gilt. Für $v^2 \ll c^2$ ist die elektrische COULOMB-Kraft F' in S' gleich der magnetischen LORENTZ-Kraft F in S. Für große v^2 muss man die LORENTZ-Transformation der Kraft berücksichtigen. Diese ist gerade (siehe Theorie)

$$F' = \frac{F}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F\,\gamma. \tag{4.116}$$

Damit stimmen beide Kräfte exakt überein. Obwohl wir mit diesem Gedankenexperiment noch keine vollständige Theorie aufgebaut haben, die Elektizität und Magnetismus vereinheitlicht, haben wir in diesem Beispiel gezeigt, dass die grundlegend verschieden erscheinenden Kraftgesetze (LORENTZ-Kraft und COULOMB-Kraft) durch den Wechsel der Systeme das gleiche Phänomen richtig beschreiben können. Im Gegensatz zur Mechanik erlaubt uns die Elektrodynamik schon bei kleinen Geschwindigkeiten in der Größenordnung $\approx 1\mathrm{cm\,s^{-1}}$, relativistische Effekte zu beobachten.

Zusammenfassung:

- Magnetische und elektrische Erscheinungen sind untrennbar miteinander verknüpft.
- Magnetische und elektrische Felder sind vom Bezugssystem abhängig. Sie zeigen ein gemeinsames Transformationsverhalten (siehe Vorlesung „theoretische Elektrodynamik“: elektromagnetischer Feldtensor).
- In der Regel liegen beide Felder vor (elektrisches und magnetisches). Die allgemeine Kraft ist dann
$$\vec{F} = q\,\vec{E} + q\,\vec{v}\times\vec{B} \tag{4.117}$$
- Beim Übergang von S nach S' müssen alle Größen transformiert werden. Einzige Invariante ist die Ladung.

4.6 Der HALL-Effekt

4.6.1 Klassischer HALL-Effekt

Der HALL-Effekt wurde 1880 von EDWIN H. HALL entdeckt: Halten wir einen stromdurchflossenen elektrischen Leiter so in ein Magnetfeld, dass die Feldlinien senkrecht auf ihm stehen, so wirkt auf die fließenden Ladungsträger (bei Metallen sind dies Elektronen) die LORENTZ-Kraft

$$\vec{F}_L = q\cdot\vec{v}\times\vec{B} = -e\vec{v}\times\vec{B} \tag{4.118}$$

(siehe Ausdruck (4.5), Seite 149). Diese bewirkt, dass die Ladungsträger zur Seite getrieben werden. Es findet so eine Trennung von bewegten und nicht bewegten Ladungen statt. Dadurch baut sich aber ein elektrisches Feld $\vec{E}_H$ auf, das auf die Ladungsträger die elektrostatische Kraft

$$\vec{F}_E = q \cdot \vec{E}_H \tag{4.119}$$
$$(= -e \cdot \vec{E}_H \text{ bei Metallen}) \tag{4.120}$$

ausübt. Es wird sich ein Kräftegleichgewicht einstellen, in dem F_L und F_E betraglich gleich sind, aber entgegengesetzte Richtungen haben. Aus (4.118) und (4.120) folgt damit:

$$\vec{F}_L = -\vec{F}_E \Rightarrow -e\vec{v} \times \vec{B} = e\vec{E}_H \tag{4.121}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}_H = -\vec{v} \times \vec{B} = \vec{B} \times \vec{v}} \tag{4.122}$$

Das Interessante daran ist, dass bei gleicher Stromrichtung und gleichem magnetischen Feld sowohl positive als auch negative Ladungsträger in die gleiche Richtung beschleunigt werden, sofern sie eine Driftgeschwindigkeit $\vec{v}_D$ haben und so zum Stromfluss beitragen. Das geht sowohl aus dem Ausdruck (4.122), der nicht von der Ladung q und deren Vorzeichen abhängt, als auch aus den Abbildungen 4.17 (a) und (b) hervor.
Betrachten wir nun den allgemeinen Fall, dass sowohl positive als auch negative Ladungen

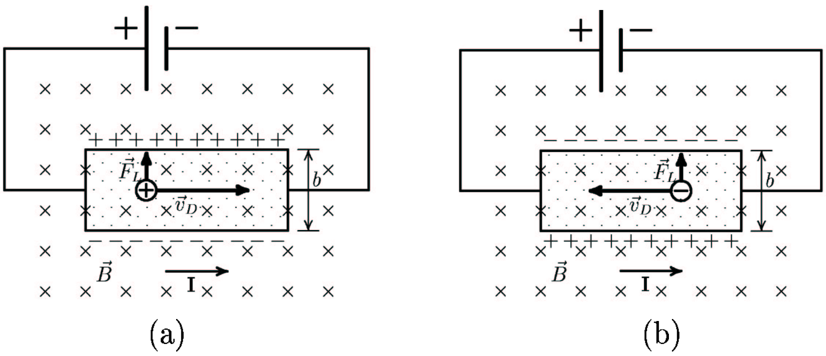

Abbildung 4.17: HALL-Sonde einmal mit positiven und einmal mit negativen Ladungsträgern. Bei gleichem B-Feld und gleicher Stromrichtung werden sowohl positive als auch negative Ladungsträger in die gleiche Richtung abgelenkt.

zum Stromfluss beitragen können. Dies ist z.B. in Elektrolyten oder Halbleitern der Fall. Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ in 4.122 wird nun durch die Driftgeschwindigkeit $\vec{v}_D$ der Ladungsträger ersetzt. Der Strom $\vec{I}$ innerhalb des Leiters steht mit der Driftgeschwindigkeit $\vec{v}_D$ in folgendem Zusammenhang:

$$\vec{I} = qnA\vec{v}_D \tag{4.123}$$

$n = \frac{N}{V}$ ist die Ladungsträgerdichte, die Anzahl N der mit $\vec{v}_D$ bewegten Ladungsträger pro Volumen V. $A = b\,d$ ist der Querschnitt des Leiters. Setzen wir (4.123) in (4.122) ein so folgt (ab hier nur noch betraglich):

$$
\begin{aligned}
E_H &= \frac{B\,I}{n\,q\,A} &\quad (4.124)\\
\Leftrightarrow U_H &= E_H \cdot b = \frac{B\,I\,b}{n\,q\,A} = \frac{1}{n\,q}\frac{B}{d}I &\quad (4.125)
\end{aligned}
$$

U_H ist diejenige Spannung, die man zwischen den beiden Seiten des Leiters messen kann. Sie wird als **HALL-Spannung** bezeichnet. Da die Driftgeschwindigkeiten $\vec{v}_D$ innerhalb von Leitern i.d.R. sehr klein sind (um ca. $1\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$), ist die HALL-Spannung U_H auch bei starken Magnetfeldern sehr klein. Den Ausdruck $\frac{1}{n\,q}\frac{B}{d}$ aus 4.125 wird als **HALL-Widerstand** R_H bezeichnet.

$$
R_H = \frac{1}{n\,q}\frac{B}{d} \quad (4.126)
$$

Damit lässt sich 4.125 in der Form des OHMschen Gesetzes darstellen:

$$
U_H = R_H \cdot I \quad (4.127)
$$

Den Bruch $\frac{1}{n\,q}$ bezeichnet man als **HALL-Koeffizient** A_H.

$$
A_H := \frac{1}{n\,q} \quad (4.128)
$$

Liegen sowohl positive als auch negative Ladungsträger vor (wie z.B. in Elektrolyten), so haben sie jeweils eigene Ladungsträgersdichten n_+ bzw. n_-. Der HALL-Koeffizient, ausgedrückt durch n_+ und n_-, ist dann:

$$
A_H := \frac{1}{n\,q} = \frac{1}{e(n_+ - n_-)} \quad (4.129)
$$

Gilt $A_H < 0$, so wird der elektrische Strom I (überwiegend) von durch den Leiter fließenden negativen Ladungsträgern gebildet. Ist $A_H > 0$, so besteht der Strom I überwiegend aus positiven bewegten Ladungen. Der Fall $A_H = 0$ kann bedeuten, dass weder positive noch negative Ladungen fließen (damit würde natürlich auch der Strom I verschwinden), oder, dass $n_+ = n_-$ ist. Letzteres heißt, dass keine HALL-Spannung gemessen werden kann, obwohl ein Strom I fließt.
Beispiele für HALL-Koeffizienten:

$$
A_H(\mathrm{Bi}) = 5 \cdot 10^{-7}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{A\,s}},\; A_H(\mathrm{Ge}) = 10^{-3}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{A\,s}}
$$

Anwendungen

- Bei bekanntem Magnetfeld kann man durch Messung der HALL-Spannung U_H die Ladungsträgerdichten n_+ und n_- bestimmen.
- Falls der HALL-Koeffizient A_H bekannt ist, kann ein solcher Leiter als **HALL-Sonde** zum Ausmessen von Magnetfeldern dienen.

Als Beispiel wollen wir die HALL-Spannung U_H für eine Kupfer-HALL-Sonde abschätzen. Nehmen wir an, es liegen folgende Werte für Strom, Magnetfeldstärke, Leiterdicke und Ladungsträgerdichte vor:

$$\begin{aligned} I &= 1\text{A}, \qquad d = 10\mu\text{m} = 10^{-5}\text{m}, \\ B &= 1\text{T}, \qquad \text{Cu} : n \approx 6 \cdot 10^{22}\text{cm}^{-3} = 6 \cdot 10^{28}\text{m}^{-3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad U_H = \frac{1\text{T} \cdot 1\text{A}}{6 \cdot 10^{28}\text{m}^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\text{C} \cdot 10^{-5}\text{m}} \approx 10^{-5}\text{V} \qquad (4.130)$$

4.6.2 Quanten-HALL-Effekt

Der Quanten-HALL-Effekt ist eine der jüngsten Entdeckungen in der Physik. Er wurde 1980 von KLAUS VON KLITZING entdeckt, wofür er 1985 den Nobelpreis erhielt. Die genaue Erklärung dieses Effekts würde weit über den Stoff des zweiten Semesters hinaus führen, so dass wir uns hier nur auf eine kurze Beschreibung des Phänomens beschränken. In Abschnitt 4.6.1 hatten wir festgestellt, dass der HALL-Widerstand R_H proportional zum umgebenden Magnetfeld ist. KLAUS VON KLITZING belegte experimentell, dass der HALL-Widerstand R_H bei sehr niedrigen Temperaturen ($T \lesssim 1\text{K}$), starken Magnetfeldern und dünnen HALL-Sonden quantisiert ist. Es können sich die Elektronen jetzt nur noch 2-dimensional auf vorgegebenen Niveaus (Kreisen) bewegen. Diese Kreisradien sind allerdings quantisiert, was eine Quantisierung des HALL-Widerstand R_H zur Folge hat. Trägt man in einem Diagramm R_H gegen B auf, so kann man einen stufenförmigen Kurvenverlauf erkennen, der die Ursprungsgrade des klassischen HALL-Effekts umgibt. Mögliche Werte für den HALL-Widerstand sind

$$\begin{aligned} R_H &= \frac{h}{n\,e^2}, \; n = 1, 2, 3... && (4.131) \\ &= \frac{R_K}{n} && (4.132) \end{aligned}$$

wobei $h \approx 6,626 \cdot 10^{-34}\text{J s}$ das PLANCKsche Wirkungsquantum und $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}$ die Elementarladung sind. R_K wird als **VON-KLITZING-Konstante** bezeichnet. Sie hat den

Wert

$$\boxed{R_K = \frac{h}{e^2} = 25813\Omega} \tag{4.133}$$

Seit 1990 wird die SI-Einheit OHM ($= \Omega$) des elektrischen Widerstandes R über die VON-KLITZING-Konstante definiert.