Versuch 1.18

Im zweiten Versuch überprüfen wir das Potenzial mit Hilfe der Flammensonde, in Analogie zu der Punktladung. Der Aufbau ist in Abb. 1.29 (links) schematisch dargestellt. Zuerst führen wir die Sonde entlang einer Äquipotenzialfläche, also parallel zu den Platten. Wir beobachten, dass das Potenzial konstant ist. Auf dieser Äquipotenziallinie führen wir nun die Sonde aus dem Feld heraus und anschließend am Feld entlang, also senkrecht zu den Platten. In beiden Fällen beobachten wir einen Abfall des Potenzials. Im zweiten Fall fällt das Potenzial linear von der positiven Platte zur negativen Platte hin ab, d. h. φ ist linear zum Plattenabstand d. Eine graphische Darstellung des erwarteten Ergebnisses ist in Abb. 1.29 (rechts) dargestellt.

1.5 Potenzial einer beliebigen Ladungsverteilung

Für die elektrische Kraft und das elektrische Feld gilt das Superpositionsgesetz:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \quad \text{und} \quad \vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i. \tag{1.65}$$

Es soll nun gezeigt werden, dass dieses Prinzip auch für das Potenzial seine Gültigkeit behält.

$$\varphi = \int \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i\,\mathrm{d}\vec{r} = \sum_{i=1}^{n} \int \vec{E}_i\,\mathrm{d}\vec{r} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i. \tag{1.66}$$

Das Superpositionsprinzip überträgt sich also auf das Potenzial. Für mehrere Punktladungen ergibt sich somit:

$$\varphi(P_0) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i.|} \tag{1.67}$$

$\varphi(P_0)$ ist das Potenzial im Punkt P_0 mit dem Ortsvektor $\vec{r}$.

1.5.1 Der elektrische Dipol

Unter einem Dipol versteht man zwei kleine, entgegengesetzt geladene und gleich große Punktladungen $+Q$ und $-Q$, die sich im Abstand l voneinander befinden, der klein ist gegen die Entfernung r des Aufpunktes P_0 von der Dipolmitte. $\vec{l}$ sei ein Vektor, der durch seine Richtung von $-Q$ nach $+Q$ die Orientierung des Dipols bestimmt. Eine solche Ladungsverteilung und das zugehörige Feldlinienbild haben wir bereits auf Seite 25

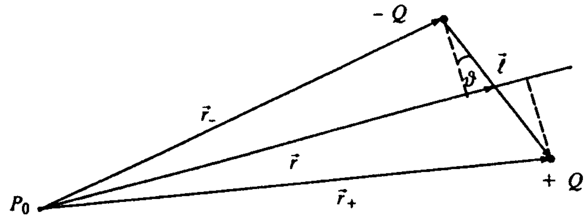

Abbildung 1.30: Der elektrische Dipol

kennengelernt (s. auch Abb. 1.30 aus [15]). Da sich die Potenziale, die von $+Q$ und $-Q$ im Aufpunkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ hervorgerufen werden, algebraisch addieren, ist das Potenzial:

$$\varphi(P_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r_+} - \frac{Q}{r_-}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_- - r_+}{r_- \cdot r_+}\right), \tag{1.68}$$

wobei r_+ und r_- die Abstände des Aufpunktes P_0 von $+Q$ und $-Q$ bezeichnen. Unter der Voraussetzung, dass r_+ und r_- groß gegen l sind, können folgende Näherungen gemacht werden:

$$r_+ \cdot r_- = r^2 \qquad \text{und} \qquad r_- - r_+ = l \cdot \cos\vartheta = \vec{l} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \tag{1.69}$$

wobei ϑ der Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{l}$ ist. Somit lässt sich das Potenzial eines Dipols für $r \gg l$ schreiben als

$$\varphi(P_0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{l} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l\cos\vartheta}{r^2}. \tag{1.70}$$

Den Vektor $\vec{p} = Q \cdot \vec{l}$ nennt man **Dipolmoment**. Das Potenzial des elektrischen Dipols $\vec{p}$ ist also proportional zum Betrag des Dipolmomentes $Q \cdot l$ und variiert mit cos ϑ und $1/r^2$. Das Zeigerdiagramm in Abb. 1.31 (aus [15]) zeigt die Winkelabhängigkeit von φ und cos ϑ für ein festes r. Die Länge des Zeigers ist proportional zu cos ϑ. Das Potenzial eines Dipolfeldes und seine Feldlinien sind in Abb. 1.32 dargestellt (entnommen aus [9]).

1.5.2 Kontinuierliche Ladungsverteilung

Genau wie beim elektrischen Feld ersetzen wir $\sum Q_i$ durch $\int \mathrm{d}Q$, wobei wieder $\mathrm{d}Q = \varrho(\vec{r})\,\mathrm{d}V$ ist. Für das Potenzial ergibt sich hiermit:

$$\boxed{\varphi(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_{\text{Volumen}}\frac{\varrho(\vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|}\mathrm{d}V.} \tag{1.71}$$

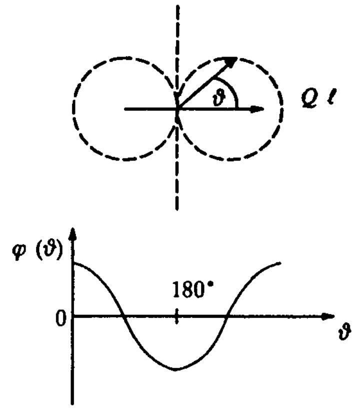

Abbildung 1.31: Zeigerdiagramm

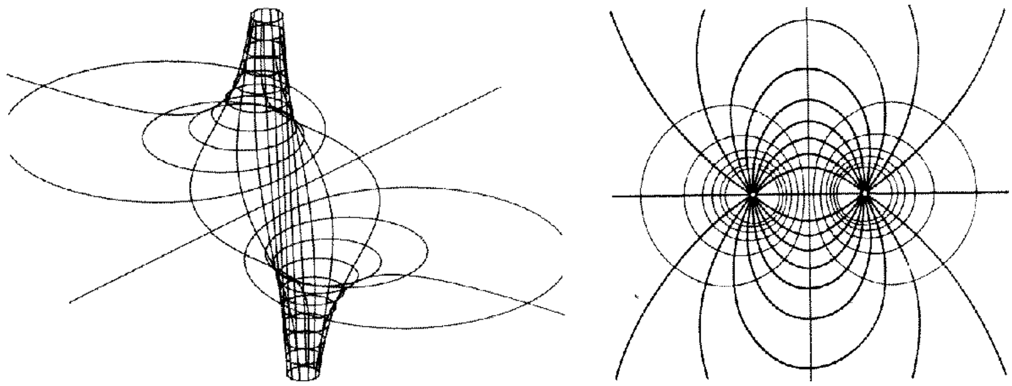

Abbildung 1.32: Das Dipolfeld

Hierbei ist $\vec{r}_0$ der Ortsvektor des Aufpunktes und $\vec{r}$ der Ortsvektor des Volumenelementes (s. Abb. 1.33, entnommen aus [15]). Eine andere Schreibweise für das Potenzial erhält man, wenn man die Definition der Flächenladungsdichte

$$\sigma = \frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche}} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}A} \tag{1.72}$$

für dQ einsetzt. Damit ist das Potenzial

$$\boxed{\varphi(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint\limits_{\text{Fläche}} \frac{\sigma(\vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} \mathrm{d}A.} \tag{1.73}$$

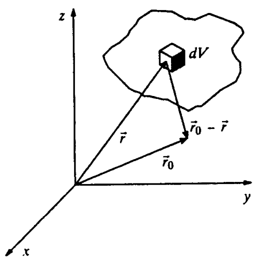

Abbildung 1.33: Kontinuierliche Ladungsverteilung

1.6 Berechnung der Feldstärke aus dem Potenzial

Die Beschreibungen des elektrischen Feldes durch den Vektor der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ und durch das Potenzial φ sind äquivalent. Bei Kenntnis von $\vec{E}$ kann für jeden Punkt das Potenzial φ als $\varphi = -\int \vec{E}\,\mathrm{d}r$ bestimmt werden. Häufig lassen sich aber Potenziale leichter messen als elektrische Feldstärken. Deshalb stellt sich die Frage, wie man aus einem bekannten Potenzial die Feldstärke in diesem Punkt ermitteln kann.
Bisher haben wir schon folgenden differenziellen Zusammenhang hergeleitet:

$$\mathrm{d}W_p = -q\,\vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = -\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}, \tag{1.74}$$

d.h. durch Integration kann man aus der COULOMBschen Kraft $\vec{F}$ oder aus der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ die potenzielle Energie W_p bzw. das Potenzial φ berechnen. Kann man umgekehrt auch $\vec{F}$ bzw. $\vec{E}$ durch Differenzieren von W_p bzw. φ berechnen?
Betrachten wir zunächst beispielsweise eine Punktladung mit $F(\vec{r}) = F_r(r)$. Dann ist

$$\mathrm{d}W_p = -F_r(r)\,\mathrm{d}r \quad \Leftrightarrow \quad F_r(r) = -\frac{\mathrm{d}W_p}{\mathrm{d}r}. \tag{1.75}$$

Dividiert man diese Gleichung durch q, so erhält man

$$E_r(r) = \frac{F_r(r)}{q} = -\frac{1}{q}\frac{\mathrm{d}W_p}{\mathrm{d}r} = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}. \tag{1.76}$$

Wie lässt sich dieses Verfahren für den Vektor $\tilde{\mathrm{E}}(\tilde{\mathrm{r}})$ verallgemeinern? Erhält man etwas in der Form

$$??? \; \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\vec{r}} \; ??? \tag{1.77}$$

Um das Problem mathematisch richtig anzugehen, betrachten wir zunächst die Komponentenschreibweise:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W_p &= -q\,(E_x, E_y, E_z)^T(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)^T && (1.78)\\ &= -q\,(E_x\,\mathrm{d}x + E_y\,\mathrm{d}y + E_z\,\mathrm{d}z). && (1.79) \end{aligned}$$