Kapitel 7

Die MAXWELLschen Gleichungen

Dem Schotten JAMES CLERK MAXWELL (1831-1879) gelang es im Jahre 1860, alle elektromagnetischen Vorgänge in vier Grundgleichungen, den sogenannten MAXWELL-Gleichungen, zu beschreiben. Er fasste damit alle aus Experimenten hervorgegangenen Erkenntnisse über den Elektromagnetismus zusammen. Drei der vier MAXWELL-Gleichungen haben wir bereits kennengelernt:

(1)	$\operatorname{div}\vec{D} = \varrho_{\text{frei}}$	(vgl. Abschnitt 2.8.1, Seite 85)	(7.1)
(2)	$\operatorname{div}\vec{B} = 0$	(vgl. (4.3), Seite 149)	(7.2)
(3)	$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	(vgl. (5.44), Seite 193)	(7.3)

Die vierte MAXWELL-Gleichung ist eine Verallgemeinerung des AMPÈREschen Gesetzes (4.55). Sie lässt sich aus dem AMPÈREschen Gesetz herleiten:

$$\oint_{\partial A} \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_A \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{A} \tag{7.4}$$

Hier ist $j = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}A}$ die **Stromdichte** und $\vec{j}$ ist der Vektor der Stromdichte, der in die Richtung des resultierenden Stromflusses zeigt. Mit Hilfe des STOKESschen Satzes geht (7.4) über in

$$\oint_{\partial A} \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{r} = \iint_A (\operatorname{rot}\vec{B})\,\mathrm{d}\vec{A} = \mu_0 \iint_A \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{A} \tag{7.5}$$

Da die Integrale in der letzten Beziehung für beliebige Flächen A gleich sind, müssen die Integranden gleich sein. Es gilt also

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} \tag{7.6}$$

wobei sich $\vec{j} = \vec{j}_{\text{frei}} + \vec{j}_{\text{geb}}$ aus der Stromdichte $\vec{j}_{\text{frei}}$ der freien und der Stromdichte $\vec{j}_{\text{geb}}$ der gebundenen Ströme zusammensetzt. Ebenso gilt

$$\operatorname{rot}\vec{H} = j_{\text{frei}} \tag{7.7}$$

MAXWELL erkannte als erster, dass die Gleichungen (7.4), (7.6) und (7.7) unvollständig sind. Als wir in Abschnitt 4.4.2 auf Seite 162 das AMPÈREsche Durchflutungsgesetz aufgestellt haben, haben wir darauf hingewiesen, dass das AMPÈREsche Durchflutungsgesetz (4.55) nur für einen stetigen Strom I gilt, d.h. der Strom I darf weder aus dem Nichts entstehen noch darf er plötzlich verschwinden. Es gibt allerdings Fälle, die mit dieser Einschränkung nicht auskommen. Betrachten wir z.B. den Ladevorgang eines Kondensators: Auf die eine Kondensatorplatte mit der Fläche A trägt der Strom

$$I = jA' \tag{7.8}$$

durch einen elektrischen Leiter mit Querschnittsfläche A' eine Ladung

$$Q(t) = \int_{t_0}^{t} I \, \mathrm{d}t \tag{7.9}$$

auf. Von der anderen Platte gleicher Größe wird durch den Strom

$$I = jA' \tag{7.10}$$

entsprechend eine Ladung

$$Q(t) = \int_{t_0}^{t} I \, \mathrm{d}t \tag{7.11}$$

abgeführt. Zwischen den Platten ist der Stromfluss allerdings unterbrochen. Denken wir uns einen geschlossenen Weg $\gamma := \partial F$, der eine Fläche F umrandet. Der Weg $\gamma = \partial F$ soll so gewählt werden, dass er den Strom I einschließt. Es gilt nach dem AMPÈREschen Durchflutungsgesetz (4.55)

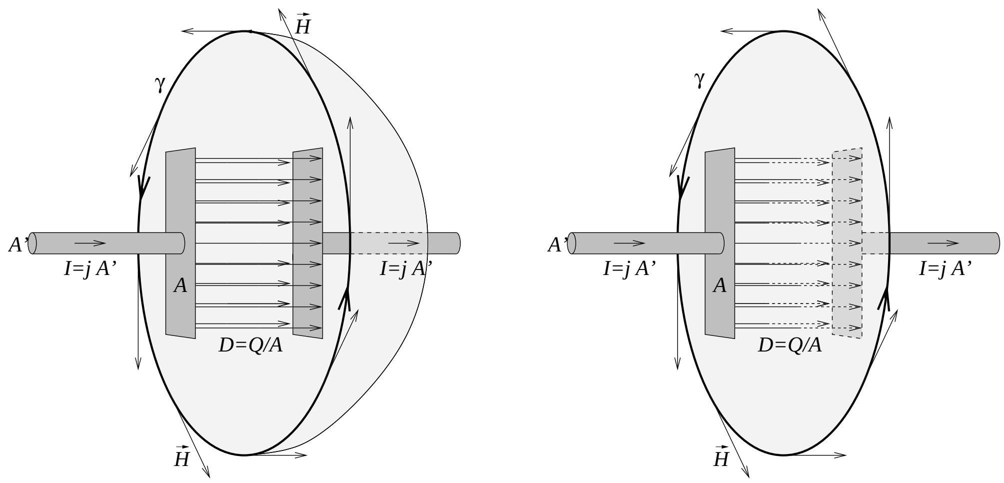
$$\oint\limits_{\gamma=\partial F} \vec{B} \, \mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 I \tag{7.12}$$

$$\oint\limits_{\gamma=\partial F} \vec{B} \, \mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 \iint\limits_{F} \vec{j} \, \mathrm{d}\vec{A} \tag{7.13}$$

$$\stackrel{\text{Stokes}}{\Longleftrightarrow} \quad \iint\limits_{F} \operatorname{rot} \vec{B} \, \mathrm{d}\vec{A} = \mu_0 \iint\limits_{F} \vec{j} \, \mathrm{d}\vec{A} \tag{7.14}$$

Die Fläche F kann dabei bis auf ihren Rand $\gamma = \partial F$ beliebig gewählt werden. Insbesondere kann F gekrümmt sein. Wir wählen die durch γ begrenzte Fläche F so, wie es in Abb. 7.1 (a) zu sehen ist, und zwar so, dass durch die Fläche F ein Strom

$$I = \iint\limits_{F} \vec{j} \, \mathrm{d}\vec{A} \tag{7.15}$$



(a) (b)

Abbildung 7.1: (a) Beim Ladevorgang eines Kondensators fließt durch eine Fläche F mit dem Rand $\gamma = \partial F$ ein Strom I. Durch eine andere Fläche F' mit gleichem Rand $\gamma = \partial F'$ fließt kein Strom. Dennoch wird ein Magnetfeld $\vec{B}$ erzeugt. Das Ampèresche Gesetz (4.55) kann nicht mehr uneingeschränkt gelten, da es für beliebige Flächen mit gleichem Rand gelten muss.

fließt. Dieser erzeugt ein magnetisches Feld, dass dem Ampèreschen Gesetz genügt. Da das Flussintegral (Oberflächenintegral)

$$\mu_0 \iint\limits_F \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{A} \tag{7.16}$$

über F wegen des Stromes $I = \iint_F \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{A}$ nicht null sein kann, muss nach dem Ampèreschen Gesetz auch das Ringintegral entlang des Weges γ von null verschieden sein.

$$\oint\limits_\gamma \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 I \neq 0 \tag{7.17}$$

Wählen wir nun eine andere Fläche F', die ebenfalls von γ begrenzt wird, die allerdings den Leiter nicht schneidet, sondern stattdessen zwischen den Kondensatorplatten verläuft (siehe Abb. 7.1 (b)), verschwindet das Flussintegral

$$\mu_0 \iint\limits_{F'} \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{A} = \mu_0 I = 0. \tag{7.18}$$

Nach dem AMPÈREschen Gesetz muss daher auch das Ringintegral

$$\oint\limits_{\gamma=\partial F'} \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 I = 0 \tag{7.19}$$

verschwinden. Dies ist aber ein Widerspruch zu (7.17). Wir haben also die globale Gültigkeit des AMPÈREschen Gesetzes widerlegt. Wir müssen das AMPÈREsche Gesetz daher modifizieren, damit auch obiger Fall richtig beschrieben wird. Betrachten wir noch einmal die oben beschriebene Fläche F' durch das Innere des Kondensators: Das Flussintegral der Stromdichte über die Fläche F' verschwindet zwar, dafür schneidet die Fläche F' im Gegensatz zur Fläche F Feldlinien eines sich ändernden $\vec{D}$-Feldes, so dass das Oberflächenintegral

$$\iint\limits_{F} \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{A} \neq 0 \tag{7.20}$$

ist. Wir können uns den elektrischen Strom $I = \frac{\mathrm{d}Q_{\mathrm{frei}}}{\mathrm{d}t}$ durch den Kondensator fortgesetzt denken. Der elektrische Strom $I = \frac{\mathrm{d}Q_{\mathrm{frei}}}{\mathrm{d}t}$ ändert die Ladungsmenge Q auf den Kondensatorplatten. Gleichzeitig ändert er damit auch die Flächenladungsdichte

$$\sigma = \frac{Q_{\mathrm{frei}}}{A}. \tag{7.21}$$

Für das $\vec{D}$-Feld im Innern des Kondensators gilt nach (2.64) $\sigma = D$. Damit resultiert aus dem elektrischen Strom I im Leiterdraht ein sich änderndes D-Feld im Kondensatorinnern:

$$I = \frac{\mathrm{d}Q_{\mathrm{frei}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial(\sigma A)}{\partial t} = \frac{\partial(DA)}{\partial t} \tag{7.22}$$

$$= \frac{\partial D}{\partial t} A = \iint\limits_{F'} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{A} \tag{7.23}$$

$$\Leftrightarrow \iint\limits_{F} \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{A} = \iint\limits_{F'} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{A} \tag{7.24}$$

Wir können uns den elektrischen Strom $I = \frac{\mathrm{d}Q_{\mathrm{frei}}}{\mathrm{d}t}$ also durch den Kondensator fortgesetzt denken. Der „Strom“ im Kondensator wird

MAXWELLscher Verschiebungsstrom

$$I_v = \iint\limits_{A} \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{A} \tag{7.25}$$

genannt. Analog zur elektrischen Stromdichte $\vec{j}$ können wir dann die

MAXWELLsche Verschiebungsstromdichte

$$\vec{j}_v = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{7.26}$$

definieren. Wir können mit diesen Größen das AMPÈREsche Gesetz verallgemeinern:

$$\boxed{\oint_{\partial F} \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{r} = I_{\text{frei}} + \iint_F \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{A}} \tag{7.27}$$

Dies ist die Integralform der gesuchten vierten MAXWELL-Gleichung. Mit dem STOKESschen Satz können wir daraus die differenzielle Form der vierten MAXWELL-Gleichung gewinnen:

$$\oint_{\partial F} \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{r} = I_{\text{frei}} + \iint_F \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{A} \tag{7.28}$$

$$\overset{\text{Stokes}}{\Leftrightarrow} \quad \iint_F (\operatorname{rot}\vec{H})\,\mathrm{d}\vec{A} = I_{\text{frei}} + \iint_F \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{A} \tag{7.29}$$

$$\Leftrightarrow \quad \iint_F (\operatorname{rot}\vec{H})\,\mathrm{d}\vec{A} = \iint_F \vec{j}_{\text{frei}}\,\mathrm{d}\vec{A} + \iint_F \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{A} \tag{7.30}$$

$$\Leftrightarrow \quad \iint_F (\operatorname{rot}\vec{H})\,\mathrm{d}\vec{A} = \iint_F (\vec{j}_{\text{frei}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})\,\mathrm{d}\vec{A} \tag{7.31}$$

Da die letzte Relation für beliebige Flächen gilt, müssen die Integranden übereinstimmen:

$$\Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j}_{\text{frei}} + \tfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \tag{7.32}$$

Dies ist die differenzielle Form der vierten MAXWELL-Gleichung. Mit dieser Gleichung kennen wir nun alle vier MAXWELLschen Gleichungen, die im Folgenden zusammengetragen sind:

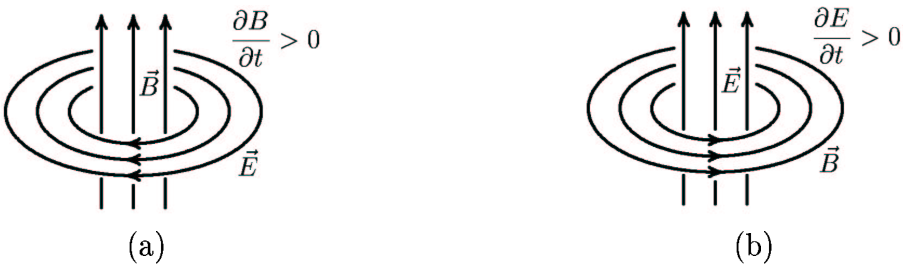


Abbildung 7.2: (a) Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld $\vec{B}$ erzeugt (induziert) ein elektrisches Wirbelfeld $\vec{E}$, und ein sich zeitlich änderndes elektrisches Feld $\vec{E}$ erzeugt ein magnetisches Wirbelfeld $\vec{B}$ (b)

MAXWELLsche Gleichungen:

	differenziell	integral	
(1)	$\operatorname{div} \vec{D} = \varrho_{\text{frei}}$	$\oiint_{\partial V} \vec{D}\, \mathrm{d}\vec{A} = Q_{\text{frei}}$	COULOMBsches Gesetz
(2)	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\oiint_{\partial V} \vec{B}\, \mathrm{d}\vec{A} = 0$	Abwesenheit magn. Monopole
(3)	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_{\partial A} \vec{E}\, \mathrm{d}\vec{r} = -\iint_{A} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, \mathrm{d}\vec{A}$	FARADAYsches Induktionsgesetz
(4)	$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{frei}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_{\partial A} \vec{H}\, \mathrm{d}\vec{r} = I_{\text{frei}} + \iint_{A} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\, \mathrm{d}\vec{A}$	AMPÈREsches Gesetz

Hierbei sind die materieunabhängigen Hilfsgrößen $\vec{D}$ und $\vec{H}$ definiert durch

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \tag{7.33}$$

und

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_r \mu_0 \vec{H}. \tag{7.34}$$

Wir können die vier MAXWELLschen Gleichungen stattdessen nur mit den Kräfte bestimmenden Feldgrößen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aufschreiben. Allerdings werden $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld nicht nur von freien Ladungen bzw. Strömen erzeugt, sondern von allen (d.h. von freien und gebundenen) Ladungen bzw. Strömen. Damit sind die MAXWELLschen Gleichungen

MAXWELLsche Gleichungen:

	differenziell	integral
(1)	$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$	$\oint\!\!\oint_{\partial V} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$
(2)	$\operatorname{div}\vec{B} = 0$	$\oint\!\!\oint_{\partial V} \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{A} = 0$
(3)	$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\oint_{\partial A} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = -\iint_A \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{A}$
(4)	$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$	$\oint_{\partial A} \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0\iint_A \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{A}$

Interessant ist der Fall, dass keine Ladungen oder Ströme auftreten ($\varrho = \vec{j} = 0$). Die einzigen nicht verschwindenden Terme der MAXWELLschen Gleichungen sind dann

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{7.35}$$

und

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \tag{7.36}$$

Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld $\vec{B}$ erzeugt (induziert) ein elektrisches Wirbelfeld $\vec{E}$, und ein sich zeitlich änderndes elektrisches Feld $\vec{E}$ erzeugt ein magnetisches Wirbelfeld $\vec{B}$ (siehe Abb. 7.2).
MAXWELL zeigte, dass aus den MAXWELLschen Gleichungen die Existenz **elektromagnetischer Wellen** folgt, indem er die vier Gleichungen so umformte, dass sie eine Wellengleichung bilden. Aus dieser Wellengleichung geht insbesondere hervor, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit c elektromagnetischer Wellen mit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 2,998 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{7.37}$$

gleich der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes im Vakuum ist. MAXWELL schloss daraus, dass Licht eine elektromagnetische Welle ist. Die ersten elektromagnetischen Wellen wurden allerdings erst im Jahre 1887 von HEINRICH HERTZ nachgewiesen.