Versuch 1.9

> Wir nehmen den Bandgenerator in Betrieb und nähern seinem Dom eine kleine Konduktorkugel, die an einem isolierenden Stab befestigt ist. Befindet sich auf dem Dom genügend Ladung, so springt ein Funke von dem Dom zur Konduktorkugel über.

Auf diese Weise können sehr hohe Flächenladungsdichten erzeugt werden. Mit solchen Bandgeneratoren werden Hochspannungen bis $12 \cdot 10^6$ Volt erzeugt. In der Kernphy-

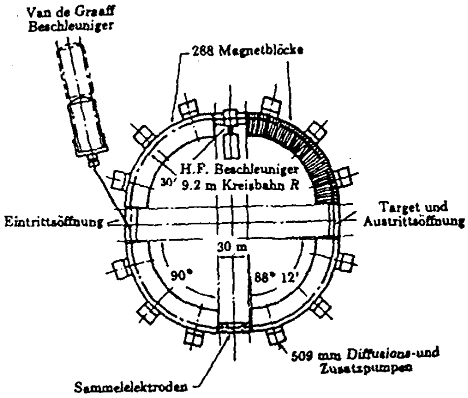

Abbildung 1.11: Kosmotron

sik werden VAN-DE-GRAAFF-Generatoren zur Beschleunigung von Elektronen und den leichtesten Atomkernen eingesetzt. Die Abb. 1.11 (aus [15]) zeigt das KOSMOTRON der BROOKHAVEN NATIONAL LABORATORY mit einem VAN-DE-GRAAFF-Beschleuniger, bei dem die Paarerzeugung nachgewiesen wurde.

1.2 Das COULOMBsche Gesetz

Wir haben gesehen, dass elektrische Ladungen Kräfte aufeinander ausüben. Im Folgenden sollen nun die Abhängigkeiten dieser Kräfte näher untersucht werden.

1.2.1 Die $1/r^2$- Abhängigkeit

Als erster erkannte bereits C. F. GAUSS (1777-1855), dass ein $1/r^2$-Gesetz für das elektrische Feld gelten muss, wenn jeder Punkt im Inneren einer geladenen Kugel feldfrei ist. Hier soll mit Hilfe einer Argumentation von J.PRIESTLY (1733-1804) gezeigt werden, dass diese Annahme richtig ist. Wir führen in das Innere einer geladenen Hohlkugel mit Ra-

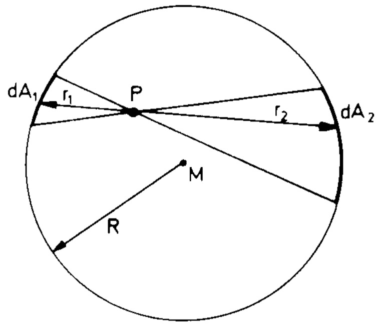

Abbildung 1.12: Zur Herleitung der $1/r^2$-Abhängigkeit

dius R, deren Ladung gleichmäßig über die Oberfläche ist, eine Ladungsmenge Q ein. Sie befinde sich am Ort P (s. Abb. 1.12, entnommen aus [17]). Die Ladung Q der Kugel pro Flächeneinheit A, auch **Ladungsdichte** σ genannt, beträgt daher

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4\pi R^2}. \tag{1.5}$$

Nun wählen wir ein beliebiges Flächenelement $\mathrm{d}A_1$ auf der Kugel aus und verbinden seine Begrenzung mit dem Punkt P und darüber hinaus, so dass ein Doppelkegel entsteht. Der Doppelkegel schneidet aus der Kugeloberfläche die Flächen $\mathrm{d}A_1 = r_1^2 {\cdot} \mathrm{d}\Omega$ und $\mathrm{d}A_2 = r_2^2 {\cdot} \mathrm{d}\Omega$ heraus; wobei $\mathrm{d}\Omega$ der Raumwinkel des Kegels und r_1 und r_2 die auf einer Geraden liegenden Abstände der infinitisimalen Flächen $\mathrm{d}A_1$ und $\mathrm{d}A_2$ vom Scheitel des Kegels sind. Aufgrund der gleichmäßigen Ladungsverteilung befinden sich auf den beiden Flächenelementen die Ladungen $\mathrm{d}Q_1 = \sigma \cdot dA_1$ und $\mathrm{d}Q_2 = \sigma \cdot \mathrm{d}A_2$. Diese üben auf die dritte Ladung q, die sich im Punkt P befindet, Kräfte aus, deren Wirkungen sich aufheben müssen, da sie von den sich auf gegenüberliegenden Flächenstücken befindlichen Ladungen herrühren, denn nur dann ist gewährleistet, dass in dem beliebig gewählten Punkt P in keiner Richtung eine Kraftwirkung auftritt. Für die Beträge der von $\mathrm{d}Q_1$ und $\mathrm{d}Q_2$ auf q ausgeübten Kräfte $\mathrm{d}F_1$ und $\mathrm{d}F_2$ gilt:

$$\mathrm{d}F_1 = \mathrm{d}Q_1\, q\, f(r_1) \qquad \text{bzw.} \qquad \mathrm{d}F_2 = \mathrm{d}Q_2\, q\, f(r_2) \tag{1.6}$$

wobei $f(r)$ eine noch zu bestimmende Funktion der Abstände r_1 und r_2 der jeweiligen Ladungen voneinander ist. Beide Kräfte müssen gleich sein, also

$$\mathrm{d}F_1 = \mathrm{d}F_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{d}Q_1\, q\, f(r_1) = \mathrm{d}Q_2\, q\, f(r_2). \tag{1.7}$$

Hieraus folgt

$$\frac{f(r_2)}{f(r_1)} = \frac{\mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}Q_2} = \frac{\sigma\,\mathrm{d}A_1}{\sigma\,\mathrm{d}A_2} = \frac{r_1^2 \cdot \mathrm{d}\Omega}{r_2^2 \cdot \mathrm{d}\Omega} = \frac{r_1^2}{r_2^2}, \tag{1.8}$$

und daraus

$$f(r_1)\, r_1^2 = f(r_2)\, r_2^2 = const =: k. \tag{1.9}$$

Diese Beziehung liefert

$$f(r_1) = \frac{k}{r_1^2} \qquad \text{und} \qquad f(r_2) = \frac{k}{r_2^2}, \tag{1.10}$$

so dass für die beiden Kräfte jetzt geschrieben werden kann:

$$\mathrm{d}F_1 = k\frac{\mathrm{d}Q_1\, q}{r_1^2} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{d}F_2 = k\frac{\mathrm{d}Q_2\, q}{r_2^2} \tag{1.11}$$

Aus diesem Ergebnis folgt, dass zwei Punktladungen Q und Q', die sich im Abstand r voneinander befinden, aufeinander die Kraft

$$F = k\frac{Q\, Q'}{r^2} \tag{1.12}$$

ausüben.

1.2.2 Experimentelle Überprüfung des COULOMBschen Gesetzes

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, dass aus der beobachteten Feldfreiheit im Inneren von Leitern auf die $1/r^2$- Abhängigkeit der wirkenden elektrischen Kräfte geschlossen werden kann.
Die erste direkte Messung der elektrischen Kraft wurde von C. A. DE COULOMB (1736-1806) vorgenommen. Die dazu benutzte Drehwaage ist in Abb. 1.13 (entnommen aus [1]) schematisch dargestellt.

Versuch 1.10

An einem sehr dünnen Metallfaden (F) hängt waagerecht ein dünner Kunststoffstab. Dieser trägt an einem Ende eine kleine Metallkugel (K_1), am anderen Ende ein gleichschweres Gegengewicht. Eine zweite, gleichgroße Metallkugel (K_2) wird elektrisch geladen und dicht neben die erste Kugel gestellt. Durch eine kleine Drehung am Torsionskopf (T) kann man leicht erreichen, dass die Kugel (K_1) gerade eben die Kugel (K_2) berührt. Diese gibt nun die Hälfte der Ladung an (K_1) ab, da beide Kugeln gleich groß sind. An der Vergrößerung des Abstandes von (K_1) und (K_2), der mit Hilfe eines am Spiegel (Sp) reflektierten Lichtstrahls gemessen werden kann, kann man nun die Kräfte ermitteln, mit denen die Kugeln abgestoßen werden. Der Ausschlag des Lichtzeigers wird markiert. Die Größe der Kraft hängt von der Ladung

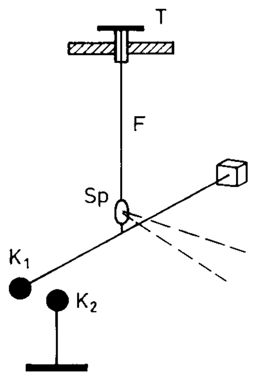

Abbildung 1.13: COULOMBsche Drehwaage

ab, die zu Anfang auf die Kugel (K_2) übertragen wurde. Nun wird die Ladung Q_2 auf der Kugel (K_2) mit Hilfe einer gleichgroßen neutralen Kugel halbiert bzw. geviertelt, worauf hin sich auch der Abstand halbiert bzw. viertelt. Die bisherigen Versuch wurden mit einem Radius $r = 20$ cm durchgeführt. Nun wird der Radius auf $r = 14,14$ cm ($= 20$ cm $\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$) bzw. $r = 10$ cm verkürzt und man beobachtet, dass der Ausschlag sich verdoppelt bzw. vervierfacht.

Wir haben gesehen, dass die Kraft zwischen zwei elektrisch geladenen Körpern dem Produkt der beiden Elektrizitätsmengen, die auf den Körpern sitzen, direkt und dem Quadrat ihrer Entfernung umgekehrt proportional ist. Die Kraft hat die Richtung der Verbindungslinie der beiden Ladungen. Die Gesetzmäßigkeit lautet also:

$$F \sim \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}, \tag{1.13}$$

wobei Q_i die Ladungen sind und r der Abstand. Das COULOMBsche Gesetz ist heute bis zu Abständen von 10^{-16}m (d.h. 1/10 des Proton-Durchmessers) experimentell überprüft worden (z.B. durch $e^+ - e^-$ Streuung im Speicherring PETRA im DESY).

1.2.3 Dimension der Ladung

Im Prinzip ist die Dimension der Ladung frei wählbar. Sie kann z.B. dadurch festgelegt werden, dass man in

$$F = k\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \tag{1.14}$$

$k = 1$ setzt, wie es das elektrostatische (GAUSSsche) **cgs-System** macht. Die Dimension der Ladung wird hier aus den **mechanischen Grundeinheiten** abgeleitet:

$$[Q] = [\sqrt{\text{Kraft}}] \cdot [\text{Länge}] = \sqrt{\text{dyn}} \cdot \text{cm} = \text{g}^{\frac{1}{2}}\text{cm}^{\frac{3}{2}}\text{s}^{-1}. \tag{1.15}$$

Diese Einheit wird als (absolute) **elektrostatische Ladungseinheit esu** (elektrostatic unit) bezeichnet. Man kann auch **statcoulomb** benutzen:

$$\text{g}^{\frac{1}{2}}\text{cm}^{\frac{3}{2}}\text{s}^{-1} = 1 \text{ esu} \mathrel{\hat{=}} 1 \text{ statcoulomb}. \tag{1.16}$$

Dieses System ist in der Atom- und Kernphysik sowie in der theoretischen Physik noch sehr gebräuchlich, es entspricht aber nicht dem SI- System und soll daher hier nicht benutzt werden.
Im **SI-System** wird die Ladung über den Strom definiert (Siehe Abschnitt 3.1, Seite 91):

$$\text{Strom } I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}. \tag{1.17}$$

Der Strom wird im SI-System als **elektrische Grundgröße** über seine **magnetische Wirkung** eingeführt (siehe „Definition des Ampère“ 4.35 auf Seite 157) :

1 Ampere (A) ist der Strom, der in zwei unendlich langen Leitern in 1 m Abstand die Kraft von $2 \cdot 10^{-7}\frac{\text{N}}{\text{m}}$ hervorruft . (1.18)

Damit ist die Einheit der Ladung:

$$[\text{Ladung}] = [\text{Strom}] \cdot [\text{Zeit}] = \text{A} \cdot \text{s} = \text{C} = \text{Coulomb} \tag{1.19}$$

$$1 \text{ C} \mathrel{\hat{=}} 3 \cdot 10^9 \text{ esu}. \tag{1.20}$$

Hiermit ergibt sich für die Konstante k

$$k = 8{,}988 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \simeq 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}. \tag{1.21}$$

Im allgemeinen definiert man k folgendermaßen (Erklärung später):

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad \text{mit} \qquad \varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}, \tag{1.22}$$

wobei der Faktor 4π die Kugelsymmetrie berücksichtigt und ε_0 die **elektrische Feldkonstante** (oder **Dielektrizitätskonstante** oder **Influenzkonstante**) heißt.

Damit lautet

das **COULOMBsche Gesetz**:

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \qquad \text{(im SI – System)} \tag{1.23}$$

F_C ist die sog. **COULOMB-Kraft**.

Beispiel 1.1

Als Beispiel wollen wir ein Gedankenexperiment unternehmen. Nehmen wir einmal an, es wäre möglich, alle positiven Ladungen, die in 1 g Kupfer enthalten sind an einer Stelle im Raum zu sammeln und die negativen Ladungen an einer anderen Stelle etwa 1 m davon entfernt. Mit welcher Kraft würden sich die beiden Ladungsansammlungen anziehen?
Jedes Kupferatom besteht aus 29 Elektronen und genauso vielen Protonen. Die Atommasse beträgt 63,5 u. Aus der Atommasse in u können wir entnehmen, dass in 63,5 g Kupfer $6,023 \cdot 10^{23}$ Atome enthalten sind (LOSCHMIDTsche Zahl). Damit sind in 1 g Kupfer $9,49 \cdot 10^{21}$ Atome enthalten. Da jedes Atom aus je 29 Elektronen und Protonen besteht, sind also insgesamt je $9,49 \cdot 10^{21} \cdot 29 = 2,75 \cdot 10^{23}$ Elektronen und Protonen in dem Gramm Kupfer enthalten. Da Elektronen und Protonen betragsmäßig dieselbe Ladung $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C haben, liegt eine Ladungsmenge von je

$$2,75 \cdot 10^{23} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}\,\text{C} = 44055\,\text{C} \tag{1.24}$$

vor. In einem Abstand von 1 m wirkt dann eine COULOMB-Kraft von

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \tag{1.25}$$

$$\approx 8,988 \cdot 10^9 \frac{\text{N m}^2}{C^2} \cdot \frac{44055\,\text{C} \cdot 44055\,\text{C}}{1\text{m}^2} \tag{1.26}$$

$$= 1,74 \cdot 10^{19}\text{N}. \tag{1.27}$$

1.2.4 Vektorielle Schreibweise und Superposition

Die Abb. 2.3 (aus [15]) zeigt zwei gleich geladene Ladungsmengen im Abstand r_{12}. $\vec{r}_{12}$ sei der Ortsvektor, dessen Richtung von Q_1 auf Q_2 weist. Die Kraft $\vec{F}_{12}$ bezeichne die Kraft, die von Q_1 auf Q_2 ausgeübt wird. Für die Kraft $\vec{F}_{12}$ gilt:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \tag{1.28}$$

Nach dem 3. NEWTONschen Axiom (actio = reactio) gilt: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ Um die Gesamtkraft von mehreren Ladungen Q_i zu berechnen, müssen die Einzelkräfte, analog zu Kräften in der Mechanik, aufaddiert werden.
Betrachten wir dazu ein Beispiel:

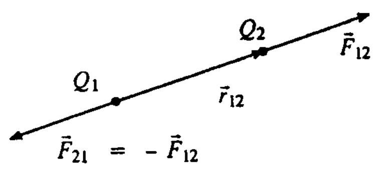

Abbildung 1.14: Kraft zwischen zwei Ladungen

Beispiel 1.2

Drei Ladungen Q_1, Q_2 und Q_3 befinden sich an den Eckpunkten eines gleichschenkligen Dreiecks, wie es in Abb. 1.15 (entnommen aus [3]) dargestellt ist. Die Ladungen seien betragsmäßig gleich, Q_1 und Q_3 seien positiv und Q_2

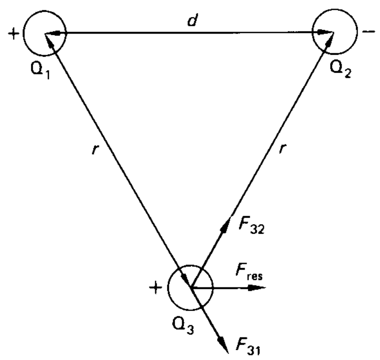

Abbildung 1.15: Wie groß ist die Kraft auf Q_3?

negativ. Gesucht ist die auf Q_3 wirkende Kraft F_{res}.
Das Ladungsdreieck $Q_1\ Q_2\ Q_3$ ist dem Kräftedreicke $F_{res}\ F_{32}\ F_{31}$ ähnlich, so dass gilt:

$$\frac{|F_{res}|}{|F_{31}|} = \frac{d}{r}. \tag{1.29}$$

$$\text{Daraus folgt :} \qquad |F_{res}| = \frac{d}{r}|F_{31}| = \frac{d}{r}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}. = \frac{d}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^3}. \tag{1.30}$$

1.2.5 Vergleich von COULOMB- und Gravitationskraft

Die COULOMB-Kraft weist mathematisch dieselbe Struktur auf wie die Gravitationskraft. Sie ist

- eine Zentralkraft,
- symmetrisch bezüglich der Ladungen (bzw. Massen)
- nimmt quadratisch mit der Entfernung ab.

Allerdings gibt es auch einen wesentlichen Unterschied, zwischen COULOMB-Kraft und Gravitaionskraft: es gibt nur positive Massen. Daraus folgen weitere Unterschiede:

- Bei der COULOMB-Kraft gibt es Anziehung und Abstoßung, bei der Gravitationskraft gibt es nur Anziehung.

- Im elektrostatischen Fall ist Abschirmung durch entgegengesetzte Ladungen möglich, die Gravitations-Wechselwirkung kann nicht abgeschirmt werden.
  $\Rightarrow$ Die Gravitationskraft tritt überall auf, wo Materie ist, die COULOMB-Kraft tritt i.d.R. im Makrokosmos nicht in Erscheinung, da sich die Ladungen „neutralisieren" (d.h. abschirmen).

Eine Gegenüberstellung von COULOMB- und Gravitationskraft zeigt folgende Tabelle:

Unterscheidungsmerkmale	COULOMB-Kraft	Gravitationskraft
Formel	$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$ mit $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}$	$F = \gamma\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ mit $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg\,s^2}}$
Ursache	zwei Ladungen	zwei Massen
Kraftrichtung	Anziehung und Abstoßung	Anziehung
Stärke	groß	sehr klein
Abschirmbarkeit	ja	nein
Bedeutung	Zusammenhalt der Atome	Zusammenhalt des Makrokosmos

Beispiel 1.3

Vergleicht man die Kraftwirkung des elektrischen und des Gravitationsfeldes im H-Atom, so erkennt man

$$\frac{F_G}{F_{el}} \simeq 4 \cdot 10^{-40}, \tag{1.31}$$

d.h. die elektrische Kraft ist ungefähr $0,25 \cdot 10^{40}$ mal größer als die Gravitationskraft!

1.3 Das elektrische Feld

1.3.1 Das elektrische Feld

Durch die Anwesenheit einer Ladung wird der Raum verändert: Auf jede weitere elektrische Ladung wirkt eine Kraft, deren Größe und Richtung mit Hilfe des COULOMBschen Gesetzes angegeben werden kann. In Analogie zu den früher betrachteten Veränderungen des Raumes bei Anwesenheit einer Masse (Gravitationsfeld), sagen wir, es herrscht ein Feld, und da es von elektrischen Ladungen erzeugt wird, ein **elektrisches Feld**. Bei ruhenden Ladungen spricht man auch vom **elektrostatischen Feld**. Bei der Beschreibung des elektrischen Feldes erfolgt die Vorgehensweise analog zu der bei dem Gravitationsfeld.