bildet. Legen wir nun ein kartesisches Koordinatensystem so in den Aufbau, dass die Platte die x-y-Ebene bildet und die Punktladung Q auf der z-Achse liegt ($\vec{R}_+ = R\,\vec{e}_z$). Wir können das elektrische Feld bzw. Potenzial auf der Seite der Platte, auf der sich die reale Ladung Q befindet, richtig beschreiben, indem wir die Platte durch eine betragsmäßig gleichgroße Punktladung $Q' = -Q$ ersetzen, die wir an den Ort $\vec{R}' = -R\,\vec{e}_z$ plazieren. Diese Spiegelladung bewirkt, dass das Potenzial an der Stelle, an der sich sonst die Platte befände, verschwindet. Damit ist die Randbedingung $\varphi(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r}(x, y, 0)$ (Leiteroberfläche) erfüllt.

Das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ an einem beliebigen Ort $\vec{R}$ mit $\vec{r} \cdot \vec{e}_z > 0$ errechnet sich dann durch Superposition der beiden Punktladungen Q und Q':

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{R}_+|^3}(\vec{r}-\vec{R}_+) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{|\vec{r}-\vec{R}_-|^3}(\vec{r}-\vec{R}_-) \tag{2.20}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{r}-\vec{R}_+}{|\vec{r}-\vec{R}_+|^3} - \frac{\vec{r}+\vec{R}_+}{|\vec{r}+\vec{R}_+|^3}\right) \tag{2.21}$$

Dieser Ausdruck ist eine geschlossene Beschreibung des elektrischen Feldes $\vec{E}$. Der Einfachheit dieses Problems ist es zu verdanken, dass eine solche geschlossene Form überhaupt möglich ist. Doch schon in diesem einfachen Problem ist der Ausdruck für das elektrische Feld relativ kompliziert.

Ist der Außenraum von Leitern nicht wie in Beispiel 2.1 ungeladen, so gilt

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \tag{2.22}$$

$$\text{und mit} \quad \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi \quad \text{folgt} \tag{2.23}$$

$$-\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \tag{2.24}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta\varphi + \frac{\varrho}{\varepsilon_0}} = 0 \tag{2.25}$$

Dies ist die **Gleichung von Poisson**.

2.4 Elektrisches Feld einer geladenen Kugel

Bringen wir eine Ladung Q auf eine leitende Kugel (Radius ist R), werden sich die Ladungsträger (Elektronen) wegen der Kugelsymmetrie gleichmäßig an der Oberfläche $A = 4\pi R^2$ verteilen. Das Innere der Kugel ist wie bei allen Leitern feldfrei. Die Flächenladungsdichte σ an der Oberfläche ist deshalb

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \tag{2.26}$$

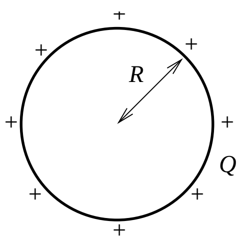

Abbildung 2.3: Auf einer geladenen Kugel befinden sich die Ladungen an der Oberfläche.

Mit der Beziehung 2.11, die die Flächenladungsdichte mit dem nach außen gerichteten Feld verknüpft, lässt sich das Feld direkt an der Außenseite der Leiteroberfläche bestimmen:

$$E_a = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2} \tag{2.27}$$

Für das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ im Außenraum ($r > R$) gilt mit $A_r = 4\,\pi\,R^2$ nach dem Satz von Gauss

$$\oiint_{A_r} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A} = E\,4\,\pi\,r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{2.28}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad (r \geq R) \tag{2.29}$$

Im Außenraum ist das elektrische Feld der geladenen Kugel mit der Ladung Q identisch mit dem einer Punktladung Q im Kugelmittelpunkt. Die elektrische Feldstärke einer geladenen Leiterkugel ist in Abb. 2.4 gegen r aufgetragen.

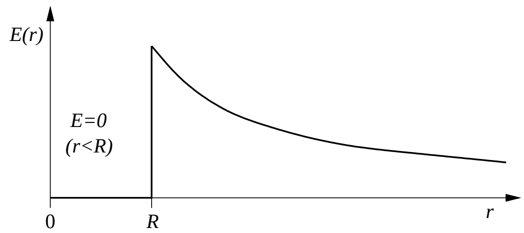

Abbildung 2.4: Die elektrische Feldstärke E einer geladenen Leiterkugel

2.5 Definition der Kapazität

Kondensatoren sind zwei gegeneinander isolierte, unterschiedlich geladene Leiteroberflächen beliebiger Geometrie, zwischen denen eine Potenzialdifferenz $\Delta\,\varphi$ und damit eine