Kapitel 2

Elektrostatik mit Leitern und Isolatoren

2.1 Leiter und Isolatoren

Die elektrische Leitfähigkeit (siehe Abschnitt 3.4.1, Seite 97) der verschiedenen Stoffe ist sehr unterschiedlich. Die Begriffe **Leiter** und **Isolatoren**, die wir in Abschnitt 1.1.3 auf Seite 4 eingeführt haben, sind nicht absolut. Metalle als typische Leiter haben eine 10^{20}-fach bessere Leitfähigkeit als typische Isolatoren (z.B. Glas). Ferner gibt es extreme Zustände (Supraleitung) und Zwischenzustände (z.B. Halbleiter). Mit der Leitfähigkeit und ihrer Ursache werden wir uns näher in Abschnitt 3.4.1 beschäftigen. Hier wollen wir uns nur mit dem unterschiedlichen Verhalten von Leitern und Isolatoren im elektrischen Feld befassen.

2.2 Leiter im elektrischen Feld und Influenz

In Abschnitt 1.1.5 hatten wir gesehen, dass das Innere von elektrischen Leitern im stationären Zustand feldfrei ist (z.B. FARADAYscher Käfig). Mit unseren jetzigen Kenntnissen können wir die Feldfreiheit in elektrischen Leitern erklären: Wird auf ein vorher ungeladenes Leiterstück eine Ladung Q übertragen, stoßen sich diese Überschussladungen gegenseitig ab. Daher sind sie bestrebt, einen möglichst großen Abstand zueinander einzunehmen. Den größtmöglichen Abstand haben sie dann erreicht, wenn sie sich an der Oberfläche des Leiters aufhalten. Der statische Zustand liegt genau dann vor, wenn die Ladungen sich so auf der Oberfläche verteilt haben, dass das elektrische Feld, das sie erzeugen, im Innern des Leiters verschwindet. Wäre das Innere nicht feldfrei, würde es weiterhin zu einer Ladungstrennung im Innern kommen, und der stationäre Zustand könnte nie erreicht werden. Liegt zusätzlich ein äußeres elektrisches Feld $\vec{E}_0$ an, so nehmen die Ladungen zwar etwas andere Plätze auf der Oberfläche ein, doch auch in diesem Fall kann der stationäre Zustand erst erreicht werden, wenn das Innere des Leiters feldfrei ist. Dazu ordnen sich die Ladungen Q so an der Oberfläche an, dass das elektrische Feld $\vec{E}_Q$, das sie erzeugen, das äußere Feld $\vec{E}$ im Innern des Leiters kompensiert. Letztere Erscheinung wird als **Influenz** bezeichnet (vgl. Abschnitt 1.1.6, Seite 8). Die Influenz tritt auch auf, wenn der Leiter ungeladen ist.

Das elektrische Feld im Innern eines elektrischen Leiters verschwindet im stationären Zustand. (Vgl. Abschnitt 1.8.3, Seite 59)	(2.1)

Zusammenfassung

Für elektrische Leiter gilt im stationären Zustand:

- Das elektrische Feld im Innern verschwindet.
- Ladungen sitzen auf der Oberfläche.
- Leiteroberflächen sind Äquipotenzialflächen.
- Die elektrischen Feldvektoren stehen im Außenraum senkrecht zur Leiteroberfläche.

2.2.1 Feld an einer Leiteroberfläche

Bei elektrischen Leitern ist es sinnvoll, nicht von einer Raumladungsdichte $\varrho(\vec{r})$ zu sprechen, da sich die Ladungen nur noch entlang der Oberfläche aufhalten. Aus diesem Grund diskutieren wir die Ladungsverteilung an der Oberfläche mit der **Flächenladungsdichte**

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}A} \tag{2.2}$$

Die Flächenladungsdichte $\sigma(\vec{r})$ können wir uns aus dem Satz von Gauss (1.113) beschaffen, wenn wir die nach außen gerichtete elektrische Feldstärke $\vec{E}_a(\vec{r})$ kennen. Dazu denken wir uns eine geschlossene Fläche ∂V, die, wie in Abb. 2.1 gezeigt, die Form einer Dose hat und den Teil A der Leiteroberfläche mit der Ladung $Q = \sigma\, A$ einschließt, für den die Flächenladungsdichte bestimmt werden soll. Die Stirnflächen von ∂V sind dabei parallel zur Leiteroberfläche A ausgerichtet, wobei die eine im Leiterinnern und die andere im Außenbereich liegt. Damit wir den Satz von Gauss anwenden können, brauchen

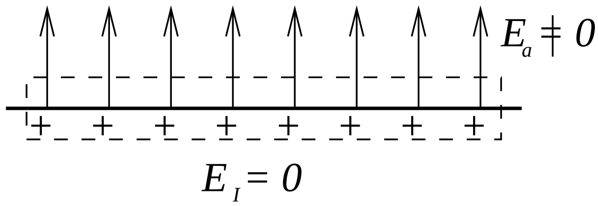

Abbildung 2.1: „Dose“ mit infinitesimaler Dicke zur Herleitung der Flächenladungsdichte σ auf der Oberfläche eines Leiters

wir eine geschlossene Oberfläche. Deshalb sind die Stirnflächen durch eine weitere Teilfläche miteinander verbunden. Der elektrische Kraftfluss durch die Stirnfläche, die sich im Leiterinnern befindet, ist null, da dort das $\vec{E}$-Feld verschwindet. Der elektrische Kraftfluss durch die Verbindungsfläche ist nicht direkt bekannt. Deshalb legen wir die beiden Stirnflächen so dicht an die Leiteroberfläche, dass die Verbindungsfläche gegen null geht. Dann fließt der gesamte elektrische Kraftfluss durch die Stirnfläche außerhalb des Leiters. Können wir eine konstante Ladungsverteilung auf der Leiteroberfläche voraussetzen (z.B. bei einer Kugel), gilt

$$\begin{aligned} \Phi &= \oiint_{\partial V} \vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} && (2.3) \\ &= \iint_A \vec{E}_a\,\mathrm{d}\vec{A} && (2.4) \\ & && (2.5) \end{aligned}$$

Wegen $\vec{E}_a \parallel \mathrm{d}\vec{A}$ gilt $\vec{E}_a \cdot \mathrm{d}\vec{A} = E_a\,\mathrm{d}A$:

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_A \vec{E}_a\,\mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} && (2.6) \\ &= \iint_A E_a\,\mathrm{d}A && (2.7) \\ &= E_a\,A = \frac{Q}{\varepsilon_0} && (2.8) \end{aligned}$$

Wegen $Q = \sigma A$ folgt

$$\begin{aligned} \Phi = E_a\,A = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} && (2.9) \\ \Rightarrow \qquad E_a = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} && (2.10) \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis gilt allgemein für den Zusammenhang des nach außen gerichteten Feldes $\vec{E}_a(\vec{r})$ mit der Flächenladungsdichte $\sigma(\vec{r})$:

$$\boxed{E_a(\vec{r}) = \frac{\sigma(\vec{r})}{\varepsilon_0}} \tag{2.11}$$

2.3 Allgemeines elektrostatisches Problem

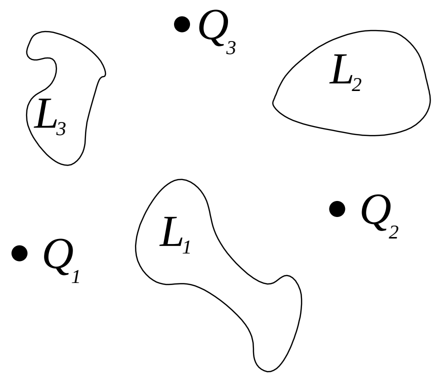

Abbildung 2.2: Die auf den drei Metallkörpern L_1, L_2 und L_3 influenzierten Flächenladungen stören das elektrische Feld der drei Punktladungen Q_1, Q_2 und Q_3.

Eine sehr schwierige Aufgabe ist es, das elektrische Feld von Ladungen unter Anwesenheit von ausgedehnten Leitern zu bestimmen. In Abb. 2.2 ist ein solches Beispiel abgebildet. Ohne die Leiter L_i ließe sich das elektrische Feld $\vec{E}_o$ als Summe der elektrischen Felder der drei Punktladungen Q_1, Q_2 und Q_3 berechnen. Allerdings werden auf den Leiterklumpen L_1, L_2 und L_3 Verschiebungsladungen influenziert, die das elektrische $\vec{E}_o$ stören. Das gestörte Feld $\vec{E}$ können wir i.d.R. nicht ohne weiteres analytisch bestimmen. Mit unseren bisherigen Kenntnissen können wir allerdings folgende Aussagen über Feld und Potenzial machen:

- Die Oberflächen der Leiter L_i sind Äquipotenzialflächen. Im Innern der Leiter verschwindet das elektrische Feld $\vec{E}_i = 0$. Daher muss das Potenzial φ_i im gesamten Leiter konstant sein.

$$\varphi_i = const. \Leftrightarrow \vec{E}_i = -\operatorname{grad}\varphi_i = 0 \tag{2.12}$$

- Der Raum zwischen den Ladungen Q_i und den Leitern L_i ist ladungsfrei, d.h. es gilt

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0 \tag{2.13}$$