Dieses Ergebnis gilt allgemein für den Zusammenhang des nach außen gerichteten Feldes $\vec{E}_a(\vec{r})$ mit der Flächenladungsdichte $\sigma(\vec{r})$:

$$\boxed{E_a(\vec{r}) = \frac{\sigma(\vec{r})}{\varepsilon_0}} \tag{2.11}$$

2.3 Allgemeines elektrostatisches Problem

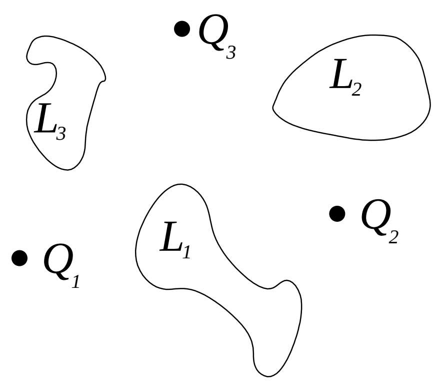

Abbildung 2.2: Die auf den drei Metallkörpern L_1, L_2 und L_3 influenzierten Flächenladungen stören das elektrische Feld der drei Punktladungen Q_1, Q_2 und Q_3.

Eine sehr schwierige Aufgabe ist es, das elektrische Feld von Ladungen unter Anwesenheit von ausgedehnten Leitern zu bestimmen. In Abb. 2.2 ist ein solches Beispiel abgebildet. Ohne die Leiter L_i ließe sich das elektrische Feld $\vec{E}_o$ als Summe der elektrischen Felder der drei Punktladungen Q_1, Q_2 und Q_3 berechnen. Allerdings werden auf den Leiterklumpen L_1, L_2 und L_3 Verschiebungsladungen influenziert, die das elektrische $\vec{E}_o$ stören. Das gestörte Feld $\vec{E}$ können wir i.d.R. nicht ohne weiteres analytisch bestimmen. Mit unseren bisherigen Kenntnissen können wir allerdings folgende Aussagen über Feld und Potenzial machen:

- Die Oberflächen der Leiter L_i sind Äquipotenzialflächen. Im Innern der Leiter verschwindet das elektrische Feld $\vec{E}_i = 0$. Daher muss das Potenzial φ_i im gesamten Leiter konstant sein.

$$\varphi_i = const. \Leftrightarrow \vec{E}_i = -\mathrm{grad}\, \varphi_i = 0 \tag{2.12}$$

- Der Raum zwischen den Ladungen Q_i und den Leitern L_i ist ladungsfrei, d.h. es gilt

$$\mathrm{div}\vec{E} = 0 \tag{2.13}$$

Aus 2.2 und 2.13 folgt damit

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi \tag{2.14}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = 0 \tag{2.15}$$

Die Hintereinanderausführung der beiden Differenzialoperatoren „div" und „grad" bezeichnet man als **LAPLACE-Operator** div grad $= \Delta$. In kartesischen Koordinaten ist er

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^T \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^T \varphi(x, y, z)\right] && (2.16)\\
&= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} && (2.17)\\
&= \Delta\,\varphi && (2.18)
\end{aligned}$$

Mit dieser Schreibweise lässt sich 2.15 ausdrücken durch die **Gleichung von LAPLACE**:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\,\varphi = 0 \tag{2.19}$$

Die Gleichung von LAPLACE ist eine partielle lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit den Randbedingungen $\varphi = \mathit{const}$ auf den Leitern L_i. Sie hat bis auf eine additive Konstante genau eine Lösung (ohne Beweis). Leider ist diese Gleichung nur in sehr einfachen Fällen analytisch lösbar und erfordert einen hohen Rechenaufwand, sowie mathematische Kenntnisse, die über den Stoff von HöMa I-IV hinausgehen. In einfachen Fällen kann man die Randbedingungen, dass die Leiteroberflächen Äquipotenzialflächen sind, durch ein einfacheres Modell ersetzen. Man fügt anstelle der ausgedehnten Leiter weitere Ladungen hinzu. Diese Ladungen nennt man **Spiegelladungen**. Die Spiegelladungen erzeugen zusammen mit den realen Ladungen ein elektrisches Feld $\vec{E}$. Man kann durch geschickte Wahl der Spiegelladungen und deren richtige Platzierung erreichen, dass das zugehörige elektrostatische Potenzial φ genau dort konstant ist, wo sonst die Oberflächen der Leiter wären. Hat man dies erreicht, lassen sich sowohl elektrisches Feld als auch Potenzial im ladungsfreien Raum (also außerhalb der Leiter) mit unserem Modell berechnen. Da der Raum außerhalb der Leiter und der realen Punktladungen ladungsfrei sein muss, können sich die Spiegelladungen nur im Leiterinnern aufhalten. Das elektrische Feld bzw. Potenzial innerhalb der Leiter unterscheidet sich dann allerdings von dem in unserem Modell. Das Modell gilt also nur außerhalb der Leiter. Im Leiterinnern ist das Feld ohnehin gleich null und bedarf daher keines komplizierten Ersatzmodells.

Beispiel 2.1

Es befinde sich eine Punktladung $+Q$ in einem Abstand R von einer unendlich ausgedehnten, leitenden Platte. Die Ladung Q influenziert auf der Platte eine Flächenladungsdichte σ genau so, dass die Platte eine Äquipotenzialfläche bildet. Legen wir nun ein kartesisches Koordinatensystem so in den Aufbau, dass die Platte die x-y-Ebene bildet und die Punktladung Q auf der z-Achse liegt ($\vec{R}_+ = R\,\vec{e}_z$). Wir können das elektrische Feld bzw. Potenzial auf der Seite der Platte, auf der sich die reale Ladung Q befindet, richtig beschreiben, indem wir die Platte durch eine betragsmäßig gleichgroße Punktladung $Q' = -Q$ ersetzen, die wir an den Ort $\vec{R}' = -R\,\vec{e}_z$ plazieren. Diese Spiegelladung bewirkt, dass das Potenzial an der Stelle, an der sich sonst die Platte befände, verschwindet. Damit ist die Randbedingung $\varphi(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r}(x, y, 0)$ (Leiteroberfläche) erfüllt.

Das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ an einem beliebigen Ort $\vec{R}$ mit $\vec{r} \cdot \vec{e}_z > 0$ errechnet sich dann durch Superposition der beiden Punktladungen Q und Q':

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{R}_+|^3}(\vec{r}-\vec{R}_+) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{|\vec{r}-\vec{R}_-|^3}(\vec{r}-\vec{R}_-) \quad (2.20) \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{r}-\vec{R}_+}{|\vec{r}-\vec{R}_+|^3} - \frac{\vec{r}+\vec{R}_+}{|\vec{r}+\vec{R}_+|^3}\right) \quad (2.21) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist eine geschlossene Beschreibung des elektrischen Feldes $\vec{E}$. Der Einfachheit dieses Problems ist es zu verdanken, dass eine solche geschlossene Form überhaupt möglich ist. Doch schon in diesem einfachen Problem ist der Ausdruck für das elektrische Feld relativ kompliziert.

Ist der Außenraum von Leitern nicht wie in Beispiel 2.1 ungeladen, so gilt

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \quad (2.22)$$

$$\text{und mit} \qquad \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi \qquad \text{folgt} \quad (2.23)$$

$$-\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \quad (2.24)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta\varphi + \frac{\varrho}{\varepsilon_0}} = 0 \quad (2.25)$$

Dies ist die **Gleichung von Poisson**.

2.4 Elektrisches Feld einer geladenen Kugel

Bringen wir eine Ladung Q auf eine leitende Kugel (Radius ist R), werden sich die Ladungsträger (Elektronen) wegen der Kugelsymmetrie gleichmäßig an der Oberfläche $A = 4\pi R^2$ verteilen. Das Innere der Kugel ist wie bei allen Leitern feldfrei. Die Flächenladungsdichte σ an der Oberfläche ist deshalb

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \quad (2.26)$$