

In der obigen Formel wird nun die Ladung Q_i durch die infinitesimale Ladung $dq = \rho dV$ am Punkt \vec{r} ersetzt. Man erhält dann das Feld einer **kontinuierlichen Ladungsverteilung**:

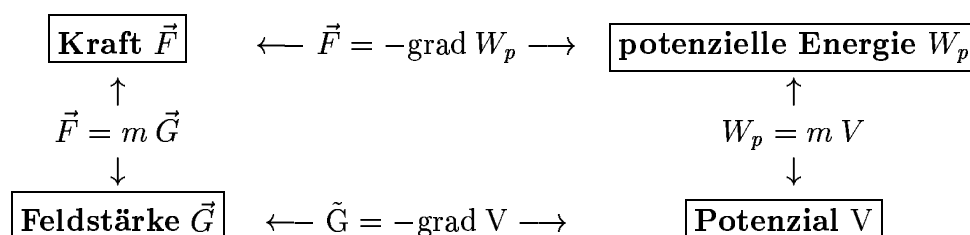
$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{Volumen}} \frac{\rho(\vec{r}) (\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} dV \quad (1.41)$$

Um dieses Integral lösen zu können, sind einige mathematische Klammzüge erforderlich.

1.4 Potenzielle Energie, elektrostatisches Potenzial und Spannung

1.4.1 Potenzial und Spannung

Erinnern wir uns noch einmal an die Gravitation. Dort haben wir folgende Begriffe eingeführt und miteinander verknüpft:



Diese Verknüpfungen gelten aber nur für konservative Kräfte \vec{F} (siehe Mechanik).

Zur Wiederholung:

Eine Kraft \vec{F} ist konservativ, wenn eine der folgenden, zueinander äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- Die gesamte entlang eines beliebigen geschlossenen Weges geleistete Arbeit ist gleich null.

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0 \quad (1.42)$$

- Die Arbeit W , die man verrichten muss, um von einem Ort A zu einem anderen Ort B zu gelangen, ist wegunabhängig (siehe Abb. 1.24).

- Die zur konservativen Kraft gehörige Feldstärke \vec{G} (Schwerefeldstärke \vec{G} bzw. elektrische Feldstärke \vec{E}) lässt sich durch das Gradientenfeld $-\text{grad } V$ eines skalaren Vektorfeldes V darstellen.

$$\vec{G} = -\text{grad } V \quad (1.43)$$

- Später werden wir noch einen weiteren Differenzialoperator kennen lernen, die Rotation. Mit Hilfe der Rotation eines Kraftfeldes \vec{G} (schreibe $\text{rot } \vec{G}$) können wir ein weiteres äquivalentes Kriterium aufstellen (ohne Beweis):

$$\text{rot } \vec{G} = 0 \quad (1.44)$$

Beim Gravitationsfeld \vec{G} haben wir gesehen, dass es ein konservatives Kraftfeld ist. Dies liegt daran, dass eine Masse M (mit Ortsvektor \vec{r}_0) ein radial verlaufendes Feld erzeugt, dass also

$$\vec{G}(\vec{r}) \parallel (\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (1.45)$$

gilt. In Abschnitt 1.2.5 hatten wir gesehen, dass COULOMB-Kraft und Gravitationskraft die gleiche Struktur haben. Diese Analogie-Betrachtung berechtigt uns, das elektrische Feld als konservatives Kraftfeld anzunehmen (ohne Beweis). Wir führen daher zum Gravitationsfeld analoge Betrachtungen beim elektrischen Feld durch. Um nun eine positive, punktförmige Probeladung Q im elektrischen Feld von Punkt A nach B zu verschieben (s. Abb. 1.24, entnommen aus [3]), muss gegen das Feld eine Verschiebungsarbeit geleistet werden:

$$W_{AB} = - \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \, d\vec{r} \quad \text{mit} \quad \vec{F}(\vec{r}) = -q \cdot \vec{E}(\vec{r}). \quad (1.46)$$

Aufgrund des Energieerhaltungssatzes muss die Verschiebungsarbeit unabhängig von dem gewählten Weg von A nach B sein. (Es macht also keinen Unterschied, ob man in Abb. 1.24 den Weg 1 oder 2 wählt). Daraus folgt:

$$\int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \, d\vec{r} + \int_B^A \vec{F}(\vec{r}) \, d\vec{r} = \oint \vec{F}(\vec{r}) \, d\vec{r} = 0, \quad (1.47)$$

d.h., bei der Bewegung einer Punktladung auf einem geschlossenen Weg (angedeutet durch den Kreis im Integralzeichen) wird keine Arbeit verrichtet. Für das Kraftfeld bedeutet dies, analog zur Mechanik:

$$W = 0 \Leftrightarrow \vec{F}(\vec{r}) \text{ ist ein konservatives Kraftfeld} \quad (1.48)$$

$$\Leftrightarrow \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \, d\vec{r} \quad \text{ist wegunabhängig.} \quad (1.49)$$

	Gravitationsfeld	elektrisches Feld
Kraft	Massenanziehungskraft (Gravitationskraft) $\mathbf{F}_{\text{Gr}} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{r}_0$ $\mathbf{F}_{\text{Gr}} = m\mathbf{g}; \mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m}$	Ladungsanziehungskraft (Coulombkraft) $\mathbf{F}_{\text{el}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \mathbf{r}_0$ $\mathbf{F}_{\text{el}} = Q\mathbf{E}; \mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_{\text{el}}}{Q}$
Energie	$W_{\text{Gr}} = m\varphi_{\text{Gr}}$	$W_{\text{el}} = Q\varphi_{\text{el}}$
Potential- änderung	$d\varphi_{\text{Gr}} = -\mathbf{g} d\mathbf{y}$	$d\varphi_{\text{el}} = -\mathbf{E} d\mathbf{y}$
Potential- linien	Linien gleicher poten- tieller Energie (Höhenlinien) $\mathbf{g} = -\mathbf{grad} \varphi_{\text{Gr}}$	Linien gleichen elektri- schen Potentials (Äquipotentiallinien) $\mathbf{E} = -\mathbf{grad} \varphi_{\text{el}}$
Teilchen- beschleunigung	senkrecht zu den Höhen- linien in Richtung des steilsten Abfalls	senkrecht zu den Äqui- potentiallinien in Rich- tung der größten Poten- tialänderung
Veranschau- lichung	<p>Falllinien</p> <p>Höhenlinien</p>	<p>Feldlinien</p> <p>Äquipotentiallinien</p>

Abbildung 1.23: Vergleich von Gravitations- und elektrischem Feld

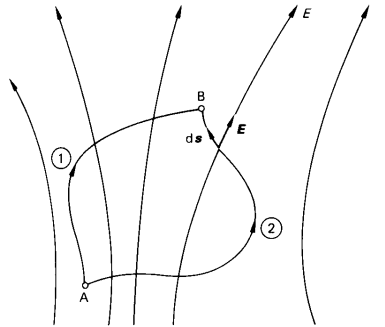


Abbildung 1.24: Auf einem geschlossenen Weg wird keine Arbeit verrichtet

Wie bei der Gravitation können wir dementsprechend neben der **potenziellen Energie** W_p auch ein **elektrisches Potenzial** φ definieren. Die Arbeit W_{AB} , die beim Verschieben der Ladung von A nach B eingebracht wird, erhöht die potenzielle Energie W_p , und es gilt:

$$W_{AB} = W_p(B) - W_p(A) = -q \int_A^B \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (1.50)$$

Das **elektrische Potenzial** φ ist definiert als der Quotient aus der potenziellen Energie W_p und der Probeladung q :

$$\varphi = \frac{W_p}{q} \quad (1.51)$$

Hiermit lässt sich Gleichung 1.50 schreiben als:

$$\varphi(B) - \varphi(A) = - \int_A^B \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (1.52)$$

Mit dieser Gleichung kann man nun eine weitere wichtige Größe des Elektromagnetismus definieren, die **Spannung**:

$$\boxed{U = \varphi(B) - \varphi(A) = \text{Potenzialdifferenz} = \text{elektrische Spannung}.} \quad (1.53)$$

Die Dimension des elektrischen Potenzials und der elektrischen Spannung ist

$$[\varphi] = [U] = \frac{\text{Nm}}{\text{C}} = \frac{\text{Nm}}{\text{As}} = \text{V} = \text{Volt}. \quad (1.54)$$

(In esu -Einheiten ist 1 statvolt = 300 V).

Zwischen zwei Punkten herrscht eine Spannung von $U = 1 \text{ V}$, wenn bei der Überführung der Ladungsmenge von 1 C zwischen diesen Punkten die Arbeit $W = 1 \text{ Nm}$ verrichtet wird. Ausgehend vom Volt sind auch noch folgende Spannungseinheiten gebräuchlich:

$$\begin{array}{ll} 1 \text{ Mikrovolt} = 1 \mu\text{V} = 10^{-6} \text{ V} & 1 \text{ Kilovolt} = 1 \text{ KV} = 10^3 \text{ V} \\ 1 \text{ Millivolt} = 1 \text{ mV} = 10^{-3} \text{ V} & 1 \text{ Megavolt} = 1 \text{ MV} = 10^6 \text{ V} \\ & 1 \text{ Gigavolt} = 1 \text{ GV} = 10^9 \text{ V} \end{array}$$

Das elektrische Potenzial $\varphi(\vec{r})$ ist ein Skalarfeld, das aufgrund der gegebenen Definition nur bis auf eine beliebige additive Integrationskonstante bestimmt ist. Man kann für einen Ortspunkt ein bestimmtes Potenzial festlegen, wenn man einen Nullpunkt für das Potenzial festsetzt. Um möglichst einfach mit diesen Gleichungen arbeiten zu können, definiert man häufig $\varphi(\vec{r}) = 0$ für $r \rightarrow \infty$. Damit ist das elektrostatische Potenzial:

$$\varphi(\vec{r}_0) = \varphi(\vec{r}_0) - \varphi(\vec{r}_\infty) = - \int_{\infty}^{\vec{r}_0} \vec{E}(\vec{r}) \, d\vec{r} = \int_{\vec{r}_0}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}) \, d\vec{r}. \quad (1.55)$$

Man beachte, dass es sich bei $\varphi(\vec{r}_0)$ um ein **Skalarfeld**, bei $\vec{E}(\vec{r})$ hingegen um ein **Vektorfeld** handelt! Nach dieser Definition stellt $\varphi(\vec{r})$ die Spannung im Punkt r gegen das Unendliche dar. Die Bedeutung des Potenzials liegt darin, dass bei Kenntnis dieser skalaren Größe als Funktion des Ortes sowohl Spannungen zwischen verschiedenen Punkten als auch die elektrische Feldstärke \vec{E} in jedem Punkt ermittelt werden kann. Dabei kommt jedoch der Größe des Potenzials in einem Punkt keinerlei physikalische Bedeutung zu, was auch schon aus der willkürlichen Wahl des Nullpunktes für das Potenzial folgt. **Spannungen und elektrische Feldstärken werden allein durch Potenzialdifferenzen bestimmt**, also besitzen nur diese einen physikalischen Aussagewert.

1.4.2 Potenzial einer Punktladung

Als erstes Beispiel berechnen wir das **Potenzial einer Punktladung**. Für unsere Betrachtung ist es sinnvoll, den Ursprung des Koordinatensystems auf die Ladung Q zu legen. Die elektrische Feldstärke ist

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (1.56)$$

Damit berechnet sich das Potenzial als

$$\varphi(\vec{r}_0) = \int_{\vec{r}_0}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}) \, d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\vec{r}_0}^{\infty} \frac{\vec{r} \, d\vec{r}}{r^3}. \quad (1.57)$$

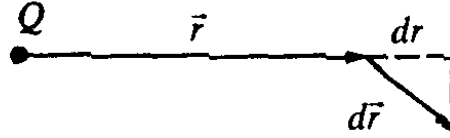


Abbildung 1.25: dr ist die Komponente von $d\vec{r}$ in Richtung \vec{r}

Es ist $\vec{r}d\vec{r} = r dr$, denn dr ist die Komponente von $d\vec{r}$ in Richtung von \vec{r} (s. Abb 1.25, entnommen aus [15]). (Achtung: Nicht mit $|d\vec{r}|$ verwechseln!). Damit ist

$$\varphi(\vec{r}_0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\vec{r}_0}^{\infty} \frac{\vec{r}d\vec{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^{\infty} \frac{r dr}{r^3} \quad (1.58)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \quad (1.59)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_0}^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(0 + \frac{1}{r_0} \right). \quad (1.60)$$

$\varphi(\vec{r}_0) = \varphi(r_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_0}.$	Potenzial einer Punktladung (1.61)
---	--

Das Potenzial einer Punktladung ist also genau wie ihr Feld kugelsymmetrisch. Wir können somit elektrische Felder auch durch **Äquipotenziallinien** oder **-flächen** veranschaulichen. Diese Linien oder Flächen enthalten alle Punkte gleichen Potentials. Bei der Verschiebung einer Ladung zwischen zwei Punkten derselben Äquipotenzialfläche ist für jeden beliebigen Weg die erforderliche Arbeit Null:

$$W_{12} = q [\varphi(2) - \varphi(1)], \quad \text{da } \varphi(1) = \varphi(2), \quad \text{folgt } W_{12} = 0 \quad (1.62)$$

Aus der Tatsache, dass für das Verschieben einer Ladung auf einer Äquipotenzialfläche keine Arbeit nötig ist, folgt weiter, dass diese Flächen senkrecht zu den elektrischen Feldlinien verlaufen. Elektrische Felder können also auch durch ihre Äquipotenziallinien bzw. -flächen veranschaulicht werden. In Abb. 1.26 (links) sieht man das Potenzial und die Niveauflächen einer Punktladung in zweidimensionaler Darstellung. Abb. 1.26 (Mitte) zeigt das Potenzial einer Punktladung dreidimensional. Die Kreise stellen die Niveauflächen dar und müssten eigentlich Kugeln sein, da es sich um eine Punktladung handelt, d.h. eigentlich müsste die Darstellung 4- dimensional sein. Abb. 1.26 (rechts) zeigt die Projektionen auf die (x, y) - Ebene bzw. die (φ, x) - Ebene. Alle Abbildungen stammen aus [9]

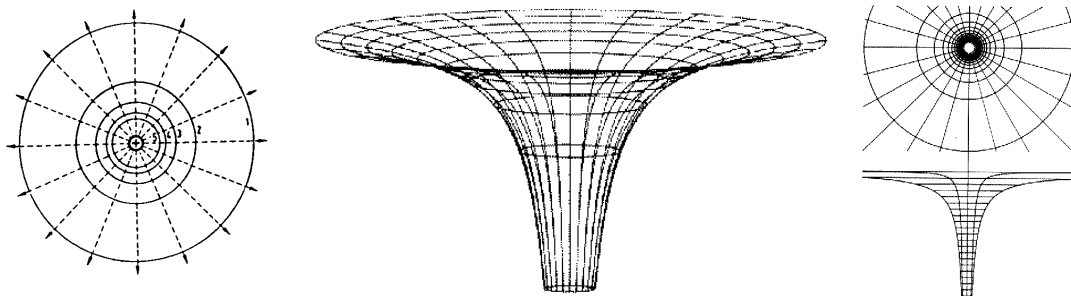


Abbildung 1.26: Potenzial einer Punktladung

Kann man das Potenzial messen?

Bisher haben wir das Potenzial nur als eine Rechenvorschrift analog zur Gravitation kennengelernt. Daraus ergibt sich die Frage, ob das Potenzial auch messbar ist, oder ob es nur einen Formalismus darstellt. Um diese Frage beantworten zu können, wollen wir versuchen, das Potenzial einer Punktladung in Form einer Kugel mit einem Durchmesser von etwa 20 cm zu messen. Bevor wir dies tun können, müssen wir uns mit der Messtechnik vertraut machen.

Um in einem elektrischen Feld das Potenzial eines Punktes zu messen, benutzen wir eine Messsonde. Desweiteren benötigen wir einen Bezugspunkt, z. B. die Erde (als Nullpotenzial), deshalb wird die Messsonde mit der Erde verbunden (man sagt, sie wird „geerdet“). Nimmt man als Messsonde einen Metalldraht, so kann die Messung verfälscht werden, da auf dem Draht ebenfalls Ladungen sitzen können. Diese Ladungen können verschiedene Ursachen haben, z.B. Influenzladung. Das Elektroskop nimmt daher nicht das Potenzial an, das dem Sondenort bei ungestörter Ladungsverteilung entspricht. Das Potenzial kann sich nur dann einstellen, wenn die Überschussladung entfernt wird. Dies gilt auch für die Influenzladungen, die vom Draht bis zum Elektroskop auf die Sonde fließen, wenn diese ins Feld geführt wird, da sich das Potenzial erst einstellen muss. Um die überflüssigen Ladungen zu beseitigen, lässt man an der auszumessenden Raumstelle eine kleine Flamme brennen, in die man die Sonde hineinhält. Die Flamme macht durch Ionisation die Luft leitend, weshalb man solche Sonden auch **Flammensonden** nennt. Hierdurch fließen die überschüssigen Ladungen zu ihren Bildladungen und neutralisieren sich dort mit diesen. Ist die Sonde also dünn genug, so verteilen sich die Ladungen so, als ob keine Sonde vorhanden wäre. Somit muss das Elektrometer jetzt das richtige Potenzial anzeigen.

Versuch 1.16

Wir benötigen eine Hochspannungsquelle, eine Flammsonde und ein Voltmeter (hier: Elektroskop) und eine Konduktorkugel. Den Pluspol der Hochspannungsquelle verbinden wir mit der Konduktorkugel. Der negative Pol der

Spannungsquelle, die Flammsonde und eine Seite des Voltmeters werden auf Erde gelegt. Der andere Teil der Sonde wird ebenfalls mit dem Voltmeter verbunden.

Im ersten Teil des Versuches führen wir die Flammsonde in konstantem Abstand um die Kugel, im zweiten Teil entfernen wir uns radial von der Kugel. Im ersten Fall beobachten wir eine konstante Spannung, also ein konstantes Potenzial, im zweiten Fall nimmt die Spannung mit $1/r$ ab.

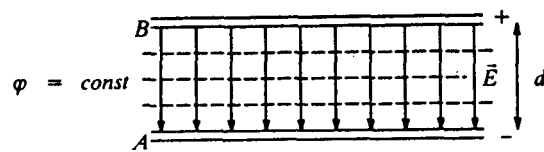


Abbildung 1.27: Plattenkondensator

1.4.3 Homogenes Feld eines Plattenkondensators

Bei dem zweiten Beispiel wollen wir uns das homogene Feld eines Plattenkondensators anschauen. Der Kondensator habe den Plattenabstand d und es herrsche eine Spannung U zwischen den Platten, wie in Abb 1.27 dargestellt (entnommen aus [15]). Dann ist:

$$U = - \int_A^B \vec{E} \, d\vec{r} = \int_B^A \vec{E} \, d\vec{r} = E \cdot d. \quad (1.63)$$

$$\boxed{E = \frac{U}{d}}. \quad (1.64)$$

Mit den folgenden Versuchen wollen wir die $1/d$ -Proportionalität der elektrischen Feldstärke beim Plattenkondensator überprüfen.

Versuch 1.17

Hierzu nehmen wir den gleichen Versuchsaufbau wie beim homogenen Feld (s. S. 29). Es wird jedoch folgende Änderung vorgenommen: Der Plattenabstand wird vergrößert und der leitende Tischtennisball wird asymmetrisch zwischen die Platten gehängt (s. Abb. 1.28, entnommen aus [15]). Mit einer Hochspannungsquelle wird im Kondensator ein elektrisches Feld aufgebaut und

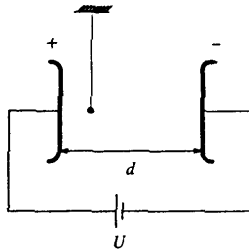


Abbildung 1.28: Versuch zum Nachweis der $1/d$ -Abhängigkeit im Plattenkondensator

der Tischtennisball mit einem elektrischen Löffel geladen. Durch diese aufgebraachte Ladung erfährt der Ball keine Auslenkung, da seine Ladung bzw. die wirkenden Kräfte nicht groß genug sind. Anschließend wird der Plattenabstand verringert und man sieht, dass der Ball langsam ausgelenkt wird. Ist der Abstand klein genug, stößt er an die Platte und wird zur anderen Platte abgestoßen. Dieser Vorgang wiederholt sich nun fortlaufend. Wir sehen, dass die elektrische Feldstärke bei zunehmendem Plattenabstand d mit $1/d$ abnimmt.

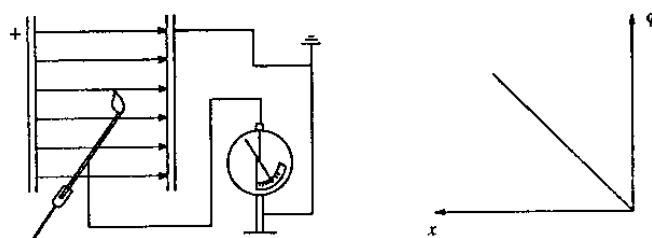


Abbildung 1.29: Potenzialmessung mittels Flammensonde

Versuch 1.18

Im zweiten Versuch überprüfen wir das Potenzial mit Hilfe der Flammente, in Analogie zu der Punktladung. Der Aufbau ist in Abb. 1.29 (links) schematisch dargestellt. Zuerst führen wir die Sonde entlang einer Äquipotenzialfläche, also parallel zu den Platten. Wir beobachten, dass das Potenzial konstant ist. Auf dieser Äquipotenziallinie führen wir nun die Sonde aus dem Feld heraus und anschließend am Feld entlang, also senkrecht zu den Platten. In beiden Fällen beobachten wir einen Abfall des Potenzials. Im zweiten Fall fällt das Potenzial linear von der positiven Platte zur negativen Platte hin ab, d. h. φ ist linear zum Plattenabstand d . Eine graphische Darstellung des erwarteten Ergebnisses ist in Abb. 1.29 (rechts) dargestellt.

1.5 Potenzial einer beliebigen Ladungsverteilung

Für die elektrische Kraft und das elektrische Feld gilt das Superpositionsgesetz:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad \text{und} \quad \vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i. \quad (1.65)$$

Es soll nun gezeigt werden, dass dieses Prinzip auch für das Potenzial seine Gültigkeit behält.

$$\varphi = \int \vec{E} \, d\vec{r} = \int \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \, d\vec{r} = \sum_{i=1}^n \int \vec{E}_i \, d\vec{r} = \sum_{i=1}^n \varphi_i. \quad (1.66)$$

Das Superpositionsprinzip überträgt sich also auf das Potenzial. Für mehrere Punktladungen ergibt sich somit:

$$\varphi(P_0) = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|} \quad (1.67)$$

$\varphi(P_0)$ ist das Potenzial im Punkt P_0 mit dem Ortsvektor \vec{r} .

1.5.1 Der elektrische Dipol

Unter einem Dipol versteht man zwei kleine, entgegengesetzt geladene und gleich große Punktladungen $+Q$ und $-Q$, die sich im Abstand l voneinander befinden, der klein ist gegen die Entfernung r des Aufpunktes P_0 von der Dipolmitte. \vec{l} sei ein Vektor, der durch seine Richtung von $-Q$ nach $+Q$ die Orientierung des Dipols bestimmt. Eine solche Ladungsverteilung und das zugehörige Feldlinienbild haben wir bereits auf Seite 25