also horizontal oder vertikal.

3. Velour Strukturen: Bringt man Textilhärchen in ein inhomogenes Feld, so entstehen Dipole, die sich parallel ausrichten und im Feld bewegen. Läßt man sie auf eine mit einem Kleber versehene Unterlage treffen, so entsteht eine Velour-Struktur.

4. Spritzlackierung: Erzeugt man zwischen Spritzpistole und Spritzgut ein elektrisches Feld, so werden die einzelnen Lackteilchen polarisiert und folgen dem Feld. Auf diese Weise lassen sich feine Strukturen ohne Verluste lackieren.

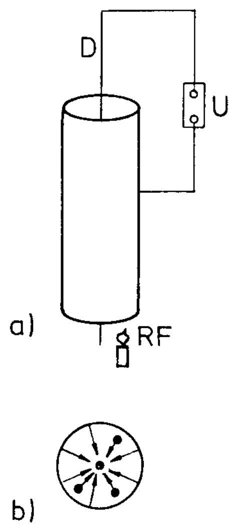


Abbildung 4.15: Entstaubungsanlage

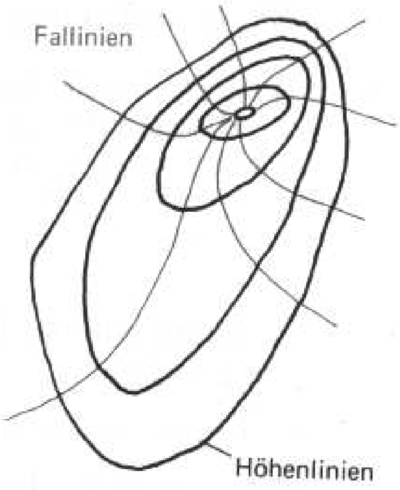
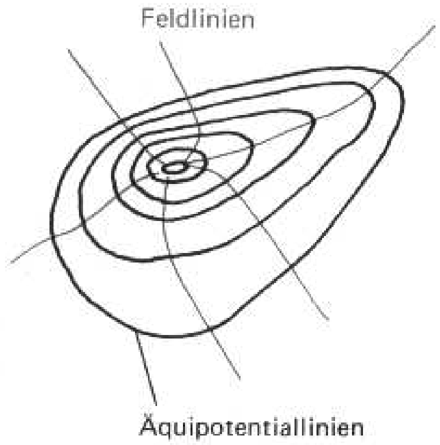
	Gravitationsfeld	elektrisches Feld
Kraft	Massenanziehungskraft (Gravitationskraft) $\boldsymbol{F}_{Gr} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \boldsymbol{r}_0$ $\boldsymbol{F}_{Gr} = m\boldsymbol{g}$; $\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}$	Ladungsanziehungskraft (Coulombkraft) $\boldsymbol{F}_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \boldsymbol{r}_0$ $\boldsymbol{F}_{el} = Q\boldsymbol{E}$; $\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}_{el}}{Q}$
Energie	$W_{Gr} = m\varphi_{Gr}$	$W_{el} = Q\varphi_{el}$
Potential-änderung	$d\varphi_{Gr} = -\boldsymbol{g}\,d\boldsymbol{y}$	$d\varphi_{el} = -\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{y}$
Potential-linien	Linien gleicher potentieller Energie (Höhenlinien) $\boldsymbol{g} = -\,\mathbf{grad}\,\varphi_{Gr}$	Linien gleichen elektrischen Potentials (Äquipotentiallinien) $\boldsymbol{E} = -\,\mathbf{grad}\,\varphi_{el}$
Teilchen-beschleunigung	senkrecht zu den Höhenlinien in Richtung des steilsten Abfalls	senkrecht zu den Äquipotentiallinien in Richtung der größten Potentialänderung
Veranschau-lichung		

Abbildung 4.16: Vergleich von Gravitations- und elektischem Feld

Kapitel 5

Der Kondensator

5.1 Die Kapazität

Kondensatoren sind zwei gegeneinander isolierte, unterschiedlich geladene Leiteroberflächen beliebiger Geometrie, zwischen denen eine Potentialdifferenz $\Delta\,\varphi$ und damit eine Spannung U herrscht.
Die Geometrie und der Abstand der Leiteroberflächen bestimmen die Ladungstrennungsarbeit und damit die Spannung U, die je getrennter Ladungsmenge Q entsteht.

$$\mathrm{U} \sim \mathrm{Q} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathrm{U} = \mathrm{C} \cdot \mathrm{Q}.$$

Diese Proportionalitätskonstante C, die nach obiger Vorstellung von der "Gesamtgeometrie" des Kondensators abhängt, wird **Kapazität** genannt.

$$\text{Kapazität} \quad \boxed{\mathrm{C} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{U}}.} \tag{5.1}$$

Anschaulich kann man sich die Kapazität als ein Maß dafür vorstellen, wieviel Ladung Q je Spannungseinheit 1V gespeichert werden kann.
Die Einheit der Kapazität ist das **Farad F**

$$[\mathrm{C}] = \frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = \mathrm{F} = \text{Farad}.$$

Ein Farad ist eine sehr große Einheit. In der Praxis sind kleinere Einheiten üblich wie z.B.

$$\begin{array}{ll} 1\ \text{Millifarad} = 1\ \mathrm{mF} = 10^{-3}\mathrm{F} & 1\ \text{Nanofarad} = 1\ \mathrm{nF} = 10^{-9}\mathrm{F} \\ 1\ \text{Mikrofarad} = 1\ \mu\mathrm{F} = 10^{-6}\mathrm{F} & 1\ \text{Pikofarad} = 1\ \mathrm{pF} = 10^{-12}\mathrm{F} \end{array}$$

Im cgs-System ist $[\mathrm{C}] = \mathrm{cm}$ und $1\mathrm{F} \mathrel{\hat{=}} 9 \cdot 10^{11}\ \ \mathrm{cm}$.

5.2 Kondensatoren

Kondensatoren sind wichtige elektronische Bauelemente und dienen u.a. zur Speicherung elektrischer Ladung und elektrischer Energie.

5.2.1 Der Plattenkondensator

Ein Plattenkondensator besteht aus zwei gleich großen, parallelen Metallplatten der Fläche A, die sich im Abstand d voneinander befinden (s. Abb. 5.1). Liegt zwischen ihnen eine Spannung U an, dann herrscht an jeder Stelle dasselbe homogene elektrische Feld (wenn gilt: $d^2 \ll A$). Die Platten haben eine Flächenladungesdichte $\sigma = Q/A$, und

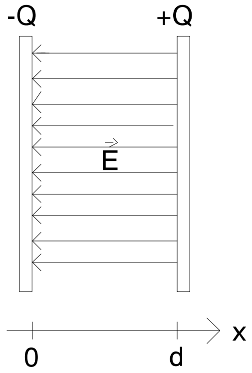


Abbildung 5.1: Kapazität eines Plattenkondensators

das Feld hat eine Feldstärke von

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\sigma = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{Q}{A}.$$

Die Spannung zwischen den Platten ist

$$U = -\int_{x=0}^{x=d} \vec{E}\, d\vec{r} = -\int_0^d -E\, dx = E\, d.$$

(U ist hier von − nach + definiert.)

$$U = E\, d = \frac{1}{\varepsilon}\frac{Q}{A} \cdot d.$$

Damit ist die

$$\text{Kapazität des Plattenkondensators} \quad \boxed{C = \frac{Q}{U} = \varepsilon\,\frac{A}{d}.} \tag{5.2}$$

Mit dem folgenden Versuch soll nun die 1/d- Proportionalität der elektrischen Feldstärke beim Plattenkondensator überprüft werden.

Versuch

> Wir bringen auf eine Seite eines Plattenkondensators mit Hilfe einer Spannungsquelle Ladung auf, während wir die andere Platte erden. Wir entfernen nun die Spannungsquelle und messen die Spannung, die zwischen den Platten herrscht. Da die Spannung proportional zur Ladung ist, können wir den maximalen Ausschlag des Voltmeters auch als Ladungsmenge interpretieren. Wir führen den Versuch für die Plattenabstände $d = 0.5, 1, 2$ und 4 cm durch. Der Vollausschlag von 3 V entspricht 10^{-8} C.

Die Messungen liefern:

d in cm	U in V	Q in 10^{-8}C
0,5	2,9	9,66
1	1,45	4,83
2	0,8	2,67
4	0,5	1,67

Um Kondensatoren mit großen Kapazitäten zu erhalten, wählt man d klein und A groß. In der Technik vergrößert man die Fläche durch Aufwickeln von Metallfolie, Aufrauhen der Oberfläche durch Ätzen bei Elektrolytkondensatoren oder beidseitiges Bedampfen dünner isolierender Schichten mit Metall, und man verkleinert die Abstände, indem man dünne Kunststoffolien (oder Oxidschichten) als Zwischenlagen verwendet.

5.2.2 Der Kugelkondensator

Der Kugelkondensator besteht aus zwei konzentrischen Kugeln der Radien r_1 und r_2 mit $r_2 > r_1$, die die Ladungen $+Q$ und $-Q$ tragen. Im Bereich $r_1 \leq r \leq r_2$ liegt ein kugelsymmetrisches Feld $E(r) = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2}$ vor (s. Abb. 5.2, entnommen aus [3]). Die Spannung zwischen den Kugeln ist

$$U = -\int_{r_2}^{r_1} E(r)\,dr = \frac{Q}{4\,\pi\varepsilon}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{Q}{4\,\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Damit ist die

$$\text{Kapazität des Kugelkondensators} \quad \boxed{C = \frac{Q}{U} = 4\,\pi\,\varepsilon\left(\frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1}\right).} \tag{5.3}$$

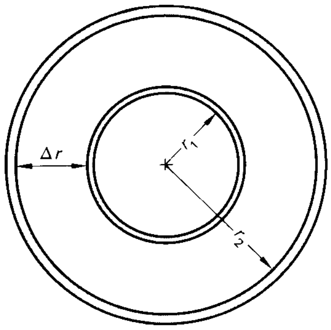


Abbildung 5.2: Kapazität eines Kugelkondensators

Diskussion:

1. $\underline{r_2 \to \infty:}$ $C = 4\,\pi\,\varepsilon\,r_1$.
   Bemerkung: Im cgs-System ist $4\,\pi\varepsilon = 1$ und damit $C = r$, d.h., eine Kugel vom Radius $r = 1$ cm hat ein Kapazität von $C = 1\ \mathrm{cm} \mathrel{\hat{=}} 1,1$ pF.

2. $\underline{r_2 \approx r_1:}$ $\Rightarrow$ $r_2 - r_1 = d$ damit wird $C = 4\,\pi\,\varepsilon\,r^2/d$ vgl. Plattenkondensator.

5.2.3 Der Zylinderkondensator

Der Zylinderkondensator besteht aus zwei koaxialen Zylindern der Länge l (s. Abb. 5.3, entnommen aus [3]). Zwischen diesen herrscht ein radialsymmetrisches Feld. Die Berech-

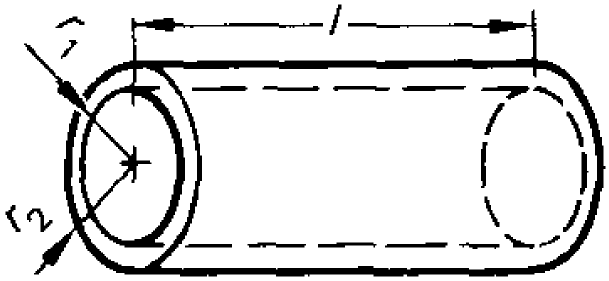


Abbildung 5.3: Kapazität eines Zylinderkondensators

nung der Kapazität erfolgt analog zu den vorherigen Beispielen und liefert:

$$\text{Kapazität des Zylinderkondensators} \quad \boxed{C = \frac{Q}{U} = 2\,\pi\,\varepsilon\frac{l}{\ln\frac{r_2}{r_1}}.} \tag{5.4}$$

5.3 Schaltung von Kondensatoren

5.3.1 Schaltsymbol

In Abbildung 5.4 (entnommen aus [3]) ist das Schaltsymbol für eine Kondensator dargestellt.

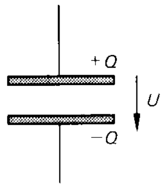


Abbildung 5.4: Schaltsymbol eines Kondensators

5.3.2 Parallelschaltung

Die einzelnen Kondensatoren mögen die Kapazitäten $C_1, C_2, ..., C_n$ haben. Bei Parallelschaltung besitzen sie alle die gleiche Spannung U (s. Abb. 5.5, entnommen aus [9]). Auf den einzelnen Kondensatoren befinden sich also die Ladungsmengen $Q_1 = C_1\,U$, $Q_2 = C_2\,U$, ..., $Q_n = C_n\,U$. Auf dem Gesamtkondensator, dessen Kapazität C gesucht wird, befindet sich also die Gesamtladung

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^{n} Q_i \\ &= Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n \\ &= C_1\,U + C_2\,U + \ldots + C_n\,U \\ &= (C_1 + C_2 + \ldots + C_n)U \\ &= \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot U \end{aligned}$$

Bei Parallelschaltung von Kondensatoren addieren sich die Kapazitäten.

$$\text{Parallelschaltung} \quad \boxed{C = \sum_{i=1}^{n} C_i} \tag{5.5}$$

Will man also bei gegebenen Kondensatoren die Kapazität vergrößern, so muß man sie parallel schalten.

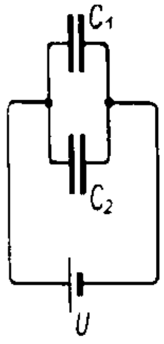


Abbildung 5.5: Parallelschaltung von Kondensatoren

Versuch

Wir nehmen zwei baugleiche Plattenkondensatoren und bestimmen ihre Einzelkapazitäten. Nun schalten wir sie parallel und messen die Gesamtkapazität. Wir sehen, die Kapazität hat sich verdoppelt.

5.3.3 Reihenschaltung

Aufgrund der Influenz sind die Ladungsmengen Q auf allen in Reihe geschalteten Kondensatoren gleich groß: $Q = C_i \cdot U_i$. Die am System anliegende Spannung U setzt sich aus

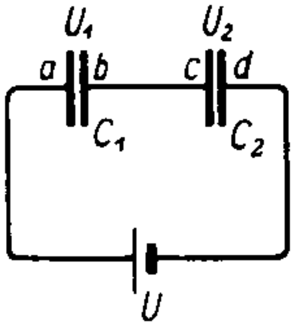


Abbildung 5.6: Reihenschaltung von Kondensatoren

den einzelnen, an den Kondensatoren liegenden Spannungen zusammen.

$$\mathrm{U_1} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{C_1}},\ \mathrm{U_2} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{C_2}}, \ldots, \mathrm{U_n} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{C_n}}$$

Damit folgt für die Gesamtspannung

$$\begin{aligned}
\mathrm{U} &= \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{U_i} \\
&= \mathrm{U_1} + \mathrm{U_2} + \ldots + \mathrm{U_n} \\
&= \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{C_1}} + \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{C_2}} + \ldots + \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{C_n}} \\
&= \mathrm{Q} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\mathrm{C_i}}
\end{aligned}$$

Für die Gesamtkapazität folgt dann bei der

$$\text{Reihenschaltung} \quad \boxed{\frac{1}{\mathrm{C}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\mathrm{C_i}}} \tag{5.6}$$

Bei der Reihenschaltung von Kapazitäten (s. Abb. 5.6, entnommen aus [9]) ist der reziproke Wert der resultierenden Kapazität gleich der Summe der Kehrwerte der Einzelkapazitäten. Damit ist die Gesamtkapazität stets kleiner als die kleinste Einzelkapazität, womit sich diese Anordnung zur Herstellung kleiner Kapazitäten eignet, wenn nur große vorhanden sind. Aus $\mathrm{U_i} = \mathrm{Q}/\mathrm{C_i}$ folgt weiterhin, daß an dem Kondensator mit der größten Kapazität die kleinste Spannung anliegt. Die Reihenschaltung von Kondensatoren kann damit also zur Spannungsteilung verwendet werden.

Versuch

> Nun schalten wir die beiden Plattenkondensatoren in Reihe und messen wieder die Gesamtkapazität.

Kapitel 6

Materie im elektrischen Feld

Bringt man Materie in ein elektrisches Feld, so wirkt auf alle Ladungen dieser Materie eine elektrische Kraft.
Ist die Materie ein Leiter, so werden die Ladungsträger (im allgemeinen Elektronen) wegen ihrer freien Beweglichkeit an die Oberfläche des Leiters geschoben und in positive und negative Ladungsträger getrennt. Handelt es sich bei der Materie um einen Nichtleiter, so werden die Ladungsträger wegen ihrer geringen Beweglichkeit nur geringfügig verschoben.

6.1 Leiter im elektrischen Feld

Um das Verhalten von elektrischen Leitern in elektrischen Feldern zu untersuchen, bringen wir eine Metallplatte zwischen zwei Kondensatorplatten.

Versuch

> Wir führen eine ungeladene Metallplatte der Dicke d_1 in das homogene Feld eines Plattenkondensators mit Plattenabstand $d > d_1$ ein. Wir beobachten
>
> - bei konstant gehaltener Ladung Q auf den Kondensatorplatten eine Verringerung von U,
> - bei konstant gehaltener Spannung U eine Vergrößerung der Ladung Q.

Auf Grund der freien Beweglichkeit der Ladungsträger ergeben sich im Vergleich zu einem "materiefreien" Kondensator für die untersuchten Fälle einer Metallplatte im Kondensator unter der Bedingung $Q = \text{const.}$ bzw. $U = \text{const.}$ die in Abb. 6.1 auf Seite 70 dargestellten Feldlinienbilder (entnommen aus [2]).
Die Aufladung der Oberfläche auf Grund der Ladungsverschiebung bezeichnet man als **Influenz**. Um die influenzierten Ladungen zu messen, ändert man den obigen Versuch geringfügig ab.

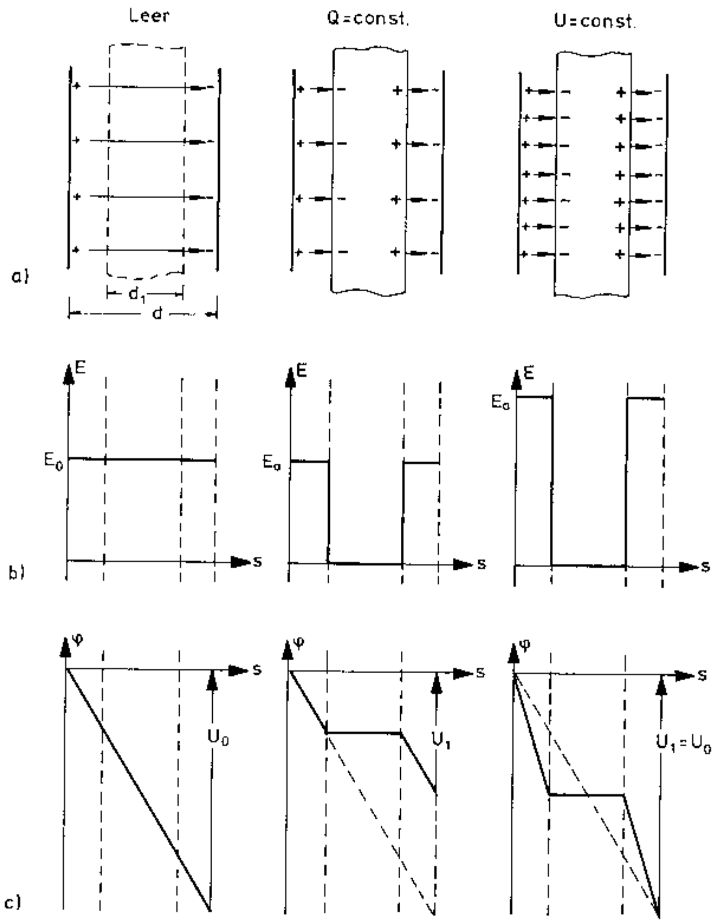


Abbildung 6.1: Leiter im elektrischen Feld

Versuch

Anstelle der Metallplatte bringt man ein metallisches Doppelplättchen in das homogene Feld des Plattenkondensators. Die Plättchen mit den jetzt influenzierten Ladungen werden innerhalb des elektrischen Feldes getrennt und die Ladungen Q_1 und Q_2 außerhalb des elektrischen Feldes gemessen. (s. Abb. 6.2, entnommen aus [8])

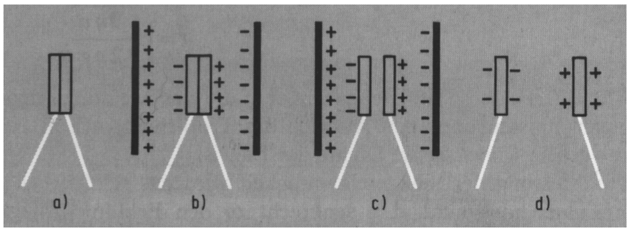


Abbildung 6.2: Metallische Doppelplättchen werden im homogenen Feld getrennt

Wir beobachten:

1. Die Ladung ist betragsmäßig gleich groß ($|Q_1| = |Q_2| = |Q|$).
2. Die Ladungsmenge Q ist proportional zur Größe $A_\perp$ des Plättchens, also zu dem Anteil des Flächenelements, das senkrecht zu den Feldlinien steht.

Die influenzierte Ladungsdichte, welche die, unter der Wirkung eines elektrischen Feldes verschobene, Ladung beschreibt, nennt man elektrische **Verschiebungsdichte** $\vec{D}$.

$$|D| = |\frac{dQ}{dA_\perp}|.$$

$$[\vec{D}] = \frac{C}{m^2} = \frac{As}{m^2}.$$

Die elektrische Verschiebungsdichte $\vec{D}$ ist maximal für $d\vec{A}$ parallel zu $\vec{E}$ und Null, wenn $d\vec{A}$ senkrecht auf $d\vec{E}$ steht, denn es ist

$$d\vec{A_\perp} = dA \cos\varphi.$$

Da umsomehr Ladungen verschoben werden, je mehr "Feldlinien" auf der Oberfläche enden (vgl. Abb. 6.1) - also je größer die elektrische Feldstärke ist, muß die Verschiebungsdichte von der Feldstärke $\vec{E}$ abhängen. Im materiefreien Raum gilt

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}.$$

Der Proportionalitätsfaktor ε_0 beträgt.

$$\varepsilon_0 = \frac{|\vec{D}|}{|\vec{E}|} = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}.$$

Die elektrische **Feldkonstante** ε_0 gibt an, welche Ladungsdichte $\Delta Q/\Delta A$ von der Feldstärke E = 1 V/m gebunden wird.

6.2 Isolatoren im elektrischen Feld

Versuch

> Schiebt man einen Isolator zwischen zwei gleichnamig geladene, frei aufgehängte Luftballons, dann beobachtet man eine Verringerung des Ausschlages (s. Abb. 6.3).

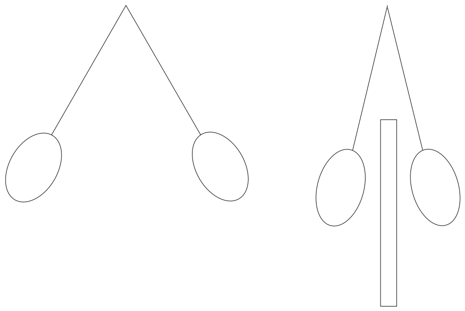


Abbildung 6.3: Der Isolator verringert das elektrische Feld

Im Isolator werden die Ladungträger auf Grund ihrer geringen Beweglichkeit nur etwas verschoben. Das Innere des Isolators ist also nicht feldfrei. Das Feld "greift" sozusagen durch den Isolator "hindurch", d.h. $F = q\,E$ wird kleiner. Solche Stoffe werden nach dem griechischen Wort "dia" (= durch) auch **Dielektrika** genannt.
Das Verhalten von Dielektrika soll genauer im homogenen Feld eines Plattenkondensators studiert werden.

Versuch

> Analog zu dem Versuch mit der Metallplatte im Kondensator, führen wir nun eine Isolatorplatte in den Kondensator ein. Die Beobachtungen sind ähnlich dem vorhergehenden Versuch. Die Unterschiede werden aus der Abb. 6.4 deutlich (entnommen aus [2]).

Vor dem Einbringen der Platte sei die Feldstärke $\mathrm{E_o} = \mathrm{U_o}/\mathrm{d}$. Durch das Einbringen des Dielektrikums zwischen die Kondensatorplatten verschieben sich die Ladungen auf dem Isolator, wodurch ein geringeres Feld $\mathrm{E_m}$ und damit eine geringere Spannung $\mathrm{U_m}$ zwischen den Platten herrscht. Es ist $\mathrm{E_m} < \mathrm{E_o}$ und damit auch $\mathrm{U_m} < \mathrm{U_o}$. Es gilt:

$$\frac{\mathrm{E_o}}{\mathrm{E_m}} = \frac{\mathrm{U_o}}{\mathrm{U_m}} = \varepsilon_\mathrm{r}.$$

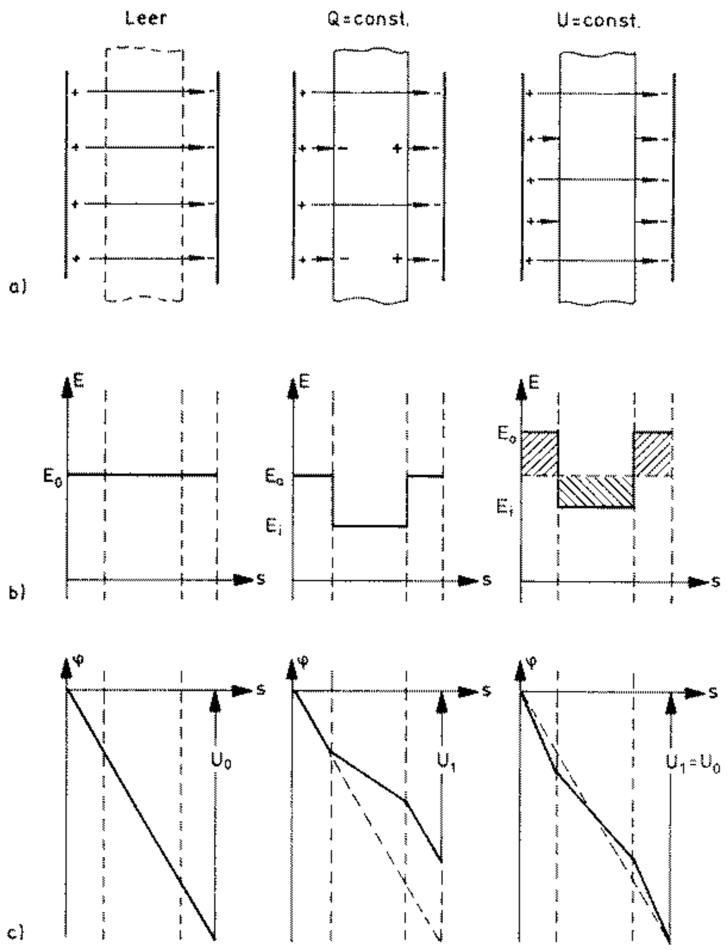


Abbildung 6.4: Isolator im elektrischen Feld

Wegen C=Q/U führt dies zu

$$\frac{\mathrm{C_m}}{\mathrm{C_o}} = \varepsilon_\mathrm{r}, \qquad \text{bzw.} \qquad \mathrm{C_m} = \varepsilon_\mathrm{r}\,\mathrm{C_o}.$$

Wird ein Dielektrikum in ein elektrisches Feld gebracht, so nimmt die elektrische Feldstärke gegenüber der des Vakuums um das ε_r- fache ab, während die Kapazität durch das Einbringen des Dielektrikums auf das ε_r- fache steigt. Die Größe $\boldsymbol{\varepsilon_r}$ wird **Permitivitätszahl** oder **relative Dielektrizitätszahl** genannt. Sie ist eine, das Dielektrikum charakterisierende, Materialkonstante. Sie ist dimensionslos und ihr Wert ist stets ≥ 1.

Versuch

Um die Permitivitätszahl ε_r unterschiedlicher nichtleitender Materialien zu bestimmen, führen wir diese in einen Plattenkondensator ein und bestimmen jeweils die Spannung.

Einige Werte von ε_r sind folgender Tabelle zu entnehmen:

Material	ε_r
Vakuum	1
Luft	1,000576
Papier	1,6 – 2,6
Paraffin	2 – 2,3
Glas	2 – 16
Glimmer	4 – 8
Glycerin	41
Wasser	81
Keramik (z.B. TiO_2)	$10^4 - 10^5$

Eine Anwendung der Dielektrika findet man in den **Papierfolienkondensatoren**, die zwischen Stanniol- oder Aluminiumstreifen als Dielektrikum paraffiniertes Papier enthalten. Sie sind nur für geringe Spannungen bis 700 V brauchbar, da die Isolierfähigkeit des Papiers für höhere Spannungen nicht genügt. Wenn man Kondensatoren für höhere Spannungen bauen will, so verwendet man als Dielektrikum Glas oder Glimmer. Heute kann man auch keramische Massen mit Dielektrizitätszahlen von 100 oder mehr herstellen, die sich besonders für den Bau von Kondensatoren mit großen Kapazitäten eignen.

Wie Abb. 6.5 (aus [3]) zeigt, wird die ursprüngliche Feldstärke $\vec{E_o}$ durch das eingebrachte

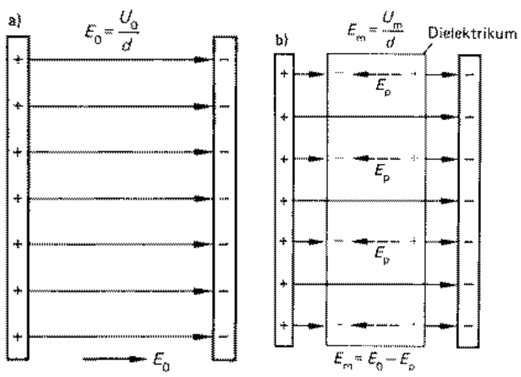


Abbildung 6.5: Das elektrische Feld wird durch das Dielektrikum geschwächt

Dielektrikum um das Gegenfeld $\vec{E_p}$ geschwächt.

$$\vec{E}_m = \vec{E}_o - \vec{E}_p$$

Schreiben wir nun das ursprüngliche Feld als

$$E_o = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q}{A}$$

und das Gegenfeld als

$$E_p = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q'}{A},$$

wobei wir die Ladungsmenge Q als freie Ladung bezeichnen wollen und die Ladungsmenge Q' als gebundene. Damit können wir schreiben

$$E_m = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q - Q'}{A},$$

d.h. im Feld mit Dielektrikum stehen nur noch die freien Ladungen zur Verfügung, die nicht durch die scheinbaren Ladungen gebunden sind, man spricht von ihnen als den wahren Ladungen. Führen wir nun noch neben der

$$\text{dielektrischen Verschiebung} \qquad D = \frac{Q}{A} = \frac{\text{freie Ladungen}}{\text{Fläche}}$$

die

$$\text{Polarisation} \qquad P = \frac{Q'}{A} = \frac{\text{gebundene Ladungen}}{\text{Fläche}}$$

ein, so können wir die Formel umschreiben:

$$E_m = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q - Q'}{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} (D - P),$$

$$D - P = \varepsilon_0 E_m \qquad \text{oder} \qquad D = \varepsilon_0 E_m + P.$$

Allgemein gilt diese Gleichung auch vektoriell.

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E_m} + \vec{P}.} \tag{6.1}$$

Zusammenhang von $\vec{E}$ und $\vec{D}$

Für die weitere Rechnung benötigen wir die Größe der gebundenen Ladung Q'. Sie folgt ebenfalls aus der Gleichung von Seite 75. Es ist

$$E_m = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q - Q'}{A} = \frac{1}{\varepsilon_r} E_o = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q}{A}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Q} - \mathrm{Q}' = \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}}\,\mathrm{Q} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Q}' = (1 - \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}})\,\mathrm{Q},$$

$\mathrm{Q} - \mathrm{Q}'$ ist also die wahre Ladungsmenge. Damit können wir die Polarisation P umschreiben.

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{Q}'}{\mathrm{A}} = (1 - \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}})\,\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{A}} = (1 - \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}})\,\mathrm{D} = (\varepsilon_\mathrm{r} - 1)\frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}}\,\mathrm{D}.$$

Der Faktor $(\varepsilon_r - 1)$ wird auch **dielektrische Suszeptibilität $\boldsymbol{\chi_e}$** genannt. Setzen wir dies in Gleichung 6.1 ein, so erhalten wir

$$\vec{\mathrm{D}} = \varepsilon_0\,\vec{\mathrm{E}_\mathrm{m}} + \vec{\mathrm{P}} = \varepsilon_0\,\vec{\mathrm{E}_\mathrm{m}} + (1 - \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}})\,\vec{\mathrm{D}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}}\,\vec{\mathrm{D}} = \varepsilon_0\,\vec{\mathrm{E}_\mathrm{m}}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{\mathrm{D}} = \varepsilon_\mathrm{r}\,\varepsilon_0\,\vec{\mathrm{E}_\mathrm{m}} = \varepsilon_0\,\vec{\mathrm{E}_\mathrm{m}} + \vec{\mathrm{P}}.} \tag{6.2}$$

Zusammenfassung

Bei konstanter Ladung Q gilt:

	ohne Dielektrikum	mit Dielektrikum
$\vec{\mathrm{E}}$- Feld	$\vec{\mathrm{E}}_\mathrm{o}$	$\vec{\mathrm{E}} = \frac{1}{\varepsilon}\,\vec{\mathrm{E}}_\mathrm{o}$
$\vec{\mathrm{D}}$- Feld	$\vec{\mathrm{D}}_\mathrm{o} = \varepsilon_0\,\vec{\mathrm{E}}$	$\vec{\mathrm{D}} = \varepsilon\,\varepsilon_0\,\vec{\mathrm{E}} = \vec{\mathrm{D}}_\mathrm{o} = \varepsilon_0\,\vec{\mathrm{E}}$

Während sich das $\vec{\mathrm{E}}$- Feld im Dielektrikum erniedrigt, ändert sich das $\vec{\mathrm{D}}$- Feld nicht, solange die freien Ladungen unverändert bleiben. Das $\vec{\mathrm{D}}$- Feld wird also nur durch die wahren Ladungen bestimmt, das $\vec{\mathrm{E}}$- Feld hingegen durch die freien Ladungen, also allen (s. Abb. 6.6).

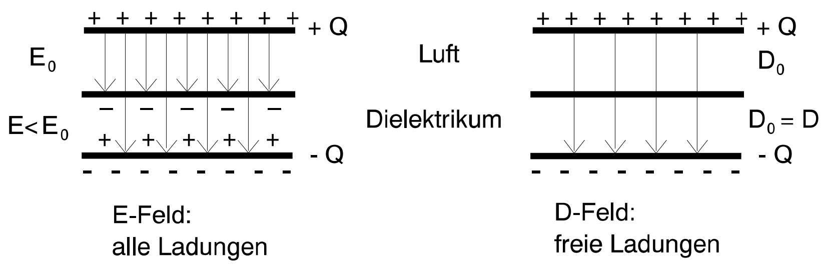


Abbildung 6.6: Vergleich $\vec{\mathrm{E}}$- und $\vec{\mathrm{D}}$-Feld

Gaußscher Satz für $\vec{\mathrm{E}}$ - und $\vec{\mathrm{D}}$- Felder	
$\vec{\mathrm{E}}$- Feld	$\vec{\mathrm{D}}$- Feld
alle Ladungen sind Quellen von $\vec{E}$, d.h. $\oint \vec{\mathrm{E}}\, \mathrm{d}\vec{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{Q} - \mathrm{Q}'}{\varepsilon_0}$	nur die **freien** Ladungen sind Quellen von $\vec{D}$, d.h. $\oint \vec{\mathrm{D}}\, \mathrm{d}\vec{\mathrm{A}} = \mathrm{Q}$
mit $\varrho =$ freie Ladungsdichte und $\varrho' =$ gebundene Ladungsdichte	
$\mathrm{div}\, \vec{\mathrm{E}} = \frac{\varrho - \varrho'}{\varepsilon_0}$	$\mathrm{div}\, \vec{\mathrm{D}} = \varrho$ 1. MAXWELLsche Gleichung

6.2.1 Polarisationseffekte

Wird nichtleitendes Material in ein elektrisches Feld gebracht, so verschieben sich die Ladungsschwerpunkte der Moleküle. Es entsteht ein Dipol $\mathrm{p} = \mathrm{Q} \cdot \mathrm{d}$, wobei d der Abstand zwischen den Ladungen $+\mathrm{Q}$ und $-\mathrm{Q}$ ist. Es sind grundsätzlich zwei Arten der Polarisation möglich.

1. Die ursprünglich zusammenfallenden positiven und negativen Ladungen werden beim Einbringen in das elektrische Feld gegeneinander verschoben. Es wird ein Dipolmoment induziert, wie man auch auf Abb. 6.7 (aus [2]) an dem NaCl-Kristall

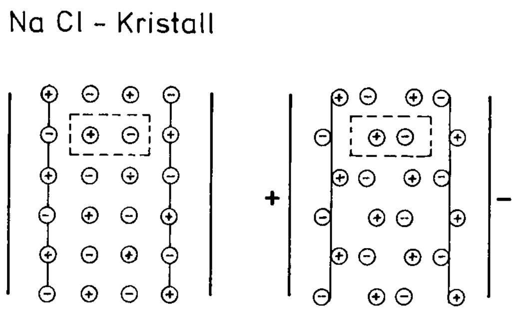


Abbildung 6.7: Dielektrische Polarisation

   erkennen kann (**dielektrische Polarisation**). Die dielektrische Polarisation ist im elektrischen Feld immer wirksam. Beim Abschalten des Feldes fallen die Ladungsschwerpunkte wieder zusammen, und das Dipolmoment und damit auch die dielektrische Polarisation verschwinden.

2. Moleküle, wie z.B. H_2O, besitzen von vornherein ein permanentes Dipolmoment. Solche Moleküle werden beim Anlegen eines elektrischen Feldes (in Konkurrenz

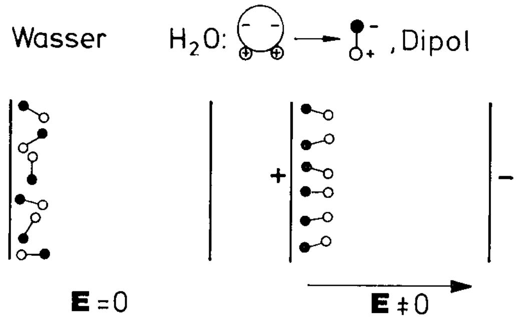


Abbildung 6.8: Orientierungs- oder Paraelektrische Polarisation

zu den Stößen der Wärmebewegung) ausgerichtet (s. Abb. 6.8, aus [2]) - sogen. Orientierungs- bzw. Paraelektrische Polarisation.

Piezoelektrizität

Von besonderem technischen Interesse ist die **Piezoelektrizität**.
Von Piezoelektrizität spricht man, wenn die Deformation eines Kristalles und damit aller Elementarzellen zu einer Polarisation führen. Dazu betrachten wir einen Kristall, der aus einer regelmäßigen Anordnung der in Abb. 6.9 dargestellten Modellmoleküle besteht.

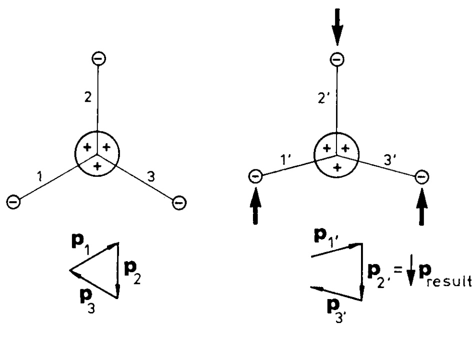


Abbildung 6.9: Piezoelektrizität

Durch Deformation unter uniaxialem Druck (elastischer Spannung) wird ein resultierendes Dipolmoment p_{result} erzeugt. Die Erzeugung von elektrischer Polarisation durch Druck läßt sich sehr einfach am SEIGNETTEsalz (K-Na-Tartrat) demonstrieren:

Versuch

> Beim Zusammendrücken des Kristalls können wir eine Spannung messen.

Derartiges Umsetzen von Druck in elektrische Spannung wird in einer Reihe von Meßwandlern technisch ausgenutzt. Weiterhin dienen piezoelektrische Kristalle als Oszillatoren für elektronische Quarzuhren. Eine allseits bekannte Anwendung findet man in den Feuerzeugen.

Versuch

> Durch plötzlichen Druck (Schlag) haben wir einen Spannungsstoß erzeugt, der ausreichte, um einen Funken zu erzeugen, mit dem man einen Bunsenbrenner entzünden kann.

Elektrostriktion

Einige Stoffe ziehen sich unter dem Einfluß des elektrischen Feldes, aufgrund der gegenseitigen Anziehung der mikroskopischen Dipole, zusammen. Diesen umgekehrten Effekt nennt man **Elektrostriktion**. Man nutzt sie beispielsweise in Ultraschallgeneratoren aus, insbesondere im höheren Frequenzbereich bei hohen Intensitäten.

Versuch

> Wir befestigen auf dem Boden eines mit Wasser gefüllten Gefäßes einen Schwingquarz Q (s. Abb. 6.10, aus [2]), der durch ein angelegtes elektrisches Feld periodisch seine Dicke ändert. Die Schwingungen erregen im Wasser akustische Wellen, die durch Reflexion an dem Metallspiegel M ein stehendes Wellenbild ausbilden. Legt man anstatt des Spiegels eine plankonkave Linse L in das Wasser, so werden die Wellen auf einen Punkt auf der Oberfläche fokussiert und führen dort zu einem "Springbrunneneffekt".

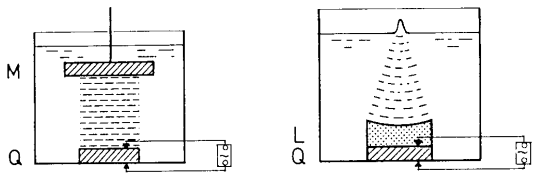


Abbildung 6.10: Versuch zur Elektrostriktion

Ferroelektrika

Eine weitere wichtige Klasse von Materialien, bei denen die dielektrische Polarisation eine wichtige Rolle spielt, bilden die **Ferroelektrika**. Dieser Name ist etwas unglücklich gewählt, denn er hat nichts mit Eisen (Ferrum) zu tun, aber er ist schon seit langer Zeit eingeführt. Die Ferroelektrika haben eine ungewöhnlich hohe Permitivitätszahl (ε_r bis 10 000), die aber nicht konstant ist und außerdem sehr von der Vergangenheit des Stoffes abhängt. Sie zeigen ein ähnliches Verhalten wie magnetische Größen im Magnetfeld. Dies ist der Grund für die Übernahme des ähnlichen Namens. Der älteste und bekannteste Stoff der Ferroelektrika wurde von dem französischen Apotheker P. SEIGNETTE (um 1672) entdeckt. Es ist das weinsaure Salz $KNaC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$ (SEIGNETTEsalz), daß uns schon als Piezoelektrikum begegnet ist. Noch ein bekannter Vertreter dieser Gruppe ist Bariumtitanat ($BaTiO_3$). An ihm soll das charakteristische Verhalten der Ferroelektrika demonstriert werden.

Versuch

Wir geben das Bariumtitanat in einen Probenkondensator C_p, der in Reihe zu einem Vergleichskondensator C_1 geschaltet ist, so daß zu jedem Zeitpunkt t auf beiden Kondensatoren die gleiche Ladungsmenge vorhanden ist. Somit sind die Messungen von U_1 und U_p synchronisiert. Gibt man diese beiden Spannungen auf ein Oszilloskop, so kann man D als Funktion von E_m darstellen. Dies ist möglich, denn es ist

$$U_1 = d_1 \cdot E_o = d_1 \frac{1}{\varepsilon} D = \text{const.} \cdot D \qquad \Rightarrow \qquad D \sim U_1$$

$$U_p = d_p \cdot E_m = \text{const.} \cdot E_m \qquad \Rightarrow \qquad E_m \sim U_p$$

$$\text{Damit ist} \qquad D = f(E_m) \sim U_P = f(U_1).$$

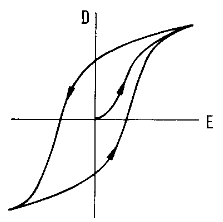


Abbildung 6.11: Hysterese eines Ferroelektrikums

Die ferroelektrischen Stoffe zeigen ebenso wie die ferromagnetischen eine **Hysterese** (s. Abb. 6.11, entnommen aus [1]). In Bariumtitanat findet man einen bistabilen Dipol in der

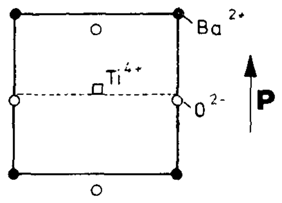


Abbildung 6.12: Bariumtitanat

Elementarzelle. Die Orientierung des Dipols hängt von der Richtung der Verschiebung der Ti- und O- Ionen gegenüber dem Ba- Gitter ab (Abb. 6.12, aus [2]). Diese Dipole führen zur Ausbildung von Domänen mit fester Dipolrichtung. Bei E = 0 kommen Domänen beider Polarisationsrichtungen in gleichem Maße vor, während bei einem angelegten äußeren Feld E $\neq$ 0 einige Domänen auf Kosten anderer anwachsen. Bei großen Feldern sind schließlich alle Domänen gleich orientiert, es tritt Sättigung ein. Bei einer Temperaturerhöhung über den kritischen Wert hinaus wird die Domänenbildung infolge des anliegenden E-Feldes auf Grund der anwachsenden Temperaturerhöhung zerstört (s. Abb. 6.13, aus [2]).

Abbildung 6.13: Domänenbildung

Kapitel 7

Energie des elektrischen Feldes

Wir gehen von zwei parallelen neutralen Metallplatten aus und bringen von einer der Platten z.B. negative Ladung auf die andere, so daß positive Ladung zurückbleibt. Bei diesem Vorgang baut sich eine Spannung (Potential) auf, die bei jedem weiteren Ladungstransport überwunden werden muß. Die dabei aufzubringende Energie ist

$$\mathrm{dW_{12} = U\, dQ = U\, C\, dU} = \varphi\, \mathrm{C\, d}\varphi.$$

Die gesamte, zum Laden des Kondensators benötigte Energie beträgt dann

$$\mathrm{W_{12}} = \int_{\varphi_1=0}^{\varphi_2=\mathrm{U}} \mathrm{dW_{12}} = \int_0^{\mathrm{U}} \varphi\, \mathrm{C\, d}\varphi = \frac{1}{2}\, \mathrm{C\, U^2}.$$

Mit Hilfe der Relation Q = C U läßt sich die Gleichung weiter umschreiben.

Energie eines Kondensators
$$\boxed{\mathrm{W_{12}} = \frac{1}{2}\, \mathrm{C\, U^2} = \frac{1}{2}\, \frac{\mathrm{Q^2}}{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}\, \mathrm{Q\, U}} \tag{7.1}$$

Betrachten wir nun als Beispiel den Plattenkondensator etwas genauer. Es war E = U/d und $\mathrm{C} = \varepsilon_0\, \mathrm{A/d}$ für $\mathrm{d^2} \ll \mathrm{A}$. Das Feld nimmt das Volumen V = A d ein. Es ist dann:

$$\mathrm{W} = \frac{1}{2}\, \mathrm{C\, U^2} = \frac{1}{2}\, \varepsilon_0 \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{d}}\, \mathrm{E^2\, d^2} = \frac{1}{2}\, \varepsilon_0\, \mathrm{E^2\, A\, d} = \frac{1}{2}\, \varepsilon_0\, \mathrm{E^2\, V}$$

Der letzte Teil der Gleichung enthält keine Besonderheiten des Plattenkondensators mehr. Dies bedeutet, daß sie allgemein in jedem beliebigen elektrischen Feld gilt.

Energie eines beliebigen elektrischen Feldes
$$\boxed{\mathrm{W} = \frac{1}{2}\, \varepsilon_0\, \mathrm{E^2\, V}} \tag{7.2}$$

Führt man nun noch die **Energiedichte w** ein, so erhält man:

Energiedichte eines beliebigen elektrischen Feldes
$$\boxed{\mathrm{w} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{V}} = \frac{1}{2}\, \varepsilon_0\, \mathrm{E^2}} \tag{7.3}$$

Energiedichte im Dielektrikum

Ohne Dielektrikum gilt im Kondensator $W_0 = 1/2\, C_0\, U^2 = 1/2\, \varepsilon_0\, E^2\, V$. Führt man nun ein Dielektrikum ein, so gilt $C = \varepsilon\, C_0$ und damit ist die Energie im Kondensator mit Dielektrikum

$$W = \frac{1}{2}\, C\, U^2 = \frac{1}{2}\, \varepsilon\, C_0\, U^2 = \varepsilon\, W_0 = \varepsilon \frac{1}{2}\, \varepsilon_0\, E^2\, V.$$

Damit ist die

Energiedichte mit Dielektrikum $$\boxed{w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\, \varepsilon_0\, \varepsilon\, E^2 = \frac{1}{2}\, E\, D} \qquad (7.4)$$

Kapitel 8

Elektrische Stromstärke

8.1 Der elektrische Strom

In der Elektrostatik haben wir uns mit ruhenden Ladungen beschäftigt. Nun wollen wir uns mit einem anderen Teilgebiet befassen, nämlich der Physik der bewegten Ladungen, der Elektrodynamik.

Versuch

> Die Platten eines geladenen Kondensators werden über einen feuchten Papierstreifen miteinander verbunden. Dieser Leiter hat nun nicht mehr überall das gleiche Potential. Entlang des Leiters ist ein Potentialgefälle $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d\,x}$ verschieden von null, und damit existiert ein elektrisches Feld $\mathrm{E} = -\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d\,x}$. Unter dem Einfluß des Feldes kommt es zu einer Ladungsbewegung im Leiter. Man sagt, es fließt ein Strom.
> Ebenso findet ein Ladungstransport statt, wenn die Luft zwischen den Platten mit einer Flamme leitend gemacht wird.

Die bewegte elektrische Ladung bezeichnet man als **elektrischen Strom**. Den Betrag des elektrischen Stromes nennt man die **Stromstärke I**.
Pro Zeitintervall dt werden $\mathrm{d(N \cdot e)}$ Ladungen durch den Querschnitt F des Leiters transportiert. Man definiert daher die Stromstärke I als die pro Zeiteinheit durch den Querschnitt eines Leiters tranportierte Ladung (s. Abb. 8.1, aus [10]).

$$\text{Elektrische Stromstärke} \quad \boxed{\mathrm{I} = \frac{\mathrm{d(N \cdot e)}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dt}} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}}} \tag{8.1}$$

Die Einheit der Stromstärke ist nach dem französisschen Physiker A. M. AMPERE (1775–1839) benannt und eine Grundeinheit im SI.

$$[\mathrm{I}] = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Sekunde}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} = \mathrm{A} = \text{Ampere}.$$

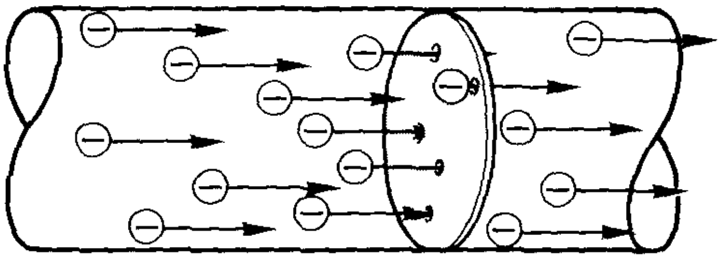


Abbildung 8.1: Bewegte Ladungen im einem Leiter

Betrachten wir noch einmal den Einstiegsversuch. Was ist in dem Leiter geschehen, mit dem wir die Kondensatorplatten verbunden haben? Die Elektronen bewegen sich unter dem Einfluß des elektrischen Feldes $\vec{\mathrm{E}}$. Auf sie wirkt eine Kraft

$$\vec{\mathrm{F}} = \mathrm{q}_- \cdot \vec{\mathrm{E}} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{a}.$$

Somit bewegen sie sich mit einer Geschwindigkeit

$$\vec{\mathrm{v}}_- = \vec{\mathrm{a}} \cdot \mathrm{t} = \mathrm{q}_- \frac{\vec{\mathrm{E}}}{\mathrm{m}}\, \mathrm{t},$$

d. h. v_- nimmt linear mit der Zeit zu.

Betrachten wir dazu ein Beispiel:
Durch einen Kupferdraht von $1\,\mathrm{mm}^2$ fließe ein Strom von 10 A. Dieser Draht befinde sich in einem elektrischen Feld von $\mathrm{E} = 0,17\ \mathrm{V/m}$ und es ist $|\mathrm{q}_-| = \mathrm{e} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C und $\mathrm{m}_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg. Damit ist

$$\mathrm{v}_- \simeq 3 \cdot 10^{10}\, \mathrm{t},$$

d. h. für $\mathrm{t} = 1\,\mathrm{ms}$ ist $\mathrm{v}_- = 3 \cdot 10^7 \mathrm{m/s} \simeq 1/10$ der Lichtgeschwindigkeit. Dies ist offensichtlich unsinnig!!!

Wir müssen uns also ein anderes Bild von der Elektronenbeweglichkeit machen. In Materialien können Teilchen nämlich nur eine Zeit τ frei fliegend beschleunigt werden, bevor sie gegen schwingende Gitterbausteine, gegen Kristallfehler etc. stoßen und dabei ihre kinetische Energie abgeben und ihre Richtung verlieren. Dann werden sie wieder während einer mittleren Zeit τ erneut beschleunigt usw. Die bei den Stößen abgegebene kinetische Energie ist dabei die im Leiter erzeugte Stromwärme (s. Abb. 8.2, aus [7]).

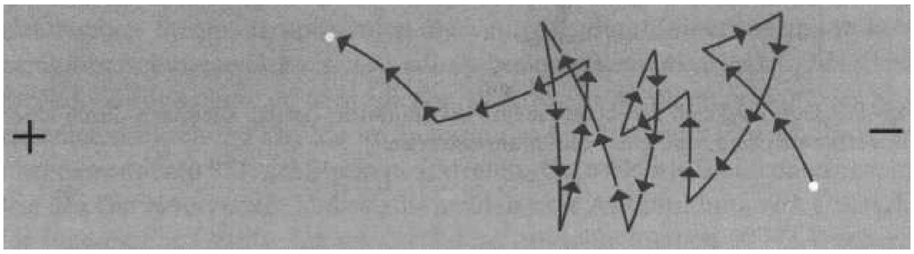


Abbildung 8.2: Elektronenbewegung

Die charakteristische freie Flugzeit, d.h. die Zeit zwischen zwei Stößen, wird **mittlere Stoßzeit τ** oder auch **Relaxationszeit** genannt. Die sich einstellende mittlere Geschwindigkeit

$$\mathrm{v} = \mathrm{a} \cdot \tau = \mathrm{q}\,\frac{\vec{\mathrm{E}}}{\mathrm{m_e}}\,\tau$$

wird als **Driftgeschwindigkeit** $\mathrm{v_D}$ bezeichnet.

Wie groß ist die Driftgeschwindigkeit?

Dazu betrachten wir einen Leiterquerschnitt der Fläche A und die Ladungsmenge, die pro Zeiteinheit durch ihn hindurchtritt. Es fließe ein Strom $\mathrm{I = dQ/dt}$, damit ist die Ladung $\mathrm{dQ = I\,dt}$. Ein Elektron legt in der Zeit dt den Weg $\mathrm{ds = v_D \cdot dt}$ zurück. Nehmen wir

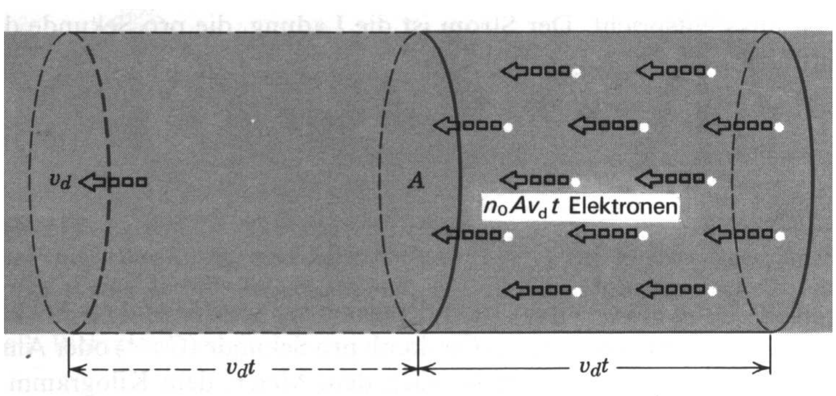


Abbildung 8.3: Die Driftgeschwindigkeit

weiterhin an, es befinden sich n Elektronen pro Volumeneinheit im Leiter. Dann befinden sich im Volumen V = A ds insgesamt n A · ds Elektronen. Alle diese Elektronen treten durch den Querschnitt A hindurch (s. Abb. 8.3, entnommen aus [7]). Damit fließt eine Ladung von

$$\begin{aligned} \mathrm{dQ} &= \text{Anzahl der Ladungsträger multipliziert mit ihrer Ladung} \\ &= \mathrm{n \cdot A \cdot ds \cdot q = n \cdot q \cdot A \cdot v_D \cdot dt}, \end{aligned}$$

und ein Strom

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{n \cdot q \cdot A \cdot v_D}.$$

Da die Geschwindigkeit der Driftbewegung der Elektronen von der Feldstärke E abhängt, führt man den Begriff der **Beweglichkeit** μ ein:

$$\text{Beweglichkeit}\,\mu = \frac{\text{Driftgeschwindigkeit}\,\mathrm{v_D}}{\text{elektrische Feldstärke}\,\mathrm{E}}.$$

Wenn die Stromverteilung im Draht nicht gleichförmig ist, dann betrachtet man besser die **Stromdichte j.**

$$\boxed{\mathrm{j} = \frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{dA}} = \mathrm{n \cdot q \cdot v_D}} \qquad \textbf{Stromdichte in Metall} \tag{8.2}$$

Allgemein tragen positive und negative Ladungsträger zur Stromleitung bei, z.B. bei Elektrolyten. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} & \mathrm{j} &&= \mathrm{q_+ n_+ v_+ + q_- n_- v_-} \\ \text{oder vektoriell} \quad & \vec{\jmath} &&= \mathrm{q_+ n_+ \vec{v}_+ + q_- n_- \vec{v}_-} \end{aligned}$$

Beachte: Historisch werden $\vec{\jmath}$ und $\vec{\mathrm{I}}$ in Richtung der positiven Ladungen gezählt!

Wie groß sind $\mathrm{v_D}$ und τ?
Wir betrachten wieder den Kupferdraht von Seite 86. Aus der Atomphysik weiß man, daß jedes Atom ein $\mathrm{e^-}$ zur Leitung beträgt, d.h.

$$\mathrm{n} = \frac{\text{Zahl der Atome}}{\text{Volumen}} = \frac{6 \cdot 10^{23}\,\frac{\text{Atome}}{\text{Mol}}\,8,9\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm^3}}}{63,5\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{Mol}}} = 8,5 \cdot 10^{22}\,\mathrm{cm^{-3}},$$

$$\text{damit ist} \qquad \mathrm{v_D} = \frac{\mathrm{j}}{\mathrm{e \cdot n}} = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{e \cdot n \cdot A}} \simeq 7 \cdot 10^{-4}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\text{und} \quad \tau = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{e \cdot E}}\,\mathrm{v_D} \simeq 2 \cdot 10^{-14}\mathrm{s}.$$

Beide Werte dieses Beispiels sind in der Tat typische Werte für $\mathrm{v_D}$ und τ.

8.2 Energie und Leistung des elektrischen Stromes

Bei einer Kondensatorentladung, beispielsweise durch verbinden der beiden Platten mit einem Draht, fließt die gespeicherte Ladung von einer Kondensatorplatte durch den Draht zur anderen Platte. Die vor dem Entladen im Kondensator gespeicherte Energie geht bei den Stößen der Elektronen mit dem Metallgitter des Drahtes in Wärme über. An den Enden des Drahtes besteht die Potentialdifferenz $\varphi_2 - \varphi_1 = \mathrm{U}$, die von der Ladung $\mathrm{dQ} = \mathrm{I\,dt}$ durchlaufen wird. Dadurch wird die Energie

$$\mathrm{W} = \mathrm{U\,dQ} = \mathrm{U\,I\,dt}$$

als Wärme frei. Man nennt sie **Joulesche Wärme**. Die elektrische Energie kann also in Wärme umgewandelt werden, aber auch in jede andere Form der Energie wie Arbeit, mechanische, kinetische oder potentielle Energie.

Allgemein wird in der Physik die pro Zeiteinheit verrichtete Arbeit als **Leistung** bezeichnet. Damit ist

$$\textbf{Leistung} \qquad \boxed{\mathrm{P} = \frac{\mathrm{dW}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{U\,I.}} \tag{8.3}$$

Die Einheiten von Energie und Leistung des elektrischen Stroms sind:

$$[\mathrm{P}] = \mathrm{V\,A} = \mathrm{Watt} = \mathrm{W} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}},$$

$$[\mathrm{W}] = \mathrm{Ws\,(Wattsekunde)} = \mathrm{J} = \mathrm{Nm}.$$

Beispiel:
In einer 100 W Lampe, die eine Betriebsspannung von 220 V hat, fließt also ein Strom $\mathrm{I} = 0,45\mathrm{A}$.

Kapitel 9

Widerstand

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, daß der Ladungstransport durch verschiedene Phänomene gehemmt wird. Man sagt, daß der Leiter dem elektrischen Feld oder dem Strom einen **Widerstand** entgegensetzt und definiert:

$$\textbf{elektrischer Widerstand} \qquad \boxed{R = \frac{U}{I} = \frac{\text{Spannung}}{\text{Strom}}.} \tag{9.1}$$

Die Einheit des Widerstandes ist das Ohm, benannt nach G. S. Ohm (1798 - 1854), der diesen Zusammenhang 1826 als erster entdeckt hat.

$$[R] = \frac{[U]}{[I]} = \frac{V}{A} = \Omega = \text{Ohm}.$$

Definition: Der elektrische Widerstand R beträgt 1 Ohm, wenn zwischen zwei Punkten eines metallischen Leiters beim Spannungsabfall von 1 Volt genau 1 Ampere fließt.
Der Kehrwert des Widerstandes R heißt

$$\textbf{elektrischer Leitwert} \qquad \boxed{G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U}.} \tag{9.2}$$

Seine Einheit ist

$$[G] = \frac{[1]}{[R]} = \Omega^{-1} = \text{Siemens} = \text{S}.$$

9.1 Widerstand eines Metalldrahtes

Wir wollen nun für einfache metallische Leiter die Äbhängigkeit des Widerstandes von der Länge l und des Querschnitts A bei konstanter Temperatur T experimentell bestimmen.

Versuch

Im ersten Versuchsteil messen wir bei konstantem Strom die Spannung an einem Einfachdraht, einem Zweifachdraht und einem Vierfachdraht, also an Drähten mit einfachem, doppeltem und vierfachem Durchmesser.
Im zweiten Teil messen wir bei konstantem Strom die Spannung am Einfachdraht mit voller, halber und viertel Länge.

Wir beobachten folgende Zusammenhänge:

$$\mathrm{R} \sim \mathrm{l} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{R} \sim 1/\mathrm{A}.$$

Dies läßt sich zusammenfassen zu

$$\mathrm{R} \sim \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{A}}.$$

Die Proportionalität wird mit der Konstanten ρ beschrieben, die **spezifischer Widerstand** heißt. Damit ist

$$\boxed{\mathrm{R} = \rho\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{A}}}. \tag{9.3}$$

Der spezifische Widerstand ist eine Materialkonstante. In der folgenden Tabelle ist der spezifische Widerstand einiger Materialien bei Zimmertemperatur aufgeführt:

Leiter	Silber	$1,47 \cdot 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$
	Kupfer	$1,72 \cdot 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$
	Aluminium	$2,63 \cdot 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$
	Konstantan	$4,9 \cdot 10^{-7}\ \Omega\mathrm{m}$
Halbleiter	Germanium	$6,0 \cdot 10^{-1}\ \Omega\mathrm{m}$
	Silizium	$2,3 \cdot 10^{+3}\ \Omega\mathrm{m}$
Isolatoren	Bernstein	$5,0 \cdot 10^{14}\ \Omega\mathrm{m}$
	Glas	$10^{10} - 10^{15}\ \Omega\mathrm{m}$
	Holz	$10^{8} - 10^{11}\ \Omega\mathrm{m}$

Analog zum Leitwert ist der Kehrwert des spezifischen Widerstands die

elektrische Leitfähigkeit $$\boxed{\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{RA}}}\quad . \tag{9.4}$$

Damit können wir schreiben

$$\mathrm{U} = \mathrm{R} \cdot \mathrm{I} = \rho\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{A}}\,\mathrm{I} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{E} = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{l}} = \rho\,\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{A}} = \rho \cdot \mathrm{j},$$

vektoriell gilt dann:

$$\boxed{\vec{\mathrm{E}} = \rho \cdot \vec{\mathrm{j}} \qquad \text{oder} \qquad \vec{\mathrm{j}} = \sigma \cdot \vec{\mathrm{E}}} \qquad \textbf{Ohmsches Gesetz} \tag{9.5}$$

Für Metalle gilt

$$\mathrm{j} = \mathrm{n} \cdot \mathrm{e} \cdot \mathrm{v_D} = \sigma\, \mathrm{E} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = \mathrm{n} \cdot \mathrm{e}\, \frac{\mathrm{v_D}}{\mathrm{E}} = \mathrm{n} \cdot \mathrm{e} \cdot \mu.$$

Bei konstanter Beweglichkeit μ folgt dann:

$$\mu = \text{konst.} \Rightarrow \sigma = \text{konst.} \Rightarrow \mathrm{R} = \text{konst.}$$

Das OHMsche Gesetz ist ein **empirisches Materialgesetz**! Es gilt sehr gut für Metalle und Elektrolyte bei konstanten Temperaturen. Die Proportionalität von U und I ist jedoch kein grundlegendes Naturgesetz und keinesfalls allgemein gültig.

9.2 Temperaturabhängigkeit von R

Allgemein nimmt der Widerstand von Metallen bei Temperaturerhöhung zu. Bei verschiedenen Legierungen ist die Temperaturabhängigkeit des Widerstandes nur sehr gering. Im Temperaturbereich von t = 0° C und t = 100° C ist die Abhängigkeit des spezifischen Widerstands ρ von der Temperatur t für metallische Leiter, einschließlich Graphit, in guter Näherung linear:

$$\rho = \rho_0\, (1 + \alpha\, \mathrm{t}).$$

α ist der **Temperaturkoeffizient** des Widerstandes. Er ist positiv für Metalle (PTC–Leiter) und negativ für Halbleiter (NTC– Leiter).

Versuch

> Wir erhitzen eine Metallspirale und beobachten, daß bei konstanter Spannung der Strom durch die Spirale kleiner wird.
> Nun erhitzen wir eine Si- Probe und beobachten hier, wie der Strom bei konstanter Spannung größer wird.

Dies läßt leicht verstehen: In Metallen ist die Ladungsträgerdichte n fest vorgegeben, denn alle Valenzelektronen der Metallatome sind als "Elektronengas" durch das Gitter der Ionenrümpfe beweglich (s. Abb. 9.1, entnommen aus [5]). Je heißer aber das Metall wird, desto stärker schwingen die Ionenrümpfe, und um so mehr behindern sie die Elektronenbewegung. Die mittlere freie Weglänge τ nimmt also ab und da

$$\mu = \frac{\mathrm{v_D}}{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{m_e}}\, \tau$$

gilt, nimmt auch die Beweglichkeit μ mit steigender Temperatur ab. In Halbleitern ist dies auch der Fall. Eine viel stärkere, steigende Temperaturabhängigkeit hat hier aber die Ladungsträgerdichte n, denn die Träger müssen erst mittels thermischer Energie aus

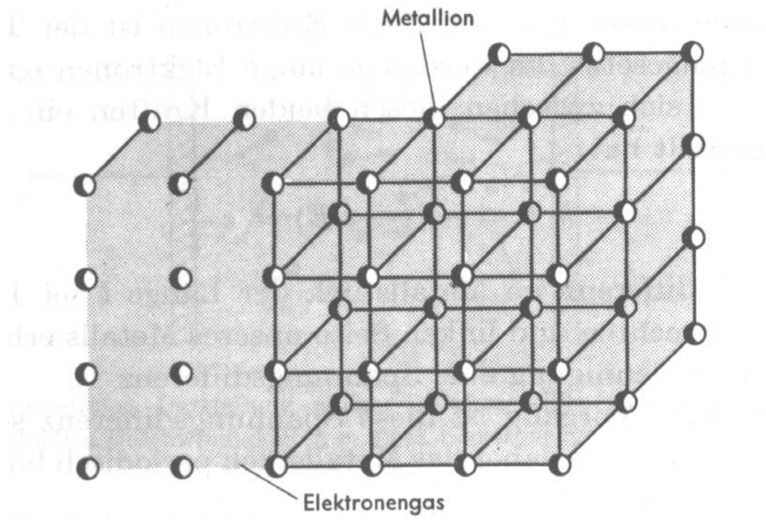


Abbildung 9.1: “Elektronengas”

ihrem normalerweise gebundenen Zustand in einen beweglichen angehoben werden. Wie dies genau geschieht wird später erklärt.
Um zu zeigen, daß der Widerstand in Isolatoren bei steigender Temperatur abnimmt, wird folgender Versuch durchgeführt:

Versuch

> Glas leitet bei Zimmertemperatur nicht. Wird es jedoch erhitzt, so wird das Glas leitend und schmilzt sogar bei Entfernen der Flamme, da es sich durch den Stromfluß weiter erwärmt.

Das Verhalten der Isolatoren wird erst in der Festkörperphysik verständlich. An dieser Stelle sei nur gesagt, daß in Isolatoren bei Zimmertemperatur keine freien Elektronen vorhanden sind. Sie müssen erst eine Energielücke ΔE überwinden, deshalb gibt es bei hohen Temperaturen mehr Elektronen. Es gilt:

$$\rho(T) \sim e^{\Delta E/kT} \Rightarrow \ln\rho \sim \frac{1}{T}.$$

Zusammenhang zwischen elektrischer Leitfähigkeit und Wärmeleitfähigkeit

Gute Wärmeleiter sind auch gute elektrische Leiter (siehe Metalle), schlechte Wärmeleiter sind auch schlechte elektrische Leiter (siehe Isolatoren). Bei konstanter Temperatur stehen Wärmeleitfähigkeit und elektrische Leitfähigkeit in einem konstanten Verhältnis zueinander. Es gilt das

$$\textbf{Wiedemann – Franzsche Gesetz} \qquad \boxed{\text{Wärmeleitfähigkeit} = \mathrm{a} \cdot \mathrm{t} \cdot \sigma}, \tag{9.6}$$

wobei die Konstante a für alle Metalle etwa gleich ist.

9.3 Supraleitung

Im Bereich tiefer Temperaturen sinkt der spezifische Widerstand ρ für reine Metalle mit abnehmender Temperatur proportional zu T^5. In der Nähe des absoluten Nullpunktes gilt dieses Verhalten jedoch nicht mehr. Hier strebt ρ nicht wie zu erwarten gegen Null, sondern nähert sich einem von Null verschieden endlichen Widerstand, dem sogenannten Restwiderstand ρ_{Rest} (s. Abb. 9.2, entnommen aus [2]). Dieser ist etwa um den Faktor 1000 kleiner als der Widerstand ρ_0 bei t = 0° C ($\rho_{\mathrm{Rest}} = 10^{-3}\,\rho_0$). Er läßt sich durch die

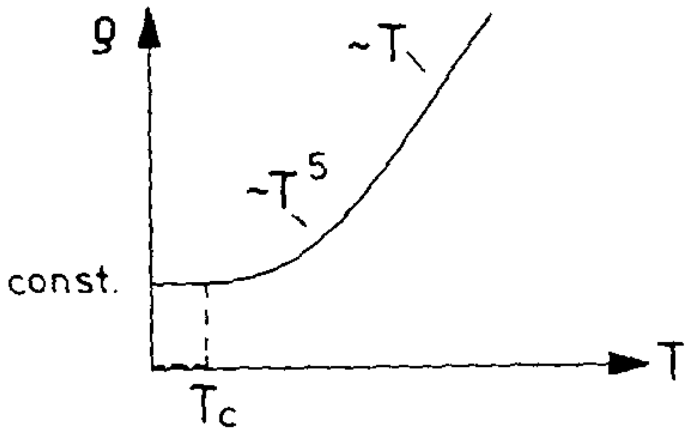


Abbildung 9.2: Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstands bei Metallen

Verunreinigungen und Störungen des Kristallgitters erklären, an denen die Elektronen gestreut werden. Die thermische Bewegung des Gitters spielt hier keine Rolle mehr.

Unterhalb einer bestimmten Temperatur zeigen einige Metalle und Keramiken hingegen ein völlig anderes Verhalten. Bei einer bestimmten, für das jeweilige Material charakteristischen Temperatur T_c, **Sprungtemperatur** oder **kritische Temperatur** genannt, fällt der Widerstand auf einen unmeßbar kleinen Wert ab. Unterhalb der kritischen Temperatur besitzen diese Stoffe keinen elektrischen Widerstand mehr. Ein bei dieser Temperatur vorhandener Strom fließt in einem solchen Leiter auch dann dauernd weiter (in Experimenten schon über Jahre hinweg !!), wenn die Stromquelle abgeschaltet (überbrückt) wird. Man sagt: diese Materialien befinden sich im Zustand der **Supraleitung**. Diese Erscheinung wurde 1911 von H. KAMERLINGH- ONNES (1853- 1926) an Quecksilber entdeckt, nachdem es ihm drei Jahre vorher gelungen war, Helium als letztes der Edelgase zu verflüssigen und damit den Temperaturbereich in der Nähe des absoluten Nullpunktes ($1\text{K} - 10\text{K}$) zu erschließen.

Versuch

> Wir halten einen Supraleiter, durch den ein konstanter Strom fließt, in flüssigen Stickstoff. Wir beobachten, daß die Spannung gegen Null geht, d.h. der Widerstand verschwindet.

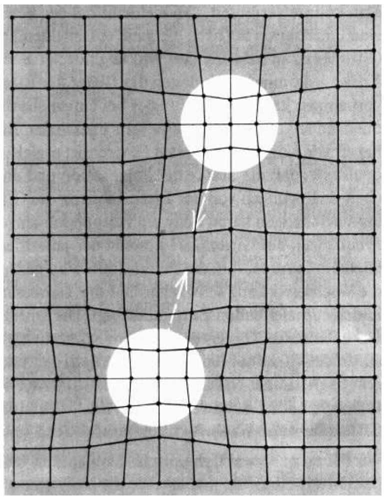


Abbildung 9.3: Veranschaulichung der Cooper-Paare

Nach der BCS- Theorie (von J. BARDEEN, L. COOPER und J.R. SCHRIEFFER 1957 entwickelt; Physiknobelpreis 1972) bilden je zwei Leitungselektronen eines supraleitenden Materials unterhalb der Sprungtemperatur sogenannte **Cooper-Paare**. Dies kann man sich anschaulich so erklären: In der Umgebung, in der sich ein Elektron aufhält, deformiert es das Kristallgitter, da die positiven Rumpfionen von ihm angezogen werden. Diese Ansammlung von Rumpfionen wiederum zieht nun ein weiteres Elektron an. Die resultierende effektive Anziehungskraft ist größer als die abstoßende Kraft zwischen den Elektronen. Dies ist so ähnlich, wie wenn man zwei Kugeln auf eine Membran legt. An den Stellen, an denen sie liegen, entstehen Mulden, sie deformieren also die Membran. Sind die Mulden in ausreichend kleinem Abstand, so vereinen sie sich zu einer Mulde,

in der sich beide Kugeln befinden. Natürlich hinkt dieser Vergleich, denn die Kugeln auf der Membran sind statisch, während sich die Elektronen mit großen Geschwindigkeiten bewegen. Siehe auch Abb. 9.3, entnommen aus [14].
Die Cooper-Paare befinden sich nun in dem Zustand der kleinst möglichen Energie. Sie können sich durch das Metallgitter bewegen, daß heißt, der elektrische Widerstand verschwindet. Ihren Zustand halten die Cooper-Paare so lange bei, bis die Temperatur die Sprungtemperatur wieder übersteigt. Dann werden sie getrennt und treten wieder als normale Leitungselektronen auf.

Bis vor etwa 10 Jahren lagen alle Sprungtemperatuen unterhalb von 30 K. Im Jahr 1986 entdeckten A. Müller und J. Bednarz die Supraleitung in Y-Ba-Cu-Oxyd mit einer Sprungtemperatur von 35 K. Sie erhielten dafür 1987 den Nobelpreis. Ein Jahr später fand man weitere, sogenannte **warme Supraleiter**, wie Y-Ba_2-Cu_3-O_7, das bei $T = 95\,K$ supraleitend wird oder Tl-Ca_2Ba_2-Cu_3-O_{10}, welches bei $T = 125\,K$ supraleitend wird.
An Supraleitern beobachtet man folgende weiteren Phänomene:

1. Ein Magnetfeld hat einen wesentlichen Einfluß auf die Supraleitung. Oberhalb einer für jeden Supraleiter charakteristischen magnetischen Feldstärke tritt auch bei tiefster Temperatur keine Supraleitung mehr auf. Bei einer magnetischen Feldstärke unterhalb der kritischen Feldstärke tritt Supraleitung erst bei einer Temperatur unterhalb der kritischen Temperatur, wie sie ohne Magnetfeld ist, auf. Diese Erscheinung hat zur Folge, daß in Supraleitern nicht beliebig große Ströme fließen können, denn bei einer bestimmten Stromstärke zerstört das Magnetfeld des Stromes selbst die Supraleitfähigkeit.

2. In einen Supraleiter dringt kein Magnetfeld ein (Meissner– Ochsenfeld– Effekt). Bei Temperaturen oberhalb der kritischen Temperatur durchdringt ein Magnetfeld zunächst den Leiter. Kühlt er bis unterhalb der kritschen Temperatur ab, so werden die magnetischen Kraftlinien aus ihm herausgedrängt.

3. Die Supraleitung hängt nicht vom Atomaufbau, sondern von der Kristallstruktur des Materials ab. So unterscheiden sich beispielsweise das weiße und das graue Zinn im Kristallaufbau, und nur das weiße Zinn wird supraleitend.

4. Verschiedene Isotope des gleichen Elements haben auch verschiedene Sprungtemperaturen.

Supraleiter werden als Stromleiter und zur Erzeugung großer Magnetfelder, z.B. in Teilchenbeschleunigern, eingesetzt.

9.4 Technische Widerstände

Dieser kleine Exkurs soll die verschiedenen Arten von Widerständen und ihre Anwendung erläutern. Man unterscheidet zwischen festen und einstellbaren Widerständen.

- Die **Festwiderstände** können weiter unterteilt werden in lineare und nichtlineare Widerstände.
  - Die **linearen Widerstände** genügen dem OHMschen Gesetz, d.h. bis auf ihr Temperaturverhalten. Sie werden aus Draht (Nicklin, Konstantan) oder aus Schichtmaterialien wie Kohlenstoff, Metallen oder Edelmetallen hergestellt und überwiegend in der Nachrichten-, Meß-, Daten- und Starkstromtechnik sowie bei extremen Klimabeanspruchungen, zur Temperaturkompensation, als Sicherheitswiderstand und als Vorwiderstand bei hohen Spannungen eingesetzt. Der Widerstandswert und die Toleranzen werden häufig als Farbringe aufgebracht.
  - Bei den **nicht-linearen Widerständen** ist der Widerstand von folgenden physikalischen Größen abhängig:

    Temperatur: Es gibt Heißleiter und Kaltleiter. Ein Heißleiter zeichnet sich durch einen fallenden Widerstand bei steigender Temperatur aus (**N**egative **T**emperature **C**oefficient). Sie werden als Temperaturfühler, zur Messung von Strömungsgeschwindigkeiten oder zur Spannungsstabilisierung verwendet und bestehen aus einer halbleitenden Oxidkeramik. Bei Kaltleitern steigt der Widerstand stark bei zunehmender Temperatur (**P**ositive **T**emperature **C**oefficient). Sie werden als Temperaturfühler, als Thermostat und zur Stromstabilisierung verwendet und bestehen aus Metalldrähten.

    Spannung: VDR– Widerstände oder Variatoren (**V**oltage **D**ependent **R**esistance) sind stark spannungsabhängig und werden zur Spannungsstabiliesierung und zur Stoßspannungsbegrenzung eingesetzt.

    Licht: Hierbei handelt es sich um lichtempfindliche Widerstände (**L**ight **D**ependent **R**esistance), die z.B. in Belichtungsmessern eingesetzt werden.

- Die **einstellbaren Widerstände** ändern den Widerstand entweder linear oder logarithmisch. Linear einteilbare Widerstände werden als Spannungsteiler (Potentiometer oder Trimmer) eingesetzt, logarithmisch verstellbare Widerstände zur Lautstärkeregelung verwendet. Als Werkstoffe werden Draht, Kohleschichten und Keramikträger mit eingebranntem Metalloxid und Glaspulver (Cermet) eingesetzt.

Kapitel 10

Netzwerke

10.1 Die Kirchhoffschen Gesetze

Bisher haben wir den elektrischen Strom in nur einem Leiter betrachtet. Nun wollen wir uns mit der Stromverteilung in einem Leitersystem befassen, in dem die einzelnen stromführenden Leiter zu einem beliebig komplizierten Netz verknüpft sind. Dabei helfen uns folgende Regeln:

Erstes Kirchhoffsches Gesetz

An jedem Verzweigungspunkt (Knotenpunkt) mehrerer Leitungen ist die Summe der auf ihn zufließenden Ströme gleich der Summe der von ihm abfließenden Ströme, kurz (s. Abb. 10.1, entnommen aus [3]):

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{I_i} = 0.$$

Dieses Gesetz folgt aus dem Gesetz der Ladungserhaltung, da in einem Knoten weder Ladung erzeugt noch vernichtet werden kann.

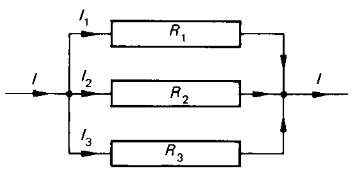


Abbildung 10.1: Knotenregel

Zweites Kirchhoffsches Gesetz

In jedem geschlossenen Teilkreis (Masche) ist die Summe der Spannungen an den Widerständen gleich der Summe der Klemmspannungen der Spannungsquelle (s. Abb. 10.2, aus [3]), kurz:

$$\mathrm{U} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{U_i}.$$

Dieses Gesetz folgt aus dem Energieerhaltungssatz.

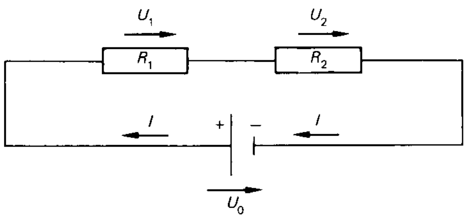


Abbildung 10.2: Maschenregel

Beispiele

1. Reihenschaltung (Serienschaltung) (s. Abb. 10.3, aus [9])
   Durch alle Widerstände fließt der gleiche Strom. Damit fällt an den Widerständen

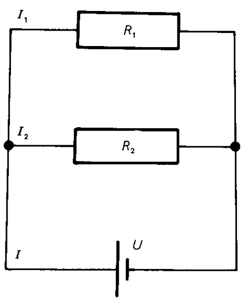


Abbildung 10.3: Reihenschaltung von Widerständen

   die gleiche Spannung ab:

$$\mathrm{U_1 = R_1\, I = R_2\, I = U_2}$$

   Anwendung der Maschenregel liefert

$$\mathrm{U = U_1 + U_2 = R_1\, I + R_2\, I = (R_1 + R_2) I}$$

$$\frac{U}{I} = R = R_1 + R_2$$

Allgemein gilt: Bei einer Serienschaltung addieren sich die Widerstände.

$$\textbf{Serienschaltung} \qquad \boxed{R = \sum_{i=1}^{n} R_i} \tag{10.1}$$

2. Parallelschaltung (s. Abb. 10.4, entnommen aus [9])
   An allen Widerständen liegt die gleiche Spannung an. Es gilt also:

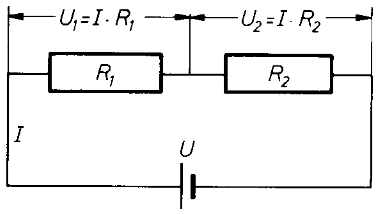


Abbildung 10.4: Parallelschaltung von Widerständen

$$U = R_1 I_1 = R_2 I_2$$

Anwendung der Knotenregel liefert

$$\frac{U}{R} = I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \text{oder} \qquad R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Allgemein gilt: Bei einer Parallelschaltung addieren sich die Kehrwerte der Widerstände.

$$\textbf{Parallelschaltung} \qquad \boxed{\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}} \tag{10.2}$$

3. Übung
   Zur Übung betrachten wir die vier verschiedenen Möglichkeiten, die es gibt, um drei Widerstände zu schalten (s. Abb. 10.5, aus [5]).

   (a) alle drei in Reihe geschaltet: $R = R_1 + R_2 + R_3$

   (b) alle drei parallel geschaltet: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$

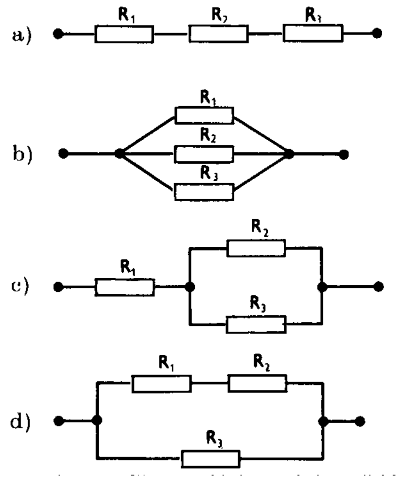


Abbildung 10.5: Vier Möglichkeiten 3 Widerstände zuschalten

(c) zwei parallel, dazu den dritten in Serie geschaltet: $\mathrm{R} = \mathrm{R}_1 + \dfrac{\mathrm{R}_2\,\mathrm{R}_3}{\mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_3}$

(d) zwei in Serie, dazu den dritten parallel geschaltet: $\mathrm{R} = \dfrac{(\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2)\,\mathrm{R}_3}{\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_3}$

Nicht immer lassen sich Schaltungen von Widerständen in eine Kombination von Parallel- und Reihenschaltungen reduzieren, wie man in Abb. 10.6 (entnommen aus [5]) sieht. Hier

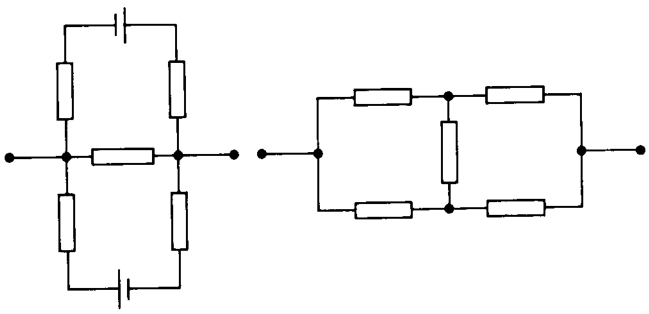


Abbildung 10.6: Irreduzible Netzwerke

muß eine allgemeinere Methode zur Berechnung solcher sogenannter Netzwerke angewandt werden. Solche Netzwerke sind Gegenstand eines selbständigen Gebietes der Elektrotechnik, der sogenannten Netzwerktheorie, und sollen hier nicht weiter diskutiert werden.

10.2 Strom– und Spannungsmessung

10.2.1 Innenwiderstand

Nicht nur Widerstände und Drähte, sondern auch alle übrigen Geräte, haben einen Widerstand, der **Innenwiderstand** genannt wird und mit betrachtet werden muß.
Schließt man eine Spannungsquelle, z.B. eine Batterie, kurz, so fließt ein Strom I, obwohl der Außenwiderstand $R_a = 0$ ist. Dieses Verhalten kann man mit dem zusätzlichen In-

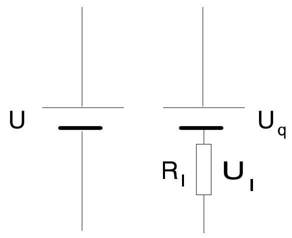


Abbildung 10.7: Ersatzschaltbild

nenwiderstand R_i erklären. Dazu fertigen wir das folgende **Ersatzschaltbild** 10.7 an: Es ist

$$U_q = U_a + U_i = I(R_a + R_i) \qquad \Leftrightarrow \qquad I = \frac{U_q}{R_a + R_i}.$$

Bei Kurzschluß ($R_a = o$) fließt somit noch ein endlicher Strom $I_k = U_q/R_i$. Man kann also aus dem Kurzschlußstrom den Innenwiderstand bestimmen.
An den Klemmen 1 und 2 der Spannungsquelle mißt man je nach Stromentnahme die Spannung

$$U = U_q - U_i = I(R_A + R_i) - R_i\, I = I\, R_a = \frac{U_q}{R_a + R_i}\, R_a = U_q\, \frac{R_a}{R_a + R_i}.$$

Versuch

> Wir messen bei einer alten und bei einer neuen Monozelle die Leerlaufspannung (bei offenem Stromkreis) und die Kurzschlußspannung (bei geschlossenem Stromkreis).

10.2.2 Strommessung

Um die Stromstärke in einem Stromkreis messen zu können, muß das Meßgerät im Stromkreis (Hauptschluß) liegen. Doch anstatt den "wahren" Strom $I = U/R$ zu messen, mißt man

$$I' = \frac{U}{R + R_i} = \frac{U}{R}\, \frac{R}{R + R_i}.$$

Damit der Meßvorgang den zu messenden Strom durch den Innenwiderstand R_i des Amperemeters möglichst nicht beeinflußt, und die volle Spannung am äußeren Widerstand abfallen kann, muß R_i möglichst klein (niederohmig) sein ($R_I < 1\Omega$).
Übersteigt der zu messende Strom den Meßbereich, so kann mit einem weiteren Widerstand der Meßbereich erweitert werden. Dieser Widerstand R_s (Shunt genannt) wird parallel zum Amperemeter (Nebenschluß) geschaltet (s. Abb 10.8, entnommen aus [2]).

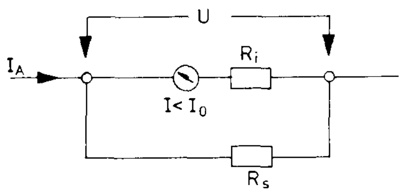


Abbildung 10.8: Strommessung

Sei der Maximalausschlag ohne Meßbereichserweiterung bei einem Strom I_0 und der Innenwiderstand sei R_I. Der Meßbereich soll n-fach erweitert werden, so daß der maximale Ausschlag bei $I_A = n\, I_0$ liegt. Bei konstanter Spannung U ist dann

$$I_0 = \frac{U}{R_i}, \qquad I_a = U\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_s}\right) = n\, I_0 = n\, \frac{U}{R_i}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_s} = n\, \frac{1}{R_i} \Leftrightarrow R_s = \frac{R_i}{(n-1)}.$$

Um den Meßbereich um das zehnfache zu erhöhen, muß man also einen neunmal kleineren Widerstand parallel schalten!

10.2.3 Spannungsmessung

Die heute gebräuchlichen Spannungsmesser sind mit Hilfe des OHMschen Geseztes umgeeichte Amperemeter. Einem Amperemeter wird ein Vorwiderstand $R_v \gg R_i$ vorgeschaltet. Das so entstandene Voltmeter wird in stromführenden Kreisen in den Nebenschluß geschaltet. Durch das Instrument fließt ein Strom I_v und es zeigt die Spannung $U = I_v\, R_v$ (siehe Abb. 10.9) In dem Stromkreis a hat sich aber jetzt die Stromstärke verändert. Ohne das Voltmeter floß ein Strom $I = U/R$, mit Voltmeter liefert die Quelle aber den Strom

$$I' = U\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_v}\right) = R\, I\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_v}\right) = I\left(\frac{R}{R} + \frac{R}{R_v}\right) = I\left(\frac{R_v}{R_v} + \frac{R}{R_v}\right) = I\, \frac{R + R_v}{R_v} > I.$$

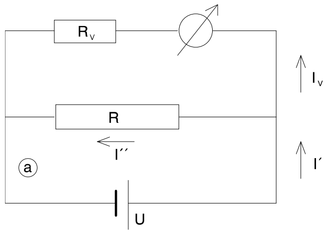


Abbildung 10.9: Spannungsmessung

Um die Verfälschung der Messung möglichst gering zu halten, muß man R_v groß (hochohmig) wählen (Typisch $R_v > 10\,k\Omega$).
Um den Meßbereich eines Voltmeters zu erweitern, läßt man die "überschüssige" Spannung an einem zusätzlich in Serie geschalteten Widerstand abfallen (s. Abb. 10.10, aus

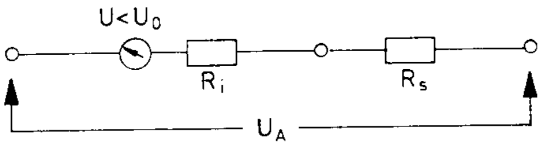


Abbildung 10.10: Meßbereichserweiterung

[2]). Soll der Meßbereich auf $U_a = n\,U_0$ erweitert werden, dann ist

$$U_0 = R_i\,I, \qquad U_a = (R_i + R_s)I = n\,U_0 = n\,R_i\,I$$

$$\Rightarrow (R_i + R_s)I = n\,R_i \Leftrightarrow R_s = (n-1)\,R_i.$$

Um den Meßbereich eines Voltmeters um das zehnfache zu erhöhen, muß man einen neunmal größeren Widerstand in Serie schalten!

10.2.4 Vorwiderstand und Potentiometerschaltung

Wenn ein Verbraucher eine niedrigere Spannung verlangt als in Form einer Spannungsquelle vorliegt, kann man diese auf zwei Arten reduzieren (in der Wechselstromtechnik gibt es noch zahlreiche andere, energetisch sinnvollere Möglichkeiten):

1. Man schaltet einen Vorwiderstand R_v vor den Verbraucher R. Dann teilen sich die Spannungen im Verhältnis R/R_v auf beide auf, da durch beide der gleiche Strom

fließt. Allerdings teilt sich auch die Gesamtleistung auf. Nur ein Teil wird im Verbraucher genutzt.

2. Als **Potentiometer** (Spannungsteiler) bezeichnet man einen Widerstand, bei dem man über einen Schleifkonkakt eine gewünschte Spannung U_a abgreifen kann. Im unbelasteten Fall gilt (s. Abb. 10.11.a):

$$I = \frac{U_1}{R_1 + R_2} \qquad \text{und} \qquad U_x = R_2\, I$$

$$\text{einsetzen liefert :} \qquad U_x = U_1\, \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

d.h., daß sich die Gesamtspannung im Verhältnis des Teilwiderstandes zum Gesamtwiderstand aufteilt.

Beim belasteten Potentiometer muß man beachten, daß sich der Strom I am Mit-

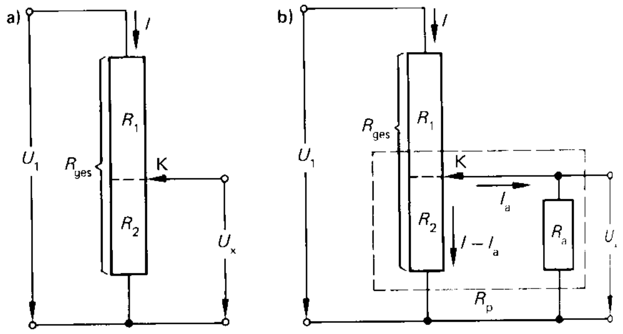


Abbildung 10.11: Unbelasteter und belasteter Spannungsteiler

telabgriff aufteilt (s. Abb. 10.11.b, beide entnommen aus [3]). Durch R_a fließt der Strom I_a und durch R_2 nur noch der Strom $I - I_a$. Da R_2 und R_a parallel geschaltet sind, ist der Gesamtwiderstand

$$R_p = \frac{R_2\, R_a}{R_2 + R_a}.$$

Setzt man diesen anstelle von R_2 in die obige Gleichung ein, so erhält man

$$U'_x = U_1\, \frac{R_p}{R_1 + R_p}$$

$$\text{oder} \qquad U'_x = U_1\, \frac{\frac{R_2\, R_a}{R_2+R_a}}{R_1 + \frac{R_2\, R_a}{R_2+R_a}} = U_1\, \frac{\frac{R_2\, R_a}{R_2+R_a}}{R_1 \frac{R_2+R_a}{R_2+R_a} + \frac{R_2\, R_a}{R_2+R_a}}$$

$$= U_1 \frac{R_2\,R_a}{R_1\,R_2 + R_1\,R_a + R_2\,R_a} = U_1 \frac{R_2\,R_a}{R_1\,R_2 + R_a\,(R_1 + R_2)}.$$

Die Gleichung für das belastete Potentiometer geht in die Gleichung für das unbelastete über, wenn $R_1\,R_2 \ll R_a\,(R_1 + R_2)$ ist. Dann ist der Strom I_a durch den Außenwiderstand R_a vernachlässigbar klein.

10.2.5 Widerstandmessung

Prinzipiell kann man den Widerstand messen, in dem man die Spannung U an ihm und den Strom I durch ihn bestimmt und beides durcheinander teilt. Da aber beide Meßwerte durch die Innenwiderstände der Geräte verfälscht sind, erhält man ein sehr ungenaues Ergebnis. Um dies zu vermeiden mißt man **stromlos**. Dies geschieht mit einer WHEATSTONschen **Brückenschaltung**.

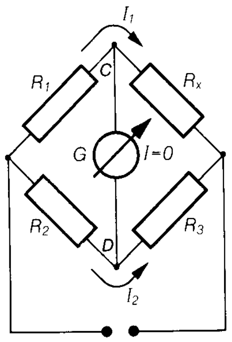


Abbildung 10.12: Wheatstonsche Brücke

Hier schaltet man den zu bestimmenden Widerstand mit drei bekannten Widerständen zusammen (s. Abb. 10.12, entnommen aus [9]), von denen mindestens einer verstellbar ist. Man stellt R_3 so ein, daß durch das Instrument G kein Strom fließt (Abgleichen der Brücke). Dies ist dann der Fall, wenn die Spannung zwischen C und D verschwindet, d.h. die Spannungsabfälle an R_x und R_3 sind gleich (wobei die Spannungsabfälle an R_1 und R_2 auch wieder gleich sein müssen). Dadurch, daß kein Strom durch G fließt, geht der Strom I_1 bei C vollständig weiter durch R_x. Damit ergibt sich

$$I_2\,R_3 = I_1\,R_x \qquad \text{und} \qquad I_1\,R_1 = I_2\,R_2.$$

Durch Division beider Gleichungen folgt

$$R_x = R_3\,\frac{R_1}{R_2}.$$

Somit ist R_x auf die bekannten Widerstände zurückgeführt. Die Spannung U der Spannungsquelle ist unwichtig und darf durchaus zeitlich schwanken, so daß sie auch für Wechselstrom geeignet ist.

10.3 Beispiel für einen nicht stationären Vorgang: der RC- Kreis

Die Kombinationen von Widerständen und Kondensatoren sind in der Elektrotechnik besonders wichtig. Wird in einen Stromkreis ein Kondensator eingeschaltet, so stellt dieser eine Unterbrechung des Stromes dar. Wird der Kondensator jedoch an eine Stromquelle angeschlossen, so wird er geladen. Innerhalb einer gewissen Zeit fließen Ladungen auf die Platten, bis daß der Kondensator die gleiche Spannung wie die Quelle hat. Es fließt also eine Zeitlang ein Strom, der sogenannte **Ladestrom**. Wird dann die Stromquelle abgetrennt und die Kondensatorplatten leitend miteinander verbunden, so entlädt sich der Kondensator. Es fließt ein **Entladestrom**.

10.3.1 Der Ladevorgang

Der Ladevorgang beginne zum Zeitpunkt $t = 0$ bei geschlossenem Schalter (Stellung a). Zu diesem Zeitpunkt fließt der maximale Strom $I_0 = U_0/R$. Durch das weitere Laden des Kondensators wirkt sich dessen Spannung $U_C = Q/C$ als Gegenspannung zu U_0 aus, sodaß der Ladestrom immer kleiner wird, bis er bei $U_0 = U_C$ vollständig zum Erliegen kommt. Zu jedem Zeitpunkt gilt

$$U_0 = U_R + U_C \qquad \text{mit} \qquad U_R = R\,I \quad \text{und} \quad U_C = \frac{Q}{C} \qquad \text{folgt} \qquad U_0 = R\,I + \frac{Q}{C}.$$

Aufgrund der konstanten Spannungsquelle ist

$$\frac{dU_0}{dt} = 0 \Rightarrow 0 = R\,\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt}, \qquad \text{mit} \qquad I = \frac{dQ}{dt} \quad \text{folgt}$$

$$\boxed{\frac{dI}{dt} + \frac{1}{R\,C}\;I = 0.} \tag{10.3}$$

Um diese Differentialgleichung mit der Randbedingung $I = I_0 = U_0/R$ für $t = 0$ zu lösen, formen wir sie weiter um, integrieren beide Seiten über die Zeit und nutzen die Randwerte, um die Intergrationsgrenzen der linken Seiten zu transformieren:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{1}{R\,C}\,I = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{I}\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{R\,C}\,dt$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t \frac{1}{I}\frac{dI}{dt}\,dt = -\frac{1}{R\,C}\int_0^t dt \Leftrightarrow \int_{I_0}^{I} \frac{1}{I'}\,dI' = -\frac{1}{R\,C}\,t \Leftrightarrow \ln\frac{I}{I_0} = -\frac{t}{R\,C}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = I_0\, e^{-\frac{t}{R\,C}}} \tag{10.4}$$

Man setzt $R\,C = \tau$ und nennt dies die **Zeitkonstante** des RC- Kreises.

10.3.2 Der Entladevorgang

Der Kondensator sei vollständig aufgeladen und besitze die Ladungsmenge $Q = C\,U_0$. Zur Zeit $t = 0$ werde er über den Widerstand R kurzgeschlossen (Schalterstellung b). Zu jedem Zeitpunkt gilt $U_C = U_0 = R\,I$.

$$\text{wegen} \qquad I = -\frac{dQ}{dt} = -C\,\frac{dU_C}{dt} \qquad \text{ist} \qquad U_C = R\,I = -R\,C\,\frac{dU_C}{dt}.$$

Das Minuszeichen kommt daher, weil ein positiver Strom die Ladung am Kondensator verkleinert.

$$\boxed{\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{R\,C}\,U_C = 0}. \tag{10.5}$$

Mit der Randwertbedingung $U_C = U_0$ liefern analoge Rechnungen:

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{R\,C}\,U_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{U_C}\frac{dU_C}{dt} = -\frac{1}{R\,C}\,dt$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t \frac{1}{U_C}\frac{dU_C}{dt}\,dt = -\frac{1}{R\,C}\int_0^t dt \Leftrightarrow \int_{U_0}^{U_C} \frac{1}{U'_C}dU'_C = -\frac{1}{R\,C}t \Leftrightarrow \ln\frac{U_C}{U_0} = -\frac{t}{R\,C}$$

$$\Rightarrow \boxed{U_C = U_0\, e^{-\frac{t}{R\,C}}} \tag{10.6}$$

Versuch

Wir betrachten den Lade- und Entladevorgang auf einem Oszillographen.

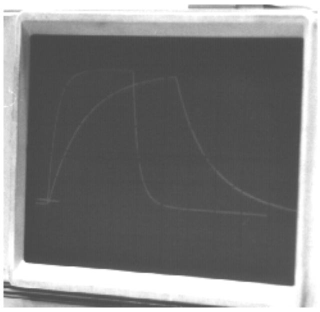


Abbildung 10.13: Lade- und Entladekurve

Kapitel 11

Leitung in Flüssigkeiten

11.1 Elektrolytische Leitfähigkeit

An der elektrolytischen Leitfähigkeit in Flüssigkeiten sind in der Regel Salze, Säuren oder Basen beteiligt. Diese Lösungen werden **Elektrolyte** genannt.

Versuch

> Wir tauchen zwei, an eine Spannungsquelle angeschlossene, Leiter in eine Bleiazetatlösung ($Pb(CH_3COO)_2 \cdot 3\,H_2O$). Nach Anlegen des Stromes beobachten wir an einem Draht eine Bleiabscheidung. In der Projektion erscheint die Abscheidung als Baum (Bleibaum) (s. Abb. 11.1, aus [11]). Wenn wir die Stromrichtung umdrehen, so wird der Baum wieder abgebaut und entsteht am anderen Draht.

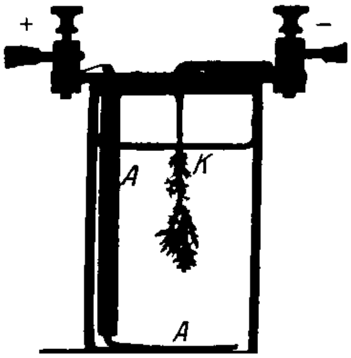


Abbildung 11.1: Bleibaum

Im folgenden Versuch wollen wir prüfen, ob an der Stromleitung in einer Flüssigkeit ein Salz, eine Säure oder eine Base beteiligt sein muß.

Versuch

In ein mit destilliertem Wasser gefülltes Becken tauchen wir zwei Bleche (Elektroden) aus Platin oder Nickel, die an ein Amperemeter angeschlossen sind. Wir beobachten, daß reines Wasser ein schlechter Leiter ist, denn das Amperemeter zeigt keinen Strom an. Erst wenn wir ein paar Körner Kochsalz (NaCl) dazu geben, fließt ein Strom (s. Abb. 11.2, entnommen aus [9]).

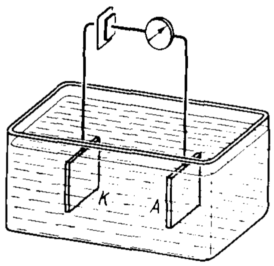


Abbildung 11.2: Elektrolyse

Die Leitfähigkeit einer Kochsalzlösung findet folgende einfache Erklärung:
Beim Einbringen der Kochsalzmoleküle werden diese in positive Natriumionen (Na^+) und in negative Chlorionen (Cl^-) aufgespalten (dissoziiert).

$$NaCl \rightarrow Na^+ + Cl^- \tag{11.1}$$

In Flüssigkeiten tragen also, anders als bei Metallen, sowohl positive als auch negative Ladungsträger zur Leitung bei. Bei der **Dissoziation** in Wasser schieben sich die Wassermoleküle durch ihr anisotropes Dipolmoment zwischen die Ionen und ordnen sich um diese an (s. Abb. 11.3, entnommen aus [3]), sie werden **hydratisiert**. Die bei der Anlagerung der Wasserdipole frei werdende Energie reicht zur Abtrennung der Ionen aus dem Kristallgitter aus. Beide Ionen sind in der Lösung bis auf einen Reibungswiderstand frei beweglich. Das elektrische Feld treibt die positiven Ionen zum Minuspol (**Kathode**), weshalb sie **Kationen** genannt werden, während die negativen Ionen, die zur **Anode** (Pluspol) wandern, **Anionen** heißen. Kationen sind die Metallionen einschließlich NH_4^+ und H^+, Anionen sind die Säurerest- und OH^--Ionen (eigentlich sind viele dieser Ionen als größere Komplexe aufzufassen, z.B. H_3O^+ anstatt H^+).

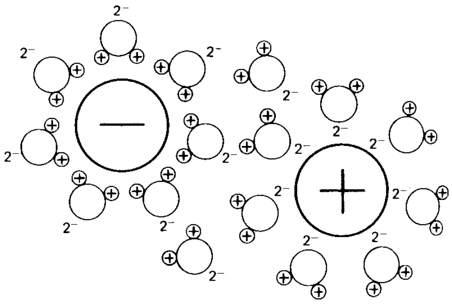


Abbildung 11.3: Hydratisierung von Wasser

An den Elektroden angekommen, werden die Ionen neutralisiert: die Kationen nehmen Elektronen auf, die Anionen geben welche ab. Dabei ändern sie vollständig ihren chemischen Charakter. Die H^+- Ionen werden zu H-Atomen, die wiederum zu H_2- Molekülen werden, welche als Gas entweichen. Bei Metallen, deren Ionen weniger leicht in Lösung bleiben, schlagen sie sich als Niederschlag auf den Elektroden ab. Allgemein läst sich sagen, daß an den Elektroden folgende Reduktions- bzw. Oxidationsprozesse ablaufen (s. Abb. 11.4, entnommen aus [3]):
Das Elektrolyt gibt an die Anode Elektronen ab, es kommt zu einer Oxidation. Für eine metallische Anode gilt:

$$\mathrm{Me} \rightarrow \mathrm{Me}^{+} + \mathrm{e}^{-}. \tag{11.2}$$

An der Anode löst sich das Metall auf und geht in Lösung. An der Kathode findet

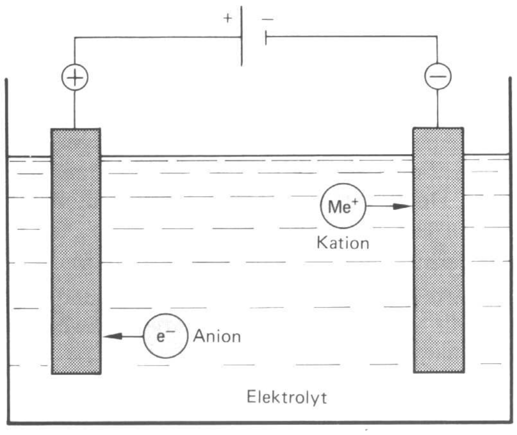


Abbildung 11.4: Reduktions- bzw. Oxidationsprozeß bei der Elektrolyse

dagegen durch die Elektronenaufnahme immer eine Reduktion statt. In unserem Fall wird das Metallion zum Metall reduziert:

$$\mathrm{Me}^+ + \mathrm{e}^- \rightarrow \mathrm{Me}. \tag{11.3}$$

Das Metall wird also an der Kathode abgeschieden.

Im elektrischen Feld eines Elektrolyten erfahren die Ionen eine angreifende Kraft

$$\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{E}} = \mathrm{q}\,\vec{\mathrm{E}}. \tag{11.4}$$

Setzen wir nun im Elektrolyten laminare Strömungsverhältnisse für die Ionen voraus, so ist der Reibungswiderstand auf die als kugelförmig anzusehenden Ionen mit Radius r nach dem STOKEschen Gesetz gegeben als

$$\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{R}} = -6\pi\eta\,\mathrm{r}\,\vec{\mathrm{v}}, \tag{11.5}$$

wobei η die Zähigkeit der Flüssigkeit und $\vec{v}$ die mittlere Ionengeschwindigkeit ist.
Nach dem Einstellvorgang tritt ein Gleichgewicht zwischen der elektrischen Kraft $\vec{F}_E$ und dem Reibungswiderstand $\vec{F}_R$ ein:

$$\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{E}} = \vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{R}} \tag{11.6}$$

$$\text{oder} \qquad \mathrm{q}\,\vec{\mathrm{E}} = 6\pi\eta\,\mathrm{r}\,\vec{\mathrm{v}}. \tag{11.7}$$

Die Ionen bewegen sich dann in diesem stationären Zustand mit der konstanten Geschwindigkeit

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{\mathrm{q}}{6\pi\eta\,\mathrm{r}}\vec{\mathrm{E}} = \mu\vec{\mathrm{E}}, \tag{11.8}$$

wobei μ wieder die Beweglichkeit ist.
Die Driftgeschwindigkeit der Ionen im einem Elektrolyt ist sehr klein. Sie beträgt für $E = 100$ V/m ungefähr $v \approx 0,00001$ m/s.
Dieses Ein-Ladungsmodell eines Elektrolyts ist aber zu einfach, denn wir müssen sowohl positive als auch negative Ladungsträger betrachten (s. Abb. 11.5, entnommen aus [3]). Auf Seite 88 hatten wir uns schon allgemein mit dem Leitungsmechanismus beschäftigt. Wir hatten die Formel für die Stromdichte in Elektrolyten hergeleitet, sie war

$$\mathrm{j} = \mathrm{q}_+\mathrm{n}_+\mathrm{v}_+ + \mathrm{q}_-\mathrm{n}_-\mathrm{v}_-. \tag{11.9}$$

Es ist zu beachten, daß q_i die Ladung eines Iones ist und es gilt $q = z \cdot e$, also Wertigkeit des Iones mal der Elementarladung. Setzen wir nun nach Gleichung 11.8 v_+ und v_- in die Stromdichte ein, so erhalten wir

$$\text{mit} \qquad \vec{\mathrm{v}}_\pm = \frac{\mathrm{q}_\pm}{6\pi\eta\,\mathrm{r}_\pm}\,\vec{\mathrm{E}} \tag{11.10}$$

$$\mathrm{j} = \mathrm{E}\,\frac{1}{6\pi\eta}\Big[\frac{\mathrm{n}_+\,\mathrm{q}_+^2}{\mathrm{r}_+} + \frac{\mathrm{n}_-\,\mathrm{q}_-^2}{\mathrm{r}_-}\Big] \tag{11.11}$$

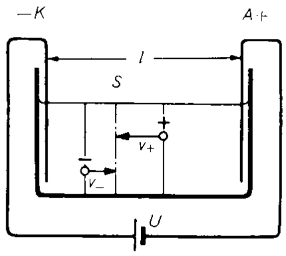


Abbildung 11.5: Zur Elektrolyse tragen positive und negative Ladungträger bei

Die Stromdichte ist nach diesem Modell also proportional zur Konzentration n. Bei verdünnten Lösungen ist diese Gesetzmäßigkeit gut erfüllt. Bei größeren Konzentrationen treten beträchtliche Abweichungen von dieser einfachen Proportionalität auf, da das angewandte Modell zu einfach ist.

Im Gegensatz zum metallischen Leiter wird bei der Elektrolyse nicht nur Ladung, sondern auch Materie transportiert, wie folgender Versuch zeigt. Desweiteren kann man in diesem Versuch die Driftgeschwindigkeit beobachten.

Versuch

In eine Ionenwanderungskammer wird farblose KNO_3-Lösung gegeben. An beiden Seiten der Kammer werden Elektroden angebracht. In der Nähe der Kathode geben wir etwas violette $KMnO_4$-Lösung dazu. Nach dem Anlegen der Spannung sieht man von der Kathode aus eine violette Wolke mit scharfer Grenze zur Anode vorrücken. Im klaren Teil wandern unsichtbare NO_3- Anionen, im violetten Teil MnO_4- Anionen. Desweiteren wandern in beiden Teilen

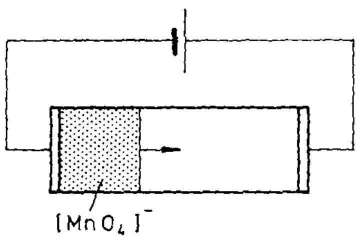


Abbildung 11.6: Ionenwanderungskammer

K-Kationen. Kehrt man das Feld um, so läuft die Wolke zurück (s. Abb. 11.6, aus [2]). Legt man ein Plexiglaslineal neben die Kammer und mißt die Zeit für das Fortschreiten der MnO_4^--Ionen über 2 cm, so ergibt sich für die Driftgeschwindigkeit

$$\mu(MnO_4^-) = 5,6 \cdot 10^{-4} \frac{\mathrm{cm/s}}{\mathrm{v/cm}}. \tag{11.12}$$

Die Elektrolyse spielt in der Technik eine große Rolle:

1. beim Aufbringen von Metallüberzügen (Galvanisieren genannt nach L. Galvani (1737 − 1798)). Die häufigsten galvanischen Metallüberzüge bestehen aus Chrom, Nickel, Cadmium, Gold oder Silber. Sie dienen
   a) zur Erhöhung der mechanischen (Hartverchromen) oder chemischen Widerstandsfähigkeit (Vernickeln von Eisen),
   b) zur Verbesserung der elektrischen Leitfähigkeit (vergolden oder versilbern von Kontakten).

2. bei der Metallgewinnung aus Metallsalzlösungen

Versuch

Wir tauchen eine Stativstange in eine Kupfersulfatlösung und beobachten, daß sich die Stange langsam mit Kupfer überzieht.

11.2 Galvanische Elemente

Versuch

Wir tauchen einen Zinkstab in eine Zinksulfatlösung und beobachten, daß sich der Zinkstab negativ auflädt.

Bei dem Eintauchen eines Metalles in eine Lösung treten Metallionen in das Lösungsmittel, während die Elektronen im Metall bleiben, sodaß sich die Elektrode negativ auflädt und ein weiteres Austreten von positiven Ionen verhindert. Dieses Verhalten nennt man **Lösungstension** der Metalle (s. Abb. 11.7, entnommen aus [9]). Der Vorgang des Aufladens endet bei einer materialspezifischen Spannung. Dieses elektrolytische Potential kann nicht direkt gemessen werden, da man zur Messung eine zweite Elektrode in die Lösung bringen müßte und dann die Potentialdifferenz der beiden Metalle messen würde.

Versuch

In eine Kochsalzlösung tauchen wir einen Kohlestab und nacheinander ein Kupfer-, ein Eisen- und ein Zinkblech und messen die Spannung zwischen der Kohle- und der Metallelektrode.

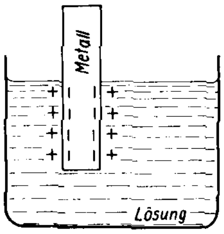


Abbildung 11.7: Lösungstension der Metalle

Die gemessenen Spannungen waren:

Kohle-	Zink	1,9 V
Kohle-	Eisen	1,4 V
Kohle-	Kupfer	1,0 V

Zwischen chemisch verschiedenen Elektroden besteht eine Spannung. Je unedler das Metall der negativen Elektrode ist, desto höher ist die Spannung gegen Kohle.
Üblicherweise wird als Bezugselektrode die Standardwasserstoffelektrode gewählt, deren Potential als Null definiert ist. Sie besteht aus einem von Wasserstoff umspülten Platinblech. Das zu untersuchende Metall der Wertigkeit z wird in eine Lösung getaucht, die 1/z mol Ionen des Metalls pro Liter enthält (1- normale Lösung). Beide Lösungen sind durch eine poröse Wand miteinander verbunden. Die zwischen den beiden Elektroden auftretende Spannung ist dann definitionsgemäß das Normalpotential des Metalls. Ordnet man die Metalle nach wachsenden Normalpotentialen, so erhält man die **elektrochemische Spannungsreihe**.

Elektrochemische Spannungsreihe		
Metall	Reaktion	Spannung in Volt
K	$K^+ + e$	-2,92
Na	$Na^+ + e$	-2,71
Zn	$Zn^{++} + 2e$	-0,76
Pb	$Pb^{++} + 2e$	-0,13
H	$H^+ + e$	0
Cu	$Cu^{++} + 2e$	+0,34
Cu	$Cu^+ + e$	+0,52
Ag	$Ag^+ + e$	+0,80
Au	$Au^+ + e$	+1,42
Au	$Au^{+++} + 3e$	+1,50
Pt	$Pt^{++} + 2e$	+1,60

Mit diesem Wissen können Spannungsquellen, die sogenannten **galvanischen Elemente**, gebaut werden. Als Beispiel betrachten wir das **Daniell-Element**.

Versuch

Bei dem DANIELL-Element befindet sich ein Zinkstab in einer Zinksulfatlösung und ein Kupferstab in einer Kupfersulfatlösung, die beide durch eine poröse Wand miteinander verbunden sind (s. Abb. 11.8, entnommen aus [1]). Die gemessene Potentialdifferenz zwischen ihnen betrug

$$\Delta\varphi = \varphi_{\mathrm{Zn}} - \varphi_{\mathrm{Cu}} = 0,35\ \mathrm{V} - 0,76\ \mathrm{V} = 1,11\ \mathrm{V}.$$

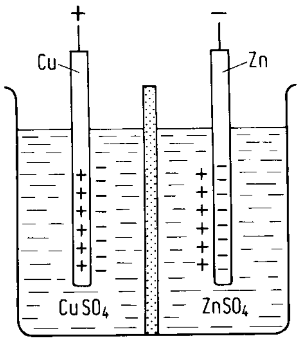


Abbildung 11.8: Daniell-Element

Verbindet man die beiden Elektroden mit einem Draht, so fließt ein Strom vom Zink zum Kupfer. Dabei wird das Zink positiver und schickt mehr Ionen in die Lösung, die wiederum SO_4^{--}-Ionen aus der Kupfersulfatlösung abziehen. Die so entstandenen Cu^{++}- Ionen in der Lösung werden von der mittlerweile negativen Kupfer-Katode angezogen, neutralisieren sich dort und schlagen sich an der Katode nieder. Dadurch nimmt die Konzentation der Kupfersulfatlösung ab, die der Zinklösung hingegen steigt. Bei dieser Reaktion wird das Zinkblech immer dünner, während das Kupferblech immer dicker wird. Der Vorgang wird erst gestoppt, wenn kein Kupfer mehr in der Lösung ist. Spannung und Strom versiegen jetzt, weil sich die Kupferelektrode auch mit Zink überzieht und somit als Zinkelektrode wirkt.
Eine wichtige Erweiterung der galvanischen Elemente ist der **Akkumulator**. Bei ihm können die abgelaufenen chemischen Prozesse durch Aufladen umgekehrt werden, wodurch er wiederverwendbar ist. Ein bekanntes Beispiel ist der Bleiakku. Er besteht aus zwei

Bleiplatten, die sich in verdünnter Schwefelsäure (H_2SO_4) befinden und sich mit einer $PbSO_4$- Schicht überziehen.
Beim Aufladen wird die Spannung von außen angelegt und es entsteht an der Kathode Blei und an der Anode Bleioxid:

$$\begin{array}{lccc} \text{Kathode:} & PbSO_4 + 2H^+ + 2e^- & \rightarrow & Pb + H_2SO_4 \\ \text{Anode:} & PbSO_4 + 2OH^- & \rightarrow & PbO_2 + H_2SO_4 + 2e^- \end{array}$$

Nach dem Aufladen liefert der Bleiakku eine Spannung von 2 V. Bei der Stromentnahme läuft der Prozess umgekehrt, bis der Anfangszustand fast wieder hergestellt ist. Man erhält etwa 70-80 % der investierten Energie zurück. Eine typische Autobatterie mit 12 V bei 55 Ah (Amperestunde) kann eine Energie von

$$W = Q\,U = 12\,V \cdot 55\,Ah \cdot 3600\,s = 2,4 \cdot 10^6 VA\,s = 2,4 \cdot 10^6 J$$

speichern.

Kapitel 12

Leitung in Festkörpern

12.1 Leitung in Metallen

Wir wollen uns an dieser Stelle noch einmal etwas genauer mit den Leitungsmechanismen in Metallen beschäftigen. Für eine exakte Beschreibung ist allerdings die Kenntnis des atomaren Aufbaus und der Gitterstruktur im Festkörper, sowie der Quantentheorie, nötig, welche erst in den folgenden Semestern gelehrt werden. Deshalb wollen wir uns hier auf einige wesentliche Ergebnisse beschränken, die unter der Bezeichnung **Bändermodell** zusammengefaßt sind. Das Bändermodell ermöglicht eine einheitliche Deutung der unterschiedlichen elektrischen Leitfähigkeit von Metallen, Halbleitern und Isolatoren.
Bereits in dem Abschnitt über die Temperaturabhängigkeit des Widerstands haben wir uns etwas mit dem Leitungsmechnismus in Metallen beschäftigt. Wir wissen, daß jedes Metallatom ein Valenzelektron als Leitungselektron abgibt. Diese Elektronen sind frei beweglich und werden auch **Elektronengas** genannt. Sie bewegen sich frei durch das Ionengitter, ähnlich den Gasatomen. Durch ihre Wärmebewegung verursachen sie keinen Strom. Erst wenn sich das Metall in einem elektrischen Feld befindet, wird diese Bewegung durch die Driftbewegung überlagert und es fließt ein Strom. (vgl. Seite 87)

Die Valenzelektronen sind nicht an die einzelnen Gitterbausteine gebunden, sondern nur an den Kristall als Ganzen. Sie befinden sich in gebundenen Zuständen, die laut Quantentheorie nicht beliebige Energiewerte annehmen können. Die Valenzelektronen können sich nur in einer endlichen, allerdings sehr großen Anzahl von diskreten Zuständen aufhalten. Die Zustände sind nicht kontinuierlich über den Energiebereich verteilt, sondern es gibt Bereiche, sogenannte **Bänder**, erlaubter Energieniveaus, die durch die **verbotenen Zonen** getrennt sind (s. Abb. 12.1, entnommen aus [5]). In den verbotenen Zonen können sich aus energetischen Gründen keine Elektronen aufhalten. Die Bänder kann man als kontinuierliche Zonen erlaubter Energiewerte betrachten, denn die Abstände zwischen den einzelnen Zuständen des einzelnen Bandes sind so gering, daß die Elektronen aufgrund der Wärmebewegung praktisch ungehindert zwischen den einzelnen Zuständen wechseln

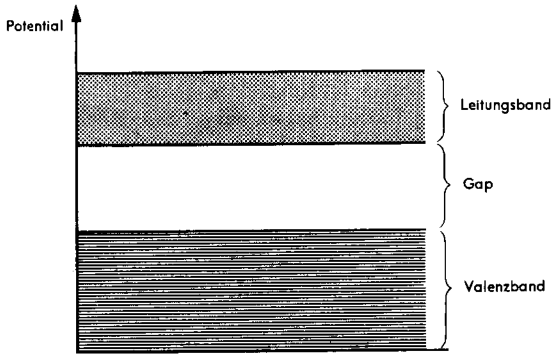


Abbildung 12.1: Prizip des Bändermodells

können. Sie sind aber bestrebt, immer den tiefstmöglichen Zustand einzunehmen. Wegen des PAULI- Prinzips (siehe Vorlesung des 4. Semesters) kann jeder Zustand nur zweimal besetzt werden. Daher können auch die einzelnen Bänder wegen der endlichen Zahl ihrer Zustände nur eine endliche Anzahl von Elektronen aufnehmen. Deshalb unterscheidet man zwischen vollständig, teilweise gefüllten und leeren Energiebändern.
Bei einer Besetzung des oberen Bandes von 10 - 90 % liegt ein metallischer Leiter vor. Legt man hier nun eine elektrische Spannung an, so bildet sich im Inneren ein elektrisches Feld E aus, und auf die Elektronen wirkt eine beschleunigende Kraft $F = -e\,E$. Dadurch erhalten die Elektronen mehr Bewegungsenergie und werden auf höhere Energiezustände angehoben. Ist das obere Band nur teilweise gefüllt, können die Elektronen leicht in einen höheren Energiezustand gelangen, da hier genügend freie Zustände zur Verfügung stehen. Da alle in dem obersten Band befindlichen Elektronen im Feld zusätzlich Energie aufnehmen und zur Leitung beitragen, nennt man dieses Band das **Leitungsband** und die Elektronen **Leitungselektronen**. Das darunter liegende Band heißt **Valenzband**.

Wenn das oberste Band ganz gefüllt ist, können die Elektronen nicht mehr durch das angelegte Feld beschleunigt werden, es liegt ein **Isolator** vor. Für jedes Elektron, daß aus einem niedrigeren Energiezustand des Bandes in einen höheren angehoben wird, muß umgekehrt ein Elektron aus diesem Zustand in das tiefere Niveau übergehen. Deshalb ist in einem vollbesetzten Zustand keine Stromleitung möglich.
Besteht zwischen dem obersten vollbesetzten Band und dem darüberliegenden nächsten leeren Band ein relativ geringer Abstand, dann ist der Stoff zwar bei niedrigen Temperaturen ein Isolator, aber bei Zimmertemperatur kann er jedoch eine wesentlich höhere elektrische Leitfähigkeit besitzen. Man spricht dann von einem **Halbleiter**. Seine Leitfähigkeit wird durch die thermische Anregung von Elektronen aus dem Valenzband in das darüberliegende Band verursacht. Die Wahrscheinlichkeit einer solchen Anregung nimmt exponentiell mit dem Bandabstand E_B ab und mit der Temperatur T zu. Halbleitende Ei-

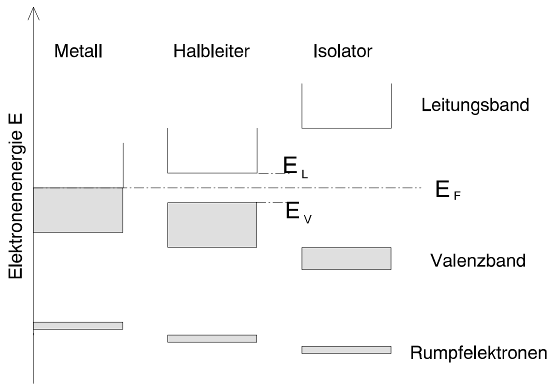


Abbildung 12.2: Bändermodell für Metalle, Halbleiter und Isolatoren

genschaften zeigen sich erfahrungsgemäß bis zur Energielücke (gap) von etwa $E_B = 2{,}5\,V$, während bei Isolatoren größere Werte zu finden sind. Beim Halbleiter tragen sowohl die in das Leitungsband gehobenen Elektronen als auch die im Valenzband zurückbleibenden Löcher zur Leitfähigkeit bei (Eigenleitung reiner Halbleiter). Eine Darstellung der beschriebenen Modelle findet man in Abb. 12.2.

12.2 Leitung in Halbleitern

12.2.1 p,n- Halbleiter

Wir wollen uns nun intensiver mit den Leitungsmechanismen in Halbleitern beschäftigen. Als typischen Vertreter der Halbleiter wollen wir uns mit dem Element Germanium aus der IV. Hauptgruppe des Periodensystems befassen. Alle der 4-wertigen Germaniumatome verbinden sich jeweils mit vier benachbarten Germaniumatomen, indem sich jedes der Valenzatome mit einem Valenzelektron der Nachbaratome zu einem Elektronenpaar verbindet (s. Abb. 12.3, aus [5]). In diesem Zustand sind alle Valenzelektronen gebunden und das Germanium verhält sich wie ein Isolator. Da die Bindungsenergie aber gering ist, sie beträgt nur $0{,}75\,\mathrm{eV}$, gilt dies nur bei tiefen Temperaturen. Je höher die Temperatur ist, desto stärker schwingen die Elektronen, bis sie eine Schwingungsenergie von mehr als 0,75 eV haben und die Bindungen aufbrechen. Dies ist schon bei Zimmertemperatur der Fall. An den Stellen, an denen ein Elektron freigesetzt worden ist, entsteht ein Elektronenfehlplatz, den man als **Defektelektron** oder **Loch** bezeichnet. Die freien Elektronen führen ähnlich wie in einem Metall Wärmebewegungen aus. Kommen sie dabei in die Nähe der Löcher, treten sie wieder in diese ein, sie **rekombinieren**. Die Wahrscheinlichkeit der Rekombination steigt mit der Dichte der freien Elektronen und Löcher. Es entsteht ein Gleichgewichtszustand, bei dem die Anzahl der pro Zeiteinheit entstehenden

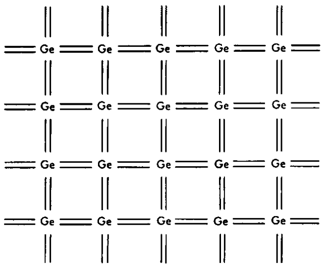


Abbildung 12.3: Die Bindung der Germaniumatome

freien Elektronen und Löcher genauso groß ist, wie die durch Rekombination verschwindenden. Daraus ergibt sich eine konstante Dichte an freien Elektronen und Löchern, die umso größer ist, je höher die Temperatur liegt.

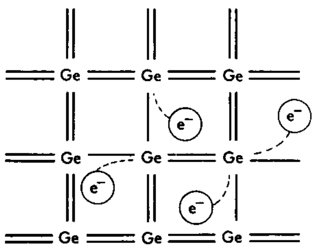


Abbildung 12.4: Eigenleitung im Halbleiter

Legt man an einen Halbleiterkristall eine Spannung an, so wandern die freien Elektronen vom Minuspol zum Pluspol und bilden damit einen Elektronenstrom. Zusätzlich kann aber auch ein gebundenes Elektron, das sich in der Nähe eines Loches befindet, in dieses Loch wandern. Dadurch verschwindet das alte Loch, während ein neues an der Stelle des abgewanderten Elektrons entsteht. Dieser Vorgang wiederholt sich beliebig oft, sodaß die Löcher in entgegengesetzter Richtung zu den Elektronen wandern. Man kann die Löcher also als bewegliche, positiv geladene Ladungsträger auffassen, deren Strom durch den Leiter Löcherstrom genannt wird. Der gesamte Strom in einem Halbleiter im elektrischen Feld besteht also aus dem Elektronenstrom und dem Löcherstrom. Diesen Vorgang bezeichnet man als die **Eigenleitung** im Halbleiter (s. Abb. 12.4, entnommen aus [3]). Bei Zimmertemperatur stehen für die Eigenleitung in Germanium jeweils $1,3 \cdot 10^{13}$ Elektronen und Löcher zur Verfügung, bei Silizium sind es $7,7 \cdot 10^{9}$ und bei Tellur $5 \cdot 10^{16}$.

Dotierte Halbleiter

Um die Leitfähigkeit der Halbleiter zu erhöhen, baut man Fremdatome ein. Besonders gut lassen sich in die 4-wertigen Atome wie Germanium und Silizium 3- und 5-wertige Fremdatome wie Bor, Aluminium, Gallium, Indium bzw. Phospor, Arsen und Antimon einbauen. Die Fremdatome nehmen im Gitter jeweils den Platz eines 4- wertigen Atoms ein. Diese Plätze nennt man **Störstellen** und ihren Beitrag zur elektrischen Leitung **Störstellenleitung**. Der Einbau der Fremdatome geschieht entweder bei hoher Temperatur durch Einlegieren oder indem man die Fremdatome in Gasform im Vakuumofen in dünne Halbleiterplättchen eindiffundieren läßt. Den gezielten Einbau von Fremdatomen nennt man **dotieren**. Betrachten wir nun am Beispiel der 4-wertigen Atome Silizium und Germanium, wie die Leitfähigkeit durch die Dotierung verändert wird.
Dotiert man Silizium mit einem 3-wertigen Fremdatom, beispielsweise mit Indium, dann verbinden sich die drei Valenzelektronen des Indiumatom mit je einem Valenzelektron von drei benachbarten Siliziumatomen. Dabei bleibt ein Valenzelektron des vierten benachbarten Siliziumatoms ungepaart (s. Abb. 12.5a). In diese Lücke der Elektronenbindung tritt ein Valenzelektron eines benachbarten Siliziumatoms. Als Folge davon entsteht ähnlich wie oben ein im elektrischen Feld bewegliches positives Loch, gleichzeitig wird das Indiumatom zu einem negativen Ion. Jedes in das Halbleitergitter eingebaute 3-wertige

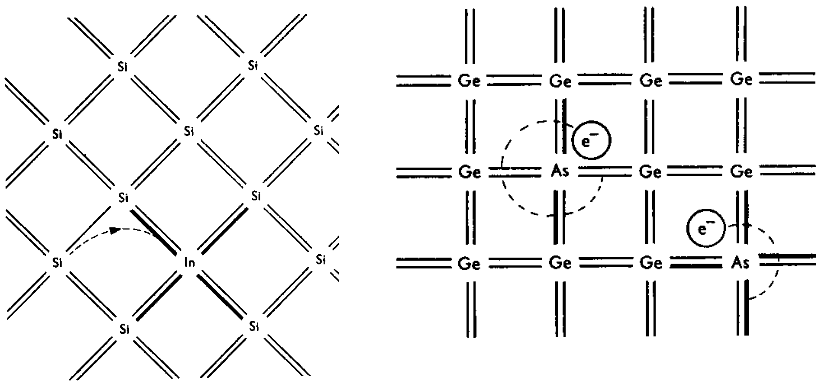


Abbildung 12.5: p- und n- dotierte Halbleiter

Fremdatom liefert also ein bewegliches Loch und ein fest in das Gitter eingebundenes negatives Ion. Daher bezeichnet man diese Fremdatome auch als Elektronenaufnehmer oder **Akzeptoren**. Auch nach dem Einbau von Akzeptoren bleibt der Halbleiter insgesamt elektrisch neutral. Es wird also nur die Dichte der positiven Löcher gegenüber dem Halbleiter erhöht, deshalb bezeichnet man einen mit Akzeptoren dotierten Halbleiter als **p- Halbleiter**. Der Strom in p-Halbleitern ist also hauptsächlich ein Löcherstrom.

Bei der Dotierung mit einem 5-wertigen Atom wie Arsen bleibt bei der Verbindung der Valenzelektronen das fünfte Valenzelektron des Arsenatoms ungepaart (s. Abb. 12.5b, beide entnommen aus [5]). Durch die schwache Bindung wird es bei der Wärmebewegung leicht vom Atom abgetrennt. Das Arsenatom wird dadurch zu einem festsitzenden positiven Ion. Dies geschieht bei jedem eingebauten Atom, weshalb man diese Störatome auch als Elektronenspender oder **Donatoren** bezeichnet. Durch den Einbau von Donatoren wird also die Elektronendichte erhöht. Aufgrund des negativen Elektronenstroms spricht man auch von einem **n-Halbleiter** .

Auch die Störstellenleitung kann mit dem Bändermodell veranschaulicht werden. Bei den Donatoren (mit überschüssigen Elektronen) werden unterhalb der unteren Kante E_C des Leitungsbandes lokalisierte Elektronenterme in das Donatorniveau E_D eingetragen. Die Differenz $E_C - E_D$ entspricht dabei der Energie, die notwendig ist, um das Elektron von Störatom in das Leitungsband anzuregen (**Ionisierungsenergie**). Diese Energie ist vergleichbar mit der Wärmeenergie bei Zimmertemperatur, so daß in hohem Maße die Störa-

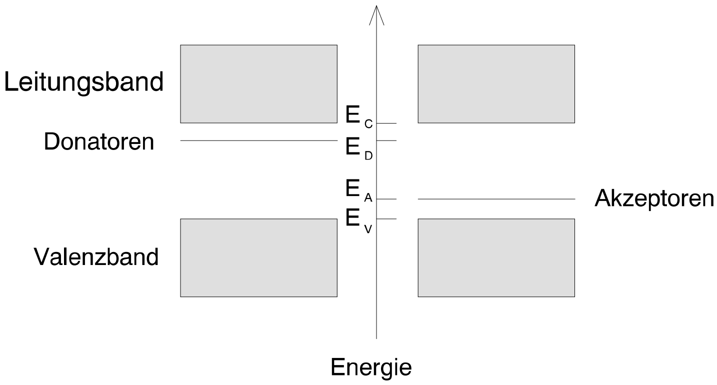


Abbildung 12.6: Störstellenleitung im Bändermodell

tome ionisiert sind und ihr überschüssiges Atom an das Leitungsband abgegeben haben. Die Akzeptoren (die zuwenig Elektronen haben) hingegen nehmen leicht das fehlende Bindungselektron auf, indem sie dem Valenzband des Halbleiterkristalls ein Elektron entziehen. Deshalb liegt das Akzeptorniveau E_A oberhalb der oberen Kante des Valenzbandes E_V. Die Differenz $E_A - E_V$ entspricht dabei der Energie, die benötigt wird, um das Elektron aus dem Valenzband an das Akzeptoratom anzulagern (s. Abb. 12.6).

12.2.2 Der pn- Übergang

Fügt man p-Germaninum und n-Germanium zusammen, so entsteht ein sogenannter **pn-Übergang**. An der Kontaktfläche fangen die Ladungsträger aufgrund ihrer unterschiedlichen Konzentration an zu diffundieren. Die Löcher aus dem p-Germanium wandern durch die Grenzfläche in das n-Germanium, und die Elektronen aus dem n-Germanium bewegen sich in entgegengesetzter Richtung. Treffen ein Elektron und ein Loch aufeinander, so rekombinieren sie und stehen nicht mehr als Ladungsträger zur Verfügung. Dadurch verändert sich die Umgebung des pn-Übergangs. Es entsteht eine **Grenzschicht**, deren Ladungsverteilung wir nun näher untersuchen wollen. Durch das Abwandern der Löcher aus dem p-Germanium in Grenznähe fehlen hier positive Ladungen. Da die ortsfesten negativen Ionen zurück bleiben, spricht man dort von einer **negativen Raumladung**. Im grenznahen Bereich des n-Germaniums hat sich ein Analog-Vorgang abgespielt. Aufgrund der übriggebliebenen ortsfesten positiven Ionen spricht man hier von einer **positiven Raumladung**. Die beiden Raumladungszonen können aber nicht unbegrenzt wachsen, da die negative Raumladung des p-Germaniums mit zunehmender Größe das Eindringen weiterer Elektronen aufgrund der gleichnamigen Ladung erschwert. Dasselbe gilt für das Eindringen der Löcher in die positive Raumladungszone des n-Germaniums. Auf diese Weise bildet sich ein Gleichgewichtszustand aus, der durch bestimmte Raumladungen zu beiden Seiten der Grenze gekennzeichnet ist (s. Abb. 12.12 auf Seite 132, entnommen aus [3]). Da also innerhalb der Grenzschicht nur wenige bewegliche Ladungsträger zur Verfügung stehen, bildet die Grenzschicht eine Zone großen elektrischen Widerstandes. Ihre Dicke beträgt etwa 1 μm = 10^{-6} m.

12.2.3 Die Halbleiterdiode

Die Dicke der Grenzschicht zwischen einem p-und einem n-Halbleiter ist durch Anlegen einer äußeren Spannung steuerbar, wie es bei der **Halbleiterdiode** ausgenutzt wird. Es gibt zwei Möglichkeiten, die Spannung an die Diode anzulegen (s. Abb. 12.7, aus [1]):

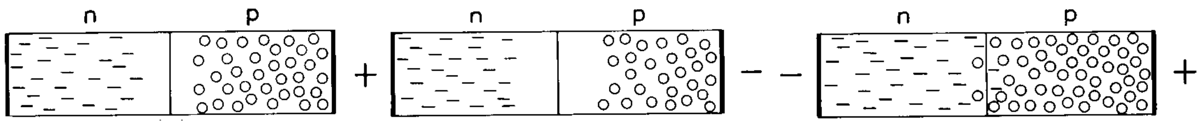


Abbildung 12.7: Die Halbleiterdiode (a) in Sperrichtung (b) und in Durchlaßrichtung (c) geschaltet

1. Der positive Pol liegt an der n-Seite und der negative Pol an der p-Seite.
   Da die beweglichen Elektronen des n-Halbleiters vom positiven Pol und die beweglichen Löcher vom negativen Pol der Spannungsquelle angezogen werden, verbreitert sich die Grenzschicht, und die Anzahl der beweglichen Ladungsträger in der Nähe des pn-Übergangs nimmt weiter ab. Es wird kaum noch Strom geleitet, und der

Widerstand des Übergangs hat sich um einige Zehnerpotenzen erhöht. Die Diode wirkt praktisch wie ein Isolator. Man sagt, daß der pn-Übergang **in Sperrichtung vorgespannt** ist und bezeichnet die Grenzschicht als Sperrschicht. Innerhalb der Sperrschicht findet man aber noch einige wenige Elektronen und Löcher, auf die die Spannung nicht sperrend wirkt, sondern die zu einem kleinen Stromfluß führt, dem **Sperrstrom**.

2. Der positive Pol liegt an der p-Seite und der negative Pol an der n-Seite. Bei dieser Schaltung tritt die entgegengesetzte Wirkung ein: die Elektronen und Löcher bewegen sich auf die Grenzschicht zu, sodaß diese schmaler wird. Bei entsprechend hoher Spannung kann sie sogar praktisch ganz abgebaut werden. Sie wird niederohmig und damit ist der pn-Übergang jetzt stromdurchläßig. Die Elektronen und Löcher treffen am Übergang zusammen und rekombinieren in großer Zahl. Die dadurch laufend verschwindenden Elektronen und Löcher werden von der Spannungsquelle nachgeliefert, in dem in den n-leitenden Teil neue Elektronen hineingedrückt und aus dem p-Halbleiter Elektronen unter Zurücklassung neuer Löcher abgesaugt werden. Im äußeren Leiterkreis fließt ein Elektronenstrom, dessen Stärke von der angelegten Spannung abhängt. Grafisch wird diese Abhängigkeit in der **Kennlinie** der Halbleiterdiode aufgezeichnet. Man sagt, daß der pn-Übergang **in Durchlaßrichtung vorgespannt ist**.

Für die Halbleiterdiode verwendet man folgendes Schaltsymbol:
Die Pfeilrichtung bezieht sich auf die international festgelegte Stromrichtung von plus

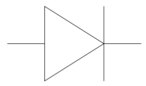


Abbildung 12.8: Schaltsymbol einer Diode

nach minus und stimmt somit mit der Bewegungsrichtung der Löcher überein.

Versuch

Wir nehmen die Kennlinie einer Halbleiterdiode in Durchlaßrichtung und in Sperrichtung mit einem Oszilloskop auf.

Die Abb. 12.9 (entnommen aus [1]) zeigt die Kennlinie einer Diode. Wird die Diode in Durchlaßrichtung betrieben, so steigt die Stromstärke zunächst nach einer Exponentialfunktion an, dann linear mit der Spannung. Wird sie dagegen in Sperrichtung geschaltet, so entsteht nur ein sehr geringer Sperrstrom (man beachte den Maßstab!). Bei sehr hohen Spannungen steigt die Stromstärke ab einer bestimmten Spannung stark an. Diesen Bereich nennt man nach seinem Entdecker den ZENER-Bereich. Hier erreicht die elektrische

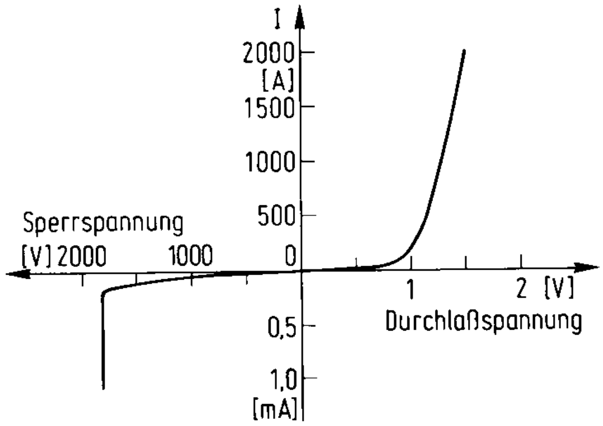


Abbildung 12.9: Kennlinie einer Diode

Feldstärke E in der Grenzschicht so hohe Werte, daß die Kraft F = −e E ausreicht, um Valenzelektronen aus ihren Bindungen zu reißen. Dadurch entstehen in der Grenzschicht plötzlich zahlreiche stark beschleunigte Ladungsträger, die ihrerseits durch Stoßionisation weitere Ladungsträger freisetzen können. Man kann diesen Effekt zur Spannungsstabilisierung ausnutzen.

12.2.4 Der Transistor

Das wichtigste Schaltelement aus der Halbleiterfamilie ist der Transistor. Er besteht aus drei Halbleitern, die über zwei pn-Übergänge zusammen gefügt sind. Es handelt sich also

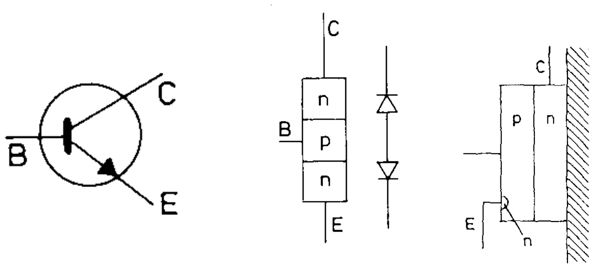


Abbildung 12.10: Der Transitor

entweder um pnp- oder npn-Transistoren. Man bezeichnet die beiden äußeren Schichten

als **Emitter** E und als **Kollektor** K und die mittlere als die **Basis** B. Sie hat eine Dicke von nur 0,02 bis 0,03 mm (s. Abb. 12.10, entnommen aus [2]) .
Für beide Transistorarten gelten grundsätzlich die gleichen physikalischen Zusammenhänge, nur daß die Wirkung des pnp-Transistors durch einen Strom von Löchern und die des npn-Transistors durch einen Strom von Elektronen zustande kommt.
Um die Wirkungsweise von Transistoren verstehen zu können, betrachten wir einen npn-Transistor in einem Schaltkreis. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, einen Transistor zu schalten. Bei der **Basisschaltung** ist die Basis der gemeinsame Kontakt von Eingangs- und Ausgangskreis (s. Abb. 12.11, entnommen aus [3]). Im Eingangskreis ist der Transistor in Durchlaßrichtung geschaltet, weil die Spannungsquelle zwischen Basis und Emitter mit ihrem negativen Pol am Emitter liegt und dadurch Elektronen in die Emitter-Basis-Grenzschicht drücken kann. Im Ausgangskreis ist der Transistor dagegen in Sperrichtung geschaltet, weil die Spannungsquelle zwischen Kollektor und Basis bzw. zwischen Kollektor und Emitter mit ihrem positiven Pol am Kollektor liegt und dadurch Elektronen aus der Basis-Kollektor-Grenzschicht absaugt. Der wesentliche Vorgang, ohne den ein Transistor überhaupt nicht arbeiten könnte, ist folgender:
Die Elektronen, die durch die Basis-Emitter-Spannung in die Basis getrieben werden, rekombinieren dort nur zu 0,5 - 5 % mit den Löchern der Basis. Da die Basis so schmal ist, diffundieren fast alle Elektronen aufgrund ihrer hohen Diffusionsgeschwindigkeit durch sie hindurch und gelangen in die Basis-Kollektor-Grenzschicht. Hier werden sie durch das elektrische Feld in die Kollektorzone getrieben und dort am positiven Pol abgesaugt.
Faßt man den Transistor als einen Stromknoten auf , so muß nach dem KIRCHHOFFschen-Gesetz die Summe der zufließenden und abfließenden Ströme gleich sein. Unter Beachtung der international festgelegten Stromrichtung (von plus nach minus) sind die zufließenden Ströme der Basisstrom I_B und der Kollektorstrom I_C, der abfließende Strom ist der Emitterstrom I_E. Es ist also

$$I_B + I_C = I_E.$$

Betrachten wir noch einmal die Elektronenbewegung. Beim npn-Transistor fließen die Elektronen über den Emitter in den Transistor hinein, fast alle fließen über den Kollektor wieder ab und ein geringer Teil fließt über die Basis.
In der Basisschaltung kann der Kollektorstrom I_C durch den Emitterstrom I_E gesteuert werden. Stromstärkeänderungen im Eingangskreis haben Stromstärkeänderungen im Ausgangskreis zur Folge. In der Basisschaltung sind die Stromstärken I_E und I_C fast gleich groß, denn nur ein geringer Teil des Emitterstroms fließt ja als Basisstrom ab, sodaß in dieser Schaltung also keine Stromverstärkung vorliegt. Dagegen ergibt sich eine Leistungsverstärkung, denn die Sperrspannung U_{CB} kann nämlich viel größer gewählt werden als die Spannung U_{BE} zwischen Emitter und Basis, sodaß die Ausgangsleistung $U_{CB} \cdot I_C \sim U_{CB} \cdot I_E$ viel größer ist als die Eingangsleistung $U_{BE} \cdot I_E$. Befindet sich ein Lastwiderstand R_{Last} im Ausgangskreis, so ist der Transistor auch als Spannungsverstärker wirksam. Geringe Spannungsänderungen im Eingangskreis bewirken große Änderungen der Stromstärke $I_C \sim I_E$.

In der **Emitterschaltung** wird der Kollektorstrom I_K durch den kleineren Basisstrom $I_B = I_E - I_C$ gesteuert (s. Abb. 12.11). Hier wirkt der Transistor als Stromverstärker. Auch in dieser Schaltung erfolgt eine Spannungsverstärkung am Lastwiderstand und insgesamt eine Leistungsverstärkung. Wegen der günstigen Verstärkereigenschaften wird die Emitterschaltung gegenüber der Basisschaltung bevorzugt.

Versuch

> Wir nehmen die Kennlinien eines npn-Transistors in Basis- und Emitterschaltung auf.

Über die Betriebsdaten eines Transistors erhält man am übersichtlichsten Auskunft durch das **Kennlinienfeld** dieses Transitors, das für jeden Transistor unterschiedlich ist. Ein Beispiel sieht man in Abb. 12.11.

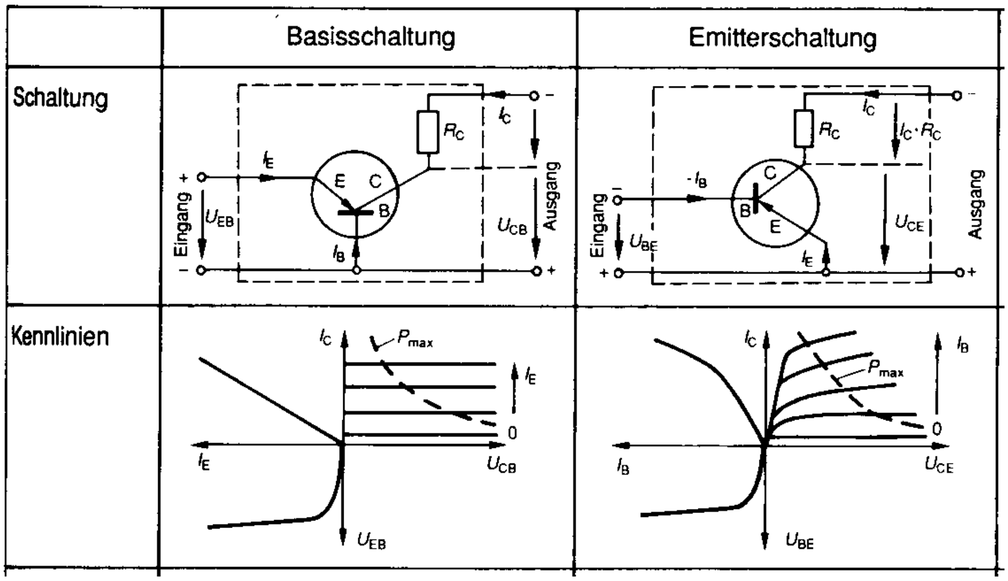


Abbildung 12.11: Basis- und Emitterschaltung eines Transistors mit den dazugehörenden Kennlinien

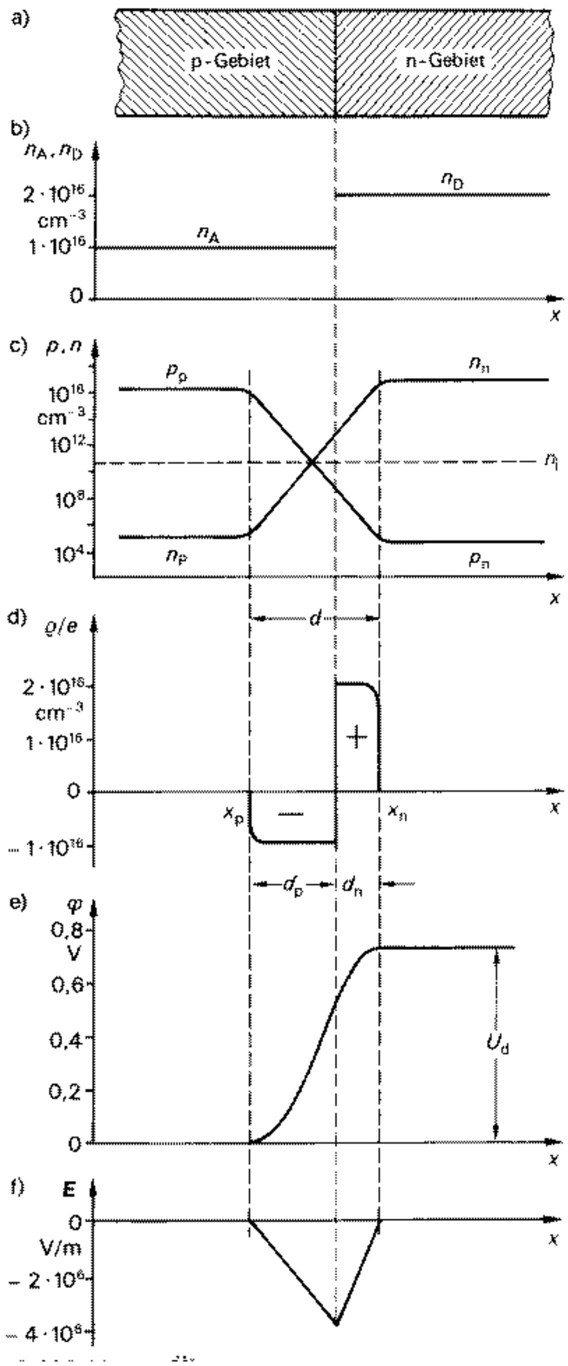


Abbildung 12.12: Der pn-Übergang

Kapitel 13

Leitung in Hochvakuum und Gasen

13.1 Ladungstransport im Hochvakuum

Wenn wir von Ladungstransport im Hochvakuum sprechen, dann meinen wir den Ladungstransport bei einem Druck von $10^{-2} - 10^{-4}$ Pa. Bei diesen Drücken beträgt die freie Weglänge $0,5 - 50$ m. Die Teilchen wechselwirken nicht mehr miteinander, sondern mit der Gefäßwand. Für die Leitung im Vakuum müssen also Ladungsträger injiziert werden.

13.1.1 Glühemission

Das am häufigsten verwendete Verfahren zur Injektion von Ladungsträgern im Vakuum beruht auf der **thermischen Emission (Glühemission)** von Elektronen.
Dieser Prozess ähnelt dem Verdampfen von Molekülen aus einer Flüssigkeitsoberfläche. Wir wollen ihn nun anhand der **Elektronenröhren** betrachten. Eine Elektronenröhre besteht aus zwei Elektroden, der Kathode und der Anode, die in einem evakuierten Glaskolben eingeschmolzen sind (s. Abb. 13.1, entnommen aus [2]). Durch das Erhitzen der

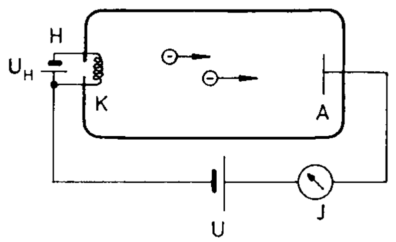


Abbildung 13.1: Elektronenröhre

Glühkathode nimmt die mittlere kinetische Energie der Elektronen in dem Metall so stark zu, daß sie die Anziehungskraft der zurückbleibenden Atomrümpfe überwinden und aus der Heizspirale austreten können (Austrittsarbeit W_A). Diese Elektronen können dann zur Anode gelangen. Eine Elektronenröhre, die nur aus Kathode und Anode besteht, nennt man **(Vakuum)Diode**.
Die Verdampfung der Elektronen können wir durch den Anlaufstrom messen, den wir beim Anlegen einer Gegenspannung ($U < 0$ V) erhalten.

Versuch

> Wir messen die Abhängigkeit des Anodenstroms I_A von der Anodenspannung U_A einer Vakuumdiode bei verschiedenen Heizströmen. (Aufnehmen einer I/U-Kennlinie)

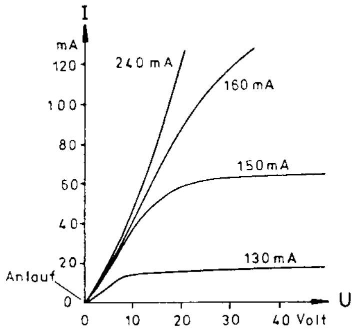


Abbildung 13.2: Kennlinie der Vakuumdiode

Abbildung 13.2 zeigt die Diodenkennlinien (entnommen aus [2]). Bei $U > 0$ V steigt der Strom mit wachsender Spannung rasch an bis schießlich eine Sättigung eintritt. Mit steigender Temperatur der Heizwendel (größerer Heizstrom) steigt der Anlaufstrom stark an. Die Abhängigkeit der Stromdichte j der austretenden Elektronen von der Austrittsarbeit W_A und der Temperatur T der Heizwendel wird durch die **Richardson-Gleichung** beschrieben (O. Richardson, 1879 - 1959):

$$j = A\, T^2\, e^{-\frac{W_A}{kT}}.$$

Die Richardson- Konstante A ist materialabhängig und liegt zwischen $10^6 A/(m^2\, K^2)$ für Wolfram und $10^2 A/(m^2\, K^2)$ für Metalloxide. Die ebenfalls werkstoffabhängige Austrittsarbeit W_A liegt zwischen 1 eV bei Metalloxiden und 5 eV bei Nickel.

Die Größe des durch eine Vakuumdiode fließenden Stromes kann durch eine von außen angelegte Steuerspannung verändert werden, indem man zwischen Kathode und Anode ein oder mehrere Steuergitter anbringt. Je nach Anzahl der Gitter werden diese Röhren dann Triode, Tetrode, Pentode usw. genannt. Bei der **Triode** wird ein Gitter zwischen Kathode und Anode gebracht, das eine negative Vorspannung erhält. Durch die Höhe des Gitterpotentials läßt sich der Anodenstrom beeinflußen. Der Anodenstrom wird durch die Raumladung vor der Kathode bestimmt, die jetzt sowohl von der Gitterspannung als auch von der Anodenspannung beeinflußt wird. Aufgrund der geometrischen Abschirmung des Gitters ist nur noch ein Anteil $D \cdot U_A$ mit $D \ll 1$ des Anodenpotentials im Raum vor der Kathode strombestimmend wirksam. Die Größe D nennt man **Durchgriff**; sie gibt an, wie stark das Anodenpotential durch das Steuergitter "hindurchgreift". Bei Trioden hat der Durchgriff D Werte zwischen 0,1 und 0,5. Die daraus resultierende starke Rückwirkung der Anodenspannung auf den Anodenstrom (geringer innerer Widerstand) ist für viele Anwendungen störend.
Daher führt man bei der **Pentode** zwei weitere Gitter in das Elektrodensystem zwischen Steuergitter und Anode ein: ein erheblich positiv vorgespanntes Schirmgitter g_2 ($U_{g_2} \approx U_a$) und ein auf Kathodenpotential liegendes Bremsgitter g_3. Das Schirmgitter schirmt den Raum zwischen Kathode und erstem Gitter gegen die Einflüsse des Anodenraums ab, während das Bremsgitter nur eine Hilfsfunktion hat.

13.1.2 Photoemission

Eine weitere Möglichkeit, Elektronen in das Vakuum zu injizieren, bietet die **Photoemission**. Der Effekt besteht darin, daß, wenn man Lichtquanten auf eine Metallplatte strahlt, dadurch Elektronen aus dem Metallverbund auslöst werden. Dies gelingt allerdings nur, wenn die Energie der Photonen (Lichtquanten) größer als die Austrittsarbeit ist. Diese Elektronen werden als Photostrom außerhalb des Metalls registriert.
Eine Anwendung findet der Photoeffekt in der **Photozelle**. Hier steht einer metallverspiegelten Wand aus Kalium, Cäsium, Cadmium o.ä. eine ringförmige Anode gegenüber (s. Abb. 13.3). Licht, das auf die Metallschicht (Kathode) fällt, löst dort Elektronen aus, die von der Anode gesammelt und vom Galvanometer G als Photostrom gemessen werden.

Versuch

> Wir bestrahlen bei konstanter Spannung eine Photodiode und messen den Strom. Wir beobachten, daß der Strom zur Lichtintensität proportional ist und oberhalb einer Sättigungsspannung unabhängig von der angelegten Spannung (s. Abb. 13.3, entnommen aus [9]).

Photozellen können evakuiert oder gasgefüllt sein. Im zweiten Fall wird der Elektronenstrom durch Stoßionisation verstärkt.

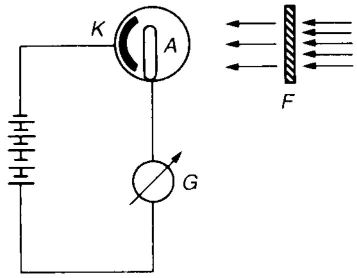


Abbildung 13.3: Photodiode

13.1.3 Sekundärelektronenemission

Die bereits freigesetzten Elektronen können wiederum soviel kinetische Energie erlangen, daß sie weitere Elektronen durch Stoß freisetzen können (**Sekundärelektronen** genannt). Schnelle Elektronen können sogar mehrere Sekundärelektronen freisetzen. Dies nutzt man im Sekundärelektronen- Vervielfacher (kurz SEV oder **Multiplier**) aus, um einzelne Elektronen, vor allem aber geringe Lichtintensitäten bis herab zu einzelnen Photonen nachzuweisen. Das Licht löst aus der Photokathode Elektronen aus, die dann durch eine Spannung von einigen 100 V bis zur nächsten Elektrode (Dynode) beschleunigt werden, wo jedes Elektron mehrere Sekundärelektronen auslöst. Dieser Vorgang wiederholt sich so lange, bis nach mehreren Verstärkungsstufen (oft 10 oder mehr) ein gut meßbarer Strom entstanden ist.

13.2 Leitung in Gasen

13.2.1 Die Gasentladung

Die Atome und Moleküle von Gasen sind unter Normalbedingungen nicht thermisch ionisiert, also elektrisch neutral. Da keine Ladungsträger vorhanden sind, tritt in ihnen im allgemeinen auch keine Stromleitung auf.

Versuch

An einen Plattenkondensator mit einem Plattenabstand von einigen cm wird eine Spannung von einigen 100 V gelegt. Bei normaler Luftatmosphäre zeigt ein in den Kreis eingeschaltetes Strommeßinstrument keinen Strom an. Hält man hingegen eine Flamme zwischen die Kondensatorplatten, so zeigt das Amperemeter einen Strom an.

Durch die erhöhte Temperaur können in dem Gas Ladungsträger ionisiert werden, die sich in dem elektrischen Feld bewegen. Darüber hinaus kann die Ionisation auch durch Licht oder radioaktive Strahlung erfolgen, dabei entstehen positive Ionen und Elektronen. Die Elektronen können sich nachträglich an neutrale Atome bzw. Moleküle anlagern, sodaß auch negative Ionen auftreten.

Die unselbständige Gasentladung

Immer, wenn die Stromleitung erst eintritt, wenn durch äußere Einflüsse Ladungsträger im Gas erzeugt werden, spricht man von **unselbständiger Gasentladung**.
Bei einer konstanten Gasionisierung (pro Zeiteinheit wird eine konstante Anzahl von Ladungen erzeugt) zeigt die unselbständige Gasentladung eine charakteristische Abhängigkeit der Stromstärke von der Spannung (s. Abb. 13.4, entnommen aus [3]):
Für kleine Spannungen (Bereich I) nimmt die Stromstärke zunächst linear mit der Zeit zu,

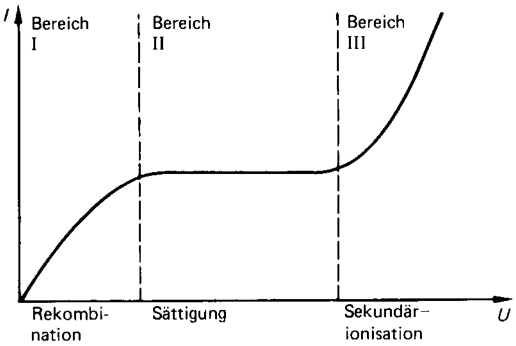


Abbildung 13.4: Unselbständige Gasentladung

d.h., es gilt das OHMsche Gesetz U/I = konst.. Die Gasionen stoßen auf dem Weg zur gegenpoligen Elektrode auf andere Gasatome. Ferner können sie mit Ionen entgegengesetzter Ladung wieder rekombinieren, deshalb wird dieser erste Bereich auch **Rekombinationsbereich** genannt. Steigt die Spannung weiterhin, dann gelangen die Ionen so schnell zu den Elektroden, daß keine Rekombinationprozesse mehr möglich sind. Alle Gasionen fließen jetzt in einem konstanten Strom ab, der Sättigungsstrom genannt wird (Bereich II). Werden die Ionen durch die zunehmende Spannung so stark beschleunigt, daß ihre kinetische Energie ausreicht, um bei einem Stoß mit den neutralen Atomen diese ionisieren zu können (**Stoßionisation**), dann werden **Sekundärelektronen** erzeugt (Bereich III), und es läuft nun eine selbständige Gasentladung ab.
Die Ionisation von Materie wird zur Messung der Aktivität oder der Energie der Strahlung eines radioaktiven Präparates ausgenutzt. Bei diesen sogenannten **Ionisationskammern**

(s. Abb. 13.5.a) wird die durch die Strahlung im Zählgas oder Halbleiterkristall erzeugte Ladung gemessen (**Primärionisation**). Die erzeugten Ionen und Elektronen wandern aufgrund eines angelegten elektrischen Feldes zu den Elektroden. Erhöht man die angelegte Spannung, so werden die primär erzeugten Elektronen so stark beschleunigt, daß sie ihrerseits ionisieren können (**Sekundärionisation**). Die ist in Abb. 13.5.b dargestellt. Beide Abbildungen stammen aus [9].

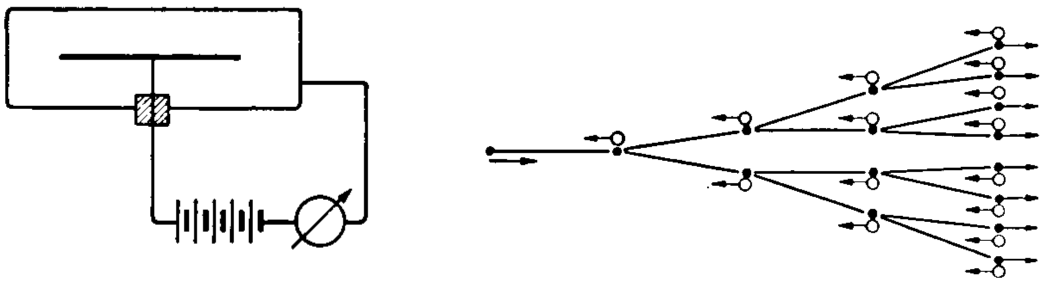


Abbildung 13.5: Ionisationskammer und Sekundärioinisation

Selbständige Gasentladung bei normalem Gasdruck

Bei der **selbständigen Gasentladung** findet der Ladungsfluß ohne äußere Einwirkung statt. Dazu müssen aber immer schon ein paar Ladungsträger im Gas vorhanden sein, was aber immer der Fall ist, da die Höhenstrahlung und die von Spuren radioaktiver Stoffe ausgehende Strahlung immer einige Ionen und Elektronen in den Gasen bilden (etwa 10 positive Ionen und Elektronen pro Sekunde in $1\,\mathrm{cm}^3$ Luft). Die Gasatome können aufgrund ihrer kinetischen Energie andere durch Stoßionisation ionisieren. Dieser Vorgang läuft lawinenartig ab. Die dazu erforderliche kinetische Energie stammt aus der Energie des elektrischen Feldes. Sowohl die Elektronen als auch die Ionen müssen auf der mittleren freien Weglänge l eine Mindestspannung $\Delta U = El$ durchlaufen, damit die dabei gewonnene Energie $E_{kin} = 1/2\ m\,v^2 = Q\,\Delta U$ der zur Stoßionisation benötigten Energie entspricht. Je größer die mittlere freie Weglänge, d.h., je geringer die Dichte bzw. der Druck des Gases ist, um so kleiner ist die Spannung, bei der die selbständige Entladung zündet. Je nach Spannung, dem Gasdruck sowie der Gestalt der Elektroden gibt es verschiedene Erscheinungsformen der Gasentladung.

Spitzen- oder Koronaentladung: In der Nähe geladener Leiter herrscht eine besonders hohe Feldstärke an den Stellen, an denen die Oberfläche einen kleinen Krümmungsradius hat, wie z. B. an Spitzen, Kanten und dünnen Drähten. Die hohe Feldstärke kann dazu führen, daß in dem umgebenden Gas eine Stoßionisation angeregt wird und eine Entladung des Leiters erfolgt. Von der Spitze geht eine büschelförmige Lichterscheinung aus, die in der Luft rötlich-violett ist. Diese Erscheinung kann man oft an Hochspannungsleitungen beobachten.

Funkenentladung: Bei hoher Spannung kann es zu einem schlagartigen Übergang großer Ladungsmengen zwischen Leitern kommen. Der momentan sehr starke Funkenstrom führt zur Erhitzung des Gases in der Entladebahn, von der eine Druckwelle (Knall) ausgeht. Die Spannung, bei der der Funke auftritt, hängt von der Form und von dem Abstand der Elektroden und vom Gasdruck und der Gasart ab. Man kann daher aus der Schlagweite von Funken zwischen zwei Elektroden auf die Spannung schließen (Meßfunkenstrecke).

Bogenentladung: Die Bogenentladung wollen wir uns am Beispiel der auch in der Vorlesung häufig benutzten Kohlebogenlampe ansehen. Zwischen zwei Kohlestäben wird eine Spannung von mindestens 60 V angelegt. Bringt man die Stäbe in Kontakt und zieht sie dann wieder auseinander, so entsteht zwischen ihnen ein Lichtbogen. Bei der Berührung entsteht an der Kontaktstelle ein großer Übergangswiderstand, der die Kohlen zum Glühen bringt. Das umgebende Gas wird erhitzt und kann Gasatome ionisieren. Beim Auseinanderziehen der Kohlen tritt daher eine Gasentladung auf. Die positiven Ionen schlagen auf der Kathode auf und erhitzen diese auf 3000 K. Durch Glühemission sendet die Kathode weitere Elektronen aus, die auf ihrem Weg zur Anode weitere Ionen erzeugen. Durch den Aufprall der Elektronen auf die Anode wird diese auf 5000 K aufgeheizt. Hier bildet sich ein Krater, der die Quelle des intensiven Lichtes ist. Im Lichtbogen herrschen Temperaturen von 10000 K.

Selbständige Gasentladung in verdünnten Gasen: die Glimmentladung

Versuch

In eine Glasröhre sind an den Enden zwei Elektroden vakuumdicht eingeschmolzen und es besteht die Möglichkeit, die Röhre zu evakuieren. An den Elektroden wird eine Spannung von einigen 1000 V angelegt. Solange Atmosphärendruck in der Röhre vorherrscht, findet keine Entladung statt. Erst wenn man durch Abpumpen den Gasdruck erniedrigt, so setzt bei etwa 50mbar eine Entladung ein, die der Funkenentladung ähnlich ist. Zwischen den Elektroden beobachtet man einen unruhigen Lichtfaden. Bei weiterer Druckerniedrigung verbreitert sich der Lichtfaden. Bei dem Druck von etwa 1 mbar erfüllt eine Leuchterscheinung die ganze Röhre, die in verschiedene helle und dunkle Zonen unterteilt ist (s. Abb. 13.6, entnommen aus [1]).

Zwischen der Kathode und dem Kathodenlicht liegt ein kleiner dunkler Bereich, der ASTONsche Dunkelraum. In diesem Raum ist die Feldstärke E am größten. Durch den

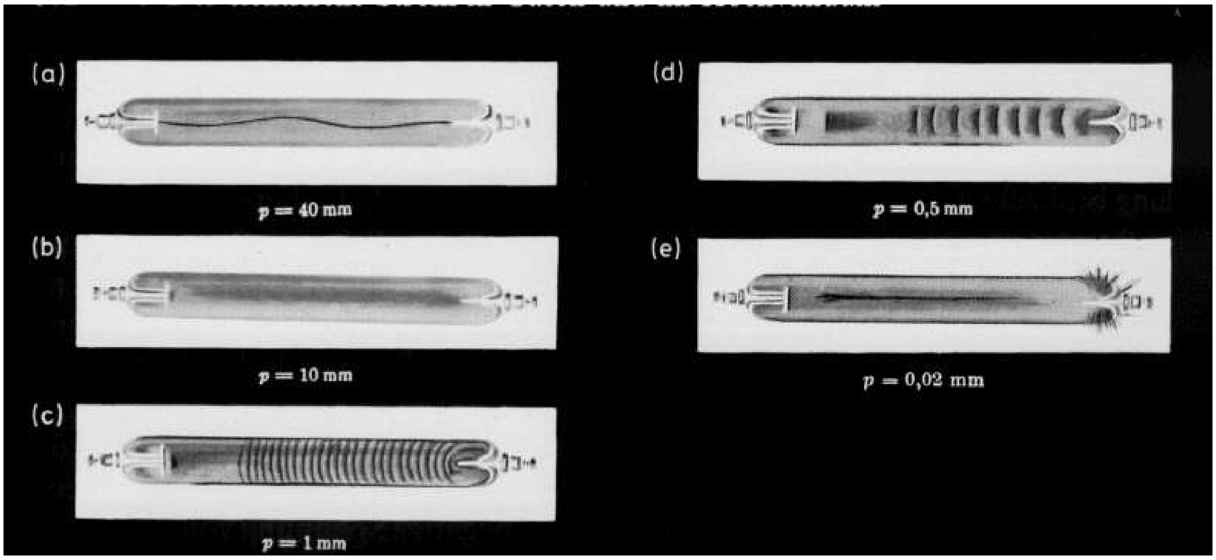


Abbildung 13.6: Die Glimmentladung

Aufprall positiver Ionen auf die Kathode werden Elektronen freigesetzt (negative Raumladung), die zunehmend Feldenergie aufnehmen. Im Bereich des HITTORFschen Dunkelraums werden durch die schnellen Elektronen viele Gasatome ionisiert, so daß eine starke positive Raumladung entsteht. Die Energie der Elektronen wird im kathodischen Glimmlicht (beginnend mit einem Glühsaum) durch die Lichtaussendung verbraucht. Deshalb nimmt hier die Feldstärke bis auf Null ab, und es entsteht eine große negative Ladungsdichte.
Nach dem FARADAYschen Dunkelraum leuchtet eine positive Säule. In diesem Gebiet sind gleich viele Elektronen und positive Ionen vorhanden. Hier diffundieren fortwährend Elektronen und Ionen an die Wand und rekombinieren dort unter Lichtausstrahlung. Die Energie zur Erzeugung neuer Ladungsträger wird dem konstanten elektrischen Feld entnommen. Die positive Säule ist der längste leuchtende Teil einer Glimmentladung. Zwischen ihr und der Anode kann ein kleiner glimmender Bereich liegen (anodisches Glimmlicht). Unmittelbar vor der Anode ist ein Feldstärkeanstieg zu verzeichnen, der von der negativen Raumladung der schnell abfließenden Elektronen herrührt. Die ist in Abb. 13.7 (entnommen aus [3]) graphisch dargestellt.
Die positive Säule von Glimmentladungen wird zu Beleuchtungszwecken benutzt. Man verwendet ziemlich lange Röhren, denen man alle möglichen Formen (z.B. Buchstaben) geben kann, besonders zur Lichtreklame. Die Säule folgt nämlich allen Windungen des Rohres ohne Schwierigkeiten, wie folgender Versuch zeigt.

Versuch

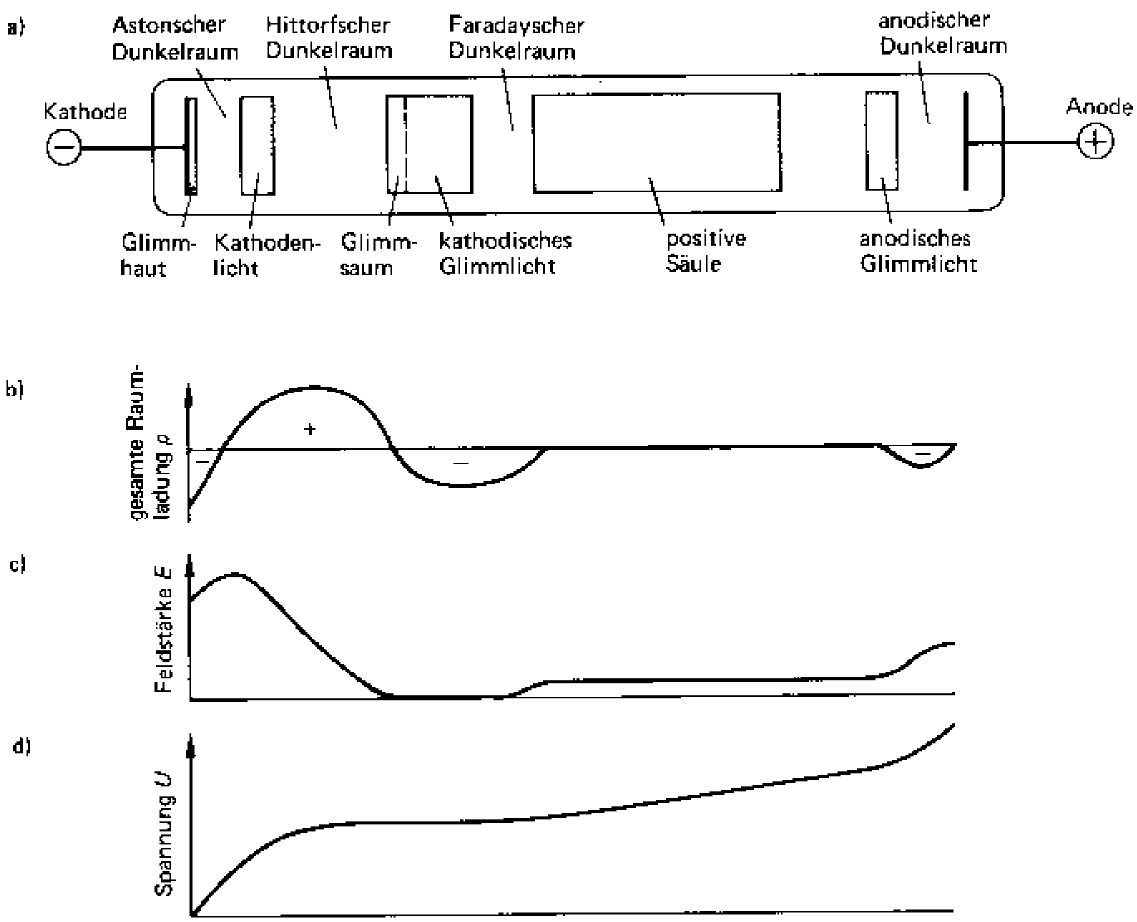


Abbildung 13.7: Charakteristische Zonen bei der Glimmentladung

> Wir legen an das Umwegrohr nach Hittorf (s. Abb. 13.8 aus [1]) eine Hochspannung an und evakuieren das Rohr langsam. Wir beobachten, daß bei hohen Drücken die Entladung direkt zwischen den Elektroden erfolgt, bei niedrigen Drücken hingegen über den Umweg.

Je nach Gasfüllung erhält man verschiedene Farben, so leuchtet beispielsweise die Säule mit Neon rot, mit Argon und einer Spur Quecksilberdampf erhält man blaues Licht und mit Helium gelbes. Die kathodischen Entladungsteile sind bei solchen Leuchtröhren unscheinbar und spielen für die Lichtausbeute keine Rolle. Man kann sogar Leuchtröhren in allen möglichen Farben bauen, indem man die Innenfläche der Glasröhre mit Leuchtstoffen überzieht, die in der gewünschten Farbe fluoreszieren.

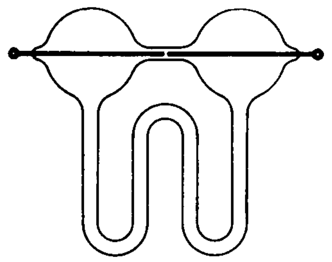


Abbildung 13.8: Umwegrohr nach Hittorf

13.2.2 Plasmaströme

Ein Plasma besteht aus positiven Ionen und negativen Elektronen großer Dichte. Wegen der annähernd vollständigen Ionisation der Materie (bis zu 99 %) wird der Plasmazustand auch der **vierte Aggregatzustand** genannt. Ein Beispiel eines quasineutralen Plasmas, d.h. mit gleich vielen positiven und negativen Ladungsträgern, ist die positive Säule bei einer Glimmentladung.
Das physikalische Verhalten von Materie im Plasmazustand spielt vor allem in der Astro- und in der Kernphysik eine Rolle. Die Ladungsträgerkonzentrationen liegen beispielsweise in der Ionosphäre bei 10^{10} Ladungsträgern pro m^3, in der Sternatmosphäre bei 10^{20} Ladungsträgern pro m^3 und im Sterninnern sogar bei 10^{30} Ladungsträgern pro m^3. Diese hohen Konzentrationen werden durch extrem hohe Temperaturen (10 000 bis 30 000 K) verursacht. In der Kernphysik sind die Atomkerne und die Elektronen bei einer Temperatur von 10^8 K völlig von einander getrennt, so daß es zu einer Atomkernverschmelzung (Kernfusion) kommen kann.

Literaturverzeichnis

[1] Bergmann, Ludwig und Schaefer, Clemens. *Lehrbuch der Experimentalphysik Bd. II Elektrizität und Magnetismus.* Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1987

[2] Gerlach, Eckard und Grosse, Peter. *Physik Eine Einführung für Ingenieure.* B.G.Teubner, Stuttgart, 1991

[3] Hering, Ekbert; Martin, Rolf; Stohrer, Martin. *Physik für Ingenieure.* VDI–Verlag, Düsseldorf, 1992

[4] Lüscher, Edgar. *Experimentalphysik I 1. Teil, Mechanik, Optik, Wärme.* BI Hochschultaschenbücher, Mannheim, 1967

[5] Lüscher, Edgar. *Experimentalphysik II Elektromagnetische Vorgänge.* BI Hochschultaschenbücher, Mannheim, 1966

[6] Bormann, Manfred. *Experimentalphysik Bd. 2 Elektrizitätslehre, Elektromagnetische Schwingungen und Wellen.* Studienverlag Dr. N.Brockmeyer, Bochum, 1977

[7] Atkins, Kenneth R. *Physik: Die Grundlagen des physikalischen Weltbildes.* Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1986

[8] Höfling, Oskar *Physik: Lehrbuch für Unterricht und Selbststudium.* Dümmler, Bonn, 1990

[9] Gerthser, Christian; Kneser, Hans O.; Vogel, Helmut *Physik: ein Lehrbuchzum Gebrauch neben Vorlesungen.* Springer-Verlag, Berlin, 1989

[10] Bader, Franz und Dorn, Friedrich. *Physik-Oberstufe Gesamtband 12/13.* Schroedel Schulbuchverlag, Hannover, 1986

[11] Pohl, Robert W. *Einführung in die Physik Bd. 2, Elektrizitätslehre.* Springer-Verlag, Berlin, 1975

[12] Orear, Jay. *Physik.* Carl Hanser Verlag, München, 1989

[13] Kittel, Charles. *Einführung in die Festkörperphysik*. R. Oldenbourg Verlag, München, 1993

[14] Buckel, Werner. *Supraleitung: Grundlagen und Anwendungen*. VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim, 1990

[15] Flügge, Günter. *Manuskript zur Vorlesung Physik II RWTH Aachen*. Aachen

[16] Bethke, Siegfried. *Manuskript zur Vorlesung Physik II RWTH Aachen*. Aachen

[17] Ameling, Walter. *Grundlagen der Elektrotechnik I*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1988

[18] Böhm, Albrecht. *Manuskript zur Vorlesung Physik II RWTH Aachen*. Aachen

[19] Bertelsmann Lexikon *Das neue Taschenlexikon* Bertelsmann Lexikon Verlag, Güthersloh, 1992

Danksagung

An erster Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. G. Flügge für die interessante Themenstellung danken, sowie Herrn Dr. J. Bartsch für die gute Betreuung und die zahlreichen Anregungen.
Darüber hinaus gilt mein Dank Herrn E. Schneevogt und Herrn Dr. J. Bartsch für die Unterstützung und Hilfestellung beim Aufbau und der Durchführung der Experimente. Desweiteren danke ich Peter Uelkes, Jan Theißen und Christoph Ley vom III. Physikalischen Institut für die Einweisung in den Umgang mit dem Unixsystem und dem Scanner im Terminalraum des Instituts. Ohne ihren Rat und Hilfe würde die Arbeit nicht in dieser Form vorliegen.
Meinen Eltern möchte ich für die Ermöglichung des Studiums danken, sowie für die Ermutigung zum Durchhalten in Durststrecken.

Ich versichere, daß ich die schriftliche Hausarbeit – einschließlich beigefügter Zeichnungen und Darstellungen – selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Alle Stellen der Arbeit, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entnommen sind, habe ich unter Angabe der Quelle deutlich als Entlehnung kenntlich gemacht.

Aachen, den ....