5.5 Ein- und Abschaltvorgänge

Im nun Folgenden diskutieren wir Ein- und Abschaltvorgänge von RL-Kreisen. Ein RL-Kreis besteht aus einer Gleichspannungsquelle U_0, einem Schalter S, einem OHMschen Widerstand R und einer Induktivität L, die alle in Serie geschaltet sind (siehe Abb.5.11). Wird S zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ geschlossen, wächst der Strom $I(t)$ langsam an, da die In-

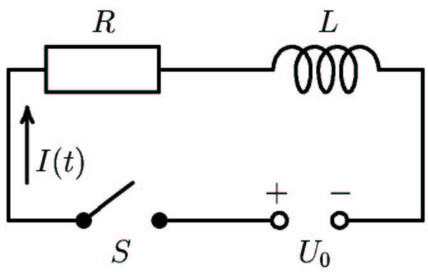


Abbildung 5.11: Eine Gleichspannungsquelle U_0, ein Schalter S, ein OHMscher Widerstand R und eine Induktivität L sind in Serie geschaltet. Dieser Aufbau wird als RL-Kreis oder als RL-Schaltung bezeichnet.

duktionsspannung $U_i = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ dem Stromfluss I entgegenwirkt (LENZsche Regel). Zu Beginn des Ladevorgangs gilt:

$$I(0) = 0 \tag{5.75}$$

Der zeitliche Verlauf des Stromes $I(t)$ lässt sich über die KIRCHHOFFsche Maschenregel bestimmen: Zunächst müssen wir alle einzelnen Spannungsabfälle bestimmen. Dabei ist es wichtig, dass wir die Vorzeichen richtig einsetzen. Wir müssen also einen positiven Umlaufsinn wählen. Diesen wählen wir so, dass die Gleichspannung U_0 mit positivem Vorzeichen in die Maschenregel eingeht (In Abb. 5.11 ist das der Uhrzeigersinn). Für den Spannungsabfall U_R über dem OHMschen Widerstand R gilt

$$U_R = -R\,I \tag{5.76}$$

und für die Induktionsspannung U_i über L gilt

$$U_i = -L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \tag{5.77}$$

Nach der KIRCHHOFFschen Maschenregel muss die Summe aller Einzelspannungen gleich null sein:

$$U_0 + U_R + U_i = 0 \tag{5.78}$$

$$\Rightarrow \quad U_0 - R\,I + U_i = 0 \tag{5.79}$$

Aus (5.77) folgt durch Integration über dt:

$$\int_{t_0=0}^{t} U_i \,\mathrm{d}t = -L \cdot \tilde{I}(t)\Big|_{I(0)=0}^{I(t)} = -L\,I(t) \tag{5.80}$$

$$\Leftrightarrow \qquad -\frac{1}{L}\int_0^t U_i \,\mathrm{d}t = I(t) = I \tag{5.81}$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (5.79) für den Strom ein, folgt:

$$U_0 + \frac{R}{L}\int_0^t U_i \mathrm{d}t + U_i = 0 \tag{5.82}$$

$$\Leftrightarrow \qquad U_i + \frac{R}{L}\int_0^t U_i \,\mathrm{d}t = -U_0 \qquad \Big| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tag{5.83}$$

$$\frac{\mathrm{d}U_0}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 = \frac{\mathrm{d}U_i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}U_i \tag{5.84}$$

Dies ist eine homogene lineare DGL 1. Ordnung, die wir durch den Separationsansatz lösen können:

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}U_i}{U_i} = -\frac{R}{L}\mathrm{d}t \tag{5.85}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \int_{U_i(0)}^{U_i(t)} \frac{\mathrm{d}\tilde{U}_i}{\tilde{U}_i} = -\int_0^t \frac{R}{L}\,d\tilde{t} \tag{5.86}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \ln\frac{U_i(t)}{U_i(0)} = -\frac{R}{L}t \tag{5.87}$$

$$\Leftrightarrow \qquad U_i(t) = U_i(0)\,e^{-\frac{R}{L}t} \tag{5.88}$$

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ fließt noch kein Strom. Daher fällt noch keine Spannung über dem OHMschen Widerstand R ab. Induktionsspannung $U_i(0)$ und Quellspannung U_0 sind deshalb für $t_0 = 0$ entgegengesetzt gleich ($U_i(0) = -U_0$). Eingesetzt in (5.88) ergibt dies

$$U_i(t) = -U_0\,e^{-\frac{R}{L}t} \tag{5.89}$$

Wie bei allen zeitlich exponenziell verlaufenden Vorgängen definiert man auch hier eine Zeitkonstante $\tau := \frac{L}{R}$. Damit gilt für den Einschaltvorgang

$$\boxed{U_i(t) = -U_0\,e^{-\frac{t}{\tau}}} \tag{5.90}$$

Für den Strom beim Ladevorgang gilt dann:

$$
\begin{aligned}
U_i &= -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} && (5.91)\\
\int_0^t U_i\,\mathrm{d}\tilde{t} &= -L\int_{I(0)=0}^{I(t)}\mathrm{d}\tilde{I} && (5.92)\\
\Leftrightarrow \qquad \int_0^t U_0\,e^{-\frac{R}{L}\tilde{t}}\,\mathrm{d}\tilde{t} &= -L\,I(t) && (5.93)\\
\Leftrightarrow \qquad \frac{U_0 L}{R}\,e^{-\frac{R}{L}\tilde{t}}\Big|_0^t &= -L\,I(t) && (5.94)\\
\Leftrightarrow \qquad \frac{U_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right) &= I(t) && (5.95)
\end{aligned}
$$

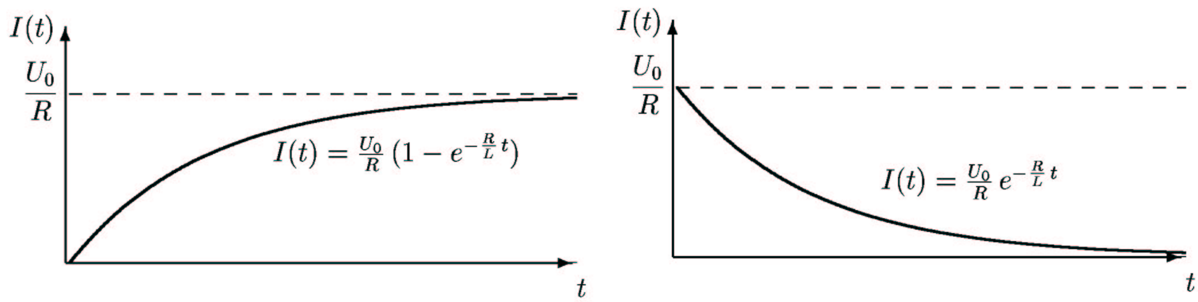
Mit $\tau = \frac{L}{R}$ gilt dann

$$\Leftrightarrow \qquad \boxed{I(t) = \frac{U_0}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)} \tag{5.96}$$

Der Strom wird nach dem Einschalten steil ansteigen und einen Grenzwert von

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \frac{U_0}{R}, \tag{5.97}$$

je nach Größe des OHMschen Widerstandes, schon bald sehr nahe kommen. Man kann in guter Näherung $I(t) = \frac{U_0}{R}$ annehmen, wenn t einige Zeitkonstanten τ beträgt.
Beim Abschaltvorgang nehmen wir an, dass der Schalter vor dem Öffnen ($t = 0$) bereits



(a) (b)

Abbildung 5.12: Stromverlauf in der RL-Schaltung: (a) Beim Einschaltvorgang steigt der Strom am Anfang steil an und nähert sich dann dem Grenzwert $\frac{U_0}{R}$ an. (b) Beim Abschaltvorgang hört der Strom nicht sofort auf zu fließen. Er fällt exponenziell ab und nähert sich dem Grenzwert null an.

eine Zeit lang ($\gg \tau$) geschlossen gewesen ist, denn dann können wir

$$I(0) = \frac{U_0}{R} = I_0 \tag{5.98}$$

annehmen. Die Diffenrenzialgleichung (DGL) für den Abschaltvorgang erhalten wir wieder über die KIRCHHOFFsche Maschenregel. In diesem Fall entfällt der inhomogene Teil der Gleichspannung, da diese durch den offenen Schalter nicht mehr zum Stromfluss I beitragen kann. Die DGL des Abschaltvorgangs ist deshalb:

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = 0 \tag{5.99}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}I = 0 \tag{5.100}$$

Hier wenden wir wieder den Separationsansatz an:

$$\begin{aligned}
&& -\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}I}{I} &= \mathrm{d}t && (5.101)\\
&\Leftrightarrow & -\frac{L}{R}\int_{I(0)=I_0}^{I(t)} \frac{\mathrm{d}\tilde{I}}{\tilde{I}} &= \int_{t=0}^{t} \mathrm{d}\tilde{t} && (5.102)\\
&\Leftrightarrow & -\frac{L}{R}\ln\frac{I(t)}{I_0} &= t && (5.103)\\
&\Leftrightarrow & I(t) &= I_0\, e^{-\frac{R}{L}t} && (5.104)
\end{aligned}$$

Der Strom $I(t)$ klingt also exponenziell ab:

$$\boxed{I(t) = I_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}} \tag{5.105}$$

5.6 Wechselstrom

Wir haben in Abschnitt 5.4.4 über Transformatoren festgestellt, dass in der Sekundärspule überhaupt nur eine Spannung induziert werden kann, wenn der Strom in der Primärspule zeitlich veränderlich ist. Wir können daher keine Gleichströme transformieren. Da man mit dieser Einschränkung nicht leben möchte, wird von den Stadtwerken eine sinusförmige Wechselspannung vorgegeben. Der Vorteil liegt auf der Hand: Man kann nun die vorgegebene Wechselspannung in die spezielle Wechselspannung transformieren, die ein Verbraucher zum Betrieb benötigt. Die Wechselspannung hat einen weiteren Vorteil: Sie ist weitaus bequemer herzustellen als Gleichspannungen.