

In unserem Versuch hieße das konkret:

$$I_1 = I_2 = 1 \text{ A}, r = 1 \text{ m} \quad (4.36)$$

$$\frac{F}{l} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N}}{2\pi \text{ m}} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (4.37)$$

4.3.1 Feldkonstanten und Maßsysteme

Später werden wir sehen, dass

$$\varepsilon_0 \cdot \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad (4.38)$$

gilt. Damit hängen die drei Naturkonstanten ε_0 , μ_0 und c voneinander ab. In dem seit dem 5. Juli 1970 gesetzlich vorgesehene SI-Maßsystem ist die Definition (4.33) das Fundament, auf dem alle Größen und deren Einheiten der Elektrodynamik aufbauen. Mit dieser willkürlichen Festlegung der Grundgröße I (Strom) und deren SI-Basiseinheit Ampère sind alle anderen elektrodynamischen Einheiten (z.B. Volt, Ohm, Farad...) eindeutig festgelegt.

Der Willkür sind hier aber keine Grenzen gesetzt. So sind auch andere Maßsysteme wie z.B. das GAUSSsche Maßsystem (cgs-System) möglich. Das GAUSSsche Maßsystem fußt auf der Definition

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 1. \quad (4.39)$$

Die Grundgröße ist hier die Ladung Q . Dieses Maßsystem findet z.T. heute noch in der theoretischen Physik Verwendung. Wir wollen aber in der Experimentalphysik das SI-System gebrauchen. In der folgenden Tabelle werden die beiden Maßsysteme gegenübergestellt:

	SI-Maßsystem	GAUSSsches Maßsystem
ε_0	$= \frac{1}{\mu_0 c^2} = \frac{10^7}{4\pi c^2}$	$\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} = 1$
μ_0	$= 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V s}}{\text{A m}}$	$= \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} = \frac{4\pi}{c^2}$
Grundgröße	Strom I	Ladung Q

4.4 Magnetisches Feld eines Strom durchflossenen Leiters

Bisher haben wir die Kräfte zwischen den beiden Leitern aus Versuch 4.3 einfach so hingenommen und über sie die Basiseinheit Ampère definiert, ohne dass wir uns über die

Ursache der Kräfte Gedanken gemacht haben. Betrachtet man den Ausdruck für die Kraft (4.34) des einen auf den anderen Leiter aus Versuch 4.3, so liegt es nahe, die Kraft durch die Existenz eines Magnetfeldes zu erklären. Vergleicht man die aus der LORENTZ-Kraft hergeleitete Beziehung (4.30) mit (4.34),

$$\frac{\vec{F}}{l} = \vec{I}_1 \times \vec{B} \xrightarrow{\vec{I}_1 \perp \vec{B}} \frac{F}{l} = I_1 \cdot B \quad (4.40)$$

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} \quad (4.41)$$

$$\xrightarrow{(4.40),(4.41)} \boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_2}{r}} \quad (4.42)$$

kann man also schließen, dass der Strom in Leiter 2 ein Magnetfeld B der Stärke $B = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}$ erzeugt, welches die Kraft auf den Leiter 1 ausübt.

Der Betrag des Magnetfeldes B eines unendlich langen, geraden Leiters, durch den ein Strom I fließt, ist

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (4.43)$$

Hierbei ist r der senkrechte Abstand zum Leiter.

Diese Gesetz ist tatsächlich eine konsistente Erklärung der in Versuch 4.3 auftretenden Kräfte. Die Richtung von \vec{B} können wir argumentativ erschließen: Die Magnetfeldlinien ($\Rightarrow \vec{B}$ -Feld-Vektoren) können auf keinen Fall parallel zum Leiter verlaufen, da sie sonst auf einen weiteren parallelen Leiter wegen

$$\frac{\vec{F}}{l} = \vec{I} \times \vec{B} \quad \text{mit} \quad \vec{B} \parallel \vec{I} \quad (4.44)$$

$$\Rightarrow \vec{I} \times \vec{B} = \frac{\vec{F}}{l} = 0 \quad (4.45)$$

keine Kraft ausüben würden. Da dies aber der Fall ist (wir haben sogar das Ampère über diese Kraft definiert), können die \vec{B} -Feldlinien nicht parallel zum Leiter verlaufen. In unserem Versuchsaufbau (Versuch 4.3) gibt es bis auf die Richtung des Leiters selbst keine weitere bevorzugte Richtung. Da die vom Leiter erzeugten Magnetfeldlinien diese Richtung nicht annehmen dürfen, müssen sie aus Symmetriegründen senkrecht zu \vec{I} verlaufen. Auch diese Einschränkung reicht noch nicht aus, um die Richtung der \vec{B} -Feld-Vektoren eindeutig ausmachen zu können. So könnten die Feldlinien z.B. ringförmig um den Leiter oder aber auch radial nach außen verlaufen. Letztere Möglichkeit ist allerdings wegen der

Eigenschaft des \vec{B} -Feldes, dass seine Feldlinien immer geschlossen sind (vgl. Abschnitt 4.1.2 auf Seite 147) ausgeschlossen. Es zeigt sich, dass nur ringförmig um den Leiter verlaufende Magnetfeldlinien möglich sind. Es stehen also die Magnetfeld-Vektoren immer sowohl senkrecht zur Richtung des Stromes \vec{I} , als auch senkrecht zum Lot \vec{r} auf den Leiter (\vec{r} zeigt vom Leiter weg). Nun bleibt nur noch das Vorzeichen offen, das man experimentell bestimmen kann. Damit können wir das Magnetfeld \vec{B} eines unendlich langen, geraden Leiters vektoriell als eine Funktion von \vec{r} aufstellen:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \vec{I} \times \vec{r}}{2\pi r^2} \quad (4.46)$$

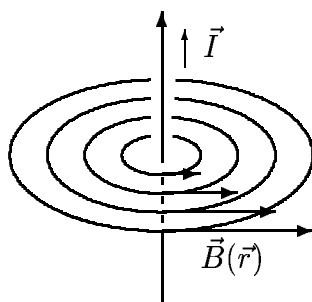


Abbildung 4.9: Das Magnetfeld eines unendlich langen, geraden Leiters

4.4.1 Experimentelle Überprüfung

Versuch 4.4

Ein elektrolytischer Leiter befindet sich in einem zylinderförmigen Gefäß, dessen Länge groß ist im Vergleich zum Radius R . Zwischen den Enden des Leiters wird eine Wechselspannung angelegt, die einen Wechselstrom hervorruft. So können wir die Stärke des Magnetfeldes senkrecht zu \vec{I} sowohl innerhalb des Leiters als auch außerhalb des Leiters messen. Durch den (sinusförmigen) Wechselstrom im Leiter wird ein sich sinusförmig veränderndes Magnetfeld erzeugt. Wie wir in Kapitel 5 „magnetische Induktion“ sehen werden, kann ein sich zeitlich veränderliches Magnetfeld eine Spannung erzeugen (man sagt: „induzieren“). Bei einem sich sinusförmig ändernden Magnetfeld wird an den Enden einer Probespule (Spule: siehe Abschnitt 4.4.3 auf Seite 163) eine Wechselspannung U induziert. Die Amplituden dieser Wechselspannung U sind proportional zu den Amplituden des Magnetfeldes. Wir können also die Abhängigkeit der Magnetfeldstärke vom Abstand r über die Induktionsspannung U

qualitativ bestimmen. Die gemessene Abhängigkeit von B und r ist in Abb. 4.10 in einem Diagramm aufgetragen. Wir beobachten, dass in der Mitte des Leiters das Magnetfeld gleich null ist und dann proportional zum Abstand r von der Mitte ansteigt, bis der Rand des elektrolytischen Leiters erreicht ist. Außerhalb des Leiters nimmt die Magnetfeldstärke proportional zu $1/r$ ab.

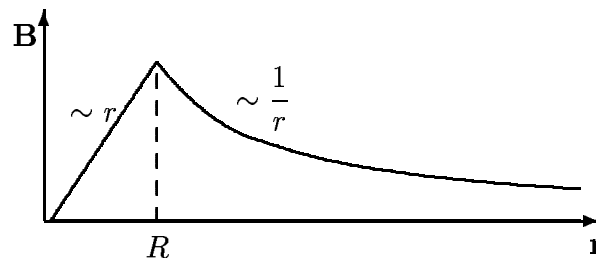


Abbildung 4.10: Magnetfeldstärke in Abhängigkeit von Abstand r zum Leiter

Der Versuch bestätigt also das Gesetz (4.46)

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}, r \geq R. \quad (4.47)$$

Die Magnetfeldstärke B hat also auf dem Rand des Leiters ($r = R$) den Wert

$$B(R) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} \quad (4.48)$$

Für $r < R$ gilt, wie wir beobachtet haben,

$$B \sim r \Leftrightarrow B(r) = kr \quad \text{für} \quad r < R. \quad (4.49)$$

Die Randbedingung

$$B(R) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} \quad (4.50)$$

muss aus Stetigkeitsgründen auch (4.49) erfüllen. Dies ist für $k = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}$ erfüllt. Die empirisch bestimmte Abhängigkeit der Magnetfeldstärke B vom Abstand r lautet also:

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}, & \text{für } r < R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & \text{für } r \geq R \end{cases} \quad (4.51)$$

4.4.2 Allgemeiner Zusammenhang zwischen \vec{B} und \vec{I}

In Kapitel 4 hatten wir gesehen, dass das elektrostatische Feld \vec{E} ein konservatives Kraftfeld ist, d.h. das $\oint \vec{E} d\vec{r} = 0$ ist. Mit anderen Worten, das Wegintegral von \vec{E} entlang einer geschlossenen Kurve ist gleich Null. Nun überprüfen wir, ob das magnetische Feld ein ähnliches Verhalten zeigt: Wählen wir als geschlossenen Weg einen Kreis, der den Radius r habe und axialsymmetrisch um den Leiter verlaufe.

$$\oint_{\text{Kreis}} \vec{B}(\vec{r}) d\vec{r} \stackrel{\vec{B}(\vec{r}) \parallel d\vec{r}}{=} \oint_{\text{Kreis}} B dr \quad (4.52)$$

Parametrisieren wir den Kreis durch den Winkel φ , folgt $dr = r \cdot d\varphi$

$$\Rightarrow \oint_{\text{Kreis}} \vec{B}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_0^{2\pi} B r d\varphi \quad (4.53)$$

$$= 2\pi r B = 2\pi r \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \mu_0 I \quad (4.54)$$

Wegen $\oint_{\text{Kreis}} \vec{B}(\vec{r}) d\vec{r} \neq 0$ ist das magnetische Feld nicht konservativ. Wie man sieht, ist der Wert $\mu_0 I$ des Ringintegrals $\oint_{\text{Kreis}} \vec{B}(\vec{r}) d\vec{r}$ unabhängig vom Radius des Kreises, den wir als Integrationsweg wählen. Sogar jedes beliebige Wegintegral der Form $\oint_{\gamma} \vec{B}(\vec{r}) d\vec{r}$ hat den Wert $\mu_0 I$, wenn γ ein geschlossener Weg ist, der den Leiter einmal einschließt (gilt also auch für nicht kreisförmige geschlossene Wege). Hierbei kann der Leiter mit dem Strom I , der von dem Weg γ eingeschlossen wird, eine beliebige Form annehmen. Es muss sich also nicht mehr um den unendlich langen, geraden Leiter handeln. Dieses Gesetz ist das AMPÈRESche Gesetz, das allgemein für beliebige Ströme gilt:

**AMPÈRESches Gesetz oder
Durchflutungsgesetz:**

$$\oint \vec{B}(\vec{r}) d\vec{r} = \mu_0 I$$

(4.55)

Das AMPÈRESche Gesetz setzt voraus, dass ein stetiger Stromfluss vorliegt, d.h. der Strom darf nicht in einem Punkt verschwinden oder aus dem nichts entstehen. Leider hilft einem das AMPÈRESche Gesetz nur in sehr einfachen Fällen bei der Berechnung des Magnetfeldes. Dazu muss das Problem entweder symmetrisch angeordnet sein, wie es beim unendlich langen, geraden Leiter der Fall ist, oder wir müssen irgendwelche vereinfachenden Annahmen über die Verteilung des Magnetfeldes machen können, wie wir es im Abschnitt 4.4.3 bei der Berechnung des Magnetfeldes in einer Zylinderspule dürfen. Mit Hilfe des AMPÈRESchen Gesetzes lässt sich auch die Proportionalität $B \sim r$ im Innern

eines Leiters erklären:

Wird der unendlich lange, gerade Leiter mit Radius R von dem Strom I_0 durchflossen, können wir eine gleichmäßig über den Leiterquerschnitt $A_0 = \pi R^2$ verteilte Stromdichte

$$j = \frac{I_0}{A_0} = \frac{I_0}{\pi R^2} \quad (4.56)$$

erwarten. Das Magnetfeld im Innern des Leiters können wir wieder über das AMPÈRESche Gesetz berechnen. Dazu wählen wir als Integrationsweg einen geschlossenen Kreisweg mit Radius $r < R$, der senkrecht zum Leiter steht und dessen Mittelpunkt auf der Leiterachse liegt. Aus Symmetriegründen wird jedes Leiterstück gleicher Länge den gleichen Beitrag zum Ringintegral liefern. Der Kreis mit dem Radius $r < R$ umschließt jetzt nur noch die Fläche $A(r) = \pi r^2$. Durch diese fließt also nur noch der Strom

$$I(r) = j A(r) = j \pi r^2 \stackrel{(4.56)}{=} I_0 \frac{r^2}{R^2} \quad (4.57)$$

$$\Rightarrow \oint_{\text{Kreis}} \vec{B} \, d\vec{r} = 2 \pi r B \stackrel{(4.55)}{=} \mu_0 I(r) \quad (4.58)$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{\mu_0 I(r)}{2 \pi r} \stackrel{(4.57)}{=} \frac{\mu_0 I_0 r}{2 \pi R^2} \quad (4.59)$$

Hiermit haben wir die in (4.51) empirisch aufgestellte Formel mit Hilfe des AMPÈRESchen Gesetzes hergeleitet.

4.4.3 Magnetfeld einer Spule (schematisch)

Die erste Anwendung des AMPÈRESchen Gesetzes ist die Berechnung des Magnetfeldes im Innern einer Zylinderspule (kurz: Spule). Eine Spule ist ein fest zu einer Helix aufgewickelter Leiterdraht, wobei die Windungen (Anzahl der Windungen ist N) sehr eng beieinander liegen (Abb. 4.11).

Fließt durch eine Spule, die im Verhältnis zu ihrem Durchmesser lang ist, ein Strom I , so wird sich im Innern der Spule ein nahezu homogenes Magnetfeld aufbauen. Eine Spule dieser Art, die aufgrund eines von außen angelegten Stromes I ein Magnetfeld erzeugt, nennt man auch Elektromagnet. Später werden wir feststellen, dass man bei gleichem Strom I ein um Zehner-Potenzen stärkeres \vec{B} -Feld erzeugen kann, wenn man in das Innere der Spule einen Eisenkern gibt (siehe Kapitel 6 „Materie im Magnetfeld“).

Wählen wir nun als Integrationsweg ein Rechteck, wie in Abb. 4.12, so kann man aus der Skizze erkennen, dass an den beiden senkrechten Wegstücken (Wegstücke 2 und 4) die Magnetfeldlinien senkrecht auf den Integrationsweg stehen (d.h. $\vec{B} \perp d\vec{r}$). Das Skalarprodukt von Magnetfeld \vec{B} und Wegelement $d\vec{r}$ verschwindet also ($\vec{B} \cdot d\vec{r} = 0$), so dass die Wegstücke 2 und 4 keinen Beitrag zum gesamten Ringintegral liefern. Das Wegstück außerhalb der Spule parallel zur Symmetrieachse der Spule (Wegstück 3) liefert ebenfalls

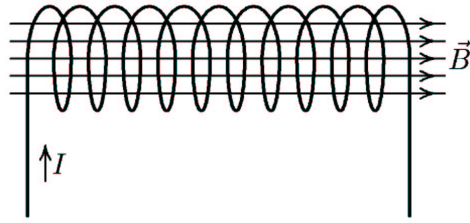


Abbildung 4.11: Zylinderspule, die von einem Strom I durchflossen wird. Der Strom erzeugt im Inneren der Spule ein nahezu homogenes Magnetfeld.

keinen Beitrag zum gesamten Ringintegral, da wir hier $\vec{B} \approx 0$ annehmen können. Es gilt also

$$\int_{\text{Weg}_2} \vec{B} d\vec{r} = \int_{\text{Weg}_3} \vec{B} d\vec{r} = \int_{\text{Weg}_4} \vec{B} d\vec{r} = 0 \quad (4.60)$$

Einzig der Teilweg 1 liefert einen Beitrag, da wir hier ein homogenes Magnetfeld erwarten, das parallel zu Weg 1 ausgerichtet ist (siehe Abb. 4.12). Wegen der Homogenität des magnetischen Feldes im Innern der Spule gilt

$$\int_{\text{Weg}_1} \vec{B} d\vec{r} = \int_{\text{Weg}_1} B dr = Br \Big|_0^l = Bl \quad (4.61)$$

Hier ist l die Länge der Spule. Ferner ist zu beachten, dass hier durch unseren geschlossenen Integrationsweg das N -fache des Stromes I durch den Leiterdraht fließt. Damit gilt nach dem AMPÈRESchen Gesetz (4.55)

$$\oint \vec{B}(\vec{r}) d\vec{r} = N\mu_0 I \quad (4.62)$$

$$\Rightarrow N\mu_0 l \stackrel{(4.61)}{=} Bl \quad (4.63)$$

$$\boxed{B = \frac{N}{l} \mu_0 I} \quad (4.64)$$

Dies ist der Betrag des Magnetfeldes im Innern einer Spule. $\frac{N}{l}$ bezeichnet man auch als **Windungszahldichte**.

Eine andere Anwendung des AMPÈRESchen Gesetzes findet sich z. B. in der Herleitung des Magnetfeldes innerhalb einer Kreisspule (Selbst).

4.4.4 Das BIOT-SAVARTSche Gesetz

In einfachen Fällen können wir durch Symmetrieüberlegungen und andere vereinfachende Annahmen das Magnetfeld Strom durchflossener Leiter über das Durchflutungsgesetz

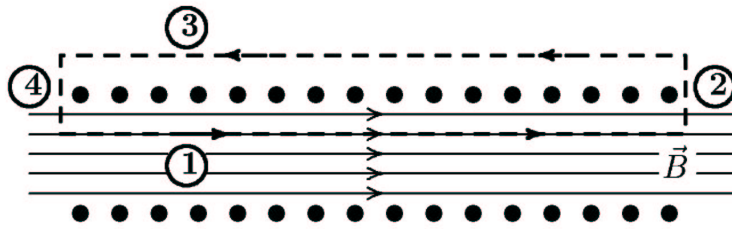


Abbildung 4.12: Geschlossener Weg zur Herleitung des Magnetfeldes in einer Spule

(AMPÈRESches Gesetz) berechnen. In den meisten Fällen versagt dieses Verfahren allerdings, da die Form des Leiters zu kompliziert ist. Wir brauchen also ein ebenfalls allgemein gültiges Gesetz zur Berechnung von Magnetfeldern, das im Gegensatz zum Durchflutungsgesetz jede beliebige Stromverteilung zulässt. Diese Bedingungen erfüllt das **BIOT-SAVARTSche Gesetz**. Mit dem BIOT-SAVARTSchen Gesetz lässt sich für einen festen Ort mit dem Ortsvektor \vec{r}_0 der (infinitesimale) Beitrag $d\vec{B}(\vec{r}_0)$ zum magnetischen Feld $\vec{B}(\vec{r}_0)$ bestimmen, der durch den Strom I in einem Leiterstück infinitesimaler Länge $d\vec{l}$ erzeugt wird. Die Richtung von $d\vec{l}$ zeigt in die Richtung des Stromflusses. Können wir den elektrischen Leiter, durch den der Strom I fließt, als unendlich dünn annehmen, nimmt das BIOT-SAVARTSche Gesetz die folgende Form an:

Das **BIOT-SAVARTSche Gesetz**
für Ströme in elektrischen Leitern
mit verschwindender Dicke :

$$d\vec{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (4.65)$$

Dabei ist \vec{r} der Ortsvektor, der von dem Leiterstück $d\vec{l}$ zu dem Bezugspunkt \vec{r}_0 zeigt, für den das magnetische Feld $d\vec{B}(\vec{r}_0)$ bestimmt werden soll. Das gesamte magnetische Feld $\vec{B}(\vec{r}_0)$ erhält man dann durch Integration über den gesamten Leiter.

Beispiel 4.1

Führen wir nun die praktische Berechnung des magnetischen Feldes \vec{B} mit Hilfe des BIOT-SAVARTSchen Gesetzes an einem Beispiel durch, das wir schon kennen: der unendlich lange, gerade Leiter (siehe Abb. 4.13). Außerdem nehmen wir an, dass der Leiter unendlich dünn sei. An dem Vektorprodukt im

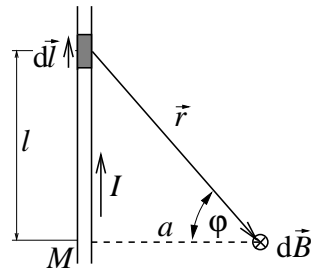


Abbildung 4.13: Skizze zur Berechnung des magnetischen Feldes eines unendlich langen, geraden Leiters mit Hilfe des BIOT-SAVARTSchen Gesetzes.

BIOT-SAVARTSchen Gesetz können wir ablesen, dass

$$d\vec{B}(\vec{r}_0) \perp d\vec{l} \quad (4.66)$$

gelten muss. Ferner liefert nur der Teil des relativen Ortsvektors \vec{r} einen Beitrag zum magnetischen Feld, der senkrecht auf $d\vec{l}$ steht. Dieser Beitrag ist für alle infinitesimalen Leiterstücke der gleiche, nämlich der senkrechte Abstand a zwischen Bezugspunkt und Leiter (siehe Abb. 4.13). Daher können wir das Vektorprodukt betraglich schreiben als

$$|d\vec{l} \times \vec{r}| = dl a \quad (4.67)$$

$$\Rightarrow dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl a}{r^3} \quad (4.68)$$

Der Abstand r hängt allerdings noch von der Integrationsvariablen l ab, da jedes einzelne Leiterstück dl einen anderen Abstand r zum Bezugspunkt hat. Um diese Abhängigkeit zu berücksichtigen, parametrisieren wir den Leiter durch den Winkel φ (siehe Abb. 4.13). Für den Abstand r gilt dann

$$r = \frac{a}{\cos \varphi} \quad (4.69)$$

Setzen wir (4.69) in (4.68) ein, folgt

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a dl}{(a/\cos \varphi)^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos^3 \varphi dl}{a^2} \quad (4.70)$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^3 \varphi dl}{a^2} \quad (4.71)$$

Der Abstand l des Leiterstückes dl zum Punkt M beträgt $l = a \tan \varphi$, wie

der Skizze (Abb. 4.13) zu entnehmen ist. Daraus folgt für dl :

$$l = a \tan \varphi \quad (4.72)$$

$$\Rightarrow \frac{dl}{d\varphi} = \frac{a}{\cos^2 \varphi} \Leftrightarrow dl = \frac{a}{\cos^2 \varphi} d\varphi. \quad (4.73)$$

Außerdem müssen wir noch die Integrationsgrenzen transformieren. Es gilt

$$l_1 = -\infty \hat{=} \varphi_1 = -\frac{\pi}{2} \quad (4.74)$$

$$l_2 = \infty \hat{=} \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \quad (4.75)$$

Nun setzen wir den Ausdruck (4.73) für dl in Gleichung (4.71) ein:

$$\Leftrightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi}{a} d\varphi \quad (4.76)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{\sin \varphi}{a} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \quad (4.77)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2}{a} \quad (4.78)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (4.79)$$

Offensichtlich ist dieser Ausdruck für das magnetische Feld des unendlich langen, geraden Leiters identisch mit dem aus (4.43).

Das BIOT-SAVARTSche Gesetz scheint also offenbar das magnetische Feld richtig zu beschreiben. Es lassen sich auf diese Weise zu jedem beliebig geformten Leiter mit verschwindender Dicke die zugehörigen magnetischen Felder berechnen. In den meisten Fällen wird zwar das Linienintegral recht kompliziert ausfallen, so dass es u.U. nicht mehr analytisch lösbar ist, jedoch kann so ein Linienintegral mit relativ wenig Aufwand auf einem Computer numerisch gelöst werden. In den Übungen werden uns noch einige einfache Beispiele für die Anwendung des BIOT-SAVARTSchen Gesetzes begegnen.

Diese Form des BIOT-SAVARTSchen Gesetzes (4.65) dient wohl gemerkt nur zur Berechnung von magnetischen Feldern, die von einem Strom durch einen Leiter mit verschwindender Dicke erzeugt werden. Die allgemeine Form des BIOT-SAVARTSchen Gesetzes lässt auch Ströme zu, die durch einen Leiter mit nicht verschwindendem Querschnitt fließen. Man betrachtet nun nicht die elektrische Stromstärke I , sondern die elektrische Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$, die außerdem noch ortsabhängig sein kann. Das Linienintegral aus (4.65)

geht dabei in ein Volumenintegral über.

**Allgemeine Form des
BIOT-SAVARTSchen Gesetzes:**

$$d\vec{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3} dV \quad (4.80)$$

Beispielsweise ließe sich das magnetische Feld \vec{B} im Innern des geraden, unendlich langen, Strom durchflossenen Leiters mit einem von null verschiedenen Radius berechnen. Das Ergebnis der Rechnung liefert dann den Ausdruck für (4.51) für das magnetische Feld.

4.4.5 Permanentmagnete

Die bisherigen Erkenntnisse über den Magnetismus haben uns gezeigt, dass wir mit Hilfe von Strömen Magnetfelder erzeugen können. Uns sind allen schon oft im Alltag aber auch in einigen bisherigen Versuchen Permanentmagnete begegnet. Wie aber können wir erklären, dass Permanentmagnete dauerhaft von einem Magnetfeld umgeben sind, ohne dass wir eine Spannungsquelle anlegen, die einen Stromfluss erzeugt? Die Antwort zu dieser Frage finden wir auf atomarer Ebene. Obwohl dies erst in Experimentalphysik IV näher besprochen wird, wissen wir sicher schon alle, dass Atome aus einem positiv geladenen Atomkern bestehen, die von negativ geladenen Elektronen umkreist werden (BOHRsches Atommodell, benannt nach dem Dänen NIELS BOHR). Diese kreisenden Elektronen stellen Ringströme dar, die ein (sehr schwaches) Magnetfeld erzeugen. Bei Permanentmagneten ist die Ausrichtung dieser Ringströme überall gleich, so dass sich deren schwache Magnetfelder zu einem u.U. starken Magnetfeld superpositionieren.

4.4.6 Zusammenfassung

- Ströme treten immer in Begleitung von Magnetfeldern auf.
- Es gibt keine magnetischen Monopole.
 \Leftrightarrow Magnetische Feldlinien sind immer geschlossene Kurven. \Leftrightarrow Magnetfelder haben weder Quellen noch Senken, d.h. durch die Oberfläche ∂V eines Volumens V führen genauso viele Magnetfeldlinien hinein wie hinaus. \Leftrightarrow

$$\iint_{\partial V} \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad \text{oder} \quad (4.81)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (3. \text{ MAXWELL-Gleichung}) \quad (4.82)$$

- Auf eine bewegte Ladung im magnetischen Feld wirkt die **LORENTZ-Kraft** \vec{F}_L :

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (4.83)$$

- Wird ein Teilchen mit der Ladung q senkrecht in ein homogenes Magnetfeld \vec{B} mit der Geschwindigkeit \vec{v} eingeschossen, so beschreibt dieses eine Kreisbahn mit Radius

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (4.84)$$

- Kraft F auf einen unendlich langen, geraden Leiterdraht, durch den ein Strom \vec{I} fließt, ist

$$\vec{F} = l \cdot \vec{I} \times \vec{B} \quad (4.85)$$

- Sind zwei unendlich lange, gerade Leiter, durch die die Ströme I_1 bzw. I_2 fließen, mit einem Abstand r zueinander parallel angeordnet, so bewirkt Leiter 1 eine Kraft $\frac{F}{l}$ auf eine Längeneinheit von Leiter 2:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} \quad (4.86)$$

$$(4.87)$$

- Die magnetische Feldkonstante ist

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad (4.88)$$

- Das SI-Maßsystem wird über die Kraftwirkung zwischen zwei Leitern definiert. Das GAUSSSche Maßsystem wird über die elektrostatische Kraftwirkung (COULOMB-Kraft) definiert.
- Ein unendlich langer, gerader Leiter, durch den ein Strom I fließt, erzeugt ein Magnetfeld der Stärke

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \vec{I} \times \vec{r}}{2\pi r^2} \quad (4.89)$$

oder betraglich

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad \text{wenn} \quad \vec{I} \perp \vec{r} \quad (4.90)$$

- **AMPÈRESches Gesetz:** Fließt durch einen beliebigen geschlossenen Weg S ein Strom I , so gilt für das Linienintegral von \vec{B} entlang des Weges S :

$$\oint_S \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 I \quad (4.91)$$

- **BIOT-SAVARTSches Gesetz:** Der Beitrag $d\vec{B}(\vec{r}_0)$ zum magnetischen Feld $\vec{B}(\vec{r}_0)$, das ein Leiterstück verschwindender Dicke mit der Länge $d\vec{l}$ erzeugt, beträgt am Ort \vec{r}_0 (Bezugspunkt)

$$d\vec{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (4.92)$$

Hier ist \vec{r} der relative Ortsvektor, der von $d\vec{l}$ auf den Bezugspunkt zeigt.

Für Leiter endlicher Dicke geht die obige Form des BIOT-SAVARTSchen Gesetzes in die allgemeine Form über:

$$d\vec{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3} dV \quad (4.93)$$

- Permanentmagnete bestehen aus vielen mikroskopisch kleinen Ringströmen.

4.5 Relativität elektrischer und magnetischer Kräfte

Wie die bereits behandelten Phänomene dieses Kapitels zeigen, sind Elektrizität und Magnetismus keine voneinander unabhängigen Erscheinungen: Wir hatten gesehen, dass bewegte elektrische Ladungen magnetische Felder erzeugen, und dass umgekehrt magnetische Felder Kräfte auf bewegte Ladungen ausüben. Später werden wir noch sehen, dass auch magnetische Felder elektrische Felder erzeugen können und umgekehrt. Der daraus resultierende Wunsch, beide Erscheinungen in eine Theorie zu fassen, ist deshalb nicht unberechtigt. Dem Schotten JAMES CLERK MAXWELL ist es 1860 tatsächlich geglückt, den Magnetismus und die Elektrizität in einer Theorie zu vereinheitlichen, die sich mathematisch durch die vier MAXWELL-Gleichungen darstellen lässt. Als zu Anfang des 20. Jh. der Relativitätsbegriff aufkam, stellte sich heraus, dass sich Magnetismus und Elektrizität nicht nur gegenseitig beeinflussen, sondern dass sie tatsächlich ein und dasselbe sind. Erstaunlicherweise sind die vor der Kenntnis der Relativitätstheorie aufgestellten MAXWELL-Gleichungen bereits relativistisch, so dass die Elektrodynamik keiner Modifikation bedurfte, wie es bei der Mechanik der Fall war.

Wir wollen nicht die komplette Theorie des relativistischen Elektromagnetismus aufstellen, was wir ohnehin mit unseren bisherigen Kenntnissen nicht könnten. Damit müssen wir bis zur Vorlesung „theoretische Elektrodynamik“ warten. Wir wollen stattdessen an