5.7 Kräfte auf Strom durchflossene Leiterschleifen

Versuch 5.4

> Wir halten eine rechteckige Leiterschleife so in ein homogenes Magnetfeld, dass die Flächennormale der Fläche, die von dem Leiter eingeschlossen wird, einen Winkel ϑ mit den Magnetfeldlinien einschließt. Im Gegensatz zu Versuch 5.3 (Seite 205) lassen wir die Schleife nicht rotieren, dagegen lassen wir einen Strom I durch die Schleife fließen. Unsere Beobachtung zeigt, dass die Schleife um eine Achse zu rotieren beginnt, die senkrecht zur Flächennormaler und zum Magnetfeld steht.

In Abschnitt 4.3 (Seite 156) hatten wir aus der LORENTZ-Kraft hergeleitet, dass sich die auf eine Längeneinheit bezogene Kraft $\frac{\vec{F}}{l}$, die ein Magnetfeld $\vec{B}$ auf einen geraden, vom Strom $\vec{I}$ durchflossenen Leiter ausübt, darstellen lässt durch

$$\frac{\vec{F}}{l} = \vec{I} \times \vec{B}. \tag{5.128}$$

In der Regel haben wir es allerdings nicht mit geraden, sondern mit beliebig geformten Leitern zu tun. Hier reicht es nicht aus, jedes infinitesimale Leiterelement der Länge $\mathrm{d}l$ gesondert zu betrachten und dann über den Leiter zu integrieren. Die Gesamtkraft wäre in einem homogenen Magnetfeld stets gleich null (ohne Beweis). Obwohl sich zwei Kraftvektoren, die entgegengesetzt gleich groß sind, zu einer resultierenden Kraft von null superpositionieren, können sie durchaus ein Drehmoment bewirken. Dazu müssen sie an zwei verschiedenen Orten angreifen, die nicht auf einer Geraden mit der Richtung der Kraftvektoren liegen. Wir müssen daher berücksichtigen, wo die Kräfte auf den Leiter ansetzen. Unsere Beobachtung in Versuch 5.4 zeigt, dass die resultierende Kraft durchaus gleich null ist, da sich die Leiterschleife nicht entfernt, sondern nur zu einer Drehung gezwungen wird.

Die Leiterschleife habe zwei Rechteckseiten der Länge a und zwei der Länge b. Die Leiterschleife sei, wie in Abb. 5.14 gezeigt, um den Winkel ϑ gegen das Magnetfeld geneigt. Auf jeden der vier Rechteckseiten wirkt eine LORENTZ-Kraft, jedoch nur die LORENTZ-Kräfte auf die beiden Leiterstücke der Länge b bewirken ein Drehmoment $\vec{\tau}$, da die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte nicht die gleiche Richtung wie $\vec{F}$ hat. Der Hebelarm ist jetzt $\frac{\vec{a}}{2}$. $\vec{a}$ und $\vec{F}$ schließen den Winkel ϑ miteinander ein. Deshalb gilt für das Drehmoment $\vec{\tau}$ auf die Leiterschleife:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{a}}{2} \times \vec{F} + \frac{-\vec{a}}{2} \times (-\vec{F}) \tag{5.129}$$

$$= 2\frac{\vec{a}}{2} \times \vec{F} = \vec{a} \times \vec{F} \tag{5.130}$$

$$= a\,F \sin\vartheta \tag{5.131}$$

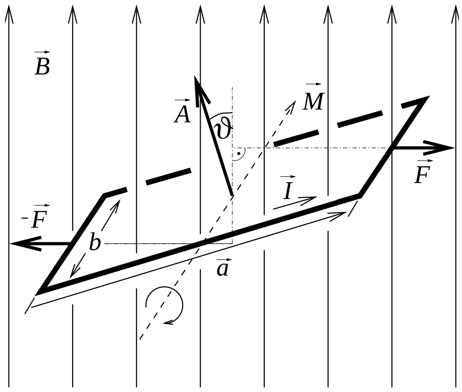

Abbildung 5.14: Auf eine Strom durchflossene Leiterschleife wirkt im homogenen Magnetfeld ein Drehmoment.

Die Kraft F lässt sich wegen $\vec{I} \perp \vec{B}$ skalar schreiben als

$$F = b\,I\,B \tag{5.132}$$

Eingesetzt in (5.131) ergibt sich für das Drehmoment:

$$\tau = a\,b\,I\,B\,\sin\vartheta \tag{5.133}$$
$$= A\,I\,B\,\sin\vartheta \qquad \text{mit} \qquad A = a\,b \tag{5.134}$$

Man definiert an dieser Stelle eine Größe, die man **magnetisches Moment** nennt:

Magnetisches Moment:

$$\vec{\mu} = I\,\vec{A} \tag{5.135}$$

Das magnetische Moment $\vec{\mu}$ ist das Produkt des Stromes I durch eine geschlossene Leiterschleife mit der Flächennormalen $\vec{A}$. Die Richtung der Flächennormalen $\vec{A}$ muss dabei so gewählt werden, dass der Strom im mathematisch positiven Sinn die Fläche umrundet. Dies ist dann der Fall, wenn die Rechte-Hand-Regel erfüllt ist: „Zeigt der ausgestreckte Daumen der rechten Hand in Richtung der Flächennormalen $\vec{A}$ (= Richtung von $\vec{\mu}$), geben die gekrümmten Finger den Umlaufsinn des Stromes I an" (vgl. (5.39) auf Seite 191). Auch magnetische Momente lassen sich superpositionieren. Hat man statt einer einfachen Leiterschleife eine N-fach gewickelte Spule, kann man diese als N Leiterschleifen auffassen, so dass die Spule ein N-mal größeres magnetisches Moment als die einfache

Leiterschleife hat. Mit dieser Definition können wir das auf das magnetische Moment $\vec{\mu}$ der Leiterschleife wirkende Drehmoment $\vec{\tau}$ vektoriell schreiben als:

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}} \tag{5.136}$$

Das magnetische Moment versucht sich in Richtung von $\vec{B}$ auszurichten. Damit zeigt das magnetische Moment im Magnetfeld ein analoges Verhalten zum elektrischen Dipolmoment im elektrischen Feld. Eine Kompassnadel ist z.B. ein solcher frei beweglicher magnetischer Dipol, dessen Dipolmoment entlang der Nadel ausgerichtet ist. Das Erdmagnetfeld bewirkt ein Drehmoment auf die Kompassnadel, so dass sie sich in Richtung der Erdmagnetfeldlinien ausrichtet.

5.7.1 Potenzielle Energie des magnetischen Momentes

Will man ein magnetisches Moment $\vec{\mu}$, das senkrecht zu einem homogenen Magnetfeld $\vec{B}$ steht ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$), so weit verdrehen, dass $\vec{\mu}$ und $\vec{B}$ einen Winkel α einschließen, wird dabei die Arbeit W gewonnen. Es gilt:

$$W = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \tau \, \mathrm{d}\vartheta \overset{(5.136)}{=} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \mu \, B \, \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \tag{5.137}$$

$$\Big[\mu \, B \, \cos\vartheta\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} = \vec{\mu} \cdot \vec{B} \tag{5.138}$$

Die gewonnene Arbeit können wir hier als eine potenzielle Energiedifferenz auffassen Wir setzen den Nullpunkt der potenziellen Energie E_{pot} für den Winkel $\vartheta = 0$ gleich null. Dann gilt für die potenzielle Energie E_{pot} des magnetischen Momentes $\vec{\mu}$

$$\boxed{E_{\text{pot}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}}. \tag{5.139}$$

Auch die potenzielle Energie des magnetischen Momentes im Magnetfeld hat die gleiche Form wie die des elektrischen Dipolmoments im elektrischen Feld.

5.7.2 Der magnetische Dipol im inhomogenen Magnetfeld

Befindet sich ein magnetischer Dipol $\vec{\mu}$ in einem <u>in</u>homogenen Magnetfeld $\vec{B}(x, y, z)$, wirkt auf ihn nicht nur ein Drehmoment, sondern auch eine beschleunigende Kraft $\vec{F}$, die umso größer, je stärker die Inhomogenität des Magnetfeldes, d.h. je stärker die Magnetfeldänderung im Vergleich zur Ortsänderung ist. Stellen wir uns dazu eine rechteckige Leiterschleife vor, die eine Fläche $\vec{A}$ einschließt und vom Strom I durchflossen wird. Sie hat damit das magnetische Moment $\vec{\mu}$. Diese Leiterschleife bringen wir der Einfachheit halber so in ein rotationssymmetrisches inhomogenes Magnetfeld $\vec{B}$, dass sich die Mitte der Leiterschleife auf der Symmetrieachse des Magnetfeldes befindet, und dass das Dipolmoment entlang der Feldlinien ausgerichtet ist (siehe Abb. 5.15). Das Magnetfeld $\vec{B}$ nehme in Richtung der Feldlinien ab. Damit haben wir die gleiche Inhomogenität wie die der magnetischen Flasche aus Abschnitt 4.2.1 (Seite 153). Das Magnetfeld kann an den vier Rechteckseiten nicht überall parallel zur Symmetrieachse verlaufen, da sonst Feldlinien aus dem Nichts entstehen würden. Wegen $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ ist dies aber ausgeschlossen. Die LORENTZ-Kräfte, die auf die Rechteckseiten der Leiterschleife wirken, sind jetzt nicht mehr in Richtung des Leiterschleifenmittelpunktes gerichtet, sondern haben eine Komponente in Richtung des Dipolvektors $\vec{\mu}$. Da diese Kraftkomponenten von allen vier Rechteckseiten in die gleiche Richtung weisen, wirkt eine resultierende beschleunigende Kraft. Der magnetische Dipol wird in den stärkeren Bereich des Magnetfeldes hineingezogen.

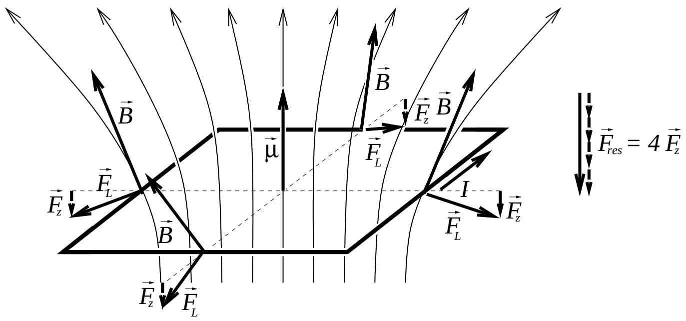

Abbildung 5.15: Auf eine Strom durchflossene Leiterschleife mit dem magnetischen Dipol $\vec{\mu}$ wirkt im inhomogenen Magnetfeld $\vec{B}$ eine resultierende Kraft $\vec{F}$, da sich die Kräfte auf die Rechteckseiten des Leiters nicht komplett kompensieren.

Formal können wir uns diese Kraft $\vec{F}$ über die potenzielle Energie $E_{\text{pot}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(x, y, z)$ des Dipols herleiten. Aus der Mechanik wissen wir, dass die Kraft $\vec{F}$ der negative Gradient der potenziellen Energie E_{pot} ist. Damit gilt für die Kraft $\vec{F}$ auf den magnetischen Dipol $\vec{\mu}$ im inhomogenen Magnetfeld $\vec{B}(x, y, z)$:

$$\vec{F} = -\nabla E_{\text{pot}} = -\nabla \vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} (\mu_x B_x + \mu_y B_y + \mu_z B_z) \tag{5.140}$$

$$= -\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(\mu_x B_x + \mu_y B_y + \mu_z B_z) \\ \frac{\partial}{\partial y}(\mu_x B_x + \mu_y B_y + \mu_z B_z) \\ \frac{\partial}{\partial z}(\mu_x B_x + \mu_y B_y + \mu_z B_z) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \mu_x \frac{\partial}{\partial x} B_x + \mu_y \frac{\partial}{\partial x} B_y + \mu_z \frac{\partial}{\partial x} B_z \\ \mu_x \frac{\partial}{\partial y} B_x + \mu_y \frac{\partial}{\partial y} B_y + \mu_z \frac{\partial}{\partial y} B_z \\ \mu_x \frac{\partial}{\partial z} B_x + \mu_y \frac{\partial}{\partial z} B_y + \mu_z \frac{\partial}{\partial z} B_z \end{pmatrix} \tag{5.141}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \vec{F} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} B_x & \frac{\partial}{\partial x} B_y & \frac{\partial}{\partial x} B_z \\ \frac{\partial}{\partial y} B_x & \frac{\partial}{\partial y} B_y & \frac{\partial}{\partial y} B_z \\ \frac{\partial}{\partial z} B_x & \frac{\partial}{\partial z} B_y & \frac{\partial}{\partial z} B_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{pmatrix} \tag{5.142}$$

Diese komplizierte Kraft ist uns wahrscheinlich aus dem Alltag noch eher bekannt als die LORENTZ-Kraft auf Strom durchflossene Leiter. Halten wir zwei Stabmagneten so aneinander, dass ihre Pole auf einer Linie liegen, wirkt auf sie entweder eine abstoßende oder eine anziehende Kraft, je nachdem, ob wir gleichnamige oder ungleichnamige Pole aneinander halten. Dieses Phänomen können mit obiger Kraft erklären: Ein Stabmagnet ist einerseits von einem inhomogenen Magnetfeld $\vec{B}$ umgeben, andererseits hat ein Stabmagnet auch ein magnetisches Dipolmoment $\vec{\mu}$. Auf das Dipolmoment des einen wirkt aufgrund der Inhomogenität des Magnetfeldes $\vec{B}$ des anderen Stabmagneten nach (5.142) eine Kraft $\vec{F}$.
Aus (5.142) geht außerdem hervor, dass auf ein Dipolmoment im homogenen Magnetfeld keine Kraft wirken kann, da wegen $\frac{\partial}{\partial x}\vec{B} = \frac{\partial}{\partial y}\vec{B} = \frac{\partial}{\partial z}\vec{B} = 0$ der ganze Tensor in (5.142) und damit auch die Kraft $\vec{F}$ verschwindet:

$$\vec{F} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}B_x & \frac{\partial}{\partial x}B_y & \frac{\partial}{\partial x}B_z \\ \frac{\partial}{\partial y}B_x & \frac{\partial}{\partial y}B_y & \frac{\partial}{\partial y}B_z \\ \frac{\partial}{\partial z}B_x & \frac{\partial}{\partial z}B_y & \frac{\partial}{\partial z}B_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.143}$$

5.7.3 Drehspulinstrumente

Eine wichtige Anwendung findet das magnetische Moment in den Drehspulinstrumenten, die zur Messung von sehr kleinen Stömen verwendet werden. Ein Drehspulinstrument besteht aus einer drehbar in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B}$ gelagerten, N-fach gewickelten Spule mit Querschnitt A, durch die ein Strom I fleißt. Das magnetische Moment der Spule ist daher

$$\vec{\mu} = N\,I\,\vec{A}. \tag{5.144}$$

Wegen des Drehmoments

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \tag{5.145}$$

$$\Rightarrow \quad \tau = \mu\,B\,\sin\vartheta \tag{5.146}$$

ist die Spule bestrebt, ihr magnetisches Moment in Richtung der Magnetfeldlinien auszurichten. Auf das Drehmoment $\vec{\tau}$ wird aber durch eine Torsionsfeder mit der Federkonstanten D ein rücktreibendes Drehmoment $\tau_R = -D\,\vartheta$ ausgeübt. Es stellt sich ein Momentengleichgewicht

$$\tau = -\tau_R \tag{5.147}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu\,B\,\sin\vartheta = D\,\vartheta \tag{5.148}$$

$$\Leftrightarrow \quad A\,I\,B\,\sin\vartheta = D\,\vartheta \tag{5.149}$$

ein. Mit (5.149) hängen die Gleichgewichtslage ϑ und der zu messende Strom I voneinander ab. So kann man an die Spule einen Zeiger anbringen, der auf einer Skala anstelle des Winkels ϑ direkt den dazugehörigen Strom I anzeigt (Siehe Abb. 5.16).

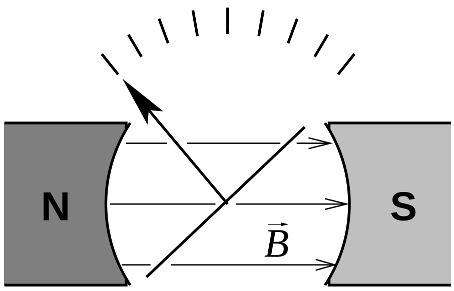

Abbildung 5.16: Drehspulinstrument