

Kapitel 5

Magnetische Induktion

Bisher haben wir uns nur mit dem Magnetismus von stationären d.h. zeitlich konstanten Strömen befasst. Man nennt die Wissenschaft, die den Magnetismus stationärer Ströme behandelt, **Magnetostatik**. In diesem Kapitel verlassen wir die Magnetostatik und beschäftigen uns mit zeitlich veränderlichen Strömen und Feldern.

5.1 Experimentelle Tatsachen und deren Deutung

Versuch 5.1

In diesem Versuch verwenden wir eine Zylinderspule mit N Windungen, wie sie in Abschnitt 4.4.3 beschrieben wurde, allerdings legen wir an die Enden der Spule keine Spannungsquelle, sondern ein Spannungsmesser (Voltmeter) an.

1. Lassen wir die Spule ruhen und schieben einen Stabmagneten (Permanentmagnet) in die Spule hinein, zeigt der Spannungsmesser schon bei Annäherung des Magneten an die Spule eine Spannung U_i an, die umso größer ist, je schneller sich der Magnet annähert. Ziehen wir den Stabmagneten mit gleicher Geschwindigkeit wieder heraus, messen wir die gleiche Spannung, allerdings mit umgekehrtem Vorzeichen.
2. Halten wir nun umgekehrt den Permanentmagneten in Ruhe und bewegen die Spule über diesen, so wird auch hier schon bei Annäherung der Spule an den Magneten eine Spannung U_i gemessen, die umso größer ist, je schneller wir die Bewegung durchführen. Entfernen wir den Stabmagneten wieder mit gleicher Geschwindigkeit, messen wir auch hier die gleiche Spannung, ebenfalls mit umgekehrtem Vorzeichen.

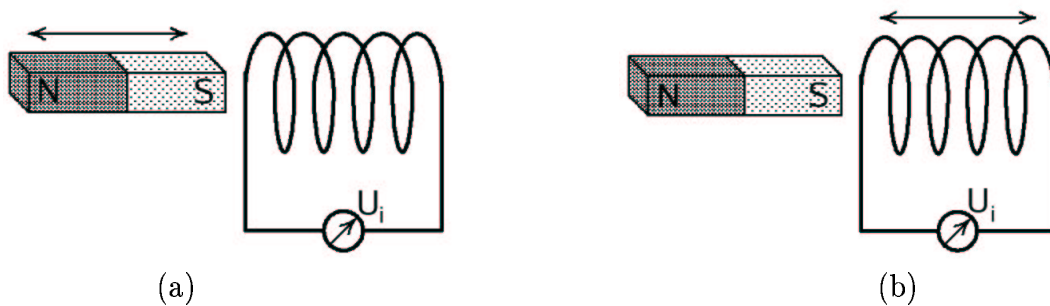


Abbildung 5.1: (a) Ein Permanentmagnet wird in das Innere einer ruhenden Zylinderspule geschoben. (b) Die Zylinderspule wird auf einen ruhenden Permanentmagneten geschoben.

Deutung 1:

Unabhängig davon, ob wir den Magneten in die ruhende Spule schieben (Versuch 1) oder ob wir mit gleicher Relativgeschwindigkeit die Spule über den ruhenden Stabmagneten schieben, ist die gemessene Spannung die gleiche. Es kommt also auf die Relativgeschwindigkeit zueinander an. Was ist aber der Grund, dass überhaupt eine Spannung U_i entstehen kann? Ist es nur der sich ändernde Abstand? Dass ein Magnet in der Nähe der Spule ist, wird die Spule nur über das Magnetfeld des Magneten erfahren. Eine Änderung des Abstandes bemerkt die Spule also über die Änderung des magnetischen Feldes.

Denken wir uns eine Spule mit nur einer Windung. Auch hier tritt der gleiche Effekt auf,

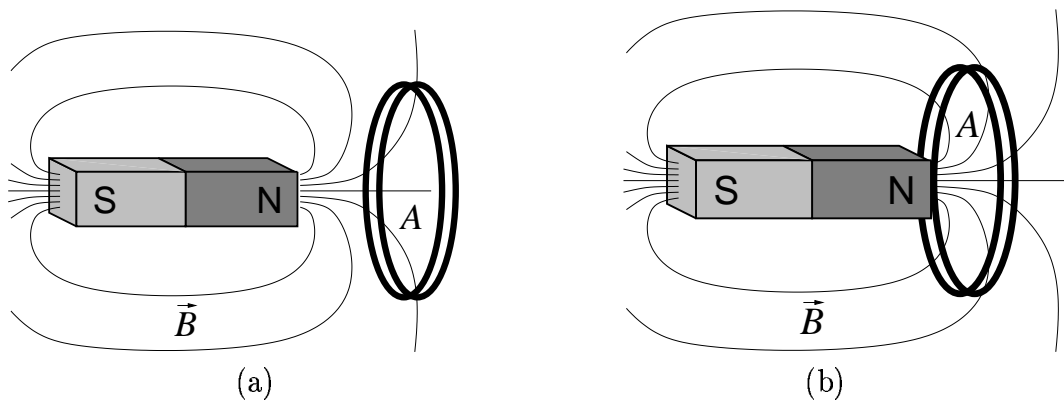


Abbildung 5.2: Der magnetische Fluss Φ_M durch die Spule in (a) ist klein im Vergleich zum magnetischen Fluss in Abb. (b). Anschaulich kann man sich das durch die niedrigere Zahl der Magnetfeldlinien erklären, die durch die Spule gehen.

nur ist die entstehende Spannung U_I N -mal kleiner. Diese Reduzierung macht aus der 3-dimensionalen Spule aus dem Versuch eine 2-dimensionale **Leiterschleife**. Bei der rela-

tiven Annäherung von Stabmagneten und Leiterschleife ändert sich - anschaulich gesagt - die „Anzahl der Magnetfeldlinien“, die durch die Leiterschleife gehen. Formal wird die „Anzahl der Magnetfeldlinien“ durch eine Fläche A durch die Größe des **magnetischen Flusses** Φ_M ausgedrückt:

Der **magnetische Fluss** eines Magnetfeldes \vec{B} durch eine Fläche A ist definiert durch

$$\Phi_M = \iint_A \vec{B} d\vec{A} \quad (5.1)$$

Anschaulich stellt Φ_M die Anzahl der \vec{B} -Feldlinien durch die Fläche A dar (siehe Abb. 5.2 (a) und (b)). In Abb. 5.2 (a) ist der magnetische Fluss Φ_M kleiner als in Abb. 5.2 (b), da in (a) weniger Feldlinien durch die Leiterschleife laufen als in (b). Genauso kann man sagen, der magnetische Kraftfluss Φ_M ist in (a) kleiner, da hier das magnetische Feld \vec{B} schwächer ist, was sich durch weniger eng beieinander liegende Feldlinien zeigt. An dieser Stelle wird auch klar, warum man das magnetische Feld auch **magnetische Kraftflussdichte** nennt (vgl. (4.1) auf Seite 147). Die SI-Einheit des magnetischen Flusses ist das **Weber**. Der magnetische Fluss wird damit analog zum elektrischen Kraftfluss definiert (vgl. 1.8

$$[\Phi_M] = 1 \text{ Weber} = 1 \text{ Wb} = 1 \text{ T m}^2 = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2 \text{ A}} \quad (5.2)$$

Tatsächlich wurde experimentell bestätigt, dass die entstandene (oder induzierte) Spannung U_i proportional zur zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses Φ_M ist:

$$U_i \sim \frac{d\Phi_M}{dt} \quad (5.3)$$

Die Spannung U_i , die durch die Änderung des magnetischen Flusses entsteht, nennt man **Induktionsspannung**. Man sagt, die Spannung U_i wird **induziert**. Den Vorgang, dass eine Spannung induziert wird, bezeichnet man als **magnetische Induktion**. Man kann den magnetischen Fluss durch eine Leiterschleife (oder Spule) auch auf andere Art verändern, ohne den räumlichen Abstand von Magneten und Spule zu verändern. So kann man z.B. die Leiterschleife in dem Magnetfeld drehen. Verwendet man anstelle des Permanentmagneten einen Elektromagneten, kann man das Magnetfeld \vec{B} und damit den magnetischen Fluss Φ_M zeitlich ändern, indem man den Strom I durch den Elektromagneten zeitlich verändert, sofern man Spule und Elektromagnet dabei in Ruhe lässt. In allen diesen Fällen wird durch die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses Φ_M eine Spannung $U_i \sim \frac{d\Phi_M}{dt}$ induziert.

Deutung 2:

Wir können die magnetische Induktion auch mit Hilfe der LORENTZ-Kraft (siehe Abschnitt 4.5, Seite 149) erklären:

Betrachten wir die Situation aus Versuch 2 nun aus der Sicht eines mitbewegten Beobachters: Wir können uns den mitbewegten Beobachter als einen negativ geladenen Ladungsträger (Elektron) vorstellen, da es in einem ungeladenen elektrischen Leiter ebenso viele negative wie positive Ladungsträger gibt. Auch hier wählen wir den vereinfachten Fall, dass unsere Spule nur eine Windung hat ($N = 1$). So können wir statt von einer Spule wieder von einer Leiterschleife sprechen. Wird die Leiterschleife wie in Abb. 5.2 durch das Magnetfeld des Stabmagneten bewegt, verändert sich der magnetische Fluss Φ_M durch die Leiterschleife - oder mit anderen Worten: Die „Zahl der Magnetfeldlinien“ durch die Leiterschleife verändert sich. Dies kann aber nur dadurch geschehen, dass der Leiter bei der Bewegung durch das Magnetfeld Magnetfeldlinien durchquert. Es können hier also Feldlinien und Leitergeschwindigkeit \vec{v} nicht die gleiche Richtung haben, da sonst ein Überqueren unmöglich wäre. Das magnetische Feld hat daher auch eine Vertikalkomponente \vec{B}_\perp bzgl. \vec{v} , so dass hier eine LORENTZ-Kraft auf den geladenen Beobachter wirkt. Formal bedeutet das:

$$\vec{B} = \vec{B}_\parallel + \vec{B}_\perp \quad (5.4)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_L = -e\vec{v} \times \vec{B} \quad (5.5)$$

$$= -e\vec{v} \times (\vec{B}_\parallel + \vec{B}_\perp) \quad (5.6)$$

$$= -e\vec{v} \times \vec{B}_\parallel - e\vec{v} \times \vec{B}_\perp \quad (5.7)$$

Wegen $\vec{v} \parallel \vec{B}_\parallel$ gilt $-e\vec{v} \times \vec{B}_\parallel = 0$

$$\Rightarrow \vec{F}_L = -e\vec{v} \times \vec{B}_\perp \quad (5.8)$$

oder betraglich

$$F_L = e v B_\perp \quad (5.9)$$

Die Richtung von \vec{F}_L zeigt entlang des Leiters. Diese LORENTZ-Kraft hat aber genau die gleiche Wirkung auf die Ladung wie eine elektrische Kraft $\vec{F}_E = -e\vec{E}$, die entlang des Leiters wirkt. Interpretieren wir nun die Kraft auf den geladenen Beobachter als elektrische Kraft, muss wegen $\vec{F} = -e\vec{E}$ ein elektrisches Feld vorliegen, das in Richtung des Leiters ausgerichtet ist ($\vec{E} \parallel d\vec{l}$). Da entlang der gesamten Leiterschleife

$$\vec{E} \parallel d\vec{l} \quad (5.10)$$

gilt, muss über der Leiterschleife mit Radius r eine Spannung U_i anliegen:

$$U_i = \oint_{\text{Leiter-
schleife}} \vec{E} d\vec{l} = \int_0^{2\pi r} E dl \quad (5.11)$$

$$U_i = 2\pi r E \quad (5.12)$$

5.1.1 Quantitative Herleitung des Induktionsgesetzes

Bisher haben wir uns mit der Frage beschäftigt, warum in Versuch 5.1 eine Spannung induziert wird. Hier haben wir zwei plausible Erklärungen gefunden, wobei wir in „Deutung 1“ eine Proportionalität zwischen induzierter Spannung U_i und der zeitlichen Änderung $\frac{d\Phi_M}{dt}$ von Φ_M festgestellt haben.

$$U_i = k \cdot \frac{d\Phi_M}{dt} \quad (5.13)$$

Eigentlich haben wir diese Proportionalität nur anhand von Messergebnissen vermutet. Dies ist aber noch kein vollständiges Induktionsgesetz, da noch die Proportionalitätskonstante k offen bleibt. In „Deutung 2“ konnten wir unser Experiment über die schon bekannte LORENTZ-Kraft erklären. Im Folgenden wollen wir nun das Induktionsgesetz herleiten, indem wir uns beide Deutungen zunutze machen. Das Induktionsgesetz soll die Proportionalität von U_i und $\frac{d\Phi_M}{dt}$ beinhalten (Deutung 1). Die Proportionalitätskonstante beschaffen wir uns über die LORENTZ-Kraft (Deutung 2). Führen wir gedanklich das in Abb. 5.3 abgebildete Experiment durch: Eine rechteckige Leiterschleife mit einem Spannungsmesser wird mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (5.14)$$

senkrecht so durch ein scharf begrenztes homogenes Magnetfeld bewegt, dass die Rechteckseiten der Länge b parallel und die verbleibenden zwei Rechteckseiten mit der Länge l senkrecht zur Bewegungsrichtung \vec{v} der Leiterschleife stehen. In Abb. 5.3 zeigen die Magnetfeld-Vektoren \vec{B} aus der Papierebene heraus. Dies ist symbolisiert durch \odot . Die Feldlinien des B -Feldes verlaufen nur durch den Anteil $A(t) = s(t)l$ der gesamten Fläche $F = bl$, die von dem Leiter eingeschlossen wird. Also trägt auch nur $A(t) = s(t)l$ zum magnetischen Fluss Φ_M durch die Fläche $F = bl$ bei. Der magnetische Fluss lässt sich in diesem Gedankenexperiment sehr leicht berechnen, da die \vec{B} -Feld-Vektoren überall

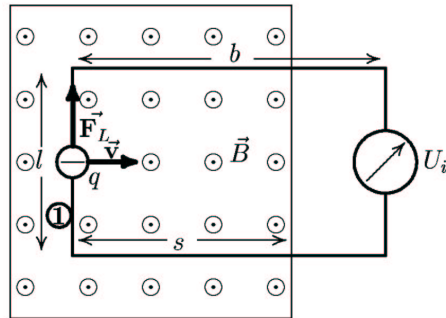


Abbildung 5.3: Eine rechteckige Leiterschleife wird durch ein scharf begrenztes homogenes Magnetfeld gezogen, das senkrecht aus der Papierebene herauszeigt. An den Enden der Leiterschleife lässt sich mit einem Spannungsmesser eine Spannung U_i messen. Diese lässt sich durch die LORENTZ-Kraft erklären, die auf eine Ladung innerhalb des Leiters wirkt.

senkrecht auf $A(t)$ stehen und dort wegen der Homogenität räumlich konstant sind:

$$\vec{B} \parallel d\vec{A} \quad (5.15)$$

$$\Rightarrow \Phi_M = \iint_{A(t)} \vec{B} d\vec{A} = \iint_{A(t)} B dA = B A(t) \quad (5.16)$$

$$= B l s(t) \quad (5.17)$$

Die induzierte Spannung U_i ist der zeitlichen Änderung $\frac{d\Phi_M}{dt}$ des magnetischen Flusses proportional:

$$U_i \sim \frac{d\Phi_M}{dt} \quad (5.18)$$

$$\Leftrightarrow U_i = k \frac{d\Phi_M}{dt} \quad (5.19)$$

$$\stackrel{(5.17)}{\Rightarrow} U_i = k \frac{d}{dt}(B l s(t)) \quad (5.20)$$

$$= k B l \frac{d}{dt} s(t) \quad (5.21)$$

$$\stackrel{(5.14)}{\Rightarrow} U_i = k B l v \quad (5.22)$$

Die LORENTZ-Kraft wirkt zwar auf alle Ladungsträger innerhalb des Magnetfeldes, kann aber nur auf dem Leiterstück 1 Ladungen verschieben. Wegen

$$F_L = q v B \stackrel{!}{=} F_E = q E \quad (5.23)$$

$$\Rightarrow E = v B \quad (5.24)$$

$$\Rightarrow U_i = E l = B l v \quad (5.25)$$

Der Vergleich von (5.22) und (5.25) zeigt, dass $|k| = 1$ sein muss. Das Vorzeichen von k lässt sich mit energetischen Überlegungen klären: ersetzen wir den Spannungsmesser in Abb. 5.3 durch einen OHMSchen Widerstand R , so wird ein Strom

$$I = \frac{U}{R} \quad (5.26)$$

fließen, und im Widerstand R wird eine Leistung $P = UI$ umgesetzt. Auf den Strom I wirkt innerhalb des Magnetfeldes die LORENTZ-Kraft, die der Bewegungsrichtung entgegenwirken muss, da sie sonst der Bewegung durch das Magnetfeld mithelfen würde, also positive mechanische Arbeit verrichten würde, während sie in R positive elektrische Arbeit leisten würde. Damit hätten wir ein Perpetuum Mobile, das es aus energetischen Gründen nicht geben kann. Der Strom bewirkt also eine LORENTZ-Kraft, die der Bewegung und damit $\frac{d\Phi_M}{dt}$ entgegenwirkt (LENZsche Regel).

<p>LENZsche Regel: Die Induktionsspannung und der Strom, den sie hervorruft, sind stets so gerichtet, dass sie ihrer Ursache entgegenwirken.</p>	(5.27)
---	--------

Aus diesem Grunde schreibt man ein negatives Vorzeichen in das Induktionsgesetz:

<p>Induktionsgesetz: Eine zeitliche Änderung $\frac{d\Phi_M}{dt}$ des magnetischen Flusses Φ_M induziert eine Spannung</p> $U_i = -\frac{d\Phi_M}{dt}$	(5.28)
--	--------

5.1.2 Leistungsbilanz der Induktion

Hier berufen wir uns wieder auf das in Abschnitt 5.1.1 vorgestellte Experiment. Bewegen wir die Leiterschleife in der Zeit dt um ein Stück ds , so leisten wir die mechanische Arbeit $dW = F_L ds$ gegen die LORENTZ-Kraft. Die mechanische Leistung ist per Definition

$$P_{\text{mech}} = \frac{dW}{dt} = F_L \frac{ds}{dt} \stackrel{(5.14)}{=} F_L v. \quad (5.29)$$

In Abschnitt 4.3 auf Seite 156 hatten wir gesehen, dass LORENTZ-Kraft \vec{F}_L und Strom \vec{I}_i den Zusammenhang $\vec{F}_L = l \vec{I}_i \times \vec{B}$ (4.29) haben.

$$\text{Aus } \vec{I}_i \perp \vec{B} \text{ folgt } F_L = l I_i B. \quad (5.30)$$

Wegen

$$F_L = l I_i B \quad \text{und} \quad U_i = B l v \Leftrightarrow v = \frac{U_i}{B l} \quad (5.31)$$

gilt

$$P_{\text{mech}} = F_L v = l I_i B \frac{U_i}{B l} = I_i U_i \quad (5.32)$$

Wie wir in (3.18) auf Seite 95 gesehen haben, ist $P_{\text{el}} = I U$ gleich der elektrischen Leistung in einem Verbraucher, an dem eine Spannung U anliegt und durch den ein Strom I fließt. Damit gilt:

$$P_{\text{mech}} = I_i U_i = P_{\text{el}} \quad (5.33)$$

Offensichtlich wird die mechanische Leistung vollständig in elektrische Leistung umgewandelt.

5.2 Allgemeine Formulierung des Induktionsgesetzes

In Abschnitt 5.1.1 konnten wir über die LORENTZ-Kraft erklären, dass eine Spannung U_i induziert werden muss, wenn wir eine Leiterschleife durch ein Magnetfeld bewegen. In diesem Fall konnten wir auch den Zusammenhang $U_i = -\frac{d\Phi_M}{dt}$ mit dem magnetischen Fluss aus der LORENTZ-Kraft herleiten. Wie wir in Abschnitt 5.1 (Seite 183) schon erwähnt hatten, kann man den magnetischen Fluss Φ_M aber auch auf andere Weise zeitlich ändern. Lässt man die Leiterschleife ruhen und verändert stattdessen das Magnetfeld \vec{B} , so wird auch hier der magnetische Fluss Φ_M zeitlich verändert. Sogar hier wird eine Spannung induziert, obwohl wir das Phänomen nicht mit schon Bekanntem (wie der LORENTZ-Kraft) erklären können.

Leiter wird bewegt:

$$U_i = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -\frac{d}{dt}(B A) = -B \frac{dA}{dt} \rightarrow \text{bewegter Leiter} \rightarrow \text{LORENTZ}$$

Magnetfeld wird verändert:

$$U_i = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -\frac{d}{dt}(B A) = -A \frac{dB}{dt} \rightarrow \text{nicht auf Bekanntes zurückzuführen}$$

Betrachten wir jetzt den zweiten Fall, dass die Leiterschleife ruht, und der magnetische Fluss Φ_M durch eine zeitliche Änderung des Magnetfeldes $\vec{B}(x, y, z, t)$ verändert wird. Das Magnetfeld müssen wir mit Hilfe eines Elektromagneten erzeugen, denn so können wir die Stärke des B -Feldes über den Strom I durch den Elektromagneten zeitlich verändern.