

Abbildung 1.33: Kontinuierliche Ladungsverteilung

1.6 Berechnung der Feldstärke aus dem Potenzial

Die Beschreibungen des elektrischen Feldes durch den Vektor der elektrischen Feldstärke \vec{E} und durch das Potenzial φ sind äquivalent. Bei Kenntnis von \vec{E} kann für jeden Punkt das Potenzial φ als $\varphi = -\int \vec{E} \, d\vec{r}$ bestimmt werden. Häufig lassen sich aber Potenziale leichter messen als elektrische Feldstärken. Deshalb stellt sich die Frage, wie man aus einem bekannten Potenzial die Feldstärke in diesem Punkt ermitteln kann.

Bisher haben wir schon folgenden differenziellen Zusammenhang hergeleitet:

$$dW_p = -q \vec{E} \, d\vec{r} = -\vec{F} \, d\vec{r}, \quad (1.74)$$

d.h. durch Integration kann man aus der COULOMBSchen Kraft \vec{F} oder aus der elektrischen Feldstärke \vec{E} die potenzielle Energie W_p bzw. das Potenzial φ berechnen. Kann man umgekehrt auch \vec{F} bzw. \vec{E} durch Differenzieren von W_p bzw. φ berechnen?

Betrachten wir zunächst beispielsweise eine Punktladung mit $F(\vec{r}) = F_r(r)$. Dann ist

$$dW_p = -F_r(r) \, dr \quad \Leftrightarrow \quad F_r(r) = -\frac{dW_p}{dr}. \quad (1.75)$$

Dividiert man diese Gleichung durch q , so erhält man

$$E_r(r) = \frac{F_r(r)}{q} = -\frac{1}{q} \frac{dW_p}{dr} = -\frac{d\varphi}{dr}. \quad (1.76)$$

Wie lässt sich dieses Verfahren für den Vektor $\vec{E}(\vec{r})$ verallgemeinern? Erhält man etwas in der Form

$$??? \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{d\varphi}{d\vec{r}} ??? \quad (1.77)$$

Um das Problem mathematisch richtig anzugehen, betrachten wir zunächst die Komponentenschreibweise:

$$dW_p = -q (E_x, E_y, E_z)^T (dx, dy, dz)^T \quad (1.78)$$

$$= -q (E_x \, dx + E_y \, dy + E_z \, dz). \quad (1.79)$$

Nun betrachten wir die **partiellen Ableitungen** der einzelnen Komponenten, d.h. die Gleichung wird entweder nach x , y oder z abgeleitet und die beiden anderen Komponenten werden wie Konstanten behandelt. Für das partielle Differenzial $d_x W_p$ wird also nur x variiert, d.h. $dx \neq 0$, während dy und dz null sind. Damit ist

$$d_x W_p = -q E_x dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d_x W_p}{dx} = -q E_x. \quad (1.80)$$

Um das **totale Differenzial** dW_p von der **partiellen Ableitung** unterscheiden zu können, benutzt man folgende Schreibweise für die partielle Ableitung

$$\frac{d_x W_p}{dx} \equiv \frac{\partial W_p}{\partial x} = -q E_x. \quad (1.81)$$

Analog lauten die partiellen Ableitungen nach y und z

$$\frac{\partial W_p}{\partial y} = -q E_y \quad \text{und} \quad \frac{\partial W_p}{\partial z} = -q E_z. \quad (1.82)$$

Division durch q liefert:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -E_x; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -E_y; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -E_z \quad (1.83)$$

oder in Vektorschreibweise

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^T = -\text{grad } \varphi = -\nabla \varphi.} \quad (1.84)$$

$\vec{E}(\vec{r})$ ist der Vektor aus den partiellen Ableitungen des Potentials, man sagt, $\vec{E}(\vec{r})$ ist der (negative) **Gradient des Potentials**.

Was bedeutet der Gradient?

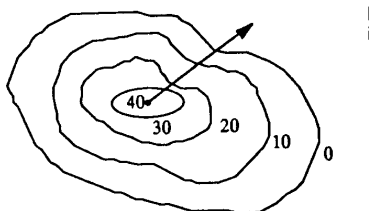


Abbildung 1.34: Der Gradient zeigt in Richtung des stärksten Gefälles

Der Gradient ist der Vektor in Richtung der größten Steigung, somit zeigt $\vec{E}(\vec{r})$ in die Richtung des stärksten Potenzialgefälles. Stellt man sich das Potenzial als eine hügelige Landschaft vor, so sind die Höhenlinien gleich den Äquipotenziallinien und die Falllinien entsprechen den Feldlinien (s. Abb. 1.34, entnommen aus [15]). Der Gradient zeigt dann in Richtung des steilsten Anstieges und steht immer senkrecht auf den Äquipotenziallinien (bzw. Höhenlinien). In Abb. 1.35 (links) ist eine skalare Funktion $F(x, y)$ als Fläche

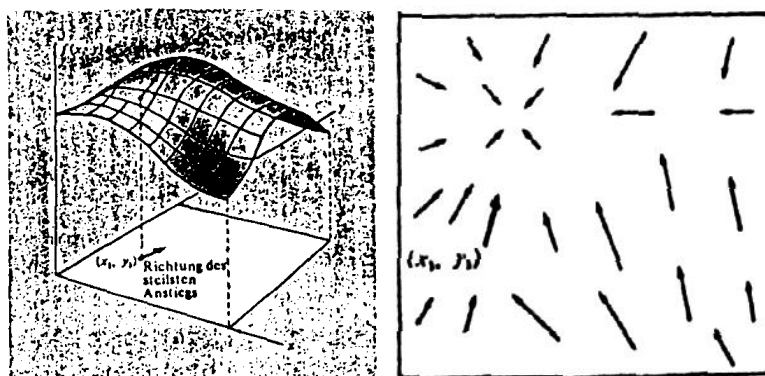


Abbildung 1.35: Veranschaulichung des Gradienten einer skalaren Funktion $f(x, y)$

dargestellt, Abb. 1.35 (rechts) zeigt die Darstellung des Vektorfeldes ∇f durch Pfeile: $\nabla f = \text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$. In Abb. 1.23 auf Seite 33 wird das Gravitationsfeld mit dem elektrischen Feld verglichen (entnommen aus [3]).

1.7 Anwendung homogener elektrischer Felder

1.7.1 Der Dipol im homogenen Feld

Wir betrachten nun einen elektrische Dipol im homogenen Feld, dessen Ursprung in den Mittelpunkt von \vec{l} gelegt wird (vgl. Abschnitt 1.5.1, Seite 40). Das elektrische Feld wirkt mit entgegengesetzten gleich großen Kräften $\vec{F} = Q \vec{E}$ und $-\vec{F} = -Q \vec{E}$ auf die Ladungen des Dipols. Die resultierende Kraft ist daher null, d.h. der Dipol ändert seinen translatoischen Bewegungszustand im Feld nicht. Das Kräftepaar erzeugt jedoch ein Drehmoment $\vec{\tau}$ um die Mittelachse senkrecht zu der von \vec{p} und \vec{E} aufgespannten Ebene (s. Abb. 1.36, entnommen aus [15]). Es ist:

$$\tau = 2 F \frac{l}{2} \sin \alpha = F l \sin \alpha = Q E l \sin \alpha = P E \sin \alpha \quad (1.85)$$

$$\text{oder} \quad \boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} = Q \vec{l} \times \vec{E}.} \quad (1.86)$$