5.4 Gegen- und Selbstinduktion

5.4.1 Gegeninduktion

Jeder beliebige Strom durchflossene Leiter erzeugt ein Magnetfeld $\vec{B}$. Ändert man den Strom I durch den Leiter, ist auch das erzeugte Magnetfeld $\vec{B}$ zeitlich veränderlich ($\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$). Dieses zeitlich veränderliche Magnetfeld vermag in anderen elektrischen Leitern nach dem FARADAYschen Induktionsgesetz eine Spannung U_i zu induzieren. Dieses Prinzip nennt man **Gegeninduktion**. Die Gegeninduktion ist im Grunde nichts Neues; in Abschnitt 5.2 haben wir das Prinzip der Gegeninduktion schon einmal angewendet, ohne es beim Namen zu nennen. Im Folgenden wollen wir die Gegeninduktion etwas detaillierter behandeln. Einen einfachen Fall der Gegeninduktion können wir an folgendem Beispiel untersuchen: Es werden zwei Leiterschleifen (Schleife 1 und 2) parallel zu einander angeordnet, wobei ihre Symmetrieachsen identisch sind. Durch Schleife 1 fließt ein zeitlich veränderlicher Strom $I_1(t)$. Für das von Schleife 1 erzeugte Magnetfeld $B_1(t)$ gilt bekanntlich

$$B_1(t) \sim I_1(t) \tag{5.47}$$

Die Leiterschleife 2 wird dabei von $B_1(t)$ durchsetzt. Da $B_1(t)$ zeitlich veränderlich ist, wird in Schleife 2 eine Spannung U_2 induziert. Für diese gilt:

$$U_2 = -\frac{\mathrm{d}\Phi_M}{\mathrm{d}t} \sim \frac{\partial B_1}{\partial t} \sim \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \tag{5.48}$$

$$\Leftrightarrow \qquad U_2 \sim \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \tag{5.49}$$

$$\Leftrightarrow \qquad U_2 = -L_{12}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \tag{5.50}$$

Spannung U_2 über Schleife 2 und Stromänderung $\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$ durch Schleife 1 sind also proportional zueinander. Der Proportionalitätsfaktor L_{12} wird **Gegeninduktivität** genannt. Für die Dimension der Gegeninduktivität gilt

$$[L_{12}] = \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A}} = \mathrm{Henry} = \mathrm{H} \tag{5.51}$$

Man kann natürlich auch durch Schleife 2 einen Strom I_2 fließen lassen. Für die Spannung U_1 über der Schleife 1 gilt dann analog

$$U_1 = -L_{21}\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \tag{5.52}$$

Erstaunlicherweise gilt allgemein das

Reziprozitätsgesetz

$$\boxed{L_{21} = L_{12}} \tag{5.53}$$

Einen allgemeinen Beweis des Reziprozitätsgesetzes wollen wir hier nicht führen. Stattdessen wollen wir das Reziprozitätsgesetz an einem einfachen Fall verifizieren.

Beispiel 5.2

Denken wir uns zwei sehr lange, ineinander geschobene Zylinderspulen mit gleicher Länge ($l := l_1 = l_2$), aber unterschiedlichem Querschnitt ($A_1 \neq A_2$). Hier sei Spule 1 die innere mit N_1 Windungen, und Spule 2 die äußere Spule ($A_1 < A_2$) mit N_2 Windungen. Wir betrachten nun beide Fälle: Im ersten Fall wird eine Spannung U_2 in Spule 2 durch ein zeitlich veränderliches Magnetfeld $B_1(t)$ induziert, das wiederum durch den Strom $I_1(t)$ durch die Spule 1 erzeugt wird. Für das Magnetfeld $B_1(t)$ gilt nach (4.64):

$$B_1(t) = \mu_0 \, I_1(t) \frac{N_1}{l} \tag{5.54}$$

Im zweiten Fall induziert nun umgekehrt ein zeitlich veränderliches Magnetfeld $B_2(t)$, das von $I_2(t)$ erzeugt wird, eine Spannung U_1 in Spule 1. Für das Magnetfeld $B_2(t)$ gilt:

$$B_2(t) = \mu_0 I_2(t) \frac{N_2}{l} \tag{5.55}$$

Um die magnetischen Flüsse Φ_1 und Φ_2 zu berechnen, müssen wir berücksichtigen, dass in beiden Fällen nur die Fläche A_1 einen Beitrag zum magnetischen Fluss liefert. In Fall 1 ist der Querschnitt A_2 der äußeren Spule (Spule 2) zwar größer als A_1, allerdings können wir den Bereich außerhalb der Spule 1 als feldfrei annehmen. Im Inneren der Spule 1 wird ein homogenes Magnetfeld $B_1(t) = \mu_0 \, I_1(t) \frac{N_1}{l}$ vorliegen. Daher wird

$$\Phi_2 = N_2 \, A_1 \, B_1(t) = N_2 \, A_1 \, \mu_0 \, I_1(t) \frac{N_1}{l} \tag{5.56}$$

$$\Rightarrow \quad U_2 = -N_2 \, A_1 \, \frac{\partial B_1(t)}{\partial t} = -N_2 \, A_1 \, \mu_0 \, \frac{\mathrm{d}I_1(t)}{\mathrm{d}t} \frac{N_1}{l} =: -L_{12} \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \tag{5.57}$$

gelten. In Fall 2 ist das Magnetfeld $B_2(t) = \mu_0 \, I_2(t) \frac{N_2}{l}$ zwar über das ganze Innere von Spule 2 verteilt, jedoch wird die Spannung U_1 in Spule 1 nur durch den Fluss durch den Querschnitt A_1 der Spule 1 induziert. Deshalb geht auch hier nur die Fläche A_1 in den Ausdruck der Induktionsspannung U_1 ein.

$$\Phi_1 = N_1 \, A_1 \, B_2(t) = N_1 \, A_1 \, \mu_0 \, I_2(t) \frac{N_2}{l} \tag{5.58}$$

$$\Rightarrow \quad U_1 = -N_1 \, A_1 \, \frac{\partial B_2(t)}{\partial t} = -N_1 \, A_1 \, \mu_0 \, \frac{\mathrm{d}I_2(t)}{\mathrm{d}t} \frac{N_2}{l} =: -L_{21} \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \tag{5.59}$$

Ein Vergleich von (5.57) und (5.59) zeigt, dass

$$L_{21} = L_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A_1}{l} \tag{5.60}$$

gilt. Das Reziprozitätsgesetz (5.53) haben wir also an diesem einfachen Beispiel nachvollziehen können.

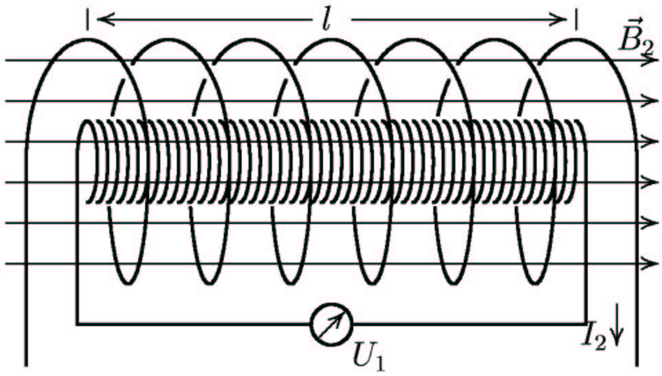


Abbildung 5.7: Ein zeitlich nicht konstanter Strom I_2 in der Spule 2 (äußere Spule) erzeugt ein zeitlich veränderliches Magnetfeld $\vec{B}_2$, das in der Spule 1 (innere Spule) eine Spannung induziert. Hier hat die innere Spule $N_1 = 49$ Windungen, und die äußere Spule $N_2 = 7$ Windungen.

5.4.2 Selbstinduktion

Ein veränderlicher Strom $I(t)$ in einer Spule induziert nicht nur in anderen Spulen eine Spannung, er induziert selbst in der Spule, durch die er fließt, eine Spannung U_i, die nach der Lenzschen Regel der Änderung des Stromes $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ entgegenwirkt. Es gilt

$$U_i = -L \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{5.61}$$

Hier ist L die **Selbstinduktivität**. Sie wird auch kurz als **Induktivität** bezeichnet. Die Dimension der Induktivität ist die gleiche wie die der Gegeninduktivität:

$$[L] = \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A}} = \mathrm{Henry} = \mathrm{H} \tag{5.62}$$

Das Phänomen der Selbstinduktion tritt nicht nur bei Spulen auf, sondern bei allen elektrischen Leitern, in denen ein zeitlich veränderlicher Strom I fließt. Bei Spulen tritt

die Selbstinduktion jedoch besonders stark auf.
Ist A der Querschnitt, N die Windungszahl und l die Länge der Spule, so gilt speziell für die Induktivität einer Spule

$$B(t) = \mu_0 \, I(t) \, \frac{N}{l} \tag{5.63}$$

$$\Rightarrow \qquad \Phi_M(t) = N \iint\limits_A \vec{B}(t) \mathrm{d}\vec{A} = N B(t) \, A \tag{5.64}$$

$$\Rightarrow \quad U_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} = -N \, A \, \frac{\partial B(t)}{\partial t} = -\mu_0 \, A \, \frac{N^2}{l} \, \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} \tag{5.65}$$

$$\Rightarrow \qquad L = \mu_0 \, \frac{N^2 \, A}{l} \tag{5.66}$$

Versuch 5.2

Eine Gleichspannungsquelle mit der Spannung U wird mit einem Strommesser I, einer Spule L und einem variablen Widerstand R (Schiebewiderstand) in Serie geschaltet (siehe Abb. 5.8). Die Spule in unserem Versuch ist keine ideale Spule, d.h. unsere Spule hat wie jeder elektrische Leiter auch einen OHMschen Widerstand. Dieser ist zwar klein im Vergleich zu R, aber dennoch wird der Spannungsmesser auch im elektrostatischen Fall einen kleinen Spannungsabfall anzeigen. Verschieben wir allerdings den Metallabgriff des Schiebewiderstandes, verändern damit also den Wert von R, wird damit der Strom I nach dem OHMschen Gesetz $I(t) = \frac{U}{R(t)}$ verändert. Es wird durch die zeitliche Änderung $\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}$ des Stromes $I(t)$ eine Spannung U_i zwischen den Enden der Spule induziert (Selbstinduktion). Für diese Induktionsspannung gilt

$$U_i = -L \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = -L \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{U}{R(t)} \right) = \frac{L \, U}{R^2(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{5.67}$$

Je schneller wir den Schiebewiderstand hin und her schieben, desto größer wird die Induktionsspannung U_i sein. Sie kann auch größere Werte als die Klemmenspannung U der Spannungsquelle annehmen.

5.4.3 Ersatzschaltbild

Da eine Spule eine Spannung U_i induziert, die dann in der KIRCHHOFFschen Maschenregel (siehe Abschnitt 10.1 auf Seite 100) mit in die Summe aller Einzelspannungen eingeht, fasst man sie oft als eigene Spannungsquelle auf und zeichnet auch anstelle der Spule eine

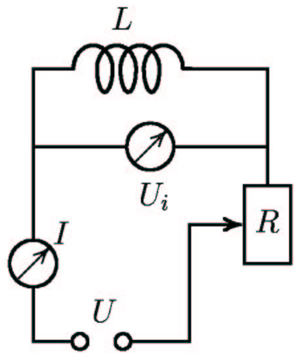


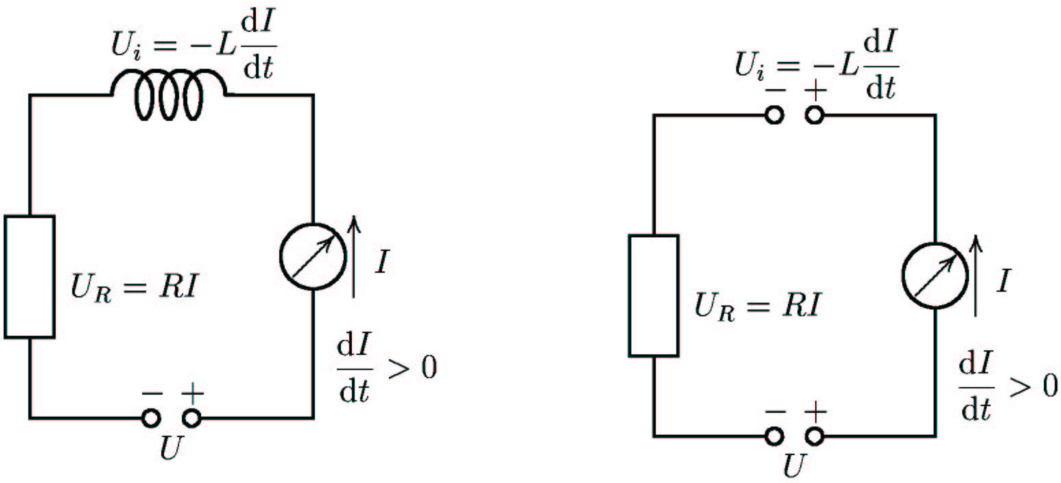
Abbildung 5.8: Aufbau von Versuch 5.2 zur Selbstinduktion

Spannungsquelle in den Schaltplan (Ersatzschaltbild). Diese Spannung U_i ist in der Regel abhängig von anderen Größen im Stromkreis und daher nicht sehr leicht zu berechnen. So ist die Induktionsspannung U_i, ähnlich wie der Spannungsabfall über einem OHMschen Widerstand, in erster Linie abhängig vom Strom I, dieser ist aber wiederum abhängig von allen Widerständen und Spannungen im Stromkreis. Die Berechnung der Spannungsabfälle in Stromkreisen, die nur OHMsche Widerstände enthalten, führt auf z.T. schwierige Gleichungsysteme (siehe Abschnitt 10.1, Seite 100ff). Bei Induktionsspannungen hängt die Spannung aber nicht nur vom Strom I alleine ab, sondern von der zeitlichen Ableitung. Dies führt i.d.R. auf Differenzialgleichungen, dessen Lösungen Aufschluss über den zeitlichen Verlauf von Strom und Spannungen geben. Einfache Beispiele sind Ein- und Ausschaltvorgänge von RL-Gliedern (siehe Abschnitt 5.5, Seite 201).

5.4.4 Der Transformator

Oft möchte man mit elektrischen Geräten oder Schaltungen arbeiten, die eine ganz bestimmte Spannung benötigen. In der Regel ist die von den Stadtwerken vorgegebene Netzspannung von 230V Wechselspannung (siehe Abschnitt 5.7 „Wechselstrom“) nicht die Richtige. Wir müssen die Netzspannung in eine geeignete Spannung „transformieren“. Diese Spannungsumwandlung übernimmt der **Transformator**, ein Schaltelement, das wir im Folgenden behandeln werden:

Zwei Spulen werden so ineinander gewickelt, dass sie den gleichen Spulenquerschnitt A haben. Ferner müssen wir beim Aufwickeln darauf achten, dass wir den gleichen Drehsinn wählen, so dass in beiden Spule Φ_M das gleiche Vorzeichen hat. Wichtig ist nun, dass sich die Windungszahl N_1 der Spule 1 von der Windungszahl N_2 der anderen Spule unterscheidet. Legen wir nun an die Spule 1 (die sog. Primärspule) eine zeitlich veränderliche (!) Spannung $U_1(t)$ an, verursacht diese einen Stromfluss $I(t)$, der in der Spule einen zeitlich veränderlichen magnetischen Fluss Φ_M bewirkt. Dadurch wird eine Spannung U_i induziert



(a) (b)

Abbildung 5.9: Es sind eine Spannungsquelle U, ein OHMscher Wiederstand, eine Spule L und ein Strommesser in Serie geschaltet. Da die Spule bei nicht konstantem Strom - hier sei $\frac{dI}{dt} > 0$ angenommen - eine Spannung U_i induziert, wird die Spule L oft als Spannungsquelle in sog. Ersatzschaltbildern eingezeichnet.

(Selbstinduktion). Nehmen wir an, dass der Stromkreis keinen OHMschen Widerstand enthält, gilt dann im Primärstromkreis nach der KIRCHHOFFschen Maschenregel:

$$U_1 + U_{i_1} = 0 \tag{5.68}$$

$$\Leftrightarrow \quad U_1 - N_1 \frac{d\Phi_M}{dt} = 0 \tag{5.69}$$

$$\Leftrightarrow \quad U_1 = N_1 \frac{d\Phi_M}{dt} \tag{5.70}$$

$$\tag{5.71}$$

Der magnetische Fluss Φ_M ist aber in beiden Spulen der gleiche. Deshalb wird auch in Spule 2 (Sekundärspule) eine Spannung U_{i_2} induziert (Gegeninduktion), die sich nur aufgrund der unterschiedlichen Windungszahlen N_1 und N_2 unterscheidet. Im Sekundärstromkreis kann daher an den Enden eine Spannung U_2 abgegriffen werden, für die gilt:

$$U_2 = -N_2 \frac{d\Phi_M}{dt} \tag{5.72}$$

$$\tag{5.73}$$

Aus den Gleichungen (5.70) und (5.73) folgt dann die

Transformator-Gleichung:

$$\frac{U_1}{U_2} = -\frac{N_1}{N_2} \tag{5.74}$$

In der physikalischen Praxis verwendet man Spulen, die um einen Eisenkern gewickelt sind. Der Eisenkern verstärkt das Magnetfeld und damit den magnetischen Fluss in der Spule(siehe„Materie im Magnetfeld").
Die Transformation der Spannungen kann aber nur erfolgen, wenn sich die angelegte Spannung $U_1(t)$ permanent ändert. Bei idealen Spulen (die es in der Realität nicht gibt) würde der Strom I_1 in der Primärspule bei einer <u>konstanten</u> Spannung U_1 divergieren, da weder ein Spannungsabfall über einem OHMschen Widerstand erfolgen, noch eine Gegenspannung induziert werden kann (wegen $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$).
Am zweckmäßigsten sind Transformatoren mit geschlossenem Eisenkern (z.B. einem Torus). Hier ist das Äußere des Eisenkerns so gut wie feldfrei, so dass die geschlossenen Magnetfeldlinien entlang des Eisenkerns verlaufen. Deshalb brauchen Primär- und Sekundärspule jetzt auch nicht mehr ineinander gewickelt zu sein, da durch beide Spulen die gleiche Anzahl von Feldlinien verläuft, also der magnetische Fluss Φ_M in beiden gleich ist.

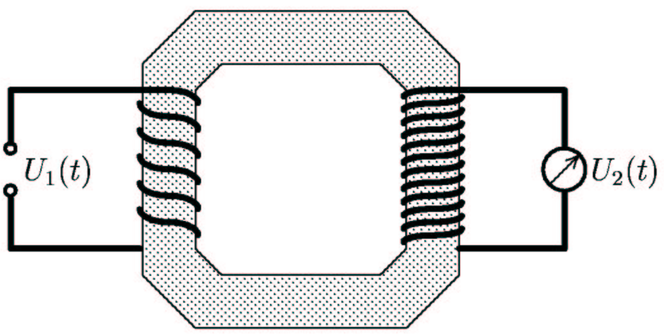


Abbildung 5.10: Der abgebildete Transformator hat in der Primärspule $N_1 = 6$ Windungen und in der Sekundärspule $N_2 = 12$ Windungen. Die Sekundärspannung $U_2(t)$ ist also wegen $\frac{U_1}{U_2} = -\frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{2}$ doppelt so groß wie die Primärspannung $U_1(t)$.