tionsspannung U_i. Damit geht 5.36 in unserem Fall über in

die integrale Form des
FARADAYschen Induktionsgesetzes:

$$\oint\limits_{\partial A} \vec{E}\mathrm{d}\vec{r} = -\iint\limits_{A} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\mathrm{d}\vec{A}. \tag{5.37}$$

Dies ist eine der vier MAXWELL-Gleichungen (vgl. Kapitel 7).

Wichtig!

Bisher waren wir davon ausgegangen, dass elektrische Felder konservative Kraftfelder sind, d.h. dass Wegintegrale des E-Feldes entlang geschlossener Wege stets verschwinden. Dann dürfte aber nach (5.37) nie eine Spannung induziert werden. Elektrische Felder sind nur konservative Kraftfelder, solange sie von elektrischen Ladungen erzeugt werden. Elektrische Felder die durch magnetische Induktion induziert werden, sind keine konservativen Kraftfelder.

5.3 Differenzielle Schreibweise

Zu jeder der vier MAXWELL-Gleichungen (siehe Kapitel 7) gibt es eine „integrale“ oder „makroskopische“ Form sowie eine „differenzielle“ oder „mikroskopische“ Form (z.B. 4.3 auf Seite 149). Im letzten Abschnitt hatten wir bereits die integrale Form des FARADAYschen Induktionsgesetzes hergeleitet. Um die differenzielle Schreibweise aufschreiben zu können, müssen wir zunächst einige mathematische Voraussetzungen schaffen.

5.3.1 Die Rotation

Ein neuer Begriff aus der Differenzialgeometrie ist der Differenzialoperator der **Rotation**. Er kann auf ein Vektorfeld (z.B. auf das $\vec{E}$-Feld) angewendet werden.

Die **Rotation** eines Vektorfeldes $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)^T$, dargestellt in kartesischen Koordinaten, ist definiert durch

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{5.38}$$

Anschaulich bedeutet $\operatorname{rot} \vec{E}$ = „Wirbel von $\vec{E}$“. Ein anschauliches Vektorfeld, an dem wir uns die Rotation verdeutlichen wollen, ist das Strömungsfeld $\vec{v}$ einer strömenden Flüssigkeit. Ein Styropor-Kügelchen, das auf einem Fluss mit der Strömung mitschwimmt, beginnt zu rotieren, falls die einzelnen Flüssigkeitsschichten mit unterschiedlicher Geschwindigkeit aneinander vorbei gleiten. Der Drehsinn des Styropor-Kügelchens lässt sich aus $\operatorname{rot} \vec{v}$ mit der Rechten-Hand-Regel ablesen.

Rechte-Hand-Regel:
Zeigt der rechte Daumen in die Richtung von $\operatorname{rot} \vec{v}$, so geben die gekrümmten Finger den Drehsinn der Rotation an. (5.39)

Die Länge des Vektors $\operatorname{rot} \vec{v}$ gibt die Stärke der Drehung an. In Abb. 5.5 ist ein einfaches Strömungsfeld $\vec{v}(x, y, z) = k_0 \cdot (y_0 - y)\vec{e}_x$ mit $\operatorname{rot} \vec{v}$ abgebildet.

Beispiel 5.1

Die Rotation wird der Anschaulichkeit halber am Beispiel einer strömenden Flüssigkeit mit dem Strömungsfeld $\vec{v}(x, y, z) = k_0 \cdot (y_0 - y)\vec{e}_x$ verdeutlicht. Für $\vec{v}(x, y, z) = k_0 \cdot (y_0 - y)\vec{e}_x$ lässt sich die Rotation $\operatorname{rot} \vec{v}$ ausrechnen:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0 \cdot (y_0 - y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.40}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_0 \end{pmatrix} \tag{5.41}$$

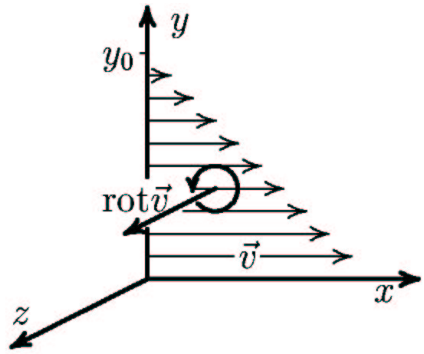

Abbildung 5.5: Ein mit der Strömung mit schwimmendes Styropor-Kügelchen beginnt um eine Achse zu rotieren, die die Richtung von $\operatorname{rot}\vec{v}$ hat. Für den Drehsinn gilt die Rechte-Hand-Regel (Siehe 5.39) In diesem Beispiel (Bsp. 5.3.1) ist $\operatorname{rot}\vec{v} = k_0$.

> Wie wir sehen, ist die Rotation im gesamten Vektorfeld konstant. Überall würde sich das Styroporkügelchen gleich schnell gegen den Uhrzeigersinn drehen.

Ferner kann man sich die Rotation in folgendem Kriterium zunutze machen:

Konservative Kraftfelder sind wirbelfrei, d.h. für alle konservativen Kraftfelder $\vec{E}$ gilt (ohne Beweis)

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0. \tag{5.42}$$

Die für uns wichtigste Bedeutung gewinnt die Rotation dagegen im Satz von STOKES.

5.3.2 Satz von STOKES

Für die Rotation $\operatorname{rot}\vec{E}$ eines Vektorfeldes $\vec{E}$ gilt (unter gewissen Voraussetzungen wie Stetigkeit) der

Satz von STOKES: oder
STOKESscher Integralsatz
Ist ∂A der Rand einer Fläche A, gilt

$$\oint_{\partial A} \vec{E}\mathrm{d}\vec{r} = \iint_A (\operatorname{rot}\vec{E})\mathrm{d}\vec{A}. \tag{5.43}$$

Wichtig ist hierbei, dass der Umlaufsinn des Weges ∂A mit dem Vektor $\mathrm{d}\vec{A}$ durch die Rechte-Hand-Regel in Zusammenhang steht. Mit dem Satz von STOKES geht die integrale Form des FARADAYschen Induktionsgesetzes (5.37) über in die

differenzielle Form des FARADAYschen Induktionsgesetzes:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{5.44}$$

In Worten:
„Die Wirbel des $\vec{E}$-Feldes werden durch Änderungen von $\vec{B}$ erzeugt.“ Beweis: Nach der integralen Form des FARADAYschen Induktionsgesetzes gilt:

$$\oint_{\partial A} \vec{E}\mathrm{d}\vec{r} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\mathrm{d}\vec{A} \tag{5.45}$$

Dieser Ausdruck geht mit dem STOKESschen Integralsatz über in

$$\Leftrightarrow \iint_A (\operatorname{rot}\vec{E})\mathrm{d}\vec{A} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\mathrm{d}\vec{A} \tag{5.46}$$

Da (5.46) für beliebige Flächen A gelten muss, müssen die Integranden gleich sein. Dies liefert uns die differenzielle Form des FARADAYschen Induktionsgesetzes (5.44).

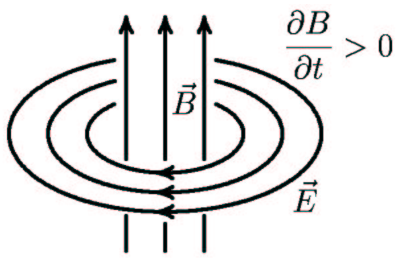

Abbildung 5.6: Die zeitliche Änderung $\frac{\partial B}{\partial t} > 0$ des Magnetfeldes induziert Wirbel des elektrischen Feldes. Bei diesem Umlaufsinn der $\vec{E}$-Feld-Wirbel muss die zeitliche Änderung des Magnetfeldes positiv sein.