

genannt wird. Die relative magnetische Permeabilitätszahl  $\mu_r$  ist eine dimensionslose Materialkonstante. Nach der Größe der relativen Permeabilität  $\mu_r$  unterscheidet man drei Klassen von Materialien:

- a)  $\mu_r < 1$     **diamagnetische** Materialien     $B < B_0$
- b)  $\mu_r > 1$     **paramagnetische** Materialien     $B > B_0$
- c)  $\mu_r \gg 1$     **ferromagnetische** Materialien     $B \gg B_0$

Man nennt solche Materialien auch kurz Diamagneten, Paramagneten bzw. Ferromagneten. In Versuch 6.1 haben wir gesehen, dass Eisen das Magnetfeld um ganze Größenordnungen verstärken kann, womit wir Eisen den ferromagnetischen Stoffen zuordnen können. Die ferromagnetischen Eigenschaften von Eisen waren sogar schon im Altertum bekannt, weshalb man den Effekt des Ferromagnetismus nach Eisen (= Ferrum) benannte. Wie präzise Messungen gezeigt haben, liegen die relativen Permeabilitätszahlen der verschiedenen Eisensorten zwischen  $\mu_r \approx 600$  für Gusseisen und  $\mu_r \approx 5500$  für gehärtetes Eisen. Die relativen Permeabilitätszahlen von Eisen und anderen ferromagnetischen Materialien sind stark temperaturabhängig und hängen außerdem von der Vorgeschichte des Materials ab, weshalb sie keine festen Materialkonstanten sind. Wir werden darauf im Abschnitt 6.3 noch näher eingehen.

## 6.2 Diamagnetismus und Paramagnetismus

Dia- und paramagnetische Stoffe verursachen nur kleine Abweichungen des Magnetfeldes. Die relativen Permeabilitätszahlen dia- und paramagnetischer Stoffe unterscheiden sich daher in der Regel nur geringfügig von der relativen Permeabilitätszahl  $\mu_{r_{\text{Vakuum}}} = 1$  des Vakuums. Man definiert in Analogie zur dielektrischen Suszeptibilität  $\chi_e = \varepsilon_r - 1$  die **magnetische Suszeptibilität**  $\chi_m$  durch

$$\boxed{\chi_m = \mu_r - 1.} \tag{6.4}$$

Hier einige Werte für die magnetischen Suszeptibilitäten  $\chi_m$  dia- und paramagnetischer Stoffe:

Platin	paramagnetisch	$36 \cdot 10^{-5}$
Wolfram	paramagnetisch	$6,8 \cdot 10^{-5}$
Aluminium	paramagnetisch	$2,3 \cdot 10^{-5}$
Hartgummi	paramagnetisch	$1,4 \cdot 10^{-5}$
Luft	paramagnetisch	$0,04 \cdot 10^{-5}$
Kupfer	diamagnetisch	$-0,9 \cdot 10^{-5}$
Glas	diamagnetisch	$-1,3 \cdot 10^{-5}$
Silber	diamagnetisch	$-2,6 \cdot 10^{-5}$
Gold	diamagnetisch	$-3,6 \cdot 10^{-5}$
Wismut	diamagnetisch	$-17,6 \cdot 10^{-5}$

Da die relativen Permeabilitäten diamagnetischer Materialien kleiner als 1 sind, schwächen diese das Magnetfeld ab, paramagnetische Stoffe verstärken das Magnetfeld. Der Diamagnetismus wurde zuerst von M. FARADAY im Jahre 1846 an Wismut (Bi) entdeckt. Er stellte fest, dass Wismut aus inhomogenen Magnetfeldern herausgedrückt wird. Das unterschiedliche Verhalten dia- und paramagnetischer Substanzen wollen wir in folgendem Versuch qualitativ untersuchen:

### Versuch 6.2

Der Versuchsaufbau besteht aus einem Elektromagneten, der ein stark inhomogenes Magnetfeld  $\vec{B}_0$  erzeugt. In dieses inhomogene Magnetfeld können wir an einem langen Faden Proben verschiedener Materialien hängen, so dass sie frei beweglich in dem Bereich der stärksten Inhomogenität schweben. Führen wir den Versuch mit einer diamagnetischen Wismutprobe durch, können wir beobachten, dass die Probe aus dem Bereich des stärkeren Magnetfeldes herausgedrückt wird (siehe Abb. 6.2 a). Eine paramagnetische Aluminiumprobe hingegen erfährt eine Kraft in Richtung des zunehmenden Magnetfeldes (siehe Abb. 6.2 b). Führen wir den gleichen Versuch im homogenen Magnetfeld durch, können wir keine Kraftwirkung auf die Proben beobachten.

### Deutung:

Auf Dia- und Paramagneten wirken offenbar nur Kräfte, solange sie inhomogenen Magnetfeldern ausgesetzt werden. In Abschnitt 5.7.2 (Seite 211) haben wir festgestellt, dass der magnetische Dipol (mit dem magnetischen Moment  $\vec{\mu}$ ) ein ähnliches Verhalten in inhomogenen Feldern zeigt. An dem Beispiel mit den Stabmagneten (Seite 211) konnten wir sehen, dass bei gleicher Ausrichtung von magnetischem Moment  $\vec{\mu}$  und Magnetfeldlinien eine Kraft wirkt, die den Dipol in den Bereich des stärkeren Magnetfeldes hinein zieht (ungleichnamige Pole aneinander halten). Stehen dagegen  $\vec{\mu}$  und  $\vec{B}_0$  antiparallel zu einander, wird der Dipol aus dem Bereich des stärkeren Feldes heraus gedrückt.

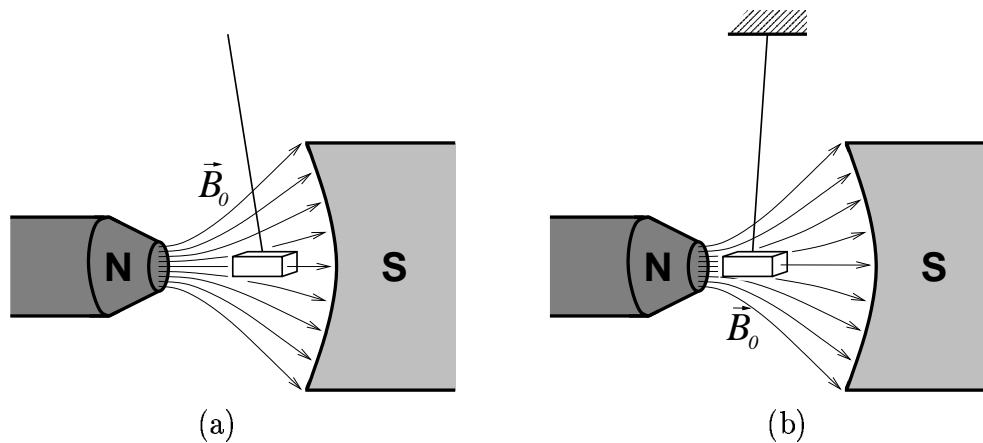


Abbildung 6.2: Im inhomogenen Magnetfeld werden (a) Diamagneten aus dem Bereich des stärkeren Feldes herausgedrückt, (b) Paramagneten hingegen werden hineingezogen.

Es liegt nun nahe, die Kräfte auf Dia- und Paramagneten dadurch zu erklären, dass sowohl Diamagneten als auch Paramagneten im Magnetfeld  $\vec{B}_0$  ein magnetisches Dipolmoment  $\vec{\mu}$  haben. Dabei muss das Dipolmoment  $\vec{\mu}$  paramagnetischer Stoffe parallel, und das diamagnetischer Stoffe antiparallel zum magnetischen Feld  $\vec{B}_0$  sein. Wäre das Dipolmoment außerdem noch um einen Winkel  $\vartheta \neq 0, \pi$  bezüglich  $\vec{B}_0$  verdreht, würde zusätzlich zur Kraft ein Drehmoment  $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}_0$  auf den Dipol wirken. Ein solches Drehmoment können wir aber nicht beobachten, weshalb das magnetische Dipolmoment keine feste Richtung bezogen auf die Probe haben kann. Drehen wir nämlich die Probe im inhomogenen Feld von Versuch 6.2, wirkt kein Drehmoment auf die Probe. Mit anderen Worten: wir verdrehen zwar die Probe, das magnetische Dipolmoment  $\vec{\mu}$  behält aber seine Richtung bezogen auf das Magnetfeld  $\vec{B}_0$  bei. Wir stellen folgende Vermutung auf:

- In diamagnetischen Stoffen werden mikroskopische Kreisströme  $I$  erzeugt, die nach der LENZschen Regel der Ursache entgegen wirken, d.h. das Magnetfeld  $\vec{B}_0$  abschwächen. Ein solcher Kreistrom erzeugt nicht nur ein magnetisches Feld  $\vec{B}_{\text{Materie}}$ , es hat auch ein magnetisches Moment  $\vec{\mu}$ . Damit der Kreistrom  $I$  das magnetische Feld  $\vec{B}_0$  schwächt, muss das von ihm erzeugte Magnetfeld  $\vec{B}_{\text{Materie}}$  dem äußeren Magnetfeld  $\vec{B}_0$  entgegengerichtet sein. Das ist genau dann der Fall, wenn das magnetische Moment  $\vec{\mu}$  des induzierten Kreisstromes antiparallel zum Magnetfeld  $\vec{B}_0$  steht (wie man sich leicht mit der „Rechten-Hand-Regel“ klarmachen kann).
- In Paramagneten existieren bereits mikroskopische magnetische Dipole, die allerdings nicht ausgerichtet sind. Paramagneten, die keinem Magnetfeld ausgesetzt sind, haben deshalb kein resultierendes magnetisches Moment  $\vec{\mu}_{\text{ges}}$ . Im Magnetfeld richten sich diese Dipole allerdings aufgrund des Drehmoments  $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}_0$  so aus, dass sie ein resultierendes magnetisches Moment  $\vec{\mu}_{\text{ges}} \neq 0$  haben.

Wie aber können wir uns diese mikroskopischen magnetischen Dipolmomente in Paramagneten, und die mikroskopischen Kreisströme in Diamagneten vorstellen? Es bedarf eines Einblickes in den Atomaufbau, um eine geeignete Erklärung dieser Phänomene zu finden.

### 6.2.1 Mikroskopische Erklärung

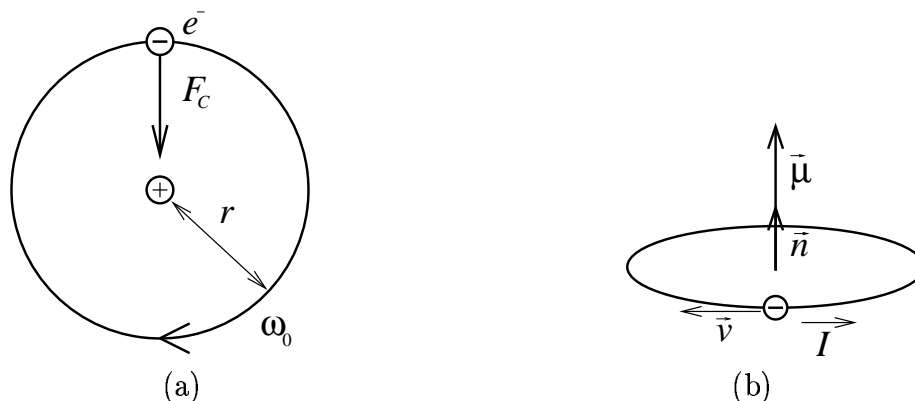


Abbildung 6.3: (a) Ein Elektron wird durch die COULOMB-Kraft auf einer stabilen Bahn um den positiv geladenen Atomkern gehalten. (b) Das kreisende Elektron stellt einen Kreisstrom dar, der ein magnetisches Moment  $\vec{\mu}$  bildet.

Eigentlich können wir den Aufbau der Atome erst mit Hilfe der Quantenmechanik richtig erklären, jedoch reicht für die folgenden Betrachtungen das klassische Atommodell aus: Bekanntlich besteht ein Atom aus einem positiv geladenen Atomkern, der von negativ geladenen Elektronen mit der Kreisfrequenz  $\vec{\omega}_0$  im Abstand  $r$  umkreist wird. Das Elektron wird dabei durch die anziehende COULOMB-Kraft

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \quad (6.5)$$

auf einer festen Bahn gehalten, da Elektron und Proton entgegengesetzte Ladungen haben ( $Q_p = -Q_e = e$ ). Die COULOMB-Kraft ist also die Zentripetalkraft der Kreisbewegung

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m_e \omega_0^2 r \quad (6.6)$$

Die Kreisbewegung des Elektrons bildet einen Kreisstrom  $I$  mit

$$I = -e\nu, \quad (6.7)$$

wobei  $\nu$  die Umlauffrequenz des Elektrons ist. Das magnetische Moment dieses Kreisstromes ist daher

$$\vec{\mu} = I\vec{A} = IA\vec{n}, \quad (6.8)$$

wobei

$$\vec{A} = \pi r^2 \vec{n} \quad (6.9)$$

die von der Elektronenbahn eingeschlossene Fläche und  $\vec{n} = \frac{\vec{A}}{A}$  der Einheitsvektor von  $\vec{A}$  ist.  $\vec{A}$  bzw.  $\vec{n}$  müssen dabei so orientiert sein, dass sie im Sinne der Rechten-Hand-Regel vom Kreisstrom  $I$  umflossen werden. Mit (6.9) und (6.7) geht (6.8) über in

$$\vec{\mu} = I\vec{A} = IA\vec{n} = -e\nu\pi r^2 \vec{n} \quad (6.10)$$

Die Kreisfrequenz  $\vec{\omega}_0$  des Elektrons ist mit der Umlauffrequenz  $\nu$  durch

$$\vec{\omega}_0 = 2\pi\nu\vec{n} \quad (6.11)$$

verknüpft. Das magnetische Moment lässt sich daher genauso in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz  $\vec{\omega}_0$  darstellen:

$$\vec{\mu} = -\frac{1}{2}er^2\vec{\omega}_0. \quad (6.12)$$

Wir können das magnetische Moment  $\vec{\mu}$  aber auch durch den Drehimpuls  $\vec{L} = m_e r^2 \vec{\omega}_0$  ausdrücken:

$$\vec{\mu} = -\frac{1}{2}er^2\vec{\omega}_0 = -\frac{e}{2m_e}m_e r^2 \vec{\omega}_0 \quad (6.13)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{\mu} = -\frac{e}{2m_e}\vec{L}} \quad (6.14)$$

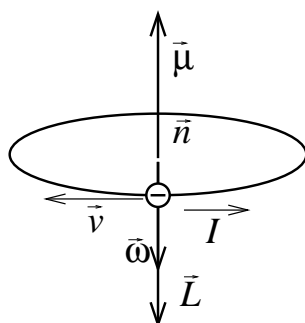


Abbildung 6.4: Das magnetische Moment  $\vec{\mu}$  eines Elektrons ist durch  $\vec{\mu} = -\frac{e}{2m_e}\vec{L}$  mit dem Drehmoment verbunden.

Tatsächlich ist die Berechnung des magnetischen Moments eines Atomes komplizierter: Das Elektron hat einen Eigendrehimpuls  $\vec{S}$ , der **Spin** genannt wird, und ein dazugehöriges magnetisches Moment  $\vec{\mu}_S$ . Außerdem hat ein Atom mehrere Elektronen, deren Bahn- und

Eigendrehimpulse (Spin) bzw. deren magnetische Momente sich in komplizierter Weise zum Gesamtdrehimpuls bzw. zum magnetischen Gesamtmoment superpositionieren. Unsere klassische Betrachtungsweise ist zwar an dieser Stelle nicht exakt, letztlich kommt es aber nicht auf den genauen Wert des magnetischen Momentes  $\vec{\mu}$  an, wichtig ist uns nur, dass bereits ohne ein äußeres Magnetfeld innerhalb der Atome magnetische Dipole existieren.

Bringt man nun einen paramagnetischen Stoff in ein Magnetfeld  $\vec{B}_0$ , so ist jedes magnetische Moment  $\vec{\mu}$  bestrebt, ihre Richtung den Magnetfeldlinien anzugleichen, da ein Magnetfeld  $\vec{B}_0$  auf ein magnetisches Moment  $\vec{\mu}$  ein Drehmoment

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}_0 \quad (6.15)$$

ausübt. Die magnetischen Momente  $\vec{\mu}$  lassen sich allerdings nicht exakt entlang der Feldlinien ausrichten, da aufgrund der thermischen Energie die Ausrichtung der magnetischen Momente statistisch verteilt ist. Diese Tatsache müssen wir zunächst so hinnehmen. Im 6. Semester wird die statistische Verteilung der magnetischen Momente in der Theorie-Vorlesung „Thermodynamik und statistische Physik“ hergeleitet. Dennoch erfolgt schon bei einem schwachen äußeren Magnetfeld  $\vec{B}_0$  eine teilweise Ausrichtung der Dipole, so dass ein magnetisches Gesamtmoment  $\vec{\mu}_{\text{ges}}$  durch Superposition aller magnetischer Einzelmomente  $\vec{\mu}_i$  (kreisende Elektronen) entsteht:

$$\vec{\mu}_{\text{ges}} = \sum_i \vec{\mu}_i. \quad (6.16)$$

Das resultierende magnetische Moment hängt dabei proportional vom äußeren Magnetfeld  $\vec{B}_0$  ab. Nachdem das äußere Magnetfeld  $\vec{B}_0$  wieder abgestellt wird, verschwindet das magnetische Gesamtmoment  $\vec{\mu}_{\text{ges}}$  wieder, da die Ausrichtung der magnetischen Dipole der kreisenden Elektronen von der Wärmebewegung statistisch gleichverteilt wird. In Abschnitt 6.4 (Seite 237) werden wir uns mit der Temperaturabhängigkeit des Paramagnetismus eingehender beschäftigen.

Wie bereits erwähnt, bilden Ringströme nicht nur magnetische Momente  $\vec{\mu}_i$ , sie erzeugen auch ein magnetisches Feld  $\vec{B}_i$ . Das magnetische Gesamtfeld  $\vec{B}_{\text{Materie}}$ , das durch Superposition aller  $\vec{B}_i$  entsteht, ist umso größer, je mehr Dipole sich in einer Volumeneinheit befinden. Man definiert daher die Volumen bezogene Größe der

**Magnetisierung**

$$\vec{M} := \frac{\sum_i \vec{\mu}_i}{V} = \sum \frac{\text{magn.Momente}}{\text{Volumen}} \quad (6.17)$$

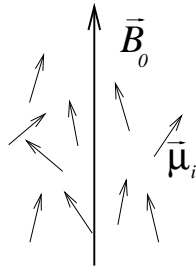


Abbildung 6.5: Trotz eines äußeren Magnetfeldes  $\vec{B}_0$  ist die Ausrichtung der magnetischen Momente  $\vec{\mu}_i$  der Atome eines Paramagneten aufgrund der thermischen Bewegung statistisch verteilt. Das resultierende magnetische Gesamtmoment ist dagegen parallel zu  $\vec{B}_0$  ausgerichtet.

Die Magnetisierung  $\vec{M}$  ist makroskopisch zu beobachten. In Paramagneten werden die magnetischen Dipole in Richtung der Feldlinien des äußeren Feldes ausgerichtet. Die Magnetisierung  $\vec{M}$  hat daher die gleiche Richtung wie das äußere Magnetfeld  $\vec{B}_0$ , so dass das äußere Magnetfeld  $\vec{B}_0$  verstärkt wird ( $B > B_0$ ). Nun verstehen wir auch, warum auf die Probe im inhomogenen Magnetfeld kein Drehmoment wirkt: Weil sich die magnetischen Momente der einzelnen Atome im Mittel von alleine entlang der Magnetfeldlinien ausrichten, hat das magnetische Moment der ganzen Probe genau die Richtung der minimalen potenziellen Energie (vgl. Abschnitt 5.7.1, Seite 211), so dass kein Drehmoment wirkt.

Wie wir wissen, haben alle Atome eine Elektronenhülle, womit wir das Phänomen des Paramagnetismus sehr gut erklären können; warum aber gibt es eine Vielzahl an Stoffen (Diamagneten), die offenbar keine magnetischen Dipole haben, die ausgerichtet werden können? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir uns noch einen weiteren Schritt in die Atomphysik begeben. Das klassische Atommodell reicht an dieser Stelle nicht mehr aus, wir müssen deshalb einige Erkenntnisse der Quantenmechanik vorwegnehmen, die erst im 4. Semester in der Vorlesung „experimentelle Quantenmechanik“ näher erklärt werden: Jede Elektronenbahn ist durch quantenmechanische Zustände eindeutig festgelegt. Ein quantenmechanischer Zustand kann nur einmal eingenommen werden. Zu jedem quantenmechanischen Zustand eines Elektrons gibt es genau einen entgegengesetzten Zustand, für den Bahndrehimpuls und Spin eines zweiten Elektrons genau entgegengesetzt orientiert und betraglich gleich groß sind. Wegen des entgegengesetzten Drehimpulses ist nach (6.14) auch das dazugehörige magnetische Moment antiparallel. Sind beide entgegengesetzten Zustände besetzt, heben sich die magnetischen Momente beider Elektronen auf. Eine notwendige aber nicht hinreichende Bedingung dafür, dass das magnetische Moment eines Atoms verschwindet, ist, dass das Atom eine gerade Anzahl von Elektronen hat.

Wir haben bereits davon gesprochen, dass im Magnetfeld in Diamagneten Kreisströme induziert werden, die ein magnetisches Moment  $\vec{\mu}_i$  und ein Magnetfeld  $\vec{B}_i$  erzeugen, das

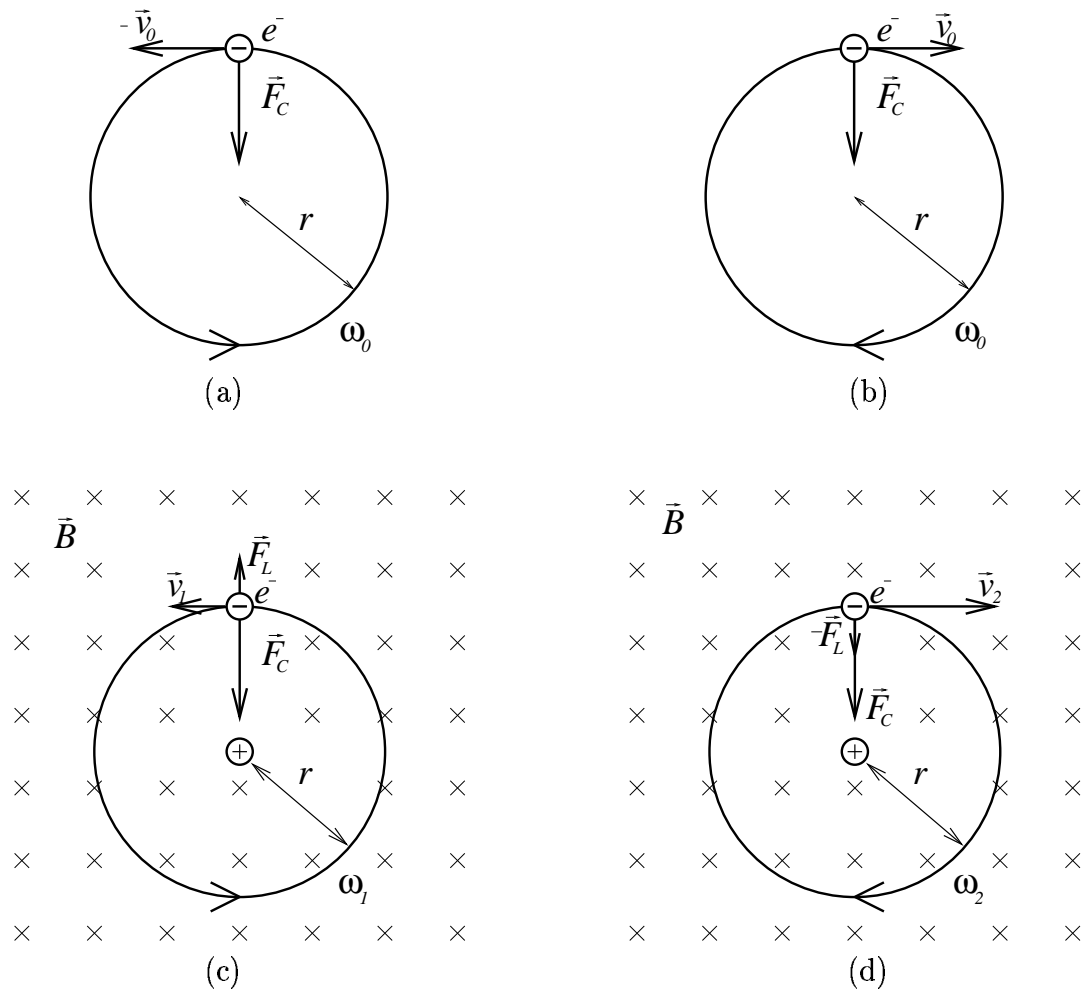


Abbildung 6.6: (a) und (b): Ohne ein äußeres Feld gibt es zu jedem Elektron in diamagnetischen Stoffen ein Elektron mit entgegengesetzter Winkelgeschwindigkeit. Da die Elektronen entgegengesetzt kreisen, ist der resultierende Kreisstrom und damit auch das resultierende magnetische Moment beider Elektronen gleich null. (c) und (d): Legt man ein äußeres Magnetfeld  $\vec{B}_0$  an, so werden resultierende Kreisströme induziert, da die Winkelgeschwindigkeiten beider Elektronen nicht mehr gleich sind. Es entsteht ein resultierendes magnetisches Moment.



dem äußeren Feld  $\vec{B}_0$  entgegen gerichtet ist. Auf diesen Induktionsprozess wollen wir nun näher eingehen. Dazu verwenden wir ein stark vereinfachtes Modell, das die Tatsachen dennoch in guter Näherung erklären kann: Wir betrachten nur das magnetische Moment, das vom Bahndrehimpuls  $\vec{L}$  gebildet wird, und lassen dabei den Spin außer Acht. Da es zu jedem Elektron im Diamagneten ein weiteres Elektron mit entgegengesetzten Drehimpuls gibt, können wir uns vorstellen, dass beide Elektronen mit betraglich gleich großer Bahngeschwindigkeit um eine gemeinsame Achse auf einer Kreisbahn um den Kern rotieren, dabei aber einen entgegengesetzten Bahndrehimpuls bzw. Umlaufsinn haben (Siehe Abb. 6.6 a und b). Legen wir nun ein Magnetfeld  $\vec{B}_0$  an: Sei der Einfachheit halber der Drehimpulsvektor  $\vec{L}$  der Elektronen entlang der Magnetfeldlinien ausgerichtet. Es wirkt auf das eine Elektron eine radial nach außen wirkende LORENTZ-Kraft  $\vec{F}_L$  (Siehe Abb. 6.6 (c)), auf das andere wirkt dagegen eine dem Betrage nach gleich große aber nach innen gerichtete LORENTZ-Kraft  $-\vec{F}_L$  (Siehe Abb. 6.6 (d)). Für die LORENTZ-Kraft  $\pm\vec{F}_L$  gilt

$$\pm\vec{F}_L = \mp e\vec{v}_0 \times \vec{B}_0 \quad (6.18)$$

$$\Rightarrow F_L = e\omega r B_0 \quad (6.19)$$

Die Zentripetalkraft  $F_Z$  wird jetzt durch die Summe von COULOMB-Kraft und LORENTZ-Kraft gebildet, die im dynamischen Kräftegleichgewicht betraglich gleich der Zentrifugalkraft  $m_e\omega^2 r$  sein muss:

$$F_C \pm F_L = m_e\omega^2 r \quad (6.20)$$

Setzen wir (6.6) für die COULOMB-Kraft und (6.19) für die LORENTZ-Kraft ein, erhalten wir:

$$m_e\omega_0^2 r \pm e\omega r B_0 = m_e\omega^2 r \quad (6.21)$$

$$\Rightarrow \omega^2 \mp \frac{eB_0}{m_e}\omega - \omega_0^2 = 0 \quad (6.22)$$

$$\Rightarrow \omega \approx \omega_0 \pm \frac{eB_0}{2m_e} \quad (6.23)$$

Wie wir sehen, ändern beide Elektronen ihre Kreisfrequenz um  $\Delta\omega := \mp \frac{eB_0}{2m_e}$ . Diese Differenz wird als **LARMOR-FREQUENZ** bezeichnet.

**LARMOR-FREQUENZ:**

$$\Delta\vec{\omega} := \mp \frac{e}{2m_e} \vec{B}_0 \quad (6.24)$$

Dadurch, dass sich die Kreisfrequenz  $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_0 - \Delta\vec{\omega}$  des einen Elektrons um  $\Delta\vec{\omega}$  verkleinert, und die Kreisfrequenz  $\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_0 + \Delta\vec{\omega}$  des anderen um  $\Delta\vec{\omega}$  vergrößert wird, sind die

Drehimpulse

$$\vec{L}_i = m_e r^2 \vec{\omega}_i, \quad i = 1, 2 \quad (6.25)$$

und damit auch die magnetischen Momente

$$\vec{\mu}_i = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}_i \quad (6.26)$$

nicht mehr entgegengesetzt gleich. Das magnetische Moment  $\vec{\mu}_i$  beider Elektronen ändert sich deshalb um

$$\Delta \vec{\mu} = -\frac{e}{2m_e} \Delta \vec{L} \quad (6.27)$$

Wegen  $\Delta \vec{L} = m_e \Delta \vec{\omega} r^2$  und  $\Delta \vec{\omega} = \frac{e}{2m_e} \vec{B}_0$  gilt

$$\boxed{\Delta \vec{\mu} = -\frac{e^2 r^2}{4m_e} \vec{B}_0} \quad (6.28)$$

Das äußere Magnetfeld  $\vec{B}_0$  induziert also pro Elektron ein zusätzliches magnetisches Moment  $\Delta \vec{\mu}$ , das das erzeugende äußere Magnetfeld  $\vec{B}_0$  schwächt. Dieser Effekt tritt in allen Substanzen auf, er wird in para- und ferromagnetischen Stoffen allerdings durch die stärkeren Effekte des Para- bzw. Ferromagnetismus überlagert, sodass das Magnetfeld verstärkt wird.

### Zusammenfassung:

- In paramagnetischen Substanzen werden die magnetischen Momente atomarer Kreisströme so ausgerichtet, dass sie das Magnetfeld verstärken.
- In allen Substanzen werden nach der LENZschen Regel zusätzliche atomare Kreisströme induziert, die das Magnetfeld schwächen. Dieser Effekt dominiert in diamagnetischen Stoffen.

Im vorigen Abschnitt hatten wir die Größe der **Magnetisierung**  $\vec{M}$  definiert, sind aber auf ihre Bedeutung nicht weiter eingegangen. Das soll nun an dieser Stelle nachgeholt werden. Wir hatten erwähnt, dass eine Magnetisierung, die die gleiche Richtung wie das äußere Magnetfeld  $\vec{B}_0$  hat, dieses verstärkt (Paramagnetismus). Eine antiparallele Magnetisierung schwächt  $\vec{B}_0$  entsprechend (Diamagnetismus). Wie hängt aber die Magnetisierung  $\vec{M}$  mit der Magnetfeldänderung  $\vec{B} - \vec{B}_0$  zusammen? Um diese Frage zu beantworten, zerlegen wir das magnetisierte Material, das allgemein dia- oder paramagnetisch sein kann, in lauter Teilvolumina

$$dV = dA dz. \quad (6.29)$$

$dA$  sei dabei das Flächenelement, das senkrecht zu  $\vec{M}$  (bzw.  $\vec{B}$ ) steht, und  $dz$  sei ein Streckenelement parallel zu  $\vec{M}$ . Gehen wir der Einfachheit halber von einer homogenen

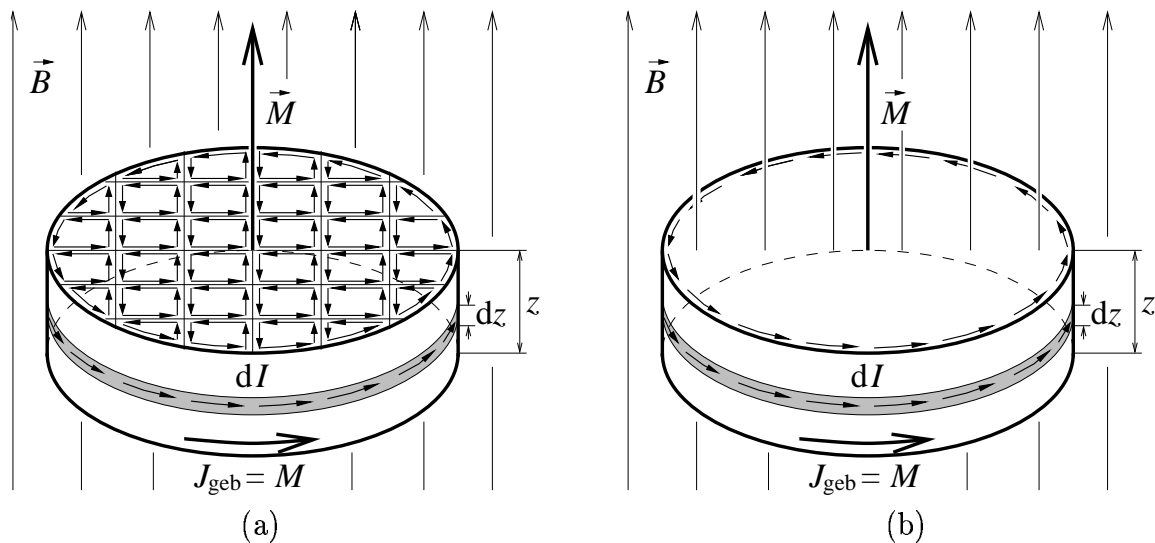


Abbildung 6.7: Die durch die Ausrichtung der magnetischen Momente entstandenen Ringströme kompensieren sich im Innern des Volumens. Nur auf der Mantelfläche des Volumens bilden sie einen Flächenstrom  $J_{\text{geb}}$ . Magnetisierung  $\vec{M}$  und Flächenstrom  $J_{\text{geb}}$  sind deshalb zwei äquivalente Größen.

Magnetisierung aus. Außerdem sei das magnetisierte Volumen zylinderförmig, wobei die Symmetrieachse parallel zum Magnetfeld  $\vec{B}_0$  ausgerichtet sei (siehe Abb. 6.7). Nach (6.17) ist dann das magnetische Moment  $d\vec{\mu}$  des Volumenelements  $dV$  gleich

$$d\vec{\mu} = \vec{M} dV = \vec{M} dz dA \quad (6.30)$$

$$\Rightarrow d\mu = M dz dA \quad (6.31)$$

Das magnetische Moment  $d\mu$  ist aber per Definition auch mit einem Ringstrom  $dI$  über

$$d\vec{\mu} = dI d\vec{A} \quad (6.32)$$

$$\Rightarrow d\mu = dI dA \quad (6.33)$$

verbunden. Setzen wir diesen Ausdruck mit (6.31) gleich, folgt

$$dI dA = M dz dA \quad (6.34)$$

$$\Leftrightarrow \iint_A dI dA = \iint_A M dz dA \quad (6.35)$$

$$\Rightarrow dI A = M A dz \quad (6.36)$$

$$\Rightarrow dI = M dz \quad (6.37)$$

Dieser Ausdruck lässt sich wie folgt interpretieren: Zerlegen wir das magnetisierte Volumen in lauter Scheiben der Dicke  $dz$ , so ist das magnetische Moment  $d\mu_{\text{Scheibe}}$  dieser

Scheibe nach (6.36) gleich  $d\mu_{\text{Scheibe}} = dI A = M A dz$ . Dieses magnetische Moment lässt sich so interpretieren, dass nur auf dem Rand der Scheibe ein Strom  $dI$  fließt, und dass das Innere frei von Strömen ist. Das widerspricht zwar unserer Deutung des Dia- und Paramagnetismus, da wir hier von lauter kleinen atomaren Ringströmen ausgegangen waren; dies ist allerdings nur scheinbar ein Widerspruch, da, wie wir in Abb. 6.7 sehen können, die Ringströme sich mit den benachbarten Ringströmen aufheben. Nur die Atome, die sich direkt am Rand der Fläche  $A$  befinden, liefern einen Beitrag zum resultierenden Gesamtstrom. Unsere Interpretation ist also im Einklang mit unserer Deutung des Dia- und Paramagnetismus. Summieren (d.h. integrieren) wir die magnetischen Momente  $d\mu_{\text{Scheibe}}$  aller Scheiben auf, erhalten wir das magnetische Gesamtmoment

$$\mu_{\text{ges}} = \int d\mu_{\text{Scheibe}} = \int M A dz = \int dI A \quad (6.38)$$

$$= M A z = I A \quad (6.39)$$

$$\stackrel{(V=Az)}{\Leftrightarrow} M V = I A \quad (6.40)$$

Es gilt also

$$I = M z \quad (6.41)$$

Dieser resultierende Strom  $I$  fließt ringförmig entlang der Zylindermantelfläche des magnetisierten Körpers. Da  $I$  durch Überlagerung vieler an Atome gebundener Ringströme entsteht, ist  $I$  ein gebundener und kein freier Strom, so wie wir es von elektrischen Leitern her kennen. Nach (6.41) ist die Magnetisierung  $M$  eines homogen magnetisierten Materials äquivalent zu einem **Flächenstrom**

$$\boxed{J_{\text{geb}} = \frac{dI}{dz} = \frac{I}{z} = M} \quad (6.42)$$

Für inhomogen magnetisierte Volumina gilt diese Beziehung nicht, da sich die Ringströme im Innern des Stoffes nicht komplett aufheben. Die allgemeine Beziehung zwischen Strom und Magnetisierung lautet (ohne Beweis)

$$\vec{j}_{\text{geb}} = \text{rot} \vec{M}, \quad (6.43)$$

wobei  $\vec{j}_{\text{geb}}$  die in (3.11) definierte Stromdichte ist, die hier allerdings nur durch gebundene Ströme gebildet wird.

## 6.2.2 Gesamtfeld einer Spule mit Kern

Bisher konnten wir erklären, warum Materie im Magnetfeld magnetische Momente bildet und dass die daraus resultierende Magnetisierung einen Flächenstrom darstellt, der auf

der Außenfläche die Magnetfeldlinien im mathematisch positiven Sinne (d.h. im Sinne der Rechten-Hand-Regel) umfließt. Das magnetische Feld  $\vec{B}_M$ , das von diesem gebundenen Flächenstrom  $J_{\text{geb}}$  erzeugt wird, wollen wir nun herleiten: Dazu betrachten wir eine lange Zylinderspule, durch die ein Strom  $I_{\text{Spule}}$  fließt. Ohne Kern gilt für das resultierende Magnetfeld  $\vec{B}_0$  nach dem AMPÈRESchen Durchflutungsgesetz (4.55)

$$\oint \vec{B}_0(\vec{r}) d\vec{r} = \mu_0 I_{\text{frei}}, \quad (6.44)$$

wobei  $I_{\text{frei}}$  der gesamte Strom ist, der durch den gewählten Integrationsweg fließt. Wählen wir z.B. als Integrationsweg einen Weg wie in Abb. 4.12 (Seite 165), so fließt der Spulenstrom  $I_{\text{Spule}}$  nicht nur einmal, sondern  $N$  mal durch den Integrationsweg. Es gilt daher

$$I_{\text{frei}} = N I_{\text{Spule}} \quad (6.45)$$

Für eine Spule mit Kern gilt entsprechend

$$\oint \vec{B}(\vec{r}) d\vec{r} = \mu_0 (I_{\text{frei}} + I_{\text{geb}}) \quad (6.46)$$

Wir definieren analog zur dielektrischen Verschiebung  $\vec{D}$  (2.64) eine Größe, die nur von freien Strömen abhängt, die

**magnetische Feldstärke oder  
 $\vec{H}$ -Feldstärke**

$$\vec{H} := \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$$

(6.47)

Nach dem AMPÈRESchen Durchflutungsgesetz (4.55) gilt für die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$

$$\oint \vec{H}(\vec{r}) d\vec{r} = I_{\text{frei}} \quad (6.48)$$

Die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  lässt die im magnetisierten Material gebundenen Ringströme  $I_{\text{geb}}$  außer Acht. Die gebundenen Ströme  $I_{\text{geb}}$  lassen sich wegen (6.46) berechnen durch

$$\oint \frac{\vec{B}}{\mu_0} d\vec{r} - \oint \vec{H} d\vec{r} = I_{\text{geb}} \quad (6.49)$$

Wie wir in (6.42) gesehen haben, ist der resultierende Strom im Kern (bei einer homogenen Magnetisierung) ein Flächenstrom  $I_{\text{geb}} = J_{\text{geb}} z$ , der entlang der Mantelfläche des

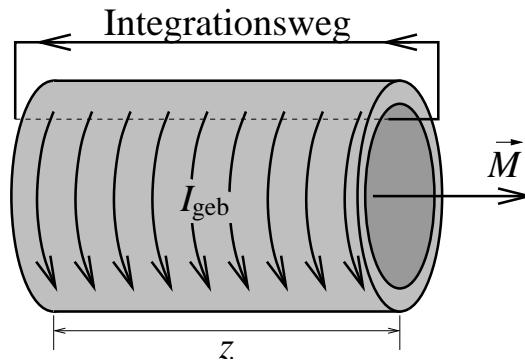


Abbildung 6.8: Integrationsweg schließt den Flächenstrom  $I_{\text{geb}} = M z$  auf der Außenfläche des magnetisierten Körpers ein.

magnetisierten Körpers fließt. Wir wählen deshalb einen Integrationsweg, der den kompletten Strom  $I_{\text{geb}}$  einschließt (siehe Abb. 6.8). Wir können annehmen, dass nur der Teil des Integrationsweges zum Integral beiträgt, der im Innern der Spule liegt, und dass das Feld innerhalb der Spule homogen ist. Deshalb gilt

$$\oint \vec{M} \, d\vec{r} = M z = J_{\text{geb}} z = I_{\text{geb}} \quad (6.50)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (6.49) ein, folgt

$$\oint \frac{\vec{B}}{\mu_0} \, d\vec{r} - \oint \vec{H} \, d\vec{r} = \oint \vec{M} \, d\vec{r} \quad (6.51)$$

$$\Leftrightarrow \oint \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} \right) \, d\vec{r} = \oint \vec{M} \, d\vec{r} \quad (6.52)$$

Diese Relation gilt für beliebige Integrationswege. Deshalb müssen die Integranden beider Seiten gleich sein. Es gilt

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \vec{B}_0 + \vec{B}_M} \quad (6.53)$$

Das magnetisierte Material verstärkt also das äußere Magnetfeld  $\vec{B}_0$  um

$$\vec{B}_M = \mu_0 \vec{M} \quad (6.54)$$

Andererseits hatten wir die relative magnetische Permeabilität  $\mu_r$  definiert durch (6.3)

$$\vec{B} = \mu_r \vec{B}_0 \quad (6.55)$$

Daraus folgt wegen  $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$

$$\boxed{\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}} \quad (6.56)$$

und

$$\boxed{\vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{H} = \chi_m \vec{H}} \quad (6.57)$$

Magnetisierung  $\vec{M}$  und magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  müssen also die gleiche Dimension haben. Für die Einheiten gilt:

$$[B] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}, \quad [H] = [M] = \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (6.58)$$

### 6.2.3 $\vec{B}$ - und $\vec{H}$ -Feld eines Permanentmagneten

Als Beispiel untersuchen wir jetzt die Unterschiede zwischen  $\vec{B}$ - und  $\vec{H}$ -Feld an einem Permanentmagneten. Das  $\vec{B}$ -Feld ergibt sich aus der „Abwesenheit magnetischer Monopole“ (vgl. Ausdruck (4.2))

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \oint \vec{B} \, d\vec{A} = 0 \quad (6.59)$$

und dem AMPÈRESchen Durchflutungsgesetz (4.55)

$$\oint \vec{B} \, d\vec{r} = \mu_0 I = \mu_0 (I_{\text{frei}} + I_{\text{geb}}) \quad (6.60)$$

Wegen  $I_{\text{frei}} = 0$  geht dieser Ausdruck über in

$$\oint \vec{B} \, d\vec{r} = \mu_0 I_{\text{geb}} \quad (6.61)$$

Für das  $\vec{H}$ -Feld gilt im Außenraum des Permanentmagneten

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (6.62)$$

da dort  $\mu_r = 1$  ist. Ferner gilt nach (6.48)

$$\int_{\text{aussen}} \vec{H} \, d\vec{r} + \int_{\text{innen}} \vec{H} \, d\vec{r} = \oint \vec{H} \, d\vec{r} = I_{\text{frei}} = 0 \quad (6.63)$$

Es muss daher gelten:

$$\int_{\text{aussen}} \vec{H} \, d\vec{r} = \int_{\text{aussen}} \frac{\vec{B}}{\mu_0} \, d\vec{r} = - \int_{\text{innen}} \vec{H} \, d\vec{r} \quad (6.64)$$

Die  $\vec{H}$ -Feldlinien im Innern des Permanentmagneten sind also zu den  $\vec{H}$ -Feldlinien im Außenraum entgegengesetzt orientiert (bezüglich des Umlaufsinnns des Integrationsweges). Der Feldverlauf von  $\vec{H}$ - und  $\vec{B}$ -Feld ist in Abb. 6.9 abgebildet.

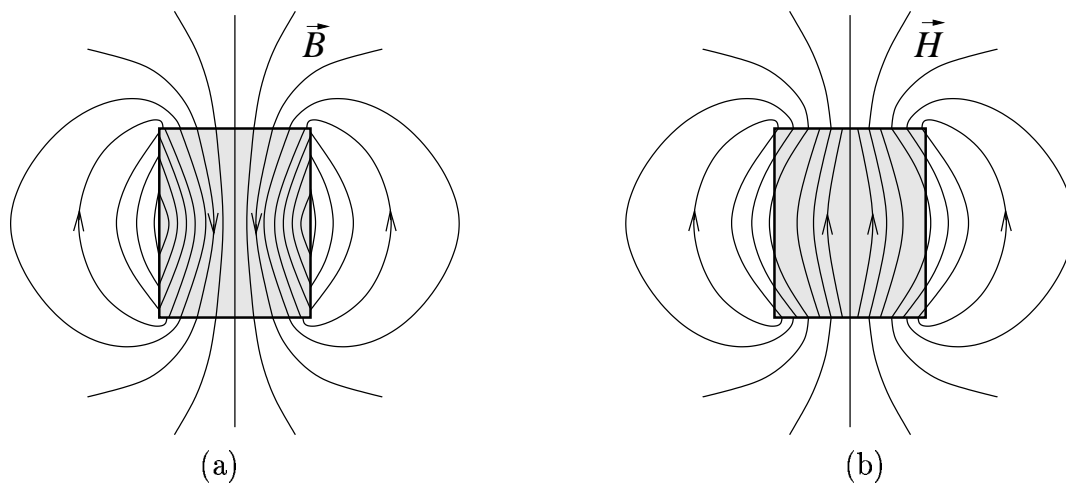


Abbildung 6.9: (a)  $\vec{B}$ -Feld und (b)  $\vec{H}$ -Feld eines Permanentmagneten

#### 6.2.4 Vergleich zwischen Magnetismus und Elektrizität in Materie

Vergleichen wir die Erkenntnisse aus diesem Kapitel, fällt uns auf, dass wir die drei Größen  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  und  $\vec{M}$ , die den Magnetismus in Materie beschreiben, in Analogie zu den drei Größen  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  und  $\vec{P}$  definiert haben, mit denen wir das Verhalten elektrischer Felder in Gegenwart von Dielektrika berechnen konnten. Magnetfeld  $\vec{B}$  und elektrisches Feld  $\vec{E}$  sind die beiden Felder, die für die Kräfte auf Ladungen verantwortlich sind. Die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  und die dielektrische Verschiebung  $\vec{D}$  sind Hilfsgrößen, die von event. vorhandener Materie unabhängig sind. Die Magnetisierung  $\vec{M}$  und die Polarisation  $\vec{P}$  sagen aus, wieviel (magnetische bzw. elektrische) Dipolmomente pro Volumen ausgerichtet sind.



### Zusammenfassung:

	Magnetismus	Elektrizität
Bestimmen die Kraft auf eine Ladung $q$	Magnetfeld $\vec{B}$ $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$	Elektrisches Feld $\vec{E}$ $\vec{F} = q\vec{E}$
Materieunabhängige Größen	Magnetfeldstärke $\vec{H}$ $\oint \vec{H} d\vec{r} = I_{\text{frei}}$ $\Leftrightarrow \text{rot}\vec{H} = j_{\text{frei}}$	Dielektrische Verschiebung $\vec{D}$ $\oint \vec{D} d\vec{A} = Q_{\text{frei}}$ $\Leftrightarrow \text{div}\vec{D} = \rho_{\text{frei}}$
Dipolmomente pro Volumen	Magnetisierung $\vec{M}$ $\vec{M} = \frac{\sum \vec{\mu}_i}{V}$	Polarisation $\vec{P}$ $\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{V}$

## 6.3 Ferromagnetismus

Im Gegensatz zu paramagnetischen Stoffen gibt es viele Substanzen, wie z.B. Eisen, Cobalt, Nickel sowie viele Legierungen, die das Magnetfeld  $\vec{B}_0$  nicht nur geringfügig, sondern um das hundert- bis tausendfache verstärken. Die relativen Permeabilitäten dieser Stoffe liegen demnach in der Größenordnung

$$\mu_r \approx 10^2 - 10^5 \quad (6.65)$$

$$\Rightarrow B = \mu_r \mu_0 H \quad \Rightarrow \quad B \gg B_0 = \mu_0 H. \quad (6.66)$$

Es macht wegen  $\mu_r \approx \chi_m = \mu_r - 1$  bei ferromagnetischen Materialien keinen Sinn, zusätzlich zur relativen Permeabilität  $\mu_r$  über die magnetische Suszeptibilität  $\chi_m$  zu sprechen. Ähnlich wie Paramagneten bestehen ferromagnetische Substanzen aus Atomen, die schon vor dem Magnetisieren permanente magnetische Momente enthalten. Paramagneten können unter Einfluss eines äußeren Magnetfeldes ihre Dipole allerdings nur teilweise ausrichten, da die Wärmebewegung der Ausrichtung entgegenwirkt. In Ferromagneten treten dagegen kollektive Eigenschaften auf: Es überwiegt hier die Wechselwirkung der atomaren magnetischen Momente  $\vec{\mu}$  untereinander dem Einfluss der Wärmebewegung. Schon ohne ein äußeres Magnetfeld  $\vec{B}_0$  richtet ein Atom sein magnetisches Moment  $\vec{\mu}_i$  bevorzugt so aus, dass es parallel zum magnetischen Moment  $\vec{\mu}_{i-1}$  bzw. zu dem davon