eine Zeit lang ($\gg \tau$) geschlossen gewesen ist, denn dann können wir

$$I(0) = \frac{U_0}{R} = I_0 \tag{5.98}$$

annehmen. Die Diffenrenzialgleichung (DGL) für den Abschaltvorgang erhalten wir wieder über die KIRCHHOFFsche Maschenregel. In diesem Fall entfällt der inhomogene Teil der Gleichspannung, da diese durch den offenen Schalter nicht mehr zum Stromfluss I beitragen kann. Die DGL des Abschaltvorgangs ist deshalb:

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = 0 \tag{5.99}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}I = 0 \tag{5.100}$$

Hier wenden wir wieder den Separationsansatz an:

$$-\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}I}{I} = \mathrm{d}t \tag{5.101}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{L}{R}\int_{I(0)=I_0}^{I(t)} \frac{\mathrm{d}\tilde{I}}{\tilde{I}} = \int_{t=0}^{t} \mathrm{d}\tilde{t} \tag{5.102}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{L}{R}\ln\frac{I(t)}{I_0} = t \tag{5.103}$$

$$\Leftrightarrow \quad I(t) = I_0\, e^{-\frac{R}{L}t} \tag{5.104}$$

Der Strom $I(t)$ klingt also exponenziell ab:

$$\boxed{I(t) = I_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}} \tag{5.105}$$

5.6 Wechselstrom

Wir haben in Abschnitt 5.4.4 über Transformatoren festgestellt, dass in der Sekundärspule überhaupt nur eine Spannung induziert werden kann, wenn der Strom in der Primärspule zeitlich veränderlich ist. Wir können daher keine Gleichströme transformieren. Da man mit dieser Einschränkung nicht leben möchte, wird von den Stadtwerken eine sinusförmige Wechselspannung vorgegeben. Der Vorteil liegt auf der Hand: Man kann nun die vorgegebene Wechselspannung in die spezielle Wechselspannung transformieren, die ein Verbraucher zum Betrieb benötigt. Die Wechselspannung hat einen weiteren Vorteil: Sie ist weitaus bequemer herzustellen als Gleichspannungen.

5.6.1 Erzeugung von Wechselspannung

Versuch 5.3

In einem homogenen, zeitlich konstanten Magnetfeld $\vec{B}$ lassen wir eine rechteckige Leiterschleife, wie in Abb. 5.13 gezeigt, mit einer Winkelgeschwindigkeit ω rotieren. Hier sind sowohl das magnetische Feld, als auch die Fläche, die von der Leiterschleife eingeschlossen wird, zeitlich konstant. Dennoch ändert sich der magnetische Fluss Φ_M, da die Flächennormale $\vec{A}$ mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert und daher der Winkel $\varphi = \omega\, t$, den die Flächennormale $\vec{A}$ und die Magnetfeldlinien miteinander einschließen, ständig seinen Wert ändert. Da die Fläche $\vec{A}$ nicht gekrümmt und das magnetische Feld $\vec{B}$ homogen ist, geht das Oberflächenintegral zur Berechnung des magnetischen Flusses Φ_M in ein Skalarprodukt über:

$$\Phi_M = \iint_A \vec{B}\, \mathrm{d}\vec{A} = \vec{B} \cdot \vec{A} = B\, A\, \cos\phi \tag{5.106}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \Phi_M = B\, A\, \cos(\omega t) \tag{5.107}$$

Damit sehen wir, dass sich der magnetische Kraftfluss Φ_M zeitlich ändert. Anschaulich kann man sich das verdeutlichen, dass sich die Zahl der Feldlinien, die die Leiterschleife durchsetzen, permanent ändert. Daher wird eine Spannung $U(t)$ induziert:

$$U(t) = -\tfrac{\mathrm{d}\Phi_M}{\mathrm{d}t} \stackrel{(5.107)}{=} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[B\, A\, \cos(\omega t)] \tag{5.108}$$

$$\Leftrightarrow \qquad U(t) = -B\, A\, \omega \sin(\omega t) \tag{5.109}$$

Um das negative Vorzeichen zu entfernen, das durch das Ableiten des Kosinus entstanden ist, verlegen wir den Zeitnullpunkt um eine halbe Periodendauer, so dass die Induktionsspannung die Form annimmt:

$$U(t) = U_0\, \sin(\omega t) \qquad \text{mit} \qquad U_0 = B\, A\, \omega. \tag{5.110}$$

An den Enden der Leiterschleife können wir also eine sinusförmige Wechselspannung $U(t)$ messen, die die Winkelgeschwindigkeit ω der rotierenden Leiterschleife hat.

5.6.2 Wechselstromwiderstände

Bei Gleichströmen kannten wir bisher nur einen Widerstand: den Ohmschen Widerstand R. Schalten wir eine Kapazität (Kondensator) in einen elektrischen Gleichstromkreis, so kann im stationären Zustand (d.h. zu einem Zeitpunkt $t \gg \tau$) kein Strom mehr fließen.

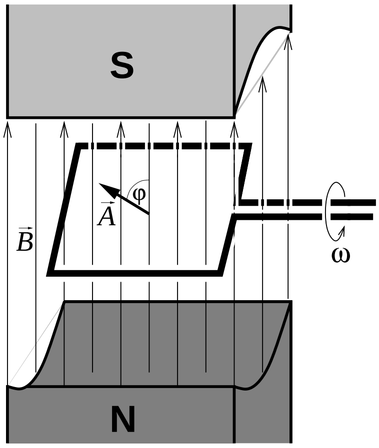

Abbildung 5.13: Eine rechteckige Leiterschleife rotiert in einem homogenen Magnetfeld. An den Enden der Spule kann eine sinusförmige Wechselspannung abgegriffen werden.

Man kann also im Gleichstromkreis den Kondensator als unendlich großen OHMschen Widerstand auffassen. Schalten wir dagegen eine ideale Induktivität (Spule) in einen Gleichstromkreis, kann (im stationären Zustand) der Strom ungehindert durch die Spule fließen, so dass wir zwischen den Enden der Spule keinen Spannungsabfall messen können. Die Spule hat also einen verschwindenden OHMschen Widerstand. In Wechselstromkreisen hingegen können auch Spulen und Kondensatoren endliche Widerstände annehmen:

OHMscher Widerstand

Wird an einen OHMscher Widerstand R eine Wechselspannung $U(t)$ angelegt, fällt an ihm eine Spannung

$$U_R = U(t) = R\,I(t) \tag{5.111}$$

ab. Aus

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t) \tag{5.112}$$

folgt daher

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \sin(\omega t) \tag{5.113}$$

Da dieser Ausdruck nicht von ω abhängt, gilt das OHMsche Gesetz für alle Kreisfrequenzen ω. Der Strom $I(t)$ schwingt genauso wie die Spannung $U(t)$ sinusförmig. Strom und Spannung sind daher zu jedem Zeitpunkt proportional zueinander, d.h. sie sind in Phase.

Induktiver Widerstand

Legen wir nun an die Enden einer idealen Spule mit der Induktivität L eine Wechselspannung $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ an, stellt sich der Strom $I(t)$ so ein, dass Induktionsspannung

$U_i(t) = -L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}$ und Quellspannung $U(t)$ die KIRCHHOFFsche Maschenregel erfüllen:

$$U(t) + U_i(t) = 0 \tag{5.114}$$

$$\Leftrightarrow \quad U(t) = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{5.115}$$

$$\Leftrightarrow \quad U_0 \sin(\omega t) = L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} \tag{5.116}$$

Durch Integration dieser Gleichung erhalten wir

$$U_0 \sin(\omega t) = L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \Big| \int \tag{5.117}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{U_0}{L\omega} \cos(\omega t) = I(t) \tag{5.118}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{U_0}{L\omega} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = I(t) \tag{5.119}$$

Hier sind Strom $I(t)$ und Spannung $U(t)$ nicht mehr phasengleich. Der Strom eilt der Spannung um $\frac{\pi}{2}$ hinterher. Die Amplitude des Stroms $I(t)$ ist jetzt frequenzabhängig. Setzen wir die Amplituden von Spannung $U(t)$ und Strom $I(t)$ ins Verhältnis, können wir analog zum OHMschen Widerstand den **induktiven Widerstand** R_L definieren:

Induktiver Widerstand:

$$R_L = \omega\, L \tag{5.120}$$

Im Falle des Gleichstromkreises verschwindet der induktive Widerstand wegen $\omega = 0$, so dass der Strom divergiert, sofern es keine anderen OHMschen Widerstände gibt.

Kapazitiver Widerstand

Nun legen wir an die Platten eines Kondensators mit der Kapazität C eine Wechselspannung an. Es fließt im Gegensatz zum Gleichstromkreis ein Strom $I(t)$, der umso größer ist, je größer die Kreisfrequenz ω ist. Es muss wieder die KIRCHHOFFsche Maschenregel erfüllt sein,

$$U(t) + U_C = U_0 \sin(\omega t) - \frac{Q(t)}{C} = 0 \tag{5.121}$$

d.h. die Spannung U_C, die zwischen den Kondensatorplatten anliegt, muss entgegengesetzt gleich der Quellspannung $U(t)$ sein. Der Strom $I(t)$ muss sich so einstellen, dass er die

Ladungen

$$Q(t) = \int I(t)\mathrm{d}t \tag{5.122}$$

genau so zwischen den Kondensatorplatten hin und her schiebt, dass die KIRCHHOFFsche Maschenregel erfüllt ist. Wenn wir (5.122) in (5.121) einsetzen und nach t ableiten, erhalten wir die Zeitabhängigkeit des Stroms:

$$\begin{aligned}
U_0 \sin(\omega t) - \frac{1}{C}\int I(t)\mathrm{d}t &= 0 \qquad \Big| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} && (5.123)\\
\Leftrightarrow U_0\,\omega \cos(\omega t) &= \frac{1}{C} I(t) && (5.124)\\
\Leftrightarrow U_0\,\omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) &= \frac{1}{C} I(t) && (5.125)\\
\Leftrightarrow I(t) &= U_0\,\omega\, C \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) && (5.126)
\end{aligned}$$

Auch hier sind Strom $I(t)$ und Spannung $U(t)$ nicht phasengleich. Der Strom eilt der Spannung um $\frac{\pi}{2}$ voraus. Genau wie beim induktiven Widerstand kann man die Amplituden von Strom und Spannung ins Verhältnis setzen, wodurch man den **kapazitiven Widerstand** R_C erhält:

Kapazitiver Widerstand:

$$R_C = \frac{1}{\omega\, C} \tag{5.127}$$

Der kapazitive Widerstand ist umso kleiner, je größer die Kreisfrequenz ist. Für kleine Kreisfrequenzen nimmt er große Werte an, bis er für $\omega \to 0$ (Gleichstromkreis) unendlich groß wird. Kompliziertere Stromkreise können wir mit den Ausdrücken (5.120) und (5.127) für die Wechselstromwiderstände jedoch noch nicht ausrechnen, da so die Phasenunterschiede nicht in die Rechnung mit eingehen. In der Wechselstromtechnik ist es zweckmäßig mit komplexen Wechselstromwiderständen zu rechnen, da man so die Phasenunterschiede von Strom und Spannung mitberücksichtigen kann. Dieses Verfahren werden wir im nächsten Semester kennenlernen.