## 1.8 Der elektrische Fluss und der Satz von GAUSS

Es wurde gezeigt, dass die Dichte der Feldlinien ein anschauliches Maß für die elektrische Feldstärke darstellt. Der elektrische Fluss $\Phi$ (auch $\Phi_{el}$) durch eine gegebene Fläche hängt mit der Feldstärke $\vec{E}$ genauso zusammen wie der Volumenstrom einer Flüssigkeit mit der Strömungsgeschwindigkeit $v$. Nimmt man nun eine Fläche, die beispielsweise senkrecht

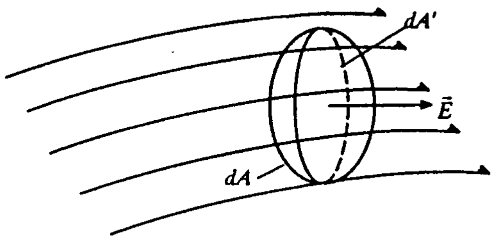


Abbildung 1.43: Anzahl der durch eine Fläche laufenden Feldlinien

zu den Feldlinien verläuft und bildet das Produkt aus dieser Fläche und dem $\vec{E}$-Feld, so erhält man - anschaulich gesprochen - ein Maß für die **Anzahl der Feldlinien**, die durch die Fläche hindurchtreten

$$\Phi = AE \tag{1.92}$$

(s. auch Abb. 1.43, entnommen aus [15]). Diese Betrachtungsweise wollen wir nun verfeinern. Wir betrachten dazu eine beliebig geformte Fläche A, in einem Gebiet, in dem ein elektrisches Feld vorliegt. Diese Fläche unterteilen wir in so kleine Flächenelemente $\mathrm{d}A$, sodass wir diese als eben ansehen können. Der Vektor $\mathrm{d}\vec{A}$ des Flächenelementes sei ein Normalenvektor auf diese Fläche mit der Länge $\mathrm{d}A$ (s. Abb. 1.44, entnommen aus [15]). Wird die Fläche im Sinne einer Rechtsschraube umfahren, so zeigt $\mathrm{d}\vec{A}$ in Richtung der

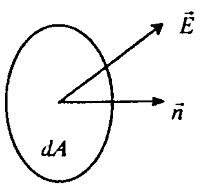


Abbildung 1.44: Normalenvektor

Fortbewegung dieser Schraube. Liegt am Ort von $\mathrm{d}A$ die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ vor, so ist der elektrische Fluss durch diese Fläche

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A} = E \cdot \mathrm{d}A \cdot \cos\alpha, \tag{1.93}$$

wobei $\alpha$ der Winkel zwischen $\vec{E}$ und $\mathrm{d}\vec{A}$ ist.

| | |
|---|---|
| Der **gesamte Kraftfluss** $\Phi$ durch eine endliche Fläche $A$ ergibt sich aus der Summe der Kraftflüsse durch die einzelnen Flächenelemente: $$\Phi = \iint\limits_{\text{Fläche}} \vec{E}\mathrm{d}\vec{A}.$$ | (1.94) |

$\iint$ bedeutet, dass über eine Fläche, d.h. über zwei Variablen integriert wird.

### 1.8.1 Elektrischer Kraftfluss einer Punktladung

Wir wollen den Fluss durch eine konzentrische Kugelschale mit Radius r berechnen, in deren Mittelpunkt sich eine positive Ladungsmenge $Q$ befindet (s. Abb. 1.45, entnommen

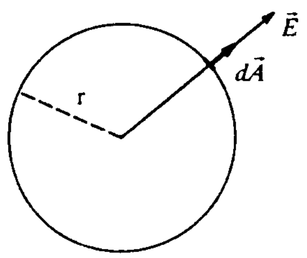


Abbildung 1.45: Feldfluss durch eine Kugelschale

aus [15]). In jedem Punkt der Kugelfläche erzeugt die Ladung eine Feldstärke

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \tag{1.95}$$

$\vec{E}$ und der Vektor des Flächenelementes $\mathrm{d}\vec{A}$ sind in jedem Punkt der Kugelfläche gleichgerichtet, d.h. $\alpha = 0$ bzw. $\cos\alpha = 1$, und die elektrische Feldstärke hat in jedem Punkt den gleichen Betrag. Damit ist der gesamte Kraftfluss durch die Kugelfläche der Größe

$4\pi r^2$:

$$\Phi = \oiint_{\substack{\text{geschl.}\\\text{Kugelfläche}}} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A} = \oiint_{\substack{\text{geschl.}\\\text{Kugelfläche}}} E \cdot \mathrm{d}A \cdot \cos\alpha \tag{1.96}$$

$$\stackrel{\alpha\equiv 0}{=} \oiint_{\substack{\text{geschl.}\\\text{Kugelfläche}}} E \cdot \mathrm{d}A = E \oiint_{\substack{\text{geschl.}\\\text{Kugelfläche}}} \mathrm{d}A = E \cdot 4\pi r^2. \tag{1.97}$$

Mit

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \tag{1.98}$$

erhält man dann:

$$\Phi = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}. \tag{1.99}$$

$$\boxed{\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}} \qquad \text{Fluss durch eine Kugeloberfläche um eine Punktladung Q} \tag{1.100}$$

Der Kraftfluss ist also proportional zu $Q$ und unabhängig vom Radius der Kugelfläche. Dieser Zusammenhang ist eine direkte Folge der $1/r^2$- Abhängigkeit von E und somit die einfachste Form des COULOMBschen Gesetzes (aufgrund der Kompensation von $4\pi r^2$ und $1/4\pi r^2$).

### 1.8.2 Kraftfluss durch eine beliebige geschlossene Fläche

Das gleiche Ergebnis erhält man auch für den gesamten Kraftfluss durch eine beliebige geschlossene Fläche um eine Punktladung $Q$:

$$\oiint_{\substack{\text{geschl.}\\\text{Fläche}}} E \cdot \cos\alpha\,\mathrm{d}A = \oiint_{\substack{\text{geschl.}\\\text{Fläche}}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \cdot \cos\alpha\,\mathrm{d}A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \oiint_{\substack{\text{geschl.}\\\text{Fläche}}} \frac{\cos\alpha\,\mathrm{d}A}{r^2}. \tag{1.101}$$

Der Integrand ist gleich dem vom $Q$ ausgehenden Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$, den das Flächenelement $\mathrm{d}A$ aufspannt:

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\cos\alpha\,\mathrm{d}A}{r^2}. \tag{1.102}$$

Damit wird

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \oiint_{\substack{\text{geschl.}\\\text{Fläche}}} \mathrm{d}\Omega. \tag{1.103}$$

Der gesamte Raumwinkel um einen Punkt ist gleich $4\pi$. Somit folgt:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Der durch eine geschlossene Oberfläche } A \text{ gehende elektrische} \\ \text{Fluss } \Phi \text{ ist gleich der} \\ \text{Summe der von dieser Fläche eingeschlossenen Ladungen } Q_{in} \\ \text{multipilziert mit } 1/\varepsilon_0. \\ \\ \Phi = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}\end{array}} \tag{1.104}$$

Zu dem selben Ergebnis gelangt man auch durch folgende Überlegungen:
Der Fluss durch das Flächenelement $\mathrm{d}A$ der Kugel war $\mathrm{d}\Phi = E\,\mathrm{d}A$. Der Fluss durch ein

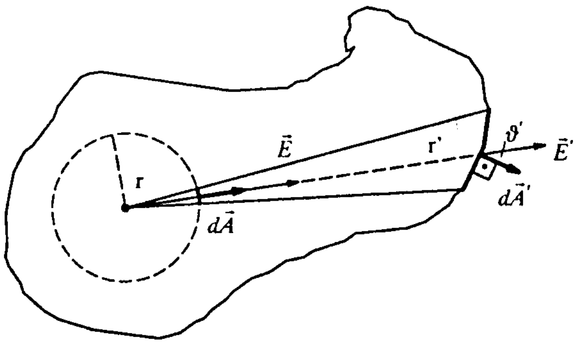


Abbildung 1.46: elektrischer Kraftfluss durch eine beliebige Fläche

beliebiges Oberflächenstück $\mathrm{d}A'$ einer beliebig gestalteten Fläche (s. Abb 1.46, entnommen aus [15]) ist

$$\mathrm{d}\Phi' = \vec{E}'\mathrm{d}\vec{A}' = E'\,\mathrm{d}A'\cos\vartheta. \tag{1.105}$$

Aus $E \sim \frac{1}{r^2}$ folgt

$$E\,r^2 = E'\,r'^2 = const. \Leftrightarrow E' = \frac{r^2}{r'^2}E. \tag{1.106}$$

Für infinitesimal kleine Flächen kann der Strahlensatz angewandt werden: $\mathrm{d}A'\cos\vartheta = \mathrm{d}A\frac{r'^2}{r^2}$. Damit ist

$$\mathrm{d}\Phi' = \vec{E}'\mathrm{d}\vec{A}' = E'\,\mathrm{d}A'\cos\vartheta = \frac{r^2}{r'^2}E\mathrm{d}A\frac{r'^2}{r^2} = E\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}\Phi. \tag{1.107}$$

Allgemein gilt also:

**Der GAUSSsche Satz der Elektrostatik**

$$\Phi = \underset{\substack{\text{beliebig}\\ \text{geschl. Fläche}}}{\oint\!\!\oint} \mathrm{d}\Phi = \underset{\substack{\text{beliebig}\\ \text{geschl. Fläche}}}{\oint\!\!\oint} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}. \tag{1.108}$$

Anschaulich bedeutet der GAUSSsche Satz der Elektrostatik, dass die Zahl der Feldlinien durch eine beliebige, die Ladung $Q$ umschließende Fläche konstant ist (s. Abb. 1.47, entnommen aus [15]). Obwohl der Satz eigentlich nur eine andere Formulierung des

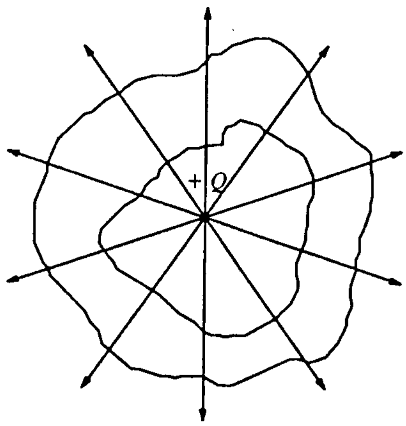


Abbildung 1.47: Die Zahl der Feldlinien ist konstant

COULOMBschen Gesetzes ist, ist er für die einfache Formulierung der Elektrostatik sehr wichtig.
Für mehrere Ladungen $Q_i$ gilt nach dem Superpositionsprinzip:

$$\Phi = \oint\!\!\oint \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i. \tag{1.109}$$

Betrachten wir nun eine **kontinuierliche Ladungsverteilung**. Ist $\partial V$ eine beliebige geschlossene Fläche, und ist $V$ das von $\partial V$ eingeschlossene Volumen, so gilt mit $\mathrm{d}Q =$

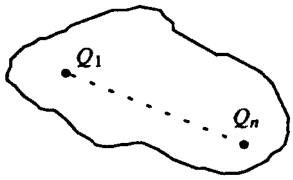


Abbildung 1.48: Superpositionsprinzip

$\varrho(\vec{r})\,\mathrm{d}V$:

$$\Phi = \oiint\limits_{\partial V} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint\limits_{V} \varrho(\vec{r})\,\mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint\limits_{V} \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad (1.110)$$

$$\Rightarrow \qquad \Phi = \oiint\limits_{\substack{\text{beliebig}\\ \text{geschl. Fläche}}} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} \qquad (1.111)$$

mit $Q_{in}$ = eingeschlossene Ladung (s. Abb. 1.48, entnommen aus [15]).
Dies ist die allgemeine Integralform des Gaußschen Satzes und besagt:

| |
|---|
| Der durch eine geschlossene Oberfläche A gehende elektrische Fluss $\Phi$ ist gleich der Summe der von dieser Fläche eingeschlossenen Ladungen $Q_{in}$ multipliziert mit $1/\varepsilon_0$. |

Spezialfall: $Q = 0$

$$\Rightarrow \Phi = \oiint\limits_{\substack{\text{beliebig}\\ \text{geschl. Fläche}}} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A} = 0, \qquad (1.112)$$

d.h. der Fluss durch eine geschlossene Fläche verschwindet, falls keine Ladungen eingeschlossen sind.
Dies soll an folgendem Beispiel verdeutlicht werden:

### Beispiel 1.4

Die Abb. 1.49 (entnommen aus [3]) zeigt eine geschlossene Fläche, durch die die Feldlinien hindurchgehen. Da Feldlinien nur an Ladungen beginnen oder enden, gehen genausoviele Feldlinien in die Fläche hinein, wie hinaus. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Feldlinien, die in die Fläche hinein gehen negativ und die, die hinausgehen, positiv gezählt werden.

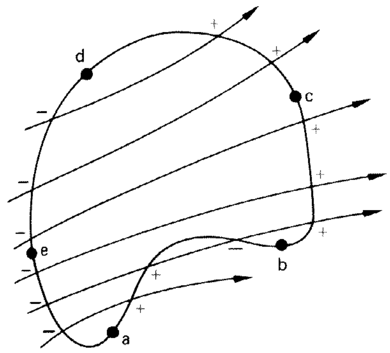


Abbildung 1.49: Die Zahl der ein- und austretenden Feldlinien ist gleich

Mit Hilfe einer mathematischen Identität, die **Satz von** GAUSS heißt (und Gegenstand der Mathematikvorlesung des 4. Semesters sein wird), lässt sich der GAUSSsche Satz umformen:

Satz von GAUSS in der Mathematik:

$$\Phi = \oiint_{\partial V} \mathrm{d}\Phi = \oiint_{\partial V} \vec{E}\, d\vec{A} = \iiint_V \mathrm{div}\, \vec{E}\, \mathrm{d}V \tag{1.113}$$

wobei die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ ein beliebiges Vektorfeld in einem von der Oberfläche $\partial V$ begrenzten Volumen $V$ ist. In dem Satz von GAUSS ist „div“ ein Differenzialoperator, der **Divergenz** genannt wird. Er wird auf ein Vektorfeld angewendet. Ist ein Vektorfeld $\vec{E}(\vec{r})$ als Funktion von kartesischen Raumkoordinaten gegeben

$$\vec{E}(x, y, z) = \begin{pmatrix} E_x(x, y, z) \\ E_y(x, y, z) \\ E_z(x, y, z) \end{pmatrix}, \tag{1.114}$$

so lautet die Vorschrift von div $\vec{E}$:

$$\mathrm{div}\, \vec{E}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} E_x(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} E_y(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} E_z(x, y, z) \tag{1.115}$$

Oft wird die Divergenz auch als Skalarprodukt des **Nabla-Operators** $\nabla$ mit dem Vektorfeld ausgedrückt. Der Nabla-Operator $\nabla$ ist ein Differenzialoperator, der die Gestalt eines Vektors hat. In vielen Fällen kann man mit dem Nabla-Operator $\nabla$ sogar gewohnte Vektorarithmetik durchführen (Vorsicht!). Der Nabla-Operator $\nabla$ ist für kartesische Raumkoordinaten definiert durch

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{1.116}$$

Die Divergenz lässt sich dann mit Hilfe des Nabla-Operators $\nabla$ darstellen durch

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \nabla \cdot \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x(x,y,z) \\ E_y(x,y,z) \\ E_z(x,y,z) \end{pmatrix} & (1.117) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} E_x(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial y} E_y(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial z} E_z(x,y,z) & (1.118) \end{aligned}$$

Um die Bedeutung von div $\vec{E}$ zu erklären, betrachten wir das infinitesimale Volumenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ in Abb. 1.50 (entnommen aus [15]). Für den Nettofluss in eine

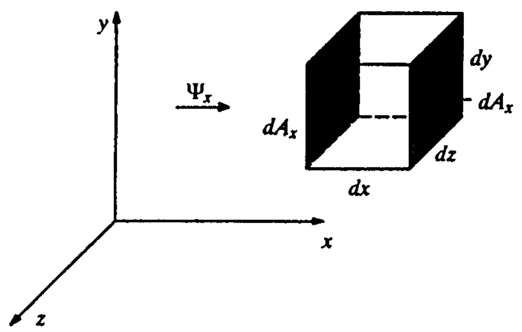


Abbildung 1.50: Nettofluss durch ein Volumenelement

Richtung, z.B. in $x$- Richtung, gilt:

$$\mathrm{d}_x\Phi = \frac{\partial E_x}{\partial x} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}A_x \qquad \text{mit} \qquad \mathrm{d}A_x = \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \tag{1.119}$$

$\mathrm{d}_x\Phi$ ist also die Änderung von $E_x$ entlang $\mathrm{d}x$ multipliziert mit $\mathrm{d}A_x$. Für den eindimensionalen Nettofluss in x-Richtung gilt somit:

$$\mathrm{d}_x\Phi = \frac{\partial E_x}{\partial x} \mathrm{d}V \tag{1.120}$$

Dies gilt entsprechend für $\mathrm{d}_y\Phi$ und $\mathrm{d}_z\Phi$. Für den gesamten Nettofluss in x, y, z- Richtung erhält man:

$$\mathrm{d}\Phi = \mathrm{d}_x\Phi + \mathrm{d}_y\Phi + \mathrm{d}_z\Phi \tag{1.121}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}V} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{E}.} \tag{1.122}$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes ist der Nettofluss in einem infinitesimalen Volumenelement $\mathrm{d}V$, d.h. der Nettofluss aus diesem Volumen. Ist $\operatorname{div} \vec{E} > 0$, sagt man, es liegt eine **Quelle** vor, da mehr Feldlinien in das Volumenelement hinein fließen als heraus. Ist $\operatorname{div} \vec{E} < 0$, so spricht man von einer **Senke**, da dort Feldlinien verschwinden.

### 1.8.3 Was folgt für elektrische Leiter aus dem GAUSSschen Satz?

Wir betrachten einen geladenen Leiter, auf dem die Ladung ruhen soll, d.h. der sich im elektrischen Gleichgewicht befinden soll. In diesen Fall muss die elektrische Feldstärke im Inneren des Leiters gleich Null und die elektrische Feldstärke in Tangentenrichtung auf der Oberfläche gleich null sein. Wäre dies nicht der Fall, so würden auf die Ladungen Kräfte wirken; es käme zu Ladungsverschiebungen, d.h. zu Strömen im Leiter oder auf der Oberfläche und damit läge kein elektrisches Gleichgewicht mehr vor. Daraus folgt weiter, dass sich im elektrostatischen Gleichgewicht die Ladungen nur auf der Oberfläche befinden. Der Beweis erfolgt mit Hilfe des GAUSSschen Satzes:
Wegen $\vec{E} = 0$ im Inneren des Leiters ist der elektrische Kraftfluss durch eine beliebig dicht unter der wahren Oberfläche liegenden geschlossenen Fläche

$$\Phi = \oint\!\!\!\oint \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A} = 0. \tag{1.123}$$

Nach dem GAUSSschen Satz gilt

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} Q_i, \tag{1.124}$$

damit ist im Inneren des Leiters

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = 0, \tag{1.125}$$

also keine Ladung vorhanden. Die gesamte Ladung verteilt sich auf der Oberfläche.
Die folgenden Versuche sollen das Problem veranschaulichen.

**Versuch 1.22**

1. Wir wiederholen den bereits auf Seite 7 beschriebenen Versuch 1.5 mit dem FARADAY- Becher. Der Becher wird mittels Reibung aufgeladen, und nun versuchen wir, aus dem Inneren des Bechers mit dem elektrischen Löffel Ladung zu entnehmen. Dies gelingt nicht. Nur von außen können wir Ladung entnehmen und auf einem Elektroskop nachweisen.
2. In diesem Versuch wird der Feldlinienverlauf in einem geschlossenen Leiter gezeigt. Dazu wird wieder die mit Grieß und Rizinusöl gefüllte Glas-

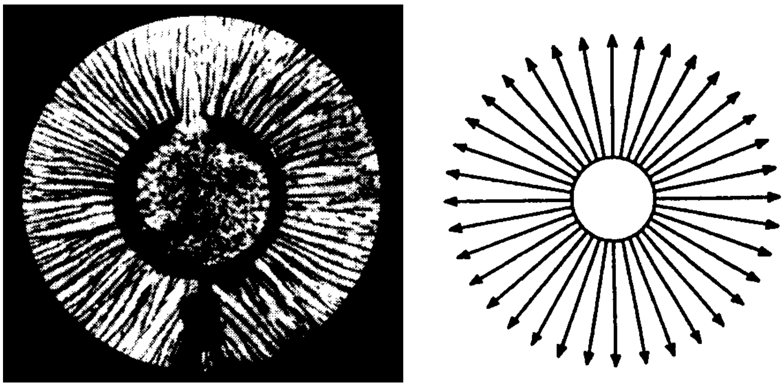

Abbildung 1.51: Versuchsergebnis und theoretischer Feldverlauf

schale genommen und ein geladener Metall-Ring hineingelegt. Am Rand der Schale befindet sich ein weiterer Ring, der geerdet werden muss, damit ein elektrisches Feld entsteht. Der Versuch zeigt anschaulich, dass in einem geschlossenen leitenden Ring kein elektrisches Feld existiert. Auch zeigt der Versuch, dass die Feldlinien senkrecht auf den Leiter stehen. Der theoretische Verlauf der Feldlinien und das experimentelle Ergebnis sind in Abb. 1.51 dargestellt (entnommen aus [1] und [15]).
3. Für den letzten Versuch wird ein großer Drahtkäfig benötigt, in den eine Versuchsperson hineinpasst. Der Käfig wird auf einen zum Hörsaalboden isoliert aufgestellten Metallteller gesetzt und geerdet. Um möglichst hohe Ladungen auf den Käfig durch Funkenüberschlag zu bekommen, wird neben ihm ein VAN-DE-GRAAFF-Generator plaziert. Nachdem sich die Versuchsperson in den Käfig gestellt hat, wird er mit dem Bandgenerator aufgeladen. Der Funkenüberschlag ist deutlich sichtbar. Auch bei noch so kräftigem Aufladen des Käfigs ist keinerlei elektrische Wirkung auf die Versuchsperson zu sehen. Auch das große Einstiegsloch lässt das elektrische Feld nicht so weit eindringen, dass die Person etwas davon merkt. Ein solches Drahtnetz heißt FARADAY-Käfig und ist nach M. FARADAY

(1791-1867) benannt, der diesen Versuch 1836 als erster durchgeführt hat. Die Wirkung des FARADAY-Käfigs ist in Abb. 1.52 dargestellt (entnommen aus [15]). Da elektrische Felder, wie wir gesehen haben, nicht in das Innere von Leitern eindringen können, sind Räume, die von einem metallischen Kasten oder einem engmaschigen Drahtnetz umgeben sind, wie z.B. die Fahrgastzelle eines Autos, elektrisch abgeschirmt.

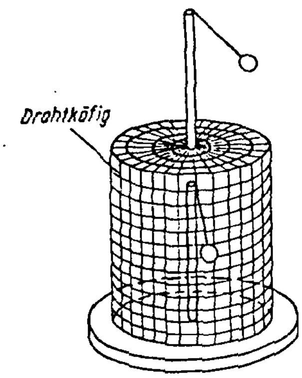


Abbildung 1.52: FARADAYkäfig

### 1.8.4 Beweisskizze für den mathematischen Satz von GAUSS

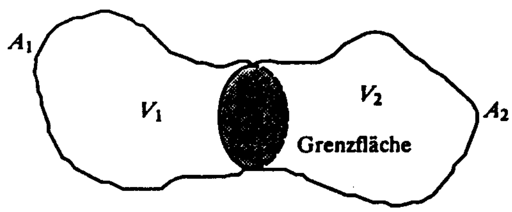


Abbildung 1.53: Das Volumen V wird in Teilvolumina aufgeteilt

Die Abb. 1.53 (aus [15]) zeigt ein Volumen $V$ mit der Oberfläche $A = \partial V$. Dieses Volumen wird in zwei Teilvolumina $V_1$ und $V_2$ unterteilt. Mit dieser Unterteilung erhält man:

$$\oint\!\!\!\oint_{A=\partial V} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A} = \oint\!\!\!\oint_{\partial V_1} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A} + \oint\!\!\!\oint_{\partial V_2} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A}, \tag{1.126}$$

da sich die Integrale über die Grenzfläche aufheben. Man kann also ein Volumen $V$ in beliebig viele Teilvolumina $V_i$ partitionieren, die jeweils die Oberfläche $A_i = \partial V_i$ haben:

$$\oiint\limits_{\partial V} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A} = \sum_{i=1}^{n} \oiint\limits_{\partial V_i} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A}_i = \sum_{i=1}^{n} V_i \oiint\limits_{\partial V_i} \frac{\vec{E}}{V_i}\mathrm{d}\vec{A}_i = \sum_{i=1}^{n} V_i \frac{\Phi_i}{V_i}. \tag{1.127}$$

Bildet man nun den Grenzübergang für $V_i \to 0$ und $n \to \infty$, so strebt $V_i$ gegen $\mathrm{d}V$ und $\Phi_i$ gegen $\mathrm{d}\Phi$, und die Summe wird zur Integration. Es gilt also dann:

$$\Phi = \oiint\limits_{\partial V} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A} = \iiint\limits_{V} \mathrm{d}V \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}V} \tag{1.128}$$

Auf Seite 59 hatten wir gesehen, dass der Kraftfluss durch die (geschlossene) Oberfläche eines infinitessimalen Volumenelements die Divergenz des Vektorfeldes ist. Damit folgt:

$$\boxed{\Phi = \oiint\limits_{\partial V} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A} = \iiint\limits_{V} \mathrm{d}V \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}V} = \iiint\limits_{V} \mathrm{div}\,\vec{E}\,\mathrm{d}V} \qquad \text{mathematische Identität} \tag{1.129}$$

Aus 1.110 und 1.129

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint\limits_{V} \varrho(\vec{r})\,\mathrm{d}V \tag{1.130}$$

$$\Phi = \iiint\limits_{V} \mathrm{div}\,\vec{E}\,\mathrm{d}V \tag{1.131}$$

folgt

$$\iiint\limits_{V} \mathrm{div}\,\vec{E}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint\limits_{V} \varrho(\vec{r})\,\mathrm{d}V \tag{1.132}$$

Da diese Integralgleichung für beliebige Volumina gilt, müssen die Integranden der Volumenintegrale gleich sein.

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}} \qquad \text{differenzielle Form des GAUSSschen Satzes der Elektrostatik} \tag{1.133}$$

D.h. die lokale Änderung des Flusses (Divergenz des Feldes) ist gleich $1/\varepsilon_0$ mal der Ladungsdichte $\varrho$. Eine lokale Änderung des Flusses bedeutet, dass Feldlinien neu entstehen oder verschwinden. Man nennt daher die positve Ladungsdichte $\varrho > 0$ auch **Quelle des elektrischen Feldes**, da aus ihr zusätzliche Feldlinien kommen. Eine negative Ladungsdichte $\varrho < 0$ heißt **Senke des elektrischen Feldes**, weil hier die Feldlinien verschwinden. Daraus folgt, dass in einem Volumenelement $\mathrm{d}V$ die Ladungsdichte von Null verschieden ist. Ist die Ladungsdichte gleich Null und damit auch $\mathrm{div}\vec{E} = 0$, so sagt man, dass das Feldgebiet **quellenfrei** ist.

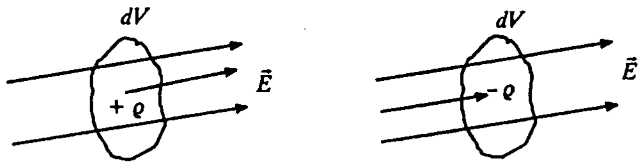


Abbildung 1.54: Quellen und Senken