wird.

$$\oint\!\!\!\oint_{\partial V} \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{A} = 0 \quad \text{(makroskopische oder integrale Form)} \tag{4.2}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \quad \text{(mikroskopische oder differenzielle Form)} \tag{4.3}$$

Beim elektrischen Feld konnten wir die Feldstärke über die auf eine Probeladung q wirkende Kraft definieren mit

$$\vec{F} = q\vec{E} \Longleftrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \tag{4.4}$$

Dieser Ansatz schlägt allerdings für das Magnetfeld $\vec{B}$ fehl, da es keine magnetischen Ladungen gibt. Stattdessen zeigen die Versuche von OERSTED und AMPÈRE, dass ein Magnetfeld eine Kraft auf elektrische Ströme ausübt. Ein elektrischer Strom ist aber nichts anderes als ein Strom von Ladungen. Es zeigt sich, dass auf bewegte Ladungen in einem Magnetfeld eine Kraft, die LORENTZ-Kraft, wirkt.

4.2 LORENTZ-Kraft

Versuch 4.1

Es wird ein Permanentmagnet an eine BRAUNsche Elektronenstrahlröhre (siehe Abschnitt 1.21) gehalten. Es zeigt sich, dass der Elektronenstrahl senkrecht zu den vom Permanentmagneten erzeugten Feldlinien abgelenkt wird (Siehe Abb. 4.3).

Aus dem Versuch können wir schließen, dass die Ablenkung des Elektronenstrahls durch eine Kraft bewirkt wird. Diese Kraft ist offensichtlich sowohl senkrecht zur Bewegungsrichtung der Elektronen, als auch senkrecht zu den Magnetfeldlinien ($\vec{F} \perp \vec{B}, \vec{v}$). Diese Kraft heißt **LORENTZ-Kraft** die sich durch folgenden Ausdruck darstellen lässt:

$$\boxed{\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}} \tag{4.5}$$

Sie ist nach dem Physiker HENDRIK A. LORENTZ (1853-1928) benannt. Über die LORENTZ-Kraft lässt sich die **magnetische Feldstärke** $\vec{B}$ definieren:

$$\boxed{B = \frac{F}{qv}} \quad \text{mit} \quad \vec{e}_B = \vec{e}_F \times \vec{e}_v \tag{4.6}$$

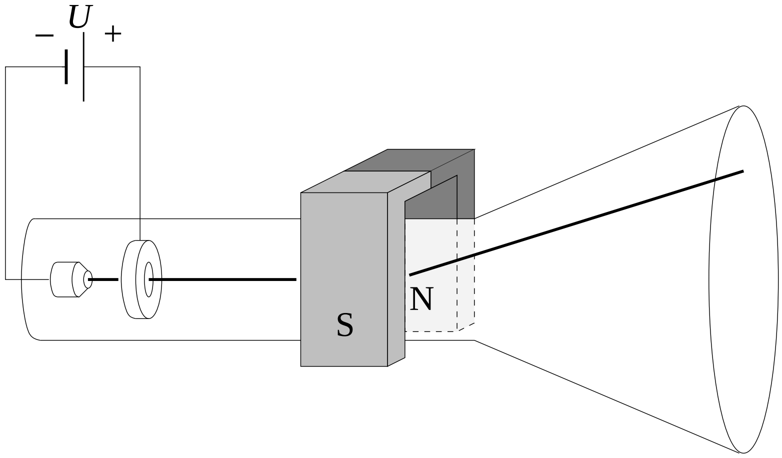


Abbildung 4.3: Der Elektronenstrahl einer Elektronenstrahlröhre wird durch das Magnetfeld eines Permanentmagneten abgelenkt

Die **Dimension des magnetischen Feldes** ist

$$[B] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C\,m\,s^{-1}}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A\,m}} = \frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{A\,m^2}} = \frac{\mathrm{A\,V\,s}}{\mathrm{A\,m^2}} = \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m^2}} = \mathrm{T} = \mathrm{Tesla} \tag{4.7}$$

Die SI-Einheit für die magnetische Feldstärke ist das Tesla, benannt nach dem amerikanischen Physiker Nicola Tesla (1856-1943). Da ein Tesla in der physikalischen Praxis schon sehr viel ist (das Erdmagnetfeld hat magnetische Feldstärken von etwa 10^{-4}T) ist noch heute die Einheit **Gauß** üblich, die sich aus dem cgs-System herleitet. Sie ist nach dem deutschen Physiker und Mathematiker Carl Friedrich Gauss (1777-1855) benannt. Es gilt

$$10^{-4}\,\mathrm{T} = 1\mathrm{G} = 1\,\mathrm{Gauß} \tag{4.8}$$

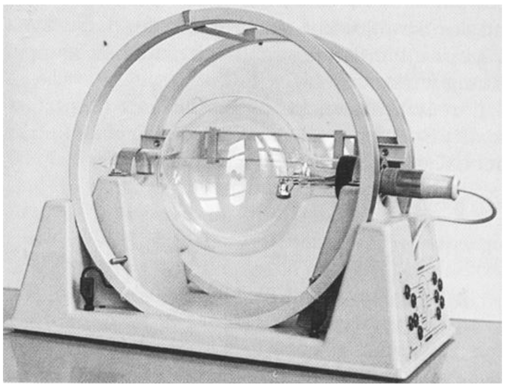
Wie beim elektrischen Feld nennt man Magnetfelder, deren Feldstärke $\vec{B}$ (innerhalb des betrachteten Systems) räumlich konstant ist (d.h. überall sind Betrag und Richtung von $\vec{B}$ gleich), **homogene Magnetfelder** (vgl. 1.37). Auch für Magnetfelder gilt wie für das elektrische Feld das Superpositionsprinzip, nach dem aus n sich überlagernden Magnetfeldern $\vec{B}_i$ mit $i \in \mathbb{N}, i \leq n$ ein Gesamtmagnetfeld

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i \tag{4.9}$$

resultiert.

Versuch 4.2

Der Versuchsaufbau besteht aus einem Fadenstrahlrohr, einem nahezu evakuierten Glaskolben, in dem ein Elektronenstrahl mit einem Elektronenbeschleuniger erzeugt wird (siehe Abb. 4.2). Ferner muss in dem Kolben ein geringer Druck eines leuchtfähigen Gases vorliegen, um den Elektronenstrahl sichtbar zu machen. Ein Elektronenbeschleuniger besteht im wesentlichen aus einer Glühkathode, die Elektronen emmitiert, und einer Beschleunigungsanode. Die ausgetretenen Elektronen werden durch eine Spannung U, die zwischen Kathode und Anode angelegt wird, beschleunigt. Damit wird den Elektronen eine kinetische Energie von $E_{kin} = e\,U$ übergeben. Mit Hilfe zweier Spulen wird ein nahezu homogenes Magnetfeld erzeugt (siehe Abschnitt 4.4.3). Wir beobachten, dass sich der Elektonenstrahl auf eine Kreisbahn senkrecht zum angelegten Magnetfeld krümmt. Je stärker das Magnetfeld, desto kleiner der Radius der Kreisbahn.



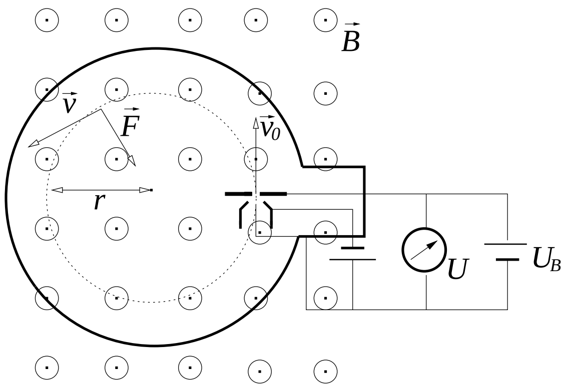


Abbildung 4.4: Fadenstrahlrohr (Foto entnommen aus [22])

Erklärung des Versuchs: Die LORENTZ-Kraft $\vec{F}_L$ wirkt immer senkrecht zur Bewegungsrichtung. Damit leistet sie keine Arbeit. Sie dient hier als Zentripetalkraft, die die Elektronen auf eine Kreisbahn zwingt. Aus dem dynamischen Kräftegleichgewicht ergibt sich durch gleichsetzen der LORENTZ-Kraft $\vec{F}_L$ mit der Zentrifugalkraft $\vec{F}_Z$:

$$|\vec{F}_L| = |\vec{F}_Z| \tag{4.10}$$

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \tag{4.11}$$

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB} \tag{4.12}$$

Die Bahngeschwindigkeit v lässt sich mit Hilfe des Radius r in die Kreisfrequenz ω umrechnen:

$$\omega = \frac{v}{r} \overset{(4.12)}{=} \frac{v}{\frac{mv}{qB}} \tag{4.13}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \omega = \frac{qB}{m} \tag{4.14}$$

Diese Kreisfrequenz ω wird **Zyklotronfrequenz** genannt. Wie wir sehen, ist sie unabhängig von der Einschussgeschwindigkeit. Aus der Beschleunigungsspannung U lassen sich mit Hilfe der Energiebeziehung $E_{kin} = e\,U$ (siehe Abschnitt 1.4.1) folgende Abhängigkeiten aufstellen:

$$eU = \frac{mv^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2}{m}eU} \tag{4.15}$$

$$\Rightarrow r \sim \frac{1}{B} \tag{4.16}$$

Wichtig:
Der Betrag des Impulses ändert sich nicht!

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}\vec{v} \parallel \vec{F} \text{ und } \mathrm{d}\vec{v} \perp \vec{B}, \vec{v} \tag{4.17}$$

$$\text{wegen } \mathrm{d}\vec{v} \perp \vec{v} \text{ folgt} \tag{4.18}$$

$$|\vec{v}| = \boldsymbol{konst} \tag{4.19}$$

Da die LORENTZ-Kraft immer senkrecht auf der Bewegungsrichtung der Ladung steht, leistet sie keine Arbeit.
Misst man den Radius der Elektronenstrahl-Kreisbahn, so kann man z.B. den Impuls der Elektronen über (4.12)

$$r = \frac{p}{q\,B} \qquad \Rightarrow \qquad p = qrB \tag{4.20}$$

bestimmen.
Was passiert aber, wenn wir ein geladenes Teilchen mit der Ladung q so in ein homogenes magnetisches Feld $\vec{B}$ einschießen, dass die Teilchengeschwindigkeit $\vec{v}$ und das Magnetfeld $\vec{B}$ keinen rechten Winkel zueinander bilden? Um diese Frage beantworten zu können, betrachten wir das Problem vektoriell: Seien

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

Dann wirkt auf das geladene Teilchen die LORENTZ-Kraft

$$\vec{F}_L(t) = q\,\vec{v} \times \vec{B} \tag{4.22}$$

$$= q \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

$$= qB \begin{pmatrix} v_y(t) \\ -v_x(t) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

Für $\vec{v}_z(t) = 0$ liegt der oben behandelte Fall vor, wo das Teilchen senkrecht zum homogenen Magnetfeld $\vec{B}$ eingeschossen wird: Auf das Teilchen wirkt in z-Richtung keine Kraft, so dass es nur in x-y-Richtung beschleunigt wird. Wir hatten gesehen, dass es eine Kreisbahn ausführt, die senkrecht zum Magnetfeld steht, also in x-y-Richtung verläuft. Wird das Teilchen nicht senkrecht in das Magnetfeld eingeschossen, gilt $\vec{v}_z(t) \neq 0$. Da der Ausdruck für die LORENTZ-Kraft

$$\vec{F}_L = qB \begin{pmatrix} v_y(t) \\ -v_x(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

nicht von $v_z(t)$ abhängt, wirkt auch für $v_z(t) \neq 0$ die gleiche Kraft auf das Teilchen, wie in dem obigen Fall der Kreisbahn. Da die z-Komponente der LORENTZ-Kraft $\vec{F}_L$ gleich null ist, behält das Teilchen seine Anfangsgeschwindigkeit $v_z(0) = v_z(t) = \mathit{konst.}$ in z-Richtung bei. In x-y-Richtung erhält es die gleiche Beschleunigung wie im Fall des senkrechten Einschusses. Projizieren wir die Bahn (Trajektorie) des Teilchens in die x-y-Ebene, ergibt sich wieder eine Kreisbahn. Dieser Kreisbahn überlagert ist die konstante Bewegung in z-Richtung mit $v_z(t) = \mathit{konst.}$ Das Teilchen führt also eine Spiralbewegung durch (siehe Abb. 4.5). Die Trajektorie $\vec{s}(t)$ des Teilchens lässt sich für die Anfangsbedingungen $v_y(0) = 0$ und $x(0) = \frac{mv_x(0)}{qB}$ in Abhängigkeit von der Zeit t darstellen durch:

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0)\cos\omega t \\ x(0)\sin\omega t \\ v_z(0)\cdot t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{mv_x(0)}{qB}\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) \\ \frac{mv_x(0)}{qB}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \\ v_z(0)\cdot t \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

Hier ist $\omega = \frac{qB}{m}$ die Zyklotronfrequenz aus (4.14).

4.2.1 Magnetische Flasche

Die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem beliebigen inhomogenen Magnetfeld kann sehr kompliziert sein. In den meisten Fällen lassen sich keine Trajektorien in geschlossener Form berechnen, so, wie wir es für den schrägen Einschuss eines geladenen

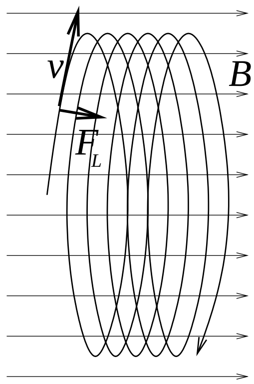


Abbildung 4.5: Spiralbewegung eines geladenen Teilchens nach schrägem Einschuss in ein homogenes Magnetfeld

Teilchens in ein homogenes Magnetfeld getan haben (siehe Ausdruck 4.26). Stattdessen können wir qualitative Untersuchungen durchführen: Ein Beispiel für ein inhomogenes Magnetfeld ist die **magnetische Flasche**, ein zylindersymmetrisches Magnetfeld, das an den Enden eine im Vergleich zur Mitte starke Magnetfeldstärke $\vec{B}$ hat. Eine solche magnetische Flasche ist in Abb. 4.6 abgebildet. An den Enden der magnetischen Flasche, d.h.

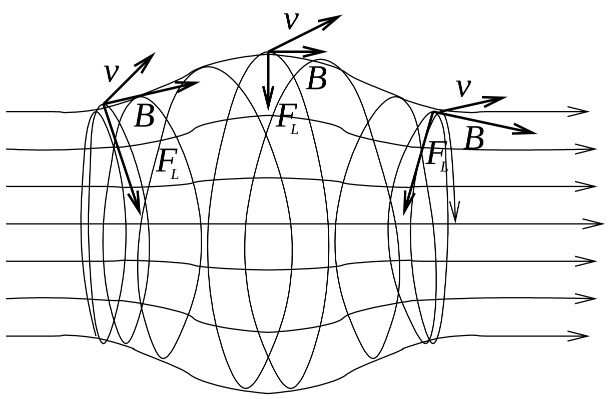


Abbildung 4.6: Magnetische Flasche

in den Bereichen, wo das Magnetfeld stärker wird, hat die LORENTZ-Kraft, die auf das Teilchen wirkt, einen Beitrag in Richtung der Symmetrieachse der magnetischen Flasche, der in Richtung des schwächeren Magnetfeldes zeigt. Auf das Teilchen wirkt also eine rücktreibende Kraft, die verhindert, dass das Teilchen die magnetische Flasche verlässt. Es ist also in der magnetischen Flasche eingefangen.
Magnetische Flaschen werden z.B. bei Versuchen zur Kernfusion eingesetzt, um Plasmen (siehe Abschnitt 3.12.2, Seite 143) einzuschließen.

Auch das Erdmagnetfeld ist ein inhomogenes Magnetfeld, das im Außenbereich der Erde

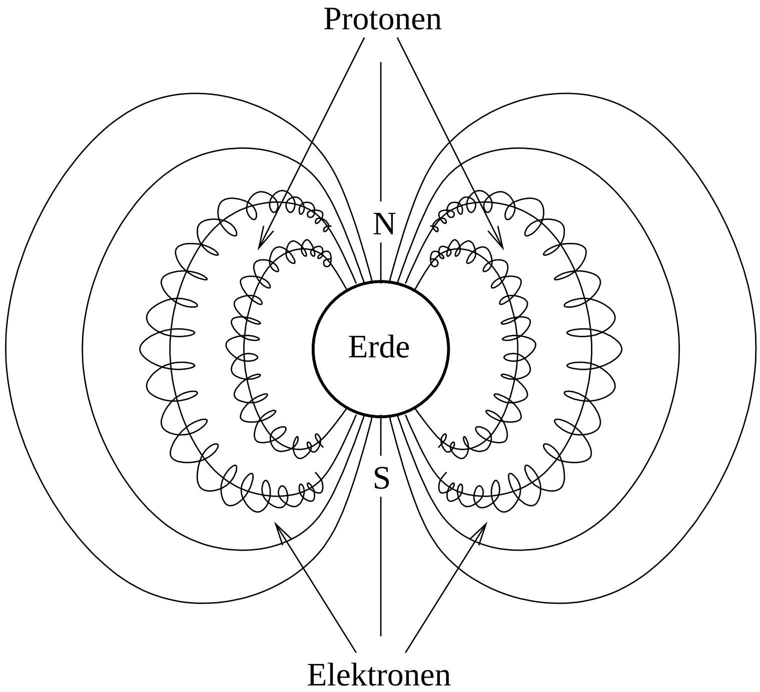


Abbildung 4.7: Van-Allen-Gürtel

sogar eine magnetische Flasche bildet. Die Magnetfeldlinien treten im Bereich der magnetischen Pole der Erde in sehr hoher Dichte ins Erdinnere ein. Zwischen den Polen laufen sie im Außenbereich der Erde weit auseinander, wo dementsprechend die Magnetfeldstärke schwächer ist. Eine solche Magnetfeldkonfiguration bildet eine magnetische Flasche. Treten geladene Teilchen, die mit dem Sonnenwind mit hoher Geschwindigkeit auf die Erde zufliegen, in das Erdmagnetfeld ein, werden sie in dieser magnetischen Flasche eingefangen. Die Bereiche des Erdmagnetfeldes, die solche geladenen Teilchen einfangen können, heißen **Van-Allen-Gürtel.** Die im Sonnenwind enthaltenen Elektronen werden schon in großer Entfernung von der Erde auf Spiralbahnen gezwungen, auf denen sie zwischen den magnetischen Polen hin und her oszillieren. Sie bilden den äußeren Gürtel. Protonen gelangen i.d.R. wesentlich näher an die Erde heran, werden schließlich aber auch eingefangen und bewegen sich ebenfalls auf Spiralbahnen von Pol zu Pol. Die Spiralbahnen der Protonen bilden den inneren Gürtel. In der Nähe der magnetischen Pole, können die Spiralbahnen bis in die Erdatmosphäre hinein reichen, wo sie durch Stoßionisation Gasmoleküle zum leuchten bringen können. Diese Leuchterscheinung kann als **Polarlicht** beobachtet werden.