6.5 Induktivität einer Spule mit Kern

In Abschnitt 5.4.2 haben wir die Induktivität L von Zylinderspulen ohne Kern hergeleitet und sind auf den Ausdruck (5.66) gekommen:

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{l} \tag{6.73}$$

Hier sind N die Windungszahl, A die Querschnittsfläche und l die Länge der Spule. Für Spulen mit Kern, gilt diese Beziehung allerdings nicht. Die Herleitung der Induktivität L einer Spule, die komplett von einem z.B. ferromagnetischen Kern mit Querschnittsfläche A und Länge l ausgefüllt ist, verläuft analog zu der einer Spule ohne Kern (vgl. Abschnitt 5.4.2). Wir müssen hier jedoch berücksichtigen, dass das Magnetfeld im Spuleninneren um die relative Permeabilität μ_r größer ist. Es gilt also anstelle von (5.63) die Beziehung:

$$B(t) = \mu_r \mu_0 \, I(t) \, \frac{N}{l} \tag{6.74}$$

Der magnetische Fluss durch die Spule ist deshalb

$$\Phi_M(t) = N \iint\limits_A \vec{B}(t) \mathrm{d}\vec{A} = N B(t) \, A = -\mu_r \mu_0 \, A \, I(t) \, \frac{N^2}{l}. \tag{6.75}$$

Da für die Induktionsspannung

$$U_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} \tag{6.76}$$

gilt, folgt

$$U_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} = -\mu_r \mu_0 \, A \, \frac{N^2}{l} \, \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{6.77}$$

Für die Induktivität einer Spule mit Kern folgt daraus

$$\Rightarrow \quad \boxed{L = \mu_r \mu_0 \, \frac{N^2 A}{l}} \tag{6.78}$$

6.6 Energie des magnetischen Feldes

Um die Energie des magnetischen Feldes zu berechnen, betrachten wir noch einmal den Abschaltvorgang des RL-Gliedes aus Abschnitt 5.5. Vor dem Abschalten ist die Gleichspannungsquelle U_0 eingeschaltet, so dass ein Strom $I_0 = U_0/R$ durch die Spule fließt. In der Spule wird ein Magnetfeld B erzeugt, für das

$$B = \mu_r \mu_0 \frac{N I_0}{l} \tag{6.79}$$

gilt. Es muss in diesem Magnetfeld B eine Energie W_{mag} gespeichert sein, denn nach dem Abschalten der Spannungsquelle kann diese keine Energie mehr liefern. Nach (5.105) fließt aber trotzdem noch ein exponentiell abklingender Strom $I(t)$, der im OHMschen Widerstand eine JOULEsche Wärme erzeugt. Wegen der Energieerhaltung muss die im Magnetfeld $B = \mu_r \mu_0 \frac{NI_0}{l}$ gespeicherte Energie W_{mag} gleich der JOULEschen Wärme W_{Joule} sein, die im OHMschen Widerstand umgesetzt wird, bis der Strom $I(t)$ und damit auch das Magnetfeld B der Spule verschwinden.

$$W_{\text{mag}} \stackrel{!}{=} W_{\text{Joule}} \tag{6.80}$$

Der Strom $I(t)$ geht für $t \to \infty$ gegen null. Für die im OHMschen Widerstand umgesetzte JOULEsche Wärme W_{Joule} gilt wegen $P_{el} = U_R(t)\, I(t) = I^2(t) R$ und (5.105)

$$\begin{aligned} W_{\text{Joule}} &= \int_0^\infty P_{el}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty I^2(t) R\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty I_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} R\,\mathrm{d}t && (6.81) \\ &= \int_0^\infty I_0^2 e^{-\frac{2tR}{L}} R\,\mathrm{d}t = R I_0^2 \frac{L}{2R} = \frac{1}{2} I_0^2 L && (6.82) \end{aligned}$$

Setzen wir für die Induktivität L der Spule den Ausdruck (6.78) ein, folgt

$$\begin{aligned} W_{\text{Joule}} &= \frac{1}{2} I_0^2 \mu_r \mu_0 \frac{N^2}{l} A = \frac{1}{2} I_0^2 \mu_r \mu_0 \frac{N^2}{l^2} A l && (6.83) \\ &= \frac{1}{2} \mu_r \mu_0 \frac{N I_0}{l} \frac{N I_0}{l} A l && (6.84) \end{aligned}$$

Wegen $B = \mu_r \mu_0 \frac{NI_0}{l}$, $H = \frac{NI_0}{l}$ und $V = Al$ folgt

$$W_{\text{Joule}} = \frac{V}{2} B H \tag{6.85}$$

und wegen (6.80) gilt für die anfangs im Magnetfeld der Spule gespeicherte Energie

$$W_{\text{mag}} = \frac{V}{2} B H \tag{6.86}$$

Diese Beziehung gilt allgemein für die Energie im Magnetfeld. Dividiert man E_{mag} durch das Volumen $V = Al$, so erhält man die Energiedichte des Magnetfeldes w_{mag}:

$$w_{\text{mag}} = \frac{W_{\text{mag}}}{V} = \frac{1}{2} B H \tag{6.87}$$

Die Ausdrücke für Energie und Energiedichte im Magnetfeld gelten darüber hinaus sogar vektoriell (ohne Beweis)

Energie des Magnetfeldes $$\boxed{W_{\text{mag}} = \frac{V}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}} \tag{6.88}$$

und

Energiedichte des Magnetfeldes $$\boxed{w_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}} \tag{6.89}$$