- **AMPÈREsches Gesetz:** Fließt durch einen beliebigen geschlossenen Weg S ein Strom I, so gilt für das Linienintegral von $\vec{B}$ entlang des Weges S:

$$\oint_S \vec{B}\mathrm{d}\vec{r} \;=\; \mu_0 I \tag{4.91}$$

- **BIOT-SAVARTsches Gesetz:** Der Beitrag $\mathrm{d}\vec{B}(\vec{r}_0)$ zum magnetischen Feld $\vec{B}(\vec{r}_0)$, das ein Leiterstück verschwindender Dicke mit der Länge $\mathrm{d}\vec{l}$ erzeugt, beträgt am Ort $\vec{r}_0$ (Bezugspunkt)

$$\mathrm{d}\vec{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} \tag{4.92}$$

  Hier ist $\vec{r}$ der relative Ortsvektor, der von $\mathrm{d}\vec{l}$ auf den Bezugspunkt zeigt.
  Für Leiter endlicher Dicke geht die obige Form des BIOT-SAVARTschen Gesetzes in die allgemeine Form über:

$$\mathrm{d}\vec{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{j}\times\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V \tag{4.93}$$

- Permanentmagnete bestehen aus vielen mikroskopisch kleinen Ringströmen.

4.5 Relativität elektrischer und magnetischer Kräfte

Wie die bereits behandelten Phänomene dieses Kapitels zeigen, sind Elektrizität und Magnetismus keine voneinander unabhängigen Erscheinungen: Wir hatten gesehen, dass bewegte elektrische Ladungen magnetische Felder erzeugen, und dass umgekehrt magnetische Felder Kräfte auf bewegte Ladungen ausüben. Später werden wir noch sehen, dass auch magnetische Felder elektrische Felder erzeugen können und umgekehrt. Der daraus resultierende Wunsch, beide Erscheinungen in eine Theorie zu fassen, ist deshalb nicht unberechtigt. Dem Schotten JAMES CLERK MAXWELL ist es 1860 tatsächlich geglückt, den Magnetismus und die Elektrizität in einer Theorie zu vereinheitlichen, die sich mathematisch durch die vier MAXWELL-Gleichungen darstellen lässt. Als zu Anfang des 20. Jh. der Relativitätsbegriff aufkam, stellte sich heraus, dass sich Magnetismus und Elektrizität nicht nur gegenseitig beeinflussen, sondern dass sie tatsächlich ein und dasselbe sind. Erstaunlicherweise sind die vor der Kenntnis der Relativitätstheorie aufgestellten MAXWELL-Gleichungen bereits relativistisch, so dass die Elektrodynamik keiner Modifikation bedurfte, wie es bei der Mechanik der Fall war.
Wir wollen nicht die komplette Theorie des relativistischen Elektromagnetismus aufstellen, was wir ohnehin mit unseren bisherigen Kenntnissen nicht könnten. Damit müssen wir bis zur Vorlesung „theoretische Elektrodynamik“ warten. Wir wollen stattdessen an

einem einfachen Beispiel zeigen, dass, je nach Wahl des Bezugssystems, die LORENTZ-Kraft auch als COULOMB-Kraft aufgefasst werden kann:
Betrachten wir wieder die zwei unendlich langen, geraden Leiter aus Versuch 4.3, die parallel zueinander angeordnet sind (siehe Abb. 4.14). Wie wir in Versuch 4.3 gesehen

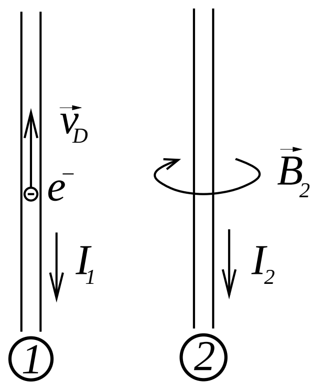

Abbildung 4.14: Zwei parallele unendlich lange, gerade Leiter

haben, bewirkt der Strom in Draht 2 eine Kraft auf den Draht 1. Es gibt nun zwei Möglichkeiten diese Kraft zu interpretieren:

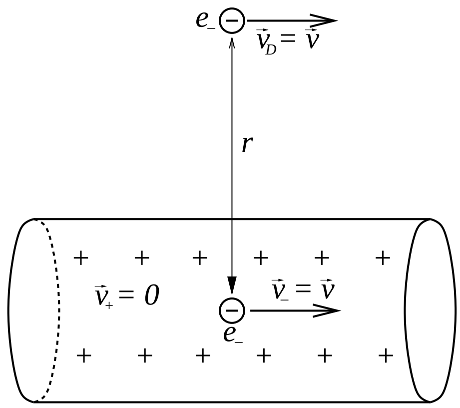

Abbildung 4.15: Leiter aus Sicht des Laborsystems S, in dem sich die Leitungselektronen bewegen

In S: Betrachten wir die Situation aus dem Laborsystem S, das ein Inertialsystem sei. Der Strom I_2 erzeugt ein Magnetfeld $\vec{B}_2$, das ringförmig um den Leiter 2 verläuft. $\vec{B}_2$ wiederum übt im Leiter 1 eine LORENTZ-Kraft auf die Leitungselektronen e^- aus. Ist $\vec{v}_D$ die Driftgeschwindigkeit der Elektronen, So ist diese Kraft

$$\vec{F}_L = -e\,\vec{v}_D \times \vec{B} \tag{4.94}$$

Die anziehende Kraft

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{r} \tag{4.95}$$

zwischen den beiden Leitern ist dann, wie wir in Abschnitt 4.3 gesehen haben, eine Folge der LORENTZ-Kraft.
Gehen wir davon aus, dass der Draht 2 im Laborsystem S elektrisch neutral sei, d.h. die Ladungsdichte ϱ verschwindet ($\varrho = 0$). Die Ladungsdichte ϱ von Draht 2, die in S gemessen wird, setzt sich zusammen aus der positiven Ladungsdichte ϱ_+ der ruhenden, positiv geladenen Gitteratome und der Ladungsdichte ϱ_- der negativen Ladungsträger (Leitungselektronen), die sich mit $\vec{v}_- = \vec{v}$ relativ zu S bewegen. Es gilt also

$$\varrho = \varrho_+ + \varrho_- = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{außerhalb des Drahtes} \qquad E = 0. \tag{4.96}$$

In S besteht daher die Kraft, die auf die bewegte Ladung e^- wirkt, allein aus der LORENTZ-Kraft

$$\vec{F} = -e\,\vec{v} \times \vec{B}. \tag{4.97}$$

$$\text{mit} \qquad B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{r} \qquad \text{und} \qquad \mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0\, c^2} \tag{4.98}$$

Es folgt für den Betrag von $\vec{F}$:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{2I_2}{r}ev \tag{4.99}$$

Der Strom I_2 hängt mit der Ladungsträgerdichte ϱ_- nach (3.11) wie folgt zusammen:

$$j_2 = -n\,e\,v \qquad \Rightarrow \qquad I_2 = j_2\,A = -n\,e\,A\,v = \varrho_-\,A\,v \tag{4.100}$$

wobei n die Ladungsträgerdichte und A der Leiterquerschnitt sind. Daher folgt für die Kraft F

$$F = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2}2\varrho_-\frac{Av^2}{r}. \tag{4.101}$$

In S': Begeben wir uns nun in das Ruhsystem S' eines Leitungselektrons e^- des Stromes I_1. Da sich das Leitungselektron e^- mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}_D$ bzgl. S bewegt, ist S' ebenfalls ein Inertialsystem. Das Leitungselektron e^- hat im System S' die Geschwindigkeit $\vec{v}'_D = 0$. Daher muss die LORENTZ-Kraft, die proportional zur Geschwindigkeit ist, verschwinden ($\vec{F}'_L = 0$). Dennoch muss nach wie vor die gleiche Kraft auf das Leitungselektron e^- in Richtung von Leiterdraht 2 wirken. Woher

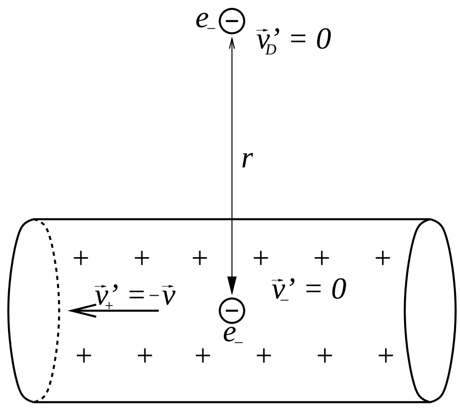

Abbildung 4.16: Leiter aus Sicht des mit den Leitungselektronen bewegten Systems S'. Hier bewegen sich die positiv geladenen Gitteratome des Leiters.

kommt diese Kraft?
Da wir die gleiche Driftgeschwindigkeit $\vec{v}_D$ in beiden Leitern voraussetzen, befinden sich in S' auch alle negativen Ladungsträger in Leiter 2 in Ruhe. Es gilt also $\vec{v}'_- = 0$. Der Strom I_2 wird jetzt durch die positiv geladenen Gitteratome gebildet, die sich bzgl. S' mit der Geschwindigkeit $\vec{v}'_+ = -\vec{v}$ bewegen. Nach dem Ladungserhaltungssatz (1.2) ist die Summe aller Ladungen konstant. Es gilt darüberhinaus sogar: **Ladungen sind relativistisch invariant**, d.h. Ladungen werden in allen Inertialsystemen als gleich groß beobachtet. Sei nun die Ladung Q_+ gleichmäßig über ein Leiterstück der Länge L_0 (gemessen in S) verteilt, so gilt:

$$Q_+ = \varrho_+ \, L_0 \, A \tag{4.102}$$

Obwohl sich die Ladung Q_+ in diesem Leiterstück wegen der Ladungserhaltung beim Übergang von S nach S' nicht ändert, ändert sich die Ladungsdichte ϱ_+ aufgrund der LORENTZ-Kontraktion: Der Querschnitt $A = A'$ ist in beiden Inertialsystemen gleich groß, da seine Abmessungen senkrecht auf $\vec{v}$ stehen. Hingegen ändert sich die Länge des Leiterstückes wegen der LORENTZ-Kontraktion, mit

$$L' = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{4.103}$$

Nach dem Ladungserhaltungssatz gilt

$$Q_+ = \varrho'_+ L' \, A = \varrho_+ L_0 \, A \tag{4.104}$$

$$\Rightarrow \quad \varrho'_+ = \varrho_+ \frac{L_0}{L'} = \gamma \, \varrho_+ \qquad \text{mit} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4.105}$$

Für die Ladungsträgerdichte der negativen Leitungselektronen müssen wir berücksichtigen, dass beim Übergang von S nach S' die LORENTZ-Kontraktion in umgekehrter Richtung erfolgt. Entsprechend gilt

$$L'_0 = \frac{L}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = L\,\gamma \tag{4.106}$$

$$\Rightarrow \quad Q_- = \varrho_-\,L\,A = \varrho'_-\,L'_0\,A \tag{4.107}$$

$$\Rightarrow \quad \varrho'_- = \varrho_- \frac{L}{L'_0} = \frac{\varrho_-}{\gamma} \tag{4.108}$$

Für die Gesamtladungsdichte $\varrho' = \varrho'_+ + \varrho'_-$ gilt dann wegen $\varrho_+ = -\varrho_-$:

$$\begin{aligned}
\varrho' &= \varrho_+\gamma + \frac{\varrho_-}{\gamma} = \varrho_+\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right) && (4.109)\\
&= \varrho_+\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) && (4.110)\\
&= \varrho_+ \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} && (4.111)
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass aus der LORENTZ-Kontraktion $\varrho' \neq 0$ für $v \neq 0$ folgt. In S' ist der Leiter 2 nun nicht mehr elektrisch neutral. Entsprechend bewirkt der Leiterdraht 2 ein von null verschiedenes elektrisches Feld E'. Dieses erhält man durch Integration über die gesamte Länge von Leiter 2 (siehe Übung 6, Aufgabe 1.a):

$$E' = \frac{\varrho' A}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,r}. \tag{4.112}$$

Das elektrische Feld E' bewirkt dann auf das in S' ruhende Leitungselektron im Leiterdraht 1 eine Kraft

$$\begin{aligned}
F' &= \frac{e\,\varrho' A}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,r} && (4.113)\\
&= \frac{e\,A}{2\,\pi\,\varepsilon_0 r}\,\varrho_+ \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} && (4.114)
\end{aligned}$$

Ein Vergleich mit dem Ausdruck (4.101) zeigt, dass

$$F' = \frac{F}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F\,\gamma \tag{4.115}$$

gilt. Für $v^2 \ll c^2$ ist die elektrische COULOMB-Kraft F' in S' gleich der magnetischen LORENTZ-Kraft F in S. Für große v^2 muss man die LORENTZ-Transformation der Kraft berücksichtigen. Diese ist gerade (siehe Theorie)

$$F' = \frac{F}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = F\,\gamma. \tag{4.116}$$

Damit stimmen beide Kräfte exakt überein. Obwohl wir mit diesem Gedankenexperiment noch keine vollständige Theorie aufgebaut haben, die Elektizität und Magnetismus vereinheitlicht, haben wir in diesem Beispiel gezeigt, dass die grundlegend verschieden erscheinenden Kraftgesetze (LORENTZ-Kraft und COULOMB-Kraft) durch den Wechsel der Systeme das gleiche Phänomen richtig beschreiben können. Im Gegensatz zur Mechanik erlaubt uns die Elektrodynamik schon bei kleinen Geschwindigkeiten in der Größenordnung $\approx 1\mathrm{cm\,s^{-1}}$, relativistische Effekte zu beobachten.

Zusammenfassung:

- Magnetische und elektrische Erscheinungen sind untrennbar miteinander verknüpft.
- Magnetische und elektrische Felder sind vom Bezugssystem abhängig. Sie zeigen ein gemeinsames Transformationsverhalten (siehe Vorlesung „theoretische Elektrodynamik“: elektromagnetischer Feldtensor).
- In der Regel liegen beide Felder vor (elektrisches und magnetisches). Die allgemeine Kraft ist dann
$$\vec{F} = q\,\vec{E} + q\,\vec{v} \times \vec{B} \tag{4.117}$$
- Beim Übergang von S nach S' müssen alle Größen transformiert werden. Einzige Invariante ist die Ladung.

4.6 Der HALL-Effekt

4.6.1 Klassischer HALL-Effekt

Der HALL-Effekt wurde 1880 von EDWIN H. HALL entdeckt: Halten wir einen stromdurchflossenen elektrischen Leiter so in ein Magnetfeld, dass die Feldlinien senkrecht auf ihm stehen, so wirkt auf die fließenden Ladungsträger (bei Metallen sind dies Elektronen) die LORENTZ-Kraft

$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = -e\vec{v} \times \vec{B} \tag{4.118}$$

(siehe Ausdruck (4.5), Seite 149). Diese bewirkt, dass die Ladungsträger zur Seite getrieben werden. Es findet so eine Trennung von bewegten und nicht bewegten Ladungen