

III. Physikalisches Institut B

Skript zur Vorlesung

Experimentalphysik II

(Elektromagnetismus)

Für Physiker und
Lehramtskandidaten

Gehalten von
Prof. Dr. G. Flügge
im SS 2001

Inhaltsverzeichnis

1	Elektrische Ladungen und Felder	1
1.1	Elektrische Ladungen	1
1.1.1	Positive und negative Ladungen	1
1.1.2	Ladungstrennung	3
1.1.3	Leiter und Isolatoren	4
1.1.4	Ladungsmessung	5
1.1.5	Ladungsverteilung in elektrischen Leitern	6
1.1.6	Die Influenz	8
1.1.7	Halbieren von Ladungsmengen	8
1.1.8	Ladungserhaltung	9
1.1.9	Elementarladung	11
1.1.10	Erzeugung hoher Ladungsmengen	13
1.2	Das COULOMBSche Gesetz	14
1.2.1	Die $1/r^2$ - Abhängigkeit	14
1.2.2	Experimentelle Überprüfung des COULOMBSchen Gesetzes	16
1.2.3	Dimension der Ladung	17
1.2.4	Vektorielle Schreibweise und Superposition	19
1.2.5	Vergleich von COULOMB- und Gravitationskraft	21
1.3	Das elektrische Feld	22
1.3.1	Das elektrische Feld	22
1.3.2	Beschreibung des elektrischen Feldes	24
1.3.3	Das homogene Feld	28
1.3.4	Beliebiges elektrisches Feld	30
1.4	Potenzielle Energie, elektrostatisches Potenzial und Spannung	31
1.4.1	Potenzial und Spannung	31
1.4.2	Potenzial einer Punktladung	35
1.4.3	Homogenes Feld eines Plattenkondensators	38
1.5	Potenzial einer beliebigen Ladungsverteilung	40
1.5.1	Der elektrische Dipol	40
1.5.2	Kontinuierliche Ladungsverteilung	41
1.6	Berechnung der Feldstärke aus dem Potenzial	43

1.7	Anwendung homogener elektrischer Felder	45
1.7.1	Der Dipol im homogenen Feld	45
1.7.2	Der Versuch von MILLIKAN zur Bestimmung der Elementarladung	48
1.7.3	Die BRAUNsche Röhre	50
1.8	Der elektrische Fluss und der Satz von GAUSS	51
1.8.1	Elektrischer Kraftfluss einer Punktladung	52
1.8.2	Kraftfluss durch eine beliebige geschlossene Fläche	53
1.8.3	Was folgt für elektrische Leiter aus dem GAUSSschen Satz?	59
1.8.4	Beweisskizze für den mathematischen Satz von GAUSS	61
2	Elektrostatik mit Leitern und Isolatoren	65
2.1	Leiter und Isolatoren	65
2.2	Leiter im elektrischen Feld und Influenz	65
2.2.1	Feld an einer Leiteroberfläche	66
2.3	Allgemeines elektrostatisches Problem	68
2.4	Elektrisches Feld einer geladenen Kugel	70
2.5	Definition der Kapazität	71
2.6	Kondensatoren	72
2.6.1	Der Plattenkondensator	72
2.6.2	Der Kugelkondensator	74
2.6.3	Der Zylinderkondensator	75
2.6.4	Schaltung von Kondensatoren	76
2.7	Energie des elektrischen Feldes	78
2.8	Isolatoren im elektrischen Feld	80
2.8.1	Zusammenhang von \vec{E} und \vec{D}	84
2.8.2	Polarisationseffekte	85
2.8.3	Energiedichte im Dielektrikum	89
3	Elektrische Stromstärke	91
3.1	Der elektrische Strom	91
3.2	Mechanismen der Stromleitung	92
3.3	Allgemeine Form des Ladungstransportes	94
3.4	Widerstand	95
3.4.1	Widerstand eines Metalldrahtes	96
3.5	Temperaturabhängigkeit von R	98
3.5.1	Zusammenhang zwischen elektrischer Leitfähigkeit und Wärmeleitfähigkeit	99
3.5.2	Supraleitung	100
3.5.3	Technische Widerstände	102
3.6	Stromkreise	103
3.6.1	Die KIRCHHOFFSchen Gesetze	103

3.6.2	Innenwiderstand	108
3.6.3	Strommessung	109
3.6.4	Spannungsmessung	109
3.6.5	Vorwiderstand und Potenziometerschaltung	111
3.6.6	Widerstandmessung	112
3.7	Beispiel für einen nicht stationären Vorgang: der RC- Kreis	113
3.7.1	Der Ladevorgang	113
3.7.2	Der Entladevorgang	114
3.8	Leitung in Flüssigkeiten	115
3.8.1	Elektrolytische Leitfähigkeit	115
3.8.2	GALVANISCHE Elemente	120
3.9	Leitung in Metallen	123
3.10	Leitung in Halbleitern	125
3.10.1	p,n- Halbleiter	125
3.10.2	Der pn- Übergang	128
3.10.3	Die Halbleiterdiode	129
3.10.4	Der Transistor	130
3.11	Ladungstransport im Hochvakuum	133
3.11.1	Glühemission	135
3.11.2	Photoemission	137
3.11.3	Sekundärelektronenemission	137
3.12	Leitung in Gasen	138
3.12.1	Die Gasentladung	138
3.12.2	Plasmaströme	143
4	Magnetostatik	145
4.1	Einleitung	145
4.1.1	Geschichte des Magnetismus	145
4.1.2	Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen Magnetismus und Elek- trizität	147
4.2	LORENTZ-Kraft	149
4.2.1	Magnetische Flasche	153
4.3	Kräfte auf Strom durchflossene Leiter	156
4.3.1	Feldkonstanten und Maßsysteme	158
4.4	Magnetisches Feld eines Strom durchflossenen Leiters	158
4.4.1	Experimentelle Überprüfung	160
4.4.2	Allgemeiner Zusammenhang zwischen \vec{B} und \vec{I}	162
4.4.3	Magnetfeld einer Spule (schematisch)	163
4.4.4	Das BIOT-SAVARTSche Gesetz	164
4.4.5	Permanentmagnete	168
4.4.6	Zusammenfassung	168

4.5	Relativität elektrischer und magnetischer Kräfte	170
4.6	Der HALL-Effekt	175
4.6.1	Klassischer HALL-Effekt	175
4.6.2	Quanten-HALL-Effekt	178
5	Magnetische Induktion	181
5.1	Experimentelle Tatsachen und deren Deutung	181
5.1.1	Quantitative Herleitung des Induktionsgesetzes	185
5.1.2	Leistungsbilanz der Induktion	187
5.2	Allgemeine Formulierung des Induktionsgesetzes	188
5.3	Differenzielle Schreibweise	190
5.3.1	Die Rotation	191
5.3.2	Satz von STOKES	192
5.4	Gegen- und Selbstinduktion	194
5.4.1	Gegeninduktion	194
5.4.2	Selbstinduktion	196
5.4.3	Ersatzschaltbild	197
5.4.4	Der Transformator	198
5.5	Ein- und Abschaltvorgänge	201
5.6	Wechselstrom	204
5.6.1	Erzeugung von Wechselspannung	205
5.6.2	Wechselstromwiderstände	205
5.7	Kräfte auf Strom durchflossene Leiterschleifen	209
5.7.1	Potenzielle Energie des magnetischen Momentes	211
5.7.2	Der magnetische Dipol im inhomogenen Magnetfeld	211
5.7.3	Drehspulinstrumente	213
6	Materie im Magnetfeld	215
6.1	Experimentelle Beobachtungen	215
6.2	Diamagnetismus und Paramagnetismus	217
6.2.1	Mikroskopische Erklärung	220
6.2.2	Gesamtfeld einer Spule mit Kern	228
6.2.3	\vec{B} - und \vec{H} -Feld eines Permanentmagneten	231
6.2.4	Vergleich zwischen Magnetismus und Elektrizität in Materie	232
6.3	Ferromagnetismus	233
6.3.1	Magnetisierungskurve (Hysteresis)	236
6.4	Temperaturabhängigkeit	237
6.5	Induktivität einer Spule mit Kern	239
6.6	Energie des magnetischen Feldes	239
7	Die MAXWELLSchen Gleichungen	241

Kapitel 1

Elektrische Ladungen und Felder

1.1 Elektrische Ladungen

Bisher haben wir uns in der Vorlesung mit der Mechanik und der Thermodynamik beschäftigt. Nun wollen wir uns mit Erscheinungen befassen, die sich nicht mit Hilfe der Mechanik und der Thermodynamik erklären lassen, dem Elektromagnetismus.

In der Mechanik ist das zentrale Thema die Gravitationskraft (Schwerkraft und Planetenbewegung). Im Folgenden werden wir zwei weitere Kräfte, die elektrische und die magnetische Kraft kennen lernen. Später werden noch die schwache Kraft (radioaktiver Zerfall) und die starke Kraft (Kernkraft) hinzukommen. Es wird sich eine zentrale Frage der Physik auftun: Lassen sich diese Kräfte zu einer einzigen Kraft vereinen?

1.1.1 Positive und negative Ladungen

Schon im Altertum war THALES VON MILET (um 600 v. Chr.) die Eigenschaft von Bernstein bekannt, nach dem Reiben leichte Gegenstände anzuziehen. Ein ähnliches Verhalten zeigen auch andere Materialien.

Versuch 1.1

Wir reiben einen Hartgummistab an einem Katzenfell und halten ihn über Papierschnipsel. Wir beobachten, dass die Schnipsel von dem Stab angezogen werden (s. Abb. 1.1.1).

Diese neue Eigenschaft der Materie benannte man nach dem Stoff, an dem man sie beobachtete $\eta\lambda\epsilon\kappa\tau\rho\upsilon\nu$, lies „Elektron“ (griechisches Wort für Bernstein) - also **Elektrizität**. Die neue Eigenschaft soll nun genauer untersucht werden:

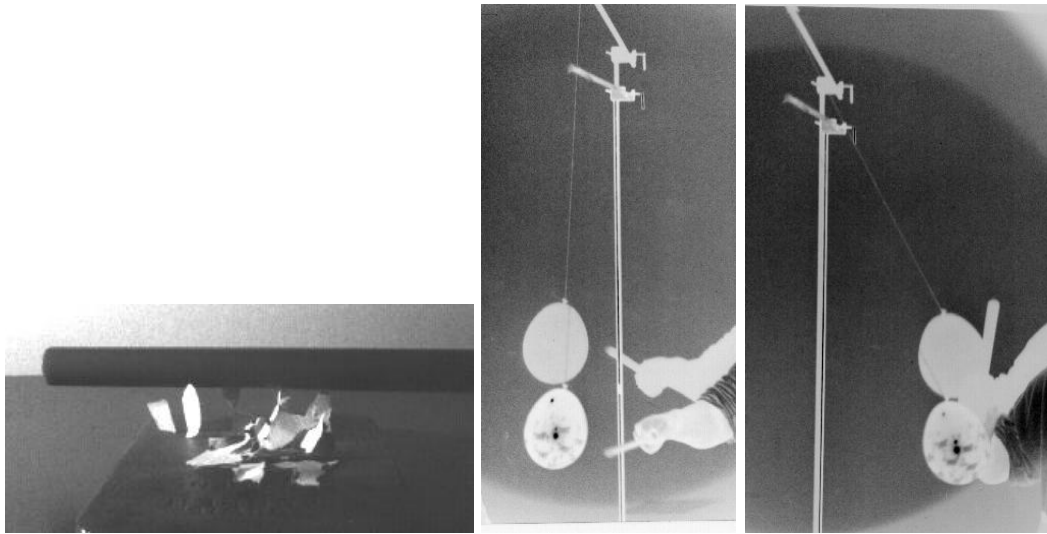


Abbildung 1.1: Versuchsergebnisse

Versuch 1.2

1. Wir reiben mit einem Fell über einen Luftballon und einen PVC-Stab. Wir nähern den Stab dem Luftballon und beobachten, dass der Luftballon von dem Stab abgestoßen wird.
2. Nun reiben wir einen Plexiglasstab an einem Seidentuch und nähern ihn dem Luftballon. In diesem Fall wird der Luftballon angezogen (s. Abb. 1.1.1).

Der gleiche Effekt zeigt sich, wenn man anstelle des Luftballons Stäbe aus gleichem Material, z.B. Plexiglas nimmt (s. Abb 1.2, entnommen aus [7]). Reibt man diese an einem Seidentuch, so stoßen sich die Stäbe ab. Tauscht man einen Plexiglasstab gegen das Seidentuch aus, so ziehen sie sich an.



Abbildung 1.2: Gleiche Ladungen stoßen sich ab, ungleiche ziehen sich an

Diese Erkenntnisse wurden zuerst um 1733 von DU FAY (1698 – 1739) und dem amerikanischen Physiker B. FRANKLIN (1707 – 1790) gewonnen. Sie erkannten, dass es zwei Arten von Elektrizität gibt und legten folgende Konvention fest:

Bernstein-, PVC-, Seide-	Elektrizität: negative Ladung
Plexiglas-, Katzenfell-	Elektrizität: positive Ladung

Im letzten Versuch haben wir gesehen, dass die elektrischen Ladungen Kräfte aufeinander ausüben. Gleich geladene Körper stoßen sich ab, entgegengesetzt geladene ziehen sich an. Die Abbildung 1.3 (aus [15]) zeigt die Wechselwirkungen zwischen gleichen und entgegengesetzten Ladungen und die auf sie wirkenden Kräfte. Wir halten fest:

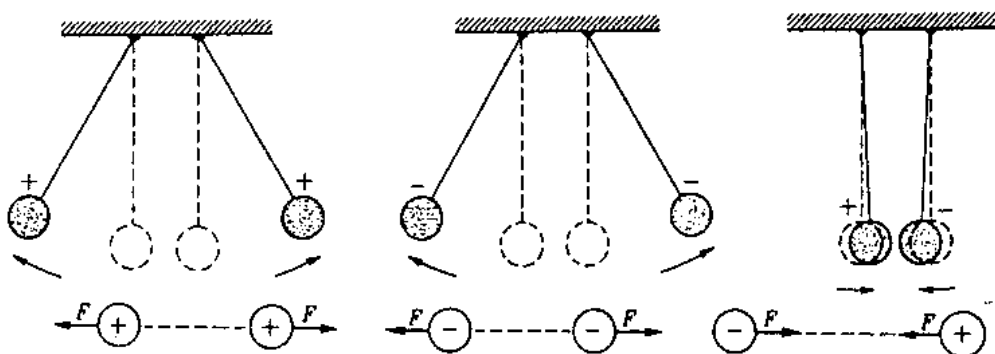


Abbildung 1.3: Kräfte auf Ladungen

Zwei Körper mit gleicher Ladung (positiv oder negativ) stoßen sich ab; haben sie entgegengesetzte Ladung, so ziehen sie sich an.

(1.1)

1.1.2 Ladungstrennung

Offensichtlich besitzen alle Körper eine große Anzahl elektrischer Ladungen. Im Allgemeinen merken wir nichts davon, da die Wirkungen der positiven und negativen Ladungen sich kompensieren.

Um Ladungen beobachten zu können, müssen wir sie trennen, d.h. wir müssen positive Ladungen irgendwo anhäufen, wodurch zwangsläufig woanders ein gleich großer negativer Ladungsüberschuss entsteht. Alle Vorgänge bei den bisherigen Versuchen mit der **Reibungselektrizität** beruhen auf **Ladungstrennung**.

- Wird ein Kunststoffstab an einem Katzenfell gerieben, so werden Elektronen an das Harz gebunden.
- Aus einem Teflontrichter tropfendes Wasser ist positiv geladen, weil die OH^- - Ionen am Trichter hängen bleiben.

Bei der Ladungstrennung müssen die negativen Ladungen von den positiven Ladungen losgerissen werden, und außerdem die positiven auf einem Haufen und die negativen auf einem anderen Haufen gehalten werden. Dazu ist eine Kraft bzw. Arbeit erforderlich.

Bei den bisherigen Versuchen haben wir gesehen, dass bei mehrfachem Reiben (= größerer Arbeit!), auch größere Ladungsmengen entstehen.

Es scheint also so, dass man immer nur einen Bruchteil der einen oder anderen Ladung entfernt. Entfernt man Elektronen, so bleibt positive Ladung zurück, fügt man Elektronen von einem anderen Körper hinzu, wird der Körper negativ geladen.

Wenn wir also hier von Ladung sprechen, dann meinen wir damit "Überschussladung".

1.1.3 Leiter und Isolatoren

Versucht man, von einem geriebenen Kunststoffstab durch Berührung Ladung auf einen Metallstab zu übertragen, so gelingt dies nicht, wenn der Metallstab in der Hand gehalten wird. In diesem Fall fließt die gesamte Ladung des Metallstabes in die Hand ab. Hält man den Stab jedoch an Kunststoffgriffen, so üben die beiden Stäbe Kräfte aufeinander aus, und das Aufladen gelingt. Bei der Berührung mit der Hand wird der Metallstab sofort wieder vollständig entladen. Bei dem Kunststoffstab hingegen ist es anders. Er kann nur in dem Bereich entladen werden, der durch die Hand berührt wird. Die unterschiedliche Ladungsverteilung auf einer geladenen Metallplatte und einer geladenen Kunststoffplatte zeigt folgender Versuch.

Versuch 1.3

1. Wir laden eine isoliert gehaltene Metallplatte mit einem geriebenen PVC-Stab auf. Bringen wir nun eine Glimmlampe an eine Stelle der Platte, so leuchtet die Lampe auf. Wiederholen wir diesen Vorgang an unterschiedlichen Plattenstellen so führt es jedoch zu keinem weiteren Aufleuchten.
2. Bei einer geladenen Kunststoffplatte kann das Lämpchen wiederholt an verschiedenen Stellen der Platte zum Leuchten gebracht werden.

Aufgrund dieser unterschiedlichen Materialeigenschaft unterscheidet man zwischen **Leitern** (z.B. Metallplatte) und **Nichtleitern** bzw. **Isolatoren** (Kunststoffplatte).

Die Ladungen in einem Leiter, hier also im Metallstab und dem menschlichen Körper, sind quasi frei beweglich. Daher fließt bei Berührung die Ladung vom Metallstab sofort über die Hand und den übrigen menschlichen Körper zur Erde ab. Auf einem Leiter breitet sich eine an einer Stelle aufgebrachte Ladung in mehr oder weniger kurzer Zeit über

den gesamten Körper aus. Bei einem Isolator (Kunststoffstab) ist die Ladung hingegen nicht frei beweglich, sondern fest an die Atome gebunden. Bei Berührung fließt nur jeweils ein Teil der Ladungsmenge ab. Eine Auflistung verschiedener Leiter und Isolatoren findet man in nachstehender Tabelle.

Gute Leiter	Metalle, Kohle, Wasser, Säure- und Salzlösungen, der menschliche Körper, stark erhitzte Gase, ...
weniger gute Leiter	Holz, Papier, Stroh, Alkohol, ...
Isolatoren	Quarz, Glas, Porzellan, Kunststoff, Bernstein, Seide, Öle, Luft, Gase, ...

Es gibt keine vollkommenen Isolatoren, jedoch kommen einige Stoffe (z.B. Bernstein und Quarz) diesem Grenzfall sehr nahe. Dass Luft nicht leitet, ist gerade die Voraussetzung dafür, dass eine durch Reiben erzeugte Ladung beobachtet werden kann. Ist jedoch die Luftfeuchtigkeit zu hoch, fließt die Ladung schnell wieder ab, da feuchte Luft besser leitet.

1.1.4 Ladungsmessung

Die beobachtete Abstoßung gleichnamiger Ladungen wird zum Erkennen und Messen elektrischer Ladungen herangezogen. Einige **Elektroskope** zeigt Abb. 1.4 (aus [1]).

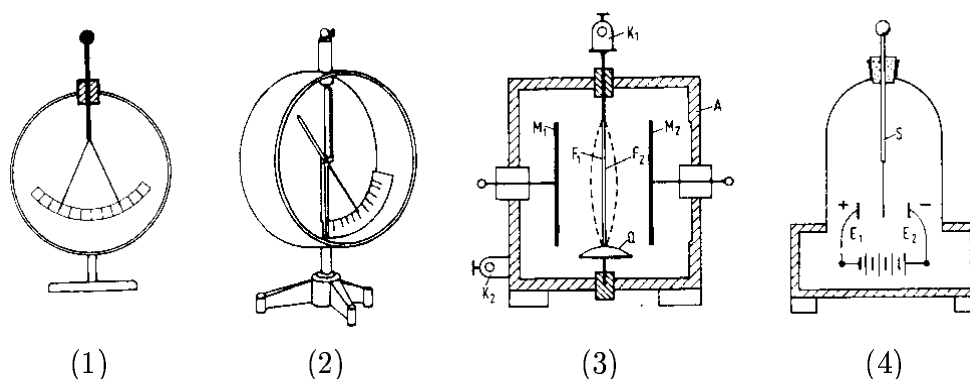


Abbildung 1.4: Elektroskope

1. Blättchen-Elektroskop

Im Inneren eines Metallgehäuses hängen an einer von oben isoliert eingeführten Metallstange zwei Blättchen aus Aluminium- oder Goldfolie. Wird das kugelförmige Ende der Metallstange mit einem geladenen Körper berührt, so spreizen sich die Folien, da sich die Ladungen auf der Kugel, der Stange und den Folien verteilen. Da die Folien die gleiche Ladung haben, stoßen sie sich ab, d.h. spreizen auseinander, und zwar um so mehr, je größer die Ladung ist. Eicht man das Instrument, so erhält man einen einfachen Ladungsmesser, das **Elektrometer**.

2. BRAUNsches Elektrometer

Statt zweier beweglicher Blättchen wird hier ein leichter, in Spitzen gelagerter, Aluminiumanzeiger benutzt. Der Zeiger wird von dem feststehenden Teil abgestoßen, sobald über diesen Ladung zugeführt wird, da nun beide gleichnamig geladen sind. Das Rückstellen erfolgt durch das Gewicht des Zeigers. (F.BRAUN, 1891)

3. WULFsches Zweifadenelektrometer

Der Aufbau dieses empfindlicheren Elektrometers geht aus der Abb. 1.4 hervor. Durch die Deckplatte eines Metallgehäuses (A) ist, sehr gut isoliert, ein Metallstift (E) geführt, der an seinem oberen Ende die Anschlussklemme K_1 trägt, und von dessen unterem Ende zwei sehr dünne Drähte von ca. $4\ \mu\text{m}$ Durchmesser und 5 bis 10 Zentimeter Länge herabhängen. Die beiden Drähte sind mit ihren unteren Enden an einem elastischen Quarzbügel (Q) befestigt, durch den sie schwach gespannt werden. Führt man den Fäden F_1, F_2 über die Klemme eine elektrische Ladung zu, so spreizen sie sich auseinander. Ihr Abstand kann in der Fadenmitte, wo er maximal ist, mit Hilfe eines Mikroskops sehr genau gemessen werden. Damit die Fäden beim Auseinandergehen in der Bildebene des Mikroskops bleiben, sind beiderseits in der Fadenebene zwei schmale Metallplatten (M_1 und M_2) angebracht, die mit dem geerdeten Gehäuse verbunden sind und somit die geladenen Fäden anziehen.

4. BOHNENBERG'sches- Elektroskop

Im Gegensatz zu den bisher beschriebenen Instrumenten, die das Vorhandensein von Ladung und ihre Menge nachweisen, liefert dieses auch das Vorzeichen. Zwischen zwei Platten, den sogenannten Elektroden (E_1 und E_2), hängt an einer von oben isoliert eingeführten Metallstange (S) ein einzelnes schmales Aluminiumplättchen. Die beiden Elektroden (E_1 und E_2) sind durch eine besondere, meist im Gerät eingebaute Elektrizitätsquelle dauernd entgegengesetzt geladen. Infolgedessen wird das Aluminiumplättchen bei Aufladung von der einen Elektrode angezogen und von der anderen abgestoßen. Die Richtung des Ausschlages lässt dann einen Schluss auf das Vorzeichen zu.

1.1.5 Ladungsverteilung in elektrischen Leitern

Die Ladungsverteilung auf elektrischen Leitern lässt sich an folgendem einfachen Versuch diskutieren.

Versuch 1.4

Drei Elektroskope werden mit Metallbügeln untereinander verbunden. Auf ein Elektroskop wird mit Hilfe eines geriebenen Hartgummistabes Ladung aufgebracht. Man beobachtet auf allen drei Elektroskopen den gleichen Ausschlag, d. h. die auf ein Elektroskop aufgebrachte Ladung hat sich gleichmäßig auf alle Elektroskope verteilt.

Berührt man nun ein Elektroskop mit dem Finger, so verteilt sich die Ladung auf den Körper und den Fußboden (Bem.: Man sagt: Das Elektroskop ist **geerdet**). Auf allen Elektroskopen ist der Ausschlag auf null zurückgegangen.

Aus dem ersten Teil des Versuches folgt, dass die Ladungen versuchen sich zu trennen und einen größtmöglichen Abstand einzunehmen. Dies gelingt ihnen nur, wenn sie auf der Oberfläche sitzen. Daraus folgt auch, dass das Innere von Leitern ladungsfrei ist. Dies gilt auch für Hohlräume, wie folgender Versuch zeigt:

Versuch 1.5

Auf einem Elektroskop wird ein FARADAY-Becher, ein Becher aus Metall, angebracht (s. Abb 1.5, entnommen aus [15]). Dieser Becher wird mit Hilfe der Reibungselektrizität geladen. Nun wird mit einem **elektrischen Löffel** (Metallkugel an einem isolierenden Kunststoff-Griff, die zum Übertragen von Ladungen dient) versucht, aus dem Inneren des Bechers Ladung zu entnehmen und auf ein zweites Elektroskop zu übertragen. Dies gelingt nicht, da im Inneren keine Ladungen vorhanden sind!

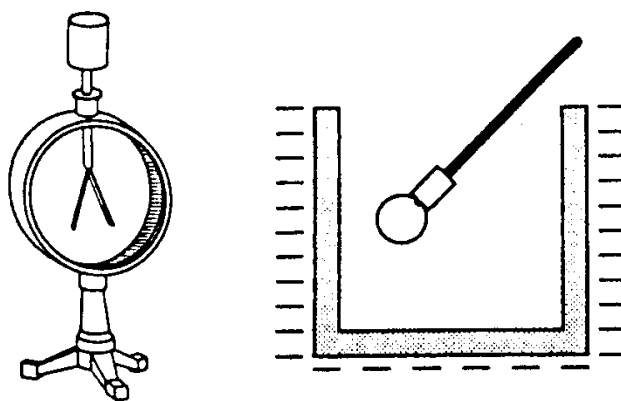


Abbildung 1.5: Faradaybecher

1.1.6 Die Influenz

Versuch 1.6

Wir führen einen positiv geladenen Plexiglasstab an ein geerdetes Elektroskop heran, ohne dieses jedoch zu berühren. Obwohl keine Ladung übertragen wurde, beobachten wir am Elektroskop einen Ausschlag. Entfernen wir den Stab aus dem Umfeld des Elektroskopes, geht der Ausschlag auf null zurück.

Offensichtlich ist bei dem Versuch **keine Ladung übertragen** worden, sonst hätte das Elektroskop auch noch einen Ausschlag angezeigt, als der Plexiglasstab entfernt wurde. Wie lässt sich nun dieses Phänomen erklären? Bedenken wir folgendes: a) Der Plexiglasstab ist positiv geladen. b) Der Teller, der feststehende Teil und der Zeiger des Elektroskops bestehen aus einem metallischen Leiter, in dem sich Ladungen frei bewegen können. Nähert man also den positiv geladenen Plexiglasstab dem Teller des Elektroskops, so wer-

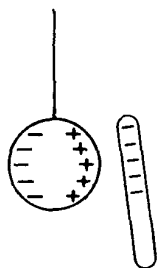


Abbildung 1.6: Influenz

den in dem Elektroskop die negativen Ladungen zu dem Stab gezogen, während die positiven abgestoßen werden und deshalb in den feststehenden Teil und den Zeiger wandern. Da in diesen beiden Teilen jetzt gleichnamige Ladung vorliegt, wird der Zeiger abgestoßen. Man beobachtet einen Ausschlag. Wird der Plexiglasstab wieder entfernt, so gleicht sich die Ladungsverteilung im Elektroskop wieder aus und der Ausschlag geht auf Null zurück (s. auch Abb. 1.6, entnommen aus [1]).

1.1.7 Halbieren von Ladungsmengen

Wir haben gesehen, dass durch Berührung Ladung übertragen werden kann. Was passiert, wenn man einen geladenen und einen ungeladenen Leiter in Kontakt bringt? Diese Frage soll in dem folgenden Versuch geklärt werden.

Versuch 1.7

Wir verbinden zwei gleich große Konduktorkugeln (Leiterkugeln) jeweils mit einem Elektroskop. Eine der Kugeln wird geladen und ihre Ladung mit dem Elektroskop angezeigt. Jetzt wird die gleich große ungeladene Kugel mit der geladenen Kugel in Berührung gebracht. Auf beiden Elektroskopen beobachten wir nun den gleichen Ausschlag (s. Abb. 1.7, aus [15]).

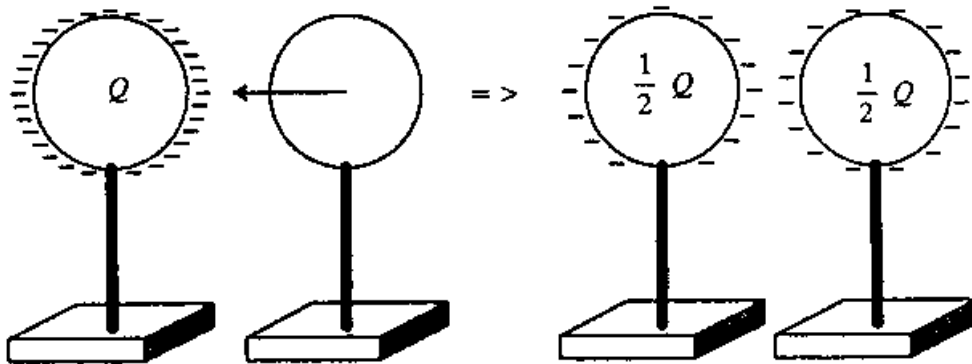


Abbildung 1.7: „Teilen“ von Ladungsmengen

Beim Kontakt der beiden Kugeln findet ein Ladungsübertrag statt, und zwar so, dass jede Kugel die gleiche Menge an Ladung besitzt. Auf jeder der beiden gleich großen Kugeln befindet sich nach dem Berühren $\frac{1}{2}Q$.

1.1.8 Ladungserhaltung

Bei der Ladungshalbierung kommt sofort die Frage auf, ob diese unendlich oft erfolgen kann oder ob es eine kleinste Ladungsportion gibt. In diesem Fall würde uns die Größe einer solchen Elementarladung interessieren.

Versuch 1.8

Ein Hartgummistab wird an einem Katzenfell gerieben und anschließend wird das Fell auf ein Elektroskop gelegt. Das Elektroskop schlägt aus. Nun wird der geladene Stab am Elektroskop abgestreift und man sieht, dass der Zeigerausschlag auf null zurück geht.

Offensichtlich treten beim Reiben positive und negative Ladungen in gleicher Menge auf. B. FRANKLIN und J. D. WATSON schlossen 1747 aus ähnlichen Beobachtungen:

Die Summe aller Ladungen in einem abgeschlossenen System ist erhalten. Insbesondere ist die Summe aller Ladungen im Kosmos konstant. (1.2)

Bei allen Vorgängen der Ladungstrennung gilt dieser fundamentale Satz der Ladungserhaltung.

Ein sehr anschauliches Beispiel für die Ladungserhaltung bietet die Paarerzeugung in der Elementarteilchenphysik. Beim **Paarbildungseffekt** (Abb. 1.8 aus [15]) zerfällt im Feld eines Kerns ein energiereiches Photon in ein Elektron-Positron-Paar ($e^- - e^+$ -Paar), wenn gilt:

$$E_\gamma = W_{Ph} > W_0 = 2m_e c^2 \approx 1,02 \cdot 10^6 \text{eV}, \quad (1.3)$$

wobei m_e die Masse des Elektrons bedeutet. (1 eV ist die Energie, die ein Elektron gewinnt, wenn es die Spannung von 1 V durchläuft.) Dies bedeutet, dass die Energie des Photons vollkommen in Masse umgewandelt wird. Diese Umwandlung von Energie in Ma-

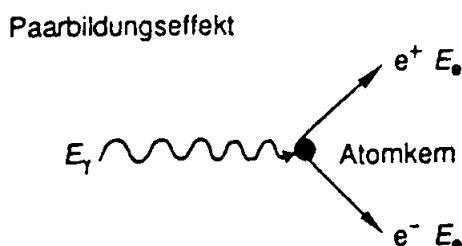


Abbildung 1.8: Paarbildung

terie (und umgekehrt) ist aufgrund der Relativitätstheorie, insbesondere $E = mc^2$ möglich. Bei der Paarbildung muss beachtet werden, dass Ladungen nur paarweise entstehen

können, dies bedeutet, dass zwar neue Ladungen entstehen können, aber nur paarweise und sie müssen entgegengesetzt geladen sein. Abb. 1.9 (aus [15]) zeigt eine Blasenkammer-Aufnahme einer e^+e^- - Paarerzeugung in den BROOKHAVEN NATIONAL LABORATORY (USA).

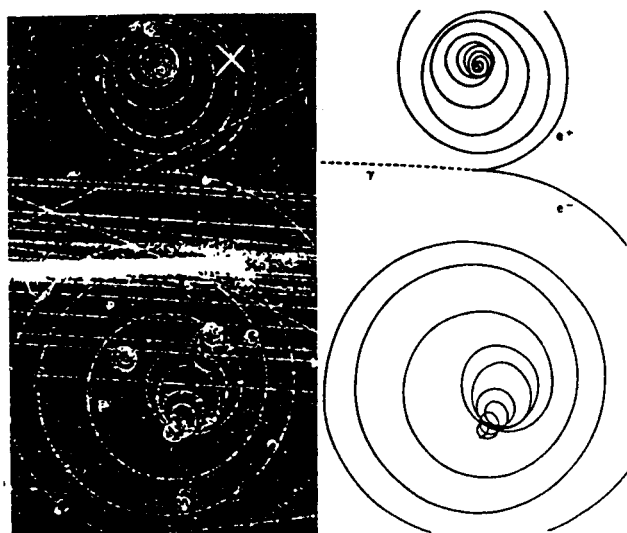


Abbildung 1.9: Blasenkammer-aufnahme

1.1.9 Elementarladung

Um den Ladungszustand eines Körpers zu charakterisieren, benutzt man den Begriff der **Ladungsmenge** Q bzw. q . Man verbindet mit der elektrischen Ladung die Vorstellung einer nichtmateriellen Substanz (ähnlich wie bei der Wärmemenge), die in verschiedenen Mengen in einem Körper vorliegen kann. Die Ladungsmenge lässt sich im allgemeinen in kleinere Ladungsmengen unterteilen, wobei es eine untere Grenze gibt, die **Elementarladung** e oder **elektrisches Elementarquantum**, welche zuerst von R. A. MILLIKAN (1868 – 1953) gemessen wurde. Er erhielt dafür 1923 den Nobelpreis. Seine Versuche (siehe Abschnitt 1.7.2, Seite 48) zeigten, dass die Ladung **quantisiert** ist, d.h. es gibt eine

kleinste elektrische Ladung:

Die kleinste zu beobachtende freie Ladung ist die **Elementarladung**. Sie ist eine Naturkonstante, die folgenden Wert hat:

$$e = 1,6021892 \cdot 10^{-19} \text{C} \quad \text{mit C = Coulomb}$$

(1.4)

Die Einheit „Coulomb“ ist die SI-Einheit für die Ladung. Sie wird später in Abschnitt 1.2.3 auf Seite 17 definiert. Ferner ist die Ladung quantisiert, d.h. **eine Ladung existiert nur als ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung e** , die genau der Ladung des Elektrons entspricht. Die Ladung von e^- und e^+ oder e^- und Proton p sind entgegengesetzt gleich. Es entstehen immer gleich viele positive wie negative Ladungen. Dieser Sachverhalt wird heute experimentell mit einer Genauigkeit von 10^{-20} bestätigt. Bei theoretischen Betrachtungen zum Aufbau der Elementarteilchen wurden jedoch 1964 von M. GELL-MANN (*1929) Quarks mit Ladungen von $-\frac{1}{3}e$ und $+\frac{2}{3}e$ postuliert (Nobelpreis 1969). Diese Ladungen wurden bisher noch nicht frei nachgewiesen, obwohl ihre Existenz außer Zweifel steht. Die Quarks scheinen nur in Bindungszuständen mit ganzzahligen Vielfachen der Elementarladung zu existieren.

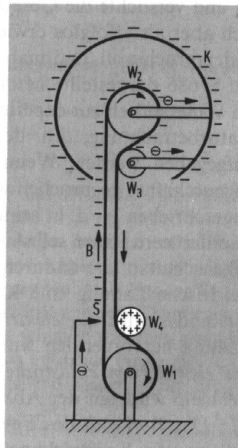


Abbildung 1.10: Bandgenerator

1.1.10 Erzeugung hoher Ladungsmengen

Benötigt man größere Ladungsmengen, dann erzeugt man diese mit Hilfe eines VAN-DE-GRAAFF- oder **Bandgenerators**.

Die ersten Entwicklungen dieses Gerätes gehen auf LORD KELVIN (1870) zurück, bekannt wurde der Hochspannungsgenerator aber erst durch VAN-DE-GRAAFF (1932).

Einen derartigen Bandgenerator zeigt Abb. 1.10 (aus [8]). Er enthält ein endloses Band B aus einem isolierenden Stoff (meist Gummi), das über vier drehbare Walzen läuft. Die Walzen W_1 , W_2 und W_3 sind aus Metall, Walze W_4 (auch Erregerwalze genannt) hingegen ist aus isolierendem Kunststoff, z.B. Plexiglas. Durch eine Handkurbel mit Übersetzungsgetriebe oder durch einen Motor kann die Walze W_1 angetrieben werden, so dass sich das Band in Pfeilrichtung bewegt. Durch die Berührung zwischen Band und Erregerwalze und die nachfolgende Trennung werden beide elektrisch geladen, und zwar das Band negativ und die Walze positiv (oder umgekehrt). Gegenüber der Erregerwalze befindet sich ein Spitzenkamm (S), auf dem durch die positiv geladene Erregerwalze eine negative Influenzladung erzeugt wird, die aufgrund der Spitzenwirkung auf das sich nach oben bewegende Band aufgesprüht wird. Die oben ankommende negative Ladung wird dem Band durch die Metallwalzen W_2 und W_3 entnommen und auf eine große, isoliert aufgestellte, metallische Hohlkugel K , die **Dom** genannt wird, abgeleitet, auf deren äußeren Oberfläche sie sich verteilt. Das Transportband verlässt die Kugel ungeladen; der Vorgang wiederholt sich dann in gleicher Weise. Durch laufende Zuführung weiterer Ladung kann die Elektrizitätsmenge auf der Kugel immer wieder gesteigert werden; die Kugel nimmt die ihr auf der Innenseite zugeführten neuen Ladungen ohne weiteres auf, da diese sofort auf die äußere Oberfläche abgeleitet werden.

Versuch 1.9

Wir nehmen den Bandgenerator in Betrieb und nähern seinem Dom eine kleine Konduktorkugel, die an einem isolierenden Stab befestigt ist. Befindet sich auf dem Dom genügend Ladung, so springt ein Funke von dem Dom zur Konduktorkugel über.

Auf diese Weise können sehr hohe Flächenladungsdichten erzeugt werden. Mit solchen Bandgeneratoren werden Hochspannungen bis $12 \cdot 10^6$ Volt erzeugt. In der Kernphy-

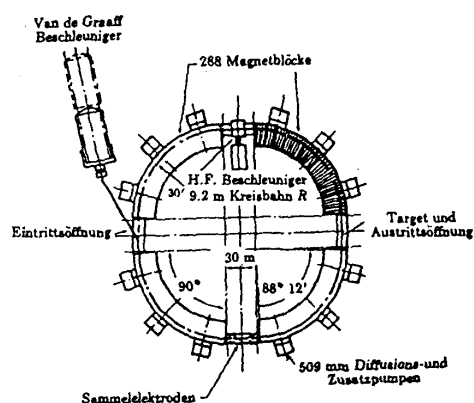


Abbildung 1.11: Kosmotron

sik werden VAN-DE-GRAAFF-Generatoren zur Beschleunigung von Elektronen und den leichtesten Atomkernen eingesetzt. Die Abb. 1.11 (aus [15]) zeigt das KOSMOTRON der BROOKHAVEN NATIONAL LABORATORY mit einem VAN-DE-GRAAFF-Beschleuniger, bei dem die Paarerzeugung nachgewiesen wurde.

1.2 Das COULOMBSche Gesetz

Wir haben gesehen, dass elektrische Ladungen Kräfte aufeinander ausüben. Im Folgenden sollen nun die Abhängigkeiten dieser Kräfte näher untersucht werden.

1.2.1 Die $1/r^2$ - Abhängigkeit

Als erster erkannte bereits C. F. GAUSS (1777-1855), dass ein $1/r^2$ -Gesetz für das elektrische Feld gelten muss, wenn jeder Punkt im Inneren einer geladenen Kugel feldfrei ist. Hier soll mit Hilfe einer Argumentation von J. PRIESTLY (1733-1804) gezeigt werden, dass diese Annahme richtig ist. Wir führen in das Innere einer geladenen Hohlkugel mit Ra-

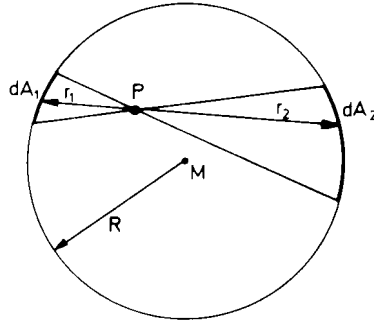


Abbildung 1.12: Zur Herleitung der $1/r^2$ -Abhängigkeit

dius R , deren Ladung gleichmäßig über die Oberfläche ist, eine Ladungsmenge Q ein. Sie befinde sich am Ort P (s. Abb. 1.12, entnommen aus [17]). Die Ladung Q der Kugel pro Flächeneinheit A , auch **Ladungsdichte** σ genannt, beträgt daher

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4\pi R^2}. \quad (1.5)$$

Nun wählen wir ein beliebiges Flächenelement dA_1 auf der Kugel aus und verbinden seine Begrenzung mit dem Punkt P und darüber hinaus, so dass ein Doppelkegel entsteht. Der Doppelkegel schneidet aus der Kugeloberfläche die Flächen $dA_1 = r_1^2 \cdot d\Omega$ und $dA_2 = r_2^2 \cdot d\Omega$ heraus; wobei $d\Omega$ der Raumwinkel des Kegels und r_1 und r_2 die auf einer Geraden liegenden Abstände der infinitesimalen Flächen dA_1 und dA_2 vom Scheitel des Kegels sind. Aufgrund der gleichmäßigen Ladungsverteilung befinden sich auf den beiden Flächenelementen die Ladungen $dQ_1 = \sigma \cdot dA_1$ und $dQ_2 = \sigma \cdot dA_2$. Diese üben auf die dritte Ladung q , die sich im Punkt P befindet, Kräfte aus, deren Wirkungen sich aufheben müssen, da sie von den sich auf gegenüberliegenden Flächenstücken befindlichen Ladungen herrühren, denn nur dann ist gewährleistet, dass in dem beliebig gewählten Punkt P in keiner Richtung eine Kraftwirkung auftritt. Für die Beträge der von dQ_1 und dQ_2 auf q ausgeübten Kräfte dF_1 und dF_2 gilt:

$$dF_1 = dQ_1 q f(r_1) \quad \text{bzw.} \quad dF_2 = dQ_2 q f(r_2) \quad (1.6)$$

wobei $f(r)$ eine noch zu bestimmende Funktion der Abstände r_1 und r_2 der jeweiligen Ladungen voneinander ist. Beide Kräfte müssen gleich sein, also

$$dF_1 = dF_2 \quad \Leftrightarrow \quad dQ_1 q f(r_1) = dQ_2 q f(r_2). \quad (1.7)$$

Hieraus folgt

$$\frac{f(r_2)}{f(r_1)} = \frac{dQ_1}{dQ_2} = \frac{\sigma dA_1}{\sigma dA_2} = \frac{r_1^2 \cdot d\Omega}{r_2^2 \cdot d\Omega} = \frac{r_1^2}{r_2^2}, \quad (1.8)$$

und daraus

$$f(r_1) r_1^2 = f(r_2) r_2^2 = \text{const} =: k. \quad (1.9)$$

Diese Beziehung liefert

$$f(r_1) = \frac{k}{r_1^2} \quad \text{und} \quad f(r_2) = \frac{k}{r_2^2}, \quad (1.10)$$

so dass für die beiden Kräfte jetzt geschrieben werden kann:

$$dF_1 = k \frac{dQ_1 q}{r_1^2} \quad \text{und} \quad dF_2 = k \frac{dQ_2 q}{r_2^2} \quad (1.11)$$

Aus diesem Ergebnis folgt, dass zwei Punktladungen Q und Q' , die sich im Abstand r voneinander befinden, aufeinander die Kraft

$$F = k \frac{Q Q'}{r^2} \quad (1.12)$$

ausüben.

1.2.2 Experimentelle Überprüfung des COULOMBSchen Gesetzes

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, dass aus der beobachteten Feldfreiheit im Inneren von Leitern auf die $1/r^2$ - Abhängigkeit der wirkenden elektrischen Kräfte geschlossen werden kann.

Die erste direkte Messung der elektrischen Kraft wurde von C. A. DE COULOMB (1736-1806) vorgenommen. Die dazu benutzte Drehwaage ist in Abb. 1.13 (entnommen aus [1]) schematisch dargestellt.

Versuch 1.10

An einem sehr dünnen Metallfaden (F) hängt waagrecht ein dünner Kunststoffstab. Dieser trägt an einem Ende eine kleine Metallkugel (K_1), am anderen Ende ein gleichschweres Gegengewicht. Eine zweite, gleichgroße Metallkugel (K_2) wird elektrisch geladen und dicht neben die erste Kugel gestellt. Durch eine kleine Drehung am Torsionskopf (T) kann man leicht erreichen, dass die Kugel (K_1) gerade eben die Kugel (K_2) berührt. Diese gibt nun die Hälfte der Ladung an (K_1) ab, da beide Kugeln gleich groß sind. An der Vergrößerung des Abstandes von (K_1) und (K_2), der mit Hilfe eines am Spiegel (Sp) reflektierten Lichtstrahls gemessen werden kann, kann man nun die Kräfte ermitteln, mit denen die Kugeln abgestoßen werden. Der Ausschlag des Lichtzeigers wird markiert. Die Größe der Kraft hängt von der Ladung

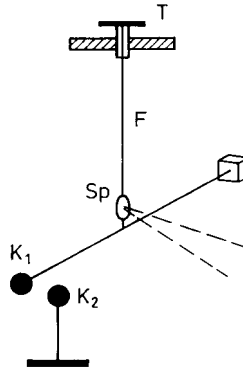


Abbildung 1.13: COULOMBSche Drehwaage

ab, die zu Anfang auf die Kugel (K_2) übertragen wurde. Nun wird die Ladung Q_2 auf der Kugel (K_2) mit Hilfe einer gleichgroßen neutralen Kugel halbiert bzw. geviertelt, worauf hin sich auch der Abstand halbiert bzw. viertelt. Die bisherigen Versuch wurden mit einem Radius $r = 20$ cm durchgeführt. Nun wird der Radius auf $r = 14,14$ cm ($= 20 \text{ cm} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$) bzw. $r = 10$ cm verkürzt und man beobachtet, dass der Ausschlag sich verdoppelt bzw. vervierfacht.

Wir haben gesehen, dass die Kraft zwischen zwei elektrisch geladenen Körpern dem Produkt der beiden Elektrizitätsmengen, die auf den Körpern sitzen, direkt und dem Quadrat ihrer Entfernung umgekehrt proportional ist. Die Kraft hat die Richtung der Verbindungslinie der beiden Ladungen. Die Gesetzmäßigkeit lautet also:

$$F \sim \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}, \quad (1.13)$$

wobei Q_i die Ladungen sind und r der Abstand. Das COULOMBSche Gesetz ist heute bis zu Abständen von 10^{-16} m (d.h. 1/10 des Proton-Durchmessers) experimentell überprüft worden (z.B. durch $e^+ - e^-$ Streuung im Speicherring PETRA im DESY).

1.2.3 Dimension der Ladung

Im Prinzip ist die Dimension der Ladung frei wählbar. Sie kann z.B. dadurch festgelegt werden, dass man in

$$F = k \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \quad (1.14)$$

$k = 1$ setzt, wie es das elektrostatische (GAUSSsche) **cgs-System** macht. Die Dimension der Ladung wird hier aus den **mechanischen Grundeinheiten** abgeleitet:

$$[Q] = [\sqrt{\text{Kraft}}] \cdot [\text{Länge}] = \sqrt{\text{dyn}} \cdot \text{cm} = \text{g}^{\frac{1}{2}} \text{cm}^{\frac{3}{2}} \text{s}^{-1}. \quad (1.15)$$

Diese Einheit wird als (absolute) **elektrostatische Ladungseinheit esu** (electrostatic unit) bezeichnet. Man kann auch **statcoulomb** benutzen:

$$\text{g}^{\frac{1}{2}} \text{cm}^{\frac{3}{2}} \text{s}^{-1} = 1 \text{ esu} \stackrel{\wedge}{=} 1 \text{ statcoulomb}. \quad (1.16)$$

Dieses System ist in der Atom- und Kernphysik sowie in der theoretischen Physik noch sehr gebräuchlich, es entspricht aber nicht dem SI- System und soll daher hier nicht benutzt werden.

Im **SI-System** wird die Ladung über den Strom definiert (Siehe Abschnitt 3.1, Seite 91):

$$\text{Strom } I = \frac{dQ}{dt}. \quad (1.17)$$

Der Strom wird im SI-System als **elektrische Grundgröße** über seine **magnetische Wirkung** eingeführt (siehe „Definition des Ampère“ 4.35 auf Seite 157) :

1 Ampere (A) ist der Strom, der in zwei unendlich langen Leitern in 1 m Abstand die Kraft von $2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}}$ hervorruft .

(1.18)

Damit ist die Einheit der Ladung:

$$[\text{Ladung}] = [\text{Strom}] \cdot [\text{Zeit}] = \text{A} \cdot \text{s} = \text{C} = \text{Coulomb} \quad (1.19)$$

$$1 \text{ C} \stackrel{\wedge}{=} 3 \cdot 10^9 \text{ esu}. \quad (1.20)$$

Hiermit ergibt sich für die Konstante k

$$k = 8,988 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \simeq 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}. \quad (1.21)$$

Im allgemeinen definiert man k folgendermaßen (Erklärung später):

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{mit} \quad \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}, \quad (1.22)$$

wobei der Faktor 4π die Kugelsymmetrie berücksichtigt und ϵ_0 die **elektrische Feldkonstante** (oder **Dielektrizitätskonstante** oder **Influenzkonstante**) heißt.

Damit lautet

<p>das COULOMBSche Gesetz:</p> $F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \quad (\text{im SI - System}) \quad (1.23)$ <p>F_C ist die sog. COULOMB-Kraft.</p>
--

Beispiel 1.1

Als Beispiel wollen wir ein Gedankenexperiment unternehmen. Nehmen wir einmal an, es wäre möglich, alle positiven Ladungen, die in 1 g Kupfer enthalten sind an einer Stelle im Raum zu sammeln und die negativen Ladungen an einer anderen Stelle etwa 1 m davon entfernt. Mit welcher Kraft würden sich die beiden Ladungsansammlungen anziehen?

Jedes Kupferatom besteht aus 29 Elektronen und genauso vielen Protonen. Die Atommasse beträgt 63,5 u. Aus der Atommasse in u können wir entnehmen, dass in 63,5 g Kupfer $6,023 \cdot 10^{23}$ Atome enthalten sind (LOSCHMIDTSche Zahl). Damit sind in 1 g Kupfer $9,49 \cdot 10^{21}$ Atome enthalten. Da jedes Atom aus je 29 Elektronen und Protonen besteht, sind also insgesamt je $9,49 \cdot 10^{21} \cdot 29 = 2,75 \cdot 10^{23}$ Elektronen und Protonen in dem Gramm Kupfer enthalten. Da Elektronen und Protonen betragsmäßig dieselbe Ladung $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C haben, liegt eine Ladungsmenge von je

$$2,75 \cdot 10^{23} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 44055 \text{ C} \quad (1.24)$$

vor. In einem Abstand von 1 m wirkt dann eine COULOMB-Kraft von

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \quad (1.25)$$

$$\approx 8,988 \cdot 10^9 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{44055 \text{ C} \cdot 44055 \text{ C}}{1\text{m}^2} \quad (1.26)$$

$$= 1,74 \cdot 10^{19} \text{N}. \quad (1.27)$$

1.2.4 Vektorielle Schreibweise und Superposition

Die Abb. 2.3 (aus [15]) zeigt zwei gleich geladene Ladungsmengen im Abstand r_{12} . \vec{r}_{12} sei der Ortsvektor, dessen Richtung von Q_1 auf Q_2 weist. Die Kraft \vec{F}_{12} bezeichne die Kraft, die von Q_1 auf Q_2 ausgeübt wird. Für die Kraft \vec{F}_{12} gilt:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \quad (1.28)$$

Nach dem 3. NEWTONschen Axiom (actio = reactio) gilt: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ Um die Gesamtkraft von mehreren Ladungen Q_i zu berechnen, müssen die Einzelkräfte, analog zu Kräften in der Mechanik, aufaddiert werden. Betrachten wir dazu ein Beispiel:

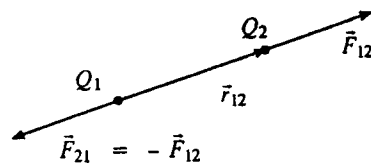


Abbildung 1.14: Kraft zwischen zwei Ladungen

Beispiel 1.2

Drei Ladungen Q_1, Q_2 und Q_3 befinden sich an den Eckpunkten eines gleichschenkligen Dreiecks, wie es in Abb. 1.15 (entnommen aus [3]) dargestellt ist.

Die Ladungen seien betragsmäßig gleich, Q_1 und Q_3 seien positiv und Q_2

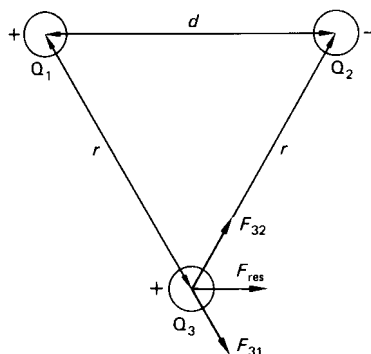


Abbildung 1.15: Wie groß ist die Kraft auf Q_3 ?

negativ. Gesucht ist die auf Q_3 wirkende Kraft F_{res} .

Das Ladungsdreieck $Q_1 Q_2 Q_3$ ist dem Kräfte-dreieck $F_{res} F_{32} F_{31}$ ähnlich, so dass gilt:

$$\frac{|F_{res}|}{|F_{31}|} = \frac{d}{r}. \quad (1.29)$$

$$\text{Daraus folgt : } |F_{res}| = \frac{d}{r} |F_{31}| = \frac{d}{r} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2} = \frac{d}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^3}. \quad (1.30)$$

1.2.5 Vergleich von COULOMB- und Gravitationskraft

Die COULOMB-Kraft weist mathematisch dieselbe Struktur auf wie die Gravitationskraft. Sie ist

- eine Zentralkraft,
- symmetrisch bezüglich der Ladungen (bzw. Massen)
- nimmt quadratisch mit der Entfernung ab.

Allerdings gibt es auch einen wesentlichen Unterschied, zwischen COULOMB-Kraft und Gravitationskraft: es gibt nur positive Massen. Daraus folgen weitere Unterschiede:

- Bei der COULOMB-Kraft gibt es Anziehung und Abstoßung, bei der Gravitationskraft gibt es nur Anziehung.

- Im elektrostatischen Fall ist Abschirmung durch entgegengesetzte Ladungen möglich, die Gravitations-Wechselwirkung kann nicht abgeschirmt werden.
 ⇒ Die Gravitationskraft tritt überall auf, wo Materie ist, die COULOMB-Kraft tritt i.d.R. im Makrokosmos nicht in Erscheinung, da sich die Ladungen „neutralisieren“ (d.h. abschirmen).

Eine Gegenüberstellung von COULOMB- und Gravitationskraft zeigt folgende Tabelle:

Unterscheidungsmerkmale	COULOMB-Kraft	Gravitationskraft
Formel	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$ mit $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$	$F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ mit $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$
Ursache	zwei Ladungen	zwei Massen
Kraftrichtung	Anziehung und Abstoßung	Anziehung
Stärke	groß	sehr klein
Abschirmbarkeit	ja	nein
Bedeutung	Zusammenhalt der Atome	Zusammenhalt des Makrokosmos

Beispiel 1.3

Vergleicht man die Kraftwirkung des elektrischen und des Gravitationsfeldes im H-Atom, so erkennt man

$$\frac{F_G}{F_{el}} \simeq 4 \cdot 10^{-40}, \quad (1.31)$$

d.h. die elektrische Kraft ist ungefähr $0,25 \cdot 10^{40}$ mal größer als die Gravitationskraft!

1.3 Das elektrische Feld

1.3.1 Das elektrische Feld

Durch die Anwesenheit einer Ladung wird der Raum verändert: Auf jede weitere elektrische Ladung wirkt eine Kraft, deren Größe und Richtung mit Hilfe des COULOMBSchen Gesetzes angegeben werden kann. In Analogie zu den früher betrachteten Veränderungen des Raumes bei Anwesenheit einer Masse (Gravitationsfeld), sagen wir, es herrscht ein Feld, und da es von elektrischen Ladungen erzeugt wird, ein **elektrisches Feld**. Bei ruhenden Ladungen spricht man auch vom **elektrostatischen Feld**. Bei der Beschreibung des elektrischen Feldes erfolgt die Vorgehensweise analog zu der bei dem Gravitationsfeld.

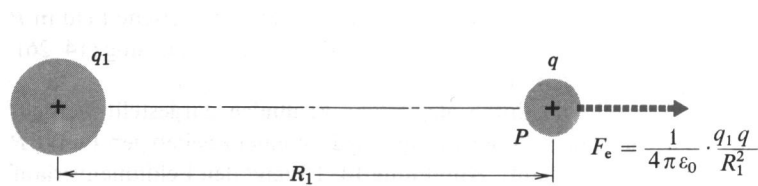


Abbildung 1.16: Kraft auf eine Ladung

Dazu betrachten wir eine **Probeladung** q in der Umgebung von Q . Eine Probeladung ist ein geladener Körper mit verschwindend kleiner räumlicher Ausdehnung und Ladung, dessen Lage im Raum hinreichend durch die Koordinaten eines mathematischen Punktes angegeben werden kann. Nach dem COULOMBSchen Gesetz wirkt nun eine Kraft von (s. Abb. 1.16, entnommen aus [7]):

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \quad (1.32)$$

Diese elektrische Kraft wirkt nicht nur am Ort der Ladung selbst, sondern auch in deren Umgebung. Es ist deshalb ein **elektrisches Feld** vorhanden. Es wird mathematisch durch ein Vektorfeld beschrieben. Analog zum Gravitationsfeld ist nun eine von der Probeladung q unabhängige Größe gesucht. Das elektrische Feld ist also durch eine Vektorgroße charakterisiert, die man **elektrische Feldstärke** \vec{E} nennt. Sie ist definiert als:

$$\vec{E} := \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} / q \quad (1.33)$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}} \quad \text{elektrische Feldstärke einer Punktladung.} \quad (1.34)$$

Diese Definition der elektrischen Feldstärke setzt eine Punktladung voraus und gilt für beide Arten von Ladungen, wenn Q als vorzeichenbehaftete Größe betrachtet wird. Es

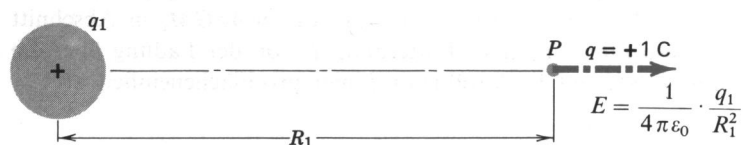


Abbildung 1.17: Zur elektrischen Feldstärke

muss beachtet werden, dass die Probeladung q gegenüber der Ladung Q hinreichend klein

angenommen wird, damit deren Feld nicht gestört wird. Es muss also ein Grenzübergang bezüglich der Ausdehnung und der Ladung von q gemacht werden, d.h.

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q}. \quad (1.35)$$

Die **Dimension der elektrischen Feldstärke** ist somit:

$$[E] = \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{N}}{\text{As}}. \quad (1.36)$$

1.3.2 Beschreibung des elektrischen Feldes

Aus dem vorherigen Abschnitt geht hervor, dass die elektrischen Kräfte nicht nur am Ort der Ladung wirken, sondern auch in der Umgebung. Sie bauen ein elektrisches Feld auf, das mathematisch durch ein Vektorfeld beschrieben wird. Das elektrische Feld ist also erst bestimmt, wenn an jeder Stelle des Raumes die Feldstärke nach Größe und Richtung bekannt ist. Konstruiert man im elektrischen Feld Kurven, deren Tangenten in jedem Punkt mit der Richtung der dort herrschenden Feldstärke übereinstimmen, so geben diese **elektrischen Feldlinien** ein anschauliches Bild von der Struktur des Feldes, das die Ladungen umgibt.

Der Verlauf der elektrischen Feldlinien wird im folgenden Versuch sichtbar gemacht.

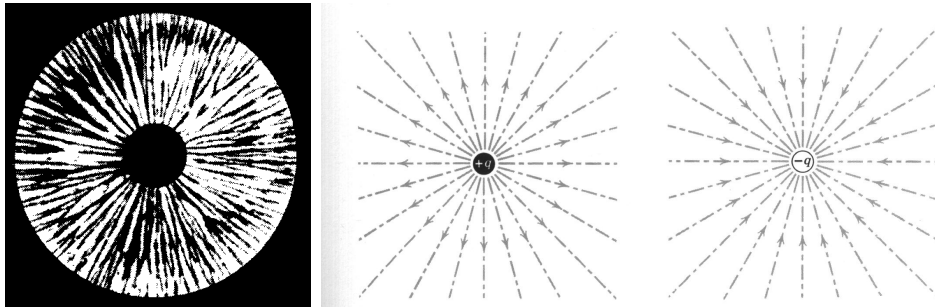
Versuch 1.11

In eine mit einem dickflüssigen, gut isolierenden Öl, hier Rizinusöl, gefüllte Glasschale (Kristallisationsschale) wird feinkörniger Grieß gestreut. Auf den Boden der Glasschale werden metallische Leiter gelegt, und es wird ein elektrisches Feld angelegt. Bei eingeschaltetem Feld werden die Körner polarisiert (Influenz), richten sich aus und ordnen sich längs der Feldlinien an.

Bemerkung: Die Ergebnisse zeigen einen qualitativen Überblick über den Feldverlauf in der Ebene (Die Abbildungen sind entnommen aus [1] und [7]).

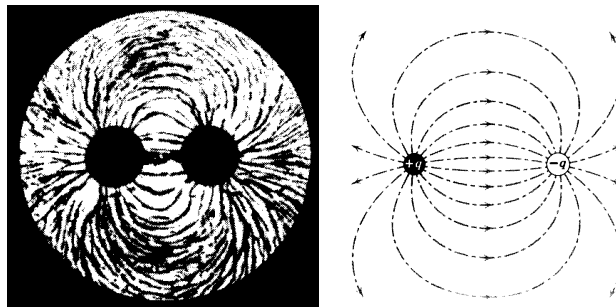
Versuchsergebnisse

1. Feldlinienbild einer Punktladung

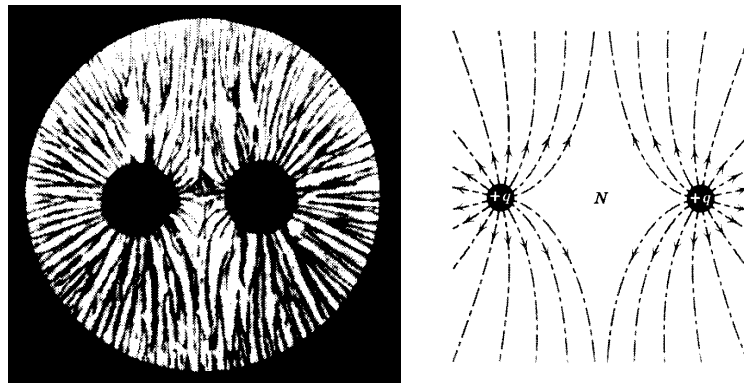


Die Feldlinien gehen radial nach außen.

2. Feldlinienbild zweier entgegengesetzt geladener Punktladungen



3. Feldlinienbild zweier gleich geladener Punktladungen



Aus den Feldlinienbildern lassen sich folgende **Eigenschaften der elektrischen Feldlinien** ablesen:

- die Richtung der Tangente an die Feldlinien gibt die Kraftrichtung, bzw. die Richtung der elektrischen Feldstärke an,
- die Pfeilrichtung ist (per Definition) gleich der Richtung der Kraft auf die **positive** Ladung,

- die Kraftwirkung ist in jedem Punkt eindeutig, d.h. die Feldlinien schneiden sich nicht,
- die Feldliniendichte ist ein Maß für die Größe der elektrischen Feldstärke bzw. deren Betrag,
- die Feldlinien stehen stets senkrecht auf den Leiteroberflächen (da die Elektronen in einem metallischen Leiter frei beweglich sind, werden sie solange verschoben, bis keine tangentielle Kraftkomponente mehr vorhanden ist),
Befinden sich metallische Leiter im elektrischen Feld, so sitzen die Ladungen immer an der Oberfläche. Dies bedeutet, dass das Innere eines metallischen Körpers immer feldfrei ist. Mit metallischen Umhüllungen können deshalb elektrische Felder abgeschirmt werden. (FARADAYScher Käfig),
- Feldlinien enden nie frei im Raum, sie beginnen bei positiven Ladungen und enden bei negativen (willkürliche Festlegung).

Die letztgenannte Feststellung bedeutet, dass es keine geschlossenen Feldlinien gibt. Gäbe es eine geschlossene Feldlinie, so würde eine Ladung längs dieser Feldlinie einen Antrieb erfahren, der sie entlang derselben, d.h. auf der geschlossenen Bahn, bewegen würde. Das elektrische Feld würde also durch Herumbewegen der Ladung bis zu ihrem Ausgangspunkt zurück positive Arbeit leisten. Durch Wiederholung dieses Vorgangs ließe sich aus dem Feld dauernd Arbeit gewinnen. Dies ist erfahrungsgemäß nicht der Fall, folglich kann es keine geschlossenen Feldlinien geben. Ein solches Feld nennt man **wirbelfrei**. Das **elektrostatische Feld** im Vakuum ist ein **wirbelfreies Quellenfeld**.

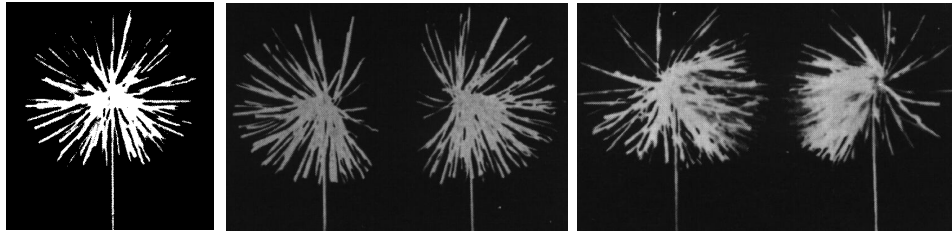
Im Kapitel 5 „magnetische Induktion“ werden wir auf elektrische Felder stoßen, die nicht wirbelfrei sind, also auch geschlossene Feldlinien haben können. Sie können aber nur durch zeitlich veränderliche Magnetfelder erzeugt (man sagt „induziert“) werden. Im Rahmen der Elektrostatik gelten die obigen Aussagen uneingeschränkt.

Die bisher gezeigten Versuche geben nur einen Überblick über den Feldverlauf in der Ebene. Die zwei folgenden Versuche sollen den räumlichen Feldlinienverlauf einer Punktladung demonstrieren.

Versuch 1.12

Für den ersten Versuch befestigen wir ein Papierbüschel an einer Metallstange, die wiederum in den Dom eines Bandgenerators gesteckt wird. Wird nun die erforderliche Hochspannung erzeugt, so beobachtet man, dass die Papierstreifen radial in alle Richtungen abstehen, wie in Abb. 1.18.a, entnommen aus [1], zu sehen ist.

Würde man ein weiteres Papierbüschel hinzu nehmen und es mit der gleichen Ladung aufladen, so ergäbe sich ein Feldlinienverlauf wie in Abb. 1.18.b. Lädt man die Papierbüschel entgegengesetzt auf, so wäre der Feldlinienverlauf wie in Abb. 1.18.c dargestellt.



(a)

(b)

(c)

Abbildung 1.18: Papierbüschel veranschaulichen die Feldlinien im Raum

Versuch 1.13

Beim zweiten Versuch stellt sich eine Versuchsperson auf eine isolierte Platte und berührt mit einer Hand den Dom des Bandgenerators. Beim Hochfahren des Generators wird die Person aufgeladen und die Haare richten sich im elektrischen Feld aus (s. Abb. 1.19, entnommen aus [12]). Obwohl mit dem Generator Hochspannungen von ca. 60 kV erreicht werden, ist der Versuch ungefährlich, da nur kleine Ströme von ca. $30 \mu\text{A}$ erzeugt werden können.

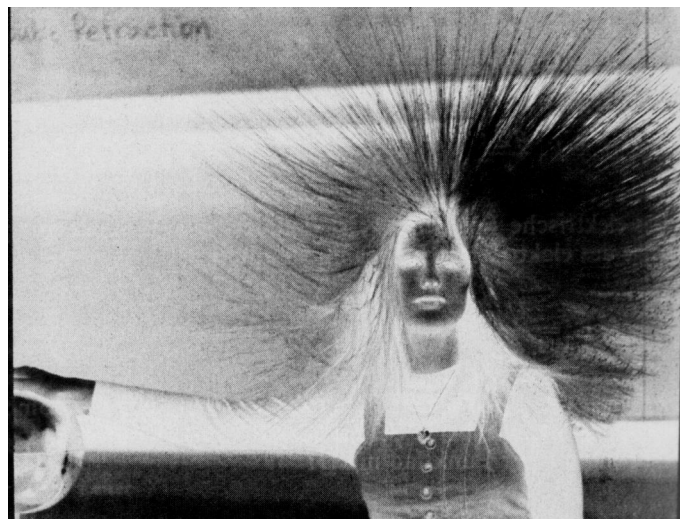


Abbildung 1.19: Versuchsperson wird mit Bandgenerator aufgeladen

Zusammenfassung

Man kann also mittels einer Probeladung den ganzen Raum abtasten um festzustellen, welche Kraft dort wirkt. An jedem Ort kann man dementsprechend einen Vektor \vec{E} abtragen. Diese \vec{E} - Vektoren schließen sich zu Feldlinien zusammen, deren Tangentialvektoren sie bilden. Alle Versuche, sich darüber hinaus eine "anschauliche" Vorstellung vom elektrischen Feld zu machen, es z.B. als Spannungszustand eines elastischen Mediums, des „Äthers“, darzustellen, sind gescheitert. Man sollte daher auch hinter dem Feldbegriff nichts anderes suchen als was er ist, nämlich ein bequemes Darstellungsmittel für die Kräfte, die auf Ladungen wirken.

1.3.3 Das homogene Feld

Von besonderer Bedeutung für spätere Anwendungen ist das elektrische Feld zwischen zwei parallelen Platten.

Zunächst wollen wir uns das Feldlinienbild dieses Feldes anschauen.

Versuch 1.14

In die Schale mit dem Grieß und dem Rizinusöl legen wir zwei parallele Metallplättchen und erzeugen zwischen ihnen ein elektrisches Feld, indem wir Ladungen von der einen auf die andere Platte verschieben. Die Grießkörner richten sich, wie in Abb. 1.20 (entnommen aus [1] und [7]) dargestellt, aus. Man nennt solche zwei planparallelen Metallplatten auch **Plattenkondensator** (siehe Abschnitt 2.6.1, Seite 72).

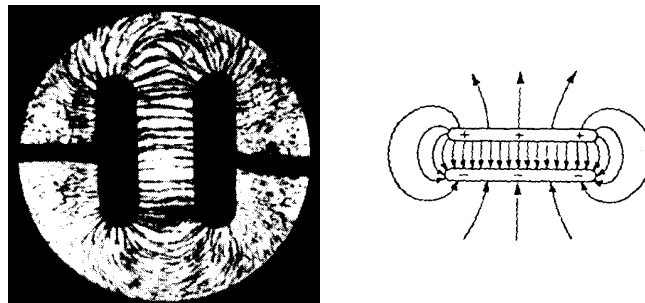


Abbildung 1.20: Versuchsergebnis und theoretischer Verlauf

Das Feld zwischen zwei entgegengesetzt geladenen, unendlich ausgedehnten Platten ist ein **homogenes Feld**.

Ein **homogenes Vektorfeld** ist in dem betrachteten räumlichen Bereich überall konstant, d.h. überall sind sowohl Betrag als auch Richtung gleich.

(1.37)

Die Kraft hat in allen Punkten zwischen den Platten die gleiche Richtung und die gleiche Stärke.

Versuch 1.15

Wir hängen einen mit Graphit behandelten Tischtennisball an einem isolierten Faden in die Mitte eines homogenen Feldes, das mit Hilfe eines Plattenkondensators erzeugt wird. Mit einem elektrischen Löffel, der seine Ladung von einem geriebenen Kunststoffstab erhält, wird der Tischtennisball langsam aufgeladen. Durch die Ladung wird der Ball immer weiter ausgelenkt, bis er eine Platte berührt. In diesem Moment nimmt er die Ladung der Platte auf und wird dadurch zur anderen Platte abgestoßen. Dieser Vorgang wiederholt sich

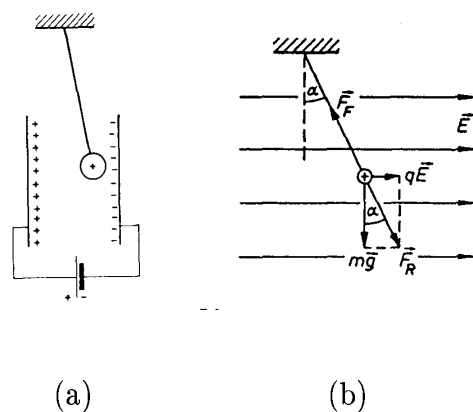


Abbildung 1.21: Graphitierter Tischtennisball im Plattenkondensator

nun laufend, da er immer die erforderliche Ladung erhält, die er benötigt, um die jeweils andere Platte zu erreichen. Die Abb. 1.21 zeigt im linken Teil den schematischen Versuchsaufbau und im rechten Teil die auf den Ball wirkenden Kräfte und das elektrische Feld (entnommen aus [2] und [15]).

Die Auslenkung des Pendels erfolgt durch die Kraftwirkung des elektrischen Feldes. Das Gleichgewicht liegt vor, wenn die resultierende Kraft \vec{F}_R aus der Feldkraft $q\vec{E}$ und der

Gewichtskraft $m \vec{g}$ in Richtung des Fadens wirkt und durch dessen Spannkraft \vec{F}_F kompensiert wird (siehe Abb. 1.21.b).

1.3.4 Beliebige elektrisches Feld

Wir können allgemein schließen, dass **jede** elektrische Ladungsverteilung durch ein Vektorfeld $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(x, y, z)$ beschrieben wird. Jedem Raumpunkt $P(x, y, z)$ mit dem Ortsvektor

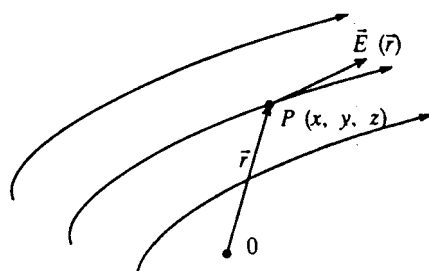


Abbildung 1.22: Jedem Raumpunkt ist ein Vektor zugeordnet

$\vec{r}(x, y, z)$ ist ein Vektor $\vec{E}(\vec{r})$ zugeordnet, wie in Abbildung 1.22 (entnommen aus [15]) dargestellt ist. Um ein beliebiges Vektorfeld zu berechnen, ist es sinnvoll, ein geeignetes Koordinatensystem zu wählen. So legt man beispielsweise

- bei Punktladungen den Ursprung des Koordinatensystems auf die Ladung;
- bei homogenen Feldern eine Achse in die Richtung des Feldes.

Bei der Berechnung komplizierter Felder, z.B. bei der Überlagerung mehrerer Punktladungen, gilt, ebenso wie für Kräfte, das Superpositionsprinzip, denn:

$$\text{Wegen } \vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad \text{gilt:} \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i}{q} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i. \quad (1.38)$$

Für die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r}_0)$ in 1.38 ergibt sich somit:

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^2} \cdot \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|}. \quad (1.39)$$

Bei einer **kontinuierlichen Ladungsverteilung** im Raum muss man von der Summe zum Integral ($\sum \rightarrow \int$) übergehen. Um diese Ladungsverteilung zu charakterisieren, wird eine neue Größe eingeführt, die (Raum-) Ladungsdichte ρ :

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\text{Ladung}}{\text{Volumen}} = \frac{dQ}{dV} \quad (1.40)$$

In der obigen Formel wird nun die Ladung Q_i durch die infinitesimale Ladung $dq = \rho dV$ am Punkt \vec{r} ersetzt. Man erhält dann das Feld einer **kontinuierlichen Ladungsverteilung**:

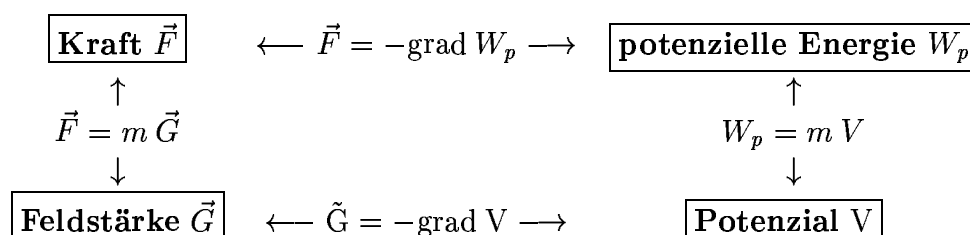
$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{Volumen}} \frac{\rho(\vec{r}) (\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} dV \quad (1.41)$$

Um dieses Integral lösen zu können, sind einige mathematische Klammzüge erforderlich.

1.4 Potenzielle Energie, elektrostatisches Potenzial und Spannung

1.4.1 Potenzial und Spannung

Erinnern wir uns noch einmal an die Gravitation. Dort haben wir folgende Begriffe eingeführt und miteinander verknüpft:



Diese Verknüpfungen gelten aber nur für konservative Kräfte \vec{F} (siehe Mechanik).

Zur Wiederholung:

Eine Kraft \vec{F} ist konservativ, wenn eine der folgenden, zueinander äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- Die gesamte entlang eines beliebigen geschlossenen Weges geleistete Arbeit ist gleich null.

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0 \quad (1.42)$$

- Die Arbeit W , die man verrichten muss, um von einem Ort A zu einem anderen Ort B zu gelangen, ist wegunabhängig (siehe Abb. 1.24).

- Die zur konservativen Kraft gehörige Feldstärke \vec{G} (Schwerefeldstärke \vec{G} bzw. elektrische Feldstärke \vec{E}) lässt sich durch das Gradientenfeld $-\text{grad } V$ eines skalaren Vektorfeldes V darstellen.

$$\vec{G} = -\text{grad } V \quad (1.43)$$

- Später werden wir noch einen weiteren Differenzialoperator kennen lernen, die Rotation. Mit Hilfe der Rotation eines Kraftfeldes \vec{G} (schreibe $\text{rot } \vec{G}$) können wir ein weiteres äquivalentes Kriterium aufstellen (ohne Beweis):

$$\text{rot } \vec{G} = 0 \quad (1.44)$$

Beim Gravitationsfeld \vec{G} haben wir gesehen, dass es ein konservatives Kraftfeld ist. Dies liegt daran, dass eine Masse M (mit Ortsvektor \vec{r}_0) ein radial verlaufendes Feld erzeugt, dass also

$$\vec{G}(\vec{r}) \parallel (\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (1.45)$$

gilt. In Abschnitt 1.2.5 hatten wir gesehen, dass COULOMB-Kraft und Gravitationskraft die gleiche Struktur haben. Diese Analogie-Betrachtung berechtigt uns, das elektrische Feld als konservatives Kraftfeld anzunehmen (ohne Beweis). Wir führen daher zum Gravitationsfeld analoge Betrachtungen beim elektrischen Feld durch. Um nun eine positive, punktförmige Probeladung Q im elektrischen Feld von Punkt A nach B zu verschieben (s. Abb. 1.24, entnommen aus [3]), muss gegen das Feld eine Verschiebungsarbeit geleistet werden:

$$W_{AB} = - \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \, d\vec{r} \quad \text{mit} \quad \vec{F}(\vec{r}) = -q \cdot \vec{E}(\vec{r}). \quad (1.46)$$

Aufgrund des Energieerhaltungssatzes muss die Verschiebungsarbeit unabhängig von dem gewählten Weg von A nach B sein. (Es macht also keinen Unterschied, ob man in Abb. 1.24 den Weg 1 oder 2 wählt). Daraus folgt:

$$\int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \, d\vec{r} + \int_B^A \vec{F}(\vec{r}) \, d\vec{r} = \oint \vec{F}(\vec{r}) \, d\vec{r} = 0, \quad (1.47)$$

d.h., bei der Bewegung einer Punktladung auf einem geschlossenen Weg (angedeutet durch den Kreis im Integralzeichen) wird keine Arbeit verrichtet. Für das Kraftfeld bedeutet dies, analog zur Mechanik:

$$W = 0 \Leftrightarrow \vec{F}(\vec{r}) \text{ ist ein konservatives Kraftfeld} \quad (1.48)$$

$$\Leftrightarrow \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \, d\vec{r} \quad \text{ist wegunabhängig.} \quad (1.49)$$

	Gravitationsfeld	elektrisches Feld
Kraft	Massenanziehungskraft (Gravitationskraft) $\mathbf{F}_{\text{Gr}} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{r}_0$ $\mathbf{F}_{\text{Gr}} = m\mathbf{g}; \mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m}$	Ladungsanziehungskraft (Coulombkraft) $\mathbf{F}_{\text{el}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \mathbf{r}_0$ $\mathbf{F}_{\text{el}} = Q\mathbf{E}; \mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_{\text{el}}}{Q}$
Energie	$W_{\text{Gr}} = m\varphi_{\text{Gr}}$	$W_{\text{el}} = Q\varphi_{\text{el}}$
Potential- änderung	$d\varphi_{\text{Gr}} = -\mathbf{g} d\mathbf{y}$	$d\varphi_{\text{el}} = -\mathbf{E} d\mathbf{y}$
Potential- linien	Linien gleicher poten- tieller Energie (Höhenlinien) $\mathbf{g} = -\mathbf{grad} \varphi_{\text{Gr}}$	Linien gleichen elektri- schen Potentials (Äquipotentiallinien) $\mathbf{E} = -\mathbf{grad} \varphi_{\text{el}}$
Teilchen- beschleunigung	senkrecht zu den Höhen- linien in Richtung des steilsten Abfalls	senkrecht zu den Äqui- potentiallinien in Rich- tung der größten Poten- tialänderung
Veranschau- lichung	<p>Falllinien</p> <p>Höhenlinien</p>	<p>Feldlinien</p> <p>Äquipotentiallinien</p>

Abbildung 1.23: Vergleich von Gravitations- und elektrischem Feld

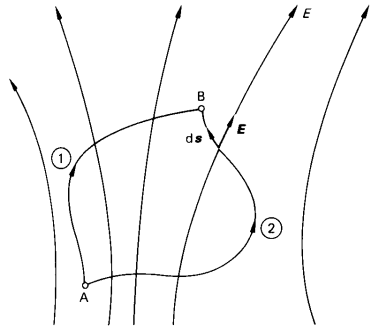


Abbildung 1.24: Auf einem geschlossenen Weg wird keine Arbeit verrichtet

Wie bei der Gravitation können wir dementsprechend neben der **potenziellen Energie** W_p auch ein **elektrisches Potenzial** φ definieren. Die Arbeit W_{AB} , die beim Verschieben der Ladung von A nach B eingebracht wird, erhöht die potenzielle Energie W_p , und es gilt:

$$W_{AB} = W_p(B) - W_p(A) = -q \int_A^B \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (1.50)$$

Das **elektrische Potenzial** φ ist definiert als der Quotient aus der potenziellen Energie W_p und der Probeladung q :

$$\varphi = \frac{W_p}{q} \quad (1.51)$$

Hiermit lässt sich Gleichung 1.50 schreiben als:

$$\varphi(B) - \varphi(A) = - \int_A^B \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (1.52)$$

Mit dieser Gleichung kann man nun eine weitere wichtige Größe des Elektromagnetismus definieren, die **Spannung**:

$$\boxed{U = \varphi(B) - \varphi(A) = \text{Potenzialdifferenz} = \text{elektrische Spannung}.} \quad (1.53)$$

Die Dimension des elektrischen Potenzials und der elektrischen Spannung ist

$$[\varphi] = [U] = \frac{\text{Nm}}{\text{C}} = \frac{\text{Nm}}{\text{As}} = \text{V} = \text{Volt}. \quad (1.54)$$

(In esu -Einheiten ist 1 statvolt = 300 V).

Zwischen zwei Punkten herrscht eine Spannung von $U = 1 \text{ V}$, wenn bei der Überführung der Ladungsmenge von 1 C zwischen diesen Punkten die Arbeit $W = 1 \text{ Nm}$ verrichtet wird. Ausgehend vom Volt sind auch noch folgende Spannungseinheiten gebräuchlich:

$$\begin{array}{ll} 1 \text{ Mikrovolt} = 1 \mu\text{V} = 10^{-6} \text{ V} & 1 \text{ Kilovolt} = 1 \text{ KV} = 10^3 \text{ V} \\ 1 \text{ Millivolt} = 1 \text{ mV} = 10^{-3} \text{ V} & 1 \text{ Megavolt} = 1 \text{ MV} = 10^6 \text{ V} \\ & 1 \text{ Gigavolt} = 1 \text{ GV} = 10^9 \text{ V} \end{array}$$

Das elektrische Potenzial $\varphi(\vec{r})$ ist ein Skalarfeld, das aufgrund der gegebenen Definition nur bis auf eine beliebige additive Integrationskonstante bestimmt ist. Man kann für einen Ortspunkt ein bestimmtes Potenzial festlegen, wenn man einen Nullpunkt für das Potenzial festsetzt. Um möglichst einfach mit diesen Gleichungen arbeiten zu können, definiert man häufig $\varphi(\vec{r}) = 0$ für $r \rightarrow \infty$. Damit ist das elektrostatische Potenzial:

$$\varphi(\vec{r}_0) = \varphi(\vec{r}_0) - \varphi(\vec{r}_\infty) = - \int_{\infty}^{\vec{r}_0} \vec{E}(\vec{r}) \, d\vec{r} = \int_{\vec{r}_0}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}) \, d\vec{r}. \quad (1.55)$$

Man beachte, dass es sich bei $\varphi(\vec{r}_0)$ um ein **Skalarfeld**, bei $\vec{E}(\vec{r})$ hingegen um ein **Vektorfeld** handelt! Nach dieser Definition stellt $\varphi(\vec{r})$ die Spannung im Punkt r gegen das Unendliche dar. Die Bedeutung des Potenzials liegt darin, dass bei Kenntnis dieser skalaren Größe als Funktion des Ortes sowohl Spannungen zwischen verschiedenen Punkten als auch die elektrische Feldstärke \vec{E} in jedem Punkt ermittelt werden kann. Dabei kommt jedoch der Größe des Potenzials in einem Punkt keinerlei physikalische Bedeutung zu, was auch schon aus der willkürlichen Wahl des Nullpunktes für das Potenzial folgt. **Spannungen und elektrische Feldstärken werden allein durch Potenzialdifferenzen bestimmt**, also besitzen nur diese einen physikalischen Aussagewert.

1.4.2 Potenzial einer Punktladung

Als erstes Beispiel berechnen wir das **Potenzial einer Punktladung**. Für unsere Betrachtung ist es sinnvoll, den Ursprung des Koordinatensystems auf die Ladung Q zu legen. Die elektrische Feldstärke ist

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (1.56)$$

Damit berechnet sich das Potenzial als

$$\varphi(\vec{r}_0) = \int_{\vec{r}_0}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}) \, d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\vec{r}_0}^{\infty} \frac{\vec{r} \, d\vec{r}}{r^3}. \quad (1.57)$$

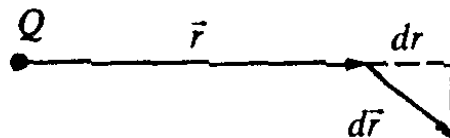


Abbildung 1.25: dr ist die Komponente von $d\vec{r}$ in Richtung \vec{r}

Es ist $\vec{r}d\vec{r} = r dr$, denn dr ist die Komponente von $d\vec{r}$ in Richtung von \vec{r} (s. Abb 1.25, entnommen aus [15]). (Achtung: Nicht mit $|d\vec{r}|$ verwechseln!). Damit ist

$$\varphi(\vec{r}_0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\vec{r}_0}^{\infty} \frac{\vec{r}d\vec{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^{\infty} \frac{r dr}{r^3} \quad (1.58)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \quad (1.59)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_0}^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(0 + \frac{1}{r_0} \right). \quad (1.60)$$

$\varphi(\vec{r}_0) = \varphi(r_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_0}.$	Potenzial einer Punktladung (1.61)
---	--

Das Potenzial einer Punktladung ist also genau wie ihr Feld kugelsymmetrisch. Wir können somit elektrische Felder auch durch **Äquipotenziallinien** oder **-flächen** veranschaulichen. Diese Linien oder Flächen enthalten alle Punkte gleichen Potentials. Bei der Verschiebung einer Ladung zwischen zwei Punkten derselben Äquipotenzialfläche ist für jeden beliebigen Weg die erforderliche Arbeit Null:

$$W_{12} = q [\varphi(2) - \varphi(1)], \quad \text{da } \varphi(1) = \varphi(2), \quad \text{folgt } W_{12} = 0 \quad (1.62)$$

Aus der Tatsache, dass für das Verschieben einer Ladung auf einer Äquipotenzialfläche keine Arbeit nötig ist, folgt weiter, dass diese Flächen senkrecht zu den elektrischen Feldlinien verlaufen. Elektrische Felder können also auch durch ihre Äquipotenziallinien bzw. -flächen veranschaulicht werden. In Abb. 1.26 (links) sieht man das Potenzial und die Niveauflächen einer Punktladung in zweidimensionaler Darstellung. Abb. 1.26 (Mitte) zeigt das Potenzial einer Punktladung dreidimensional. Die Kreise stellen die Niveauflächen dar und müssten eigentlich Kugeln sein, da es sich um eine Punktladung handelt, d.h. eigentlich müsste die Darstellung 4-dimensional sein. Abb. 1.26 (rechts) zeigt die Projektionen auf die (x, y) - Ebene bzw. die (φ, x) - Ebene. Alle Abbildungen stammen aus [9]

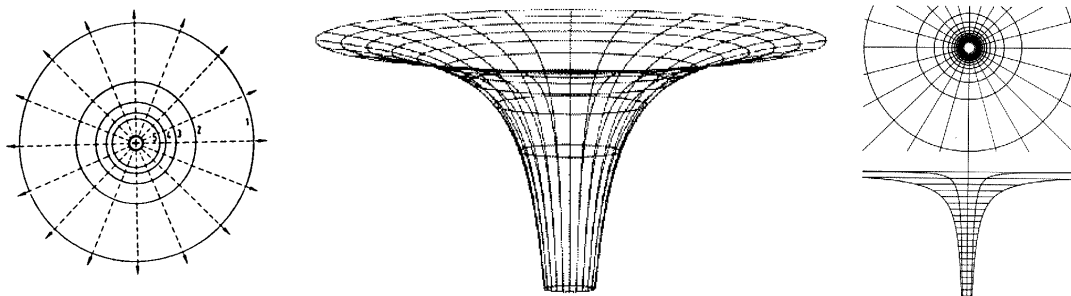


Abbildung 1.26: Potenzial einer Punktladung

Kann man das Potenzial messen?

Bisher haben wir das Potenzial nur als eine Rechenvorschrift analog zur Gravitation kennengelernt. Daraus ergibt sich die Frage, ob das Potenzial auch messbar ist, oder ob es nur einen Formalismus darstellt. Um diese Frage beantworten zu können, wollen wir versuchen, das Potenzial einer Punktladung in Form einer Kugel mit einem Durchmesser von etwa 20 cm zu messen. Bevor wir dies tun können, müssen wir uns mit der Messtechnik vertraut machen.

Um in einem elektrischen Feld das Potenzial eines Punktes zu messen, benutzen wir eine Messsonde. Desweiteren benötigen wir einen Bezugspunkt, z. B. die Erde (als Nullpotenzial), deshalb wird die Messsonde mit der Erde verbunden (man sagt, sie wird „geerdet“). Nimmt man als Messsonde einen Metalldraht, so kann die Messung verfälscht werden, da auf dem Draht ebenfalls Ladungen sitzen können. Diese Ladungen können verschiedene Ursachen haben, z.B. Influenzladung. Das Elektroskop nimmt daher nicht das Potenzial an, das dem Sondenort bei ungestörter Ladungsverteilung entspricht. Das Potenzial kann sich nur dann einstellen, wenn die Überschussladung entfernt wird. Dies gilt auch für die Influenzladungen, die vom Draht bis zum Elektroskop auf die Sonde fließen, wenn diese ins Feld geführt wird, da sich das Potenzial erst einstellen muss. Um die überflüssigen Ladungen zu beseitigen, lässt man an der auszumessenden Raumstelle eine kleine Flamme brennen, in die man die Sonde hineinhält. Die Flamme macht durch Ionisation die Luft leitend, weshalb man solche Sonden auch **Flammensonden** nennt. Hierdurch fließen die überschüssigen Ladungen zu ihren Bildladungen und neutralisieren sich dort mit diesen. Ist die Sonde also dünn genug, so verteilen sich die Ladungen so, als ob keine Sonde vorhanden wäre. Somit muss das Elektrometer jetzt das richtige Potenzial anzeigen.

Versuch 1.16

Wir benötigen eine Hochspannungsquelle, eine Flammsonde und ein Voltmeter (hier: Elektroskop) und eine Konduktorkugel. Den Pluspol der Hochspannungsquelle verbinden wir mit der Konduktorkugel. Der negative Pol der

Spannungsquelle, die Flammsonde und eine Seite des Voltmeters werden auf Erde gelegt. Der andere Teil der Sonde wird ebenfalls mit dem Voltmeter verbunden.

Im ersten Teil des Versuches führen wir die Flammsonde in konstantem Abstand um die Kugel, im zweiten Teil entfernen wir uns radial von der Kugel. Im ersten Fall beobachten wir eine konstante Spannung, also ein konstantes Potenzial, im zweiten Fall nimmt die Spannung mit $1/r$ ab.

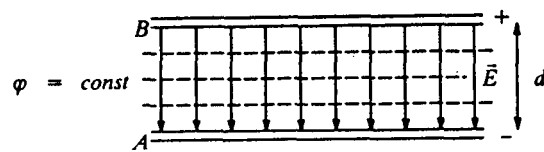


Abbildung 1.27: Plattenkondensator

1.4.3 Homogenes Feld eines Plattenkondensators

Bei dem zweiten Beispiel wollen wir uns das homogene Feld eines Plattenkondensators anschauen. Der Kondensator habe den Plattenabstand d und es herrsche eine Spannung U zwischen den Platten, wie in Abb 1.27 dargestellt (entnommen aus [15]). Dann ist:

$$U = - \int_A^B \vec{E} \, d\vec{r} = \int_B^A \vec{E} \, d\vec{r} = E \cdot d. \quad (1.63)$$

$$\boxed{E = \frac{U}{d}}. \quad (1.64)$$

Mit den folgenden Versuchen wollen wir die $1/d$ -Proportionalität der elektrischen Feldstärke beim Plattenkondensator überprüfen.

Versuch 1.17

Hierzu nehmen wir den gleichen Versuchsaufbau wie beim homogenen Feld (s. S. 29). Es wird jedoch folgende Änderung vorgenommen: Der Plattenabstand wird vergrößert und der leitende Tischtennisball wird asymmetrisch zwischen die Platten gehängt (s. Abb. 1.28, entnommen aus [15]). Mit einer Hochspannungsquelle wird im Kondensator ein elektrisches Feld aufgebaut und

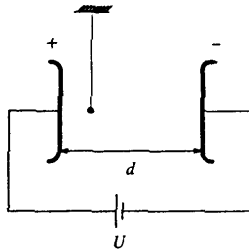


Abbildung 1.28: Versuch zum Nachweis der $1/d$ -Abhängigkeit im Plattenkondensator

der Tischtennisball mit einem elektrischen Löffel geladen. Durch diese aufgebraachte Ladung erfährt der Ball keine Auslenkung, da seine Ladung bzw. die wirkenden Kräfte nicht groß genug sind. Anschließend wird der Plattenabstand verringert und man sieht, dass der Ball langsam ausgelenkt wird. Ist der Abstand klein genug, stößt er an die Platte und wird zur anderen Platte abgestoßen. Dieser Vorgang wiederholt sich nun fortlaufend. Wir sehen, dass die elektrische Feldstärke bei zunehmendem Plattenabstand d mit $1/d$ abnimmt.

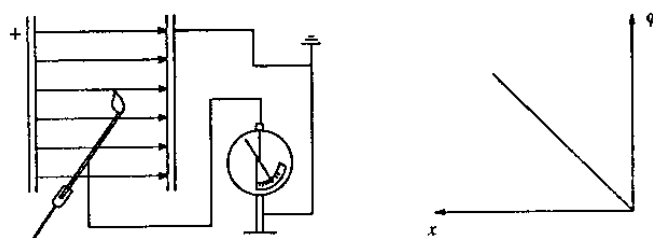


Abbildung 1.29: Potenzialmessung mittels Flammensonde

Versuch 1.18

Im zweiten Versuch überprüfen wir das Potenzial mit Hilfe der Flammsonde, in Analogie zu der Punktladung. Der Aufbau ist in Abb. 1.29 (links) schematisch dargestellt. Zuerst führen wir die Sonde entlang einer Äquipotenzialfläche, also parallel zu den Platten. Wir beobachten, dass das Potenzial konstant ist. Auf dieser Äquipotenziallinie führen wir nun die Sonde aus dem Feld heraus und anschließend am Feld entlang, also senkrecht zu den Platten. In beiden Fällen beobachten wir einen Abfall des Potenzials. Im zweiten Fall fällt das Potenzial linear von der positiven Platte zur negativen Platte hin ab, d. h. φ ist linear zum Plattenabstand d . Eine graphische Darstellung des erwarteten Ergebnisses ist in Abb. 1.29 (rechts) dargestellt.

1.5 Potenzial einer beliebigen Ladungsverteilung

Für die elektrische Kraft und das elektrische Feld gilt das Superpositionsgesetz:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad \text{und} \quad \vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i. \quad (1.65)$$

Es soll nun gezeigt werden, dass dieses Prinzip auch für das Potenzial seine Gültigkeit behält.

$$\varphi = \int \vec{E} \, d\vec{r} = \int \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \, d\vec{r} = \sum_{i=1}^n \int \vec{E}_i \, d\vec{r} = \sum_{i=1}^n \varphi_i. \quad (1.66)$$

Das Superpositionsprinzip überträgt sich also auf das Potenzial. Für mehrere Punktladungen ergibt sich somit:

$$\varphi(P_0) = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|} \quad (1.67)$$

$\varphi(P_0)$ ist das Potenzial im Punkt P_0 mit dem Ortsvektor \vec{r} .

1.5.1 Der elektrische Dipol

Unter einem Dipol versteht man zwei kleine, entgegengesetzt geladene und gleich große Punktladungen $+Q$ und $-Q$, die sich im Abstand l voneinander befinden, der klein ist gegen die Entfernung r des Aufpunktes P_0 von der Dipolmitte. \vec{l} sei ein Vektor, der durch seine Richtung von $-Q$ nach $+Q$ die Orientierung des Dipols bestimmt. Eine solche Ladungsverteilung und das zugehörige Feldlinienbild haben wir bereits auf Seite 25

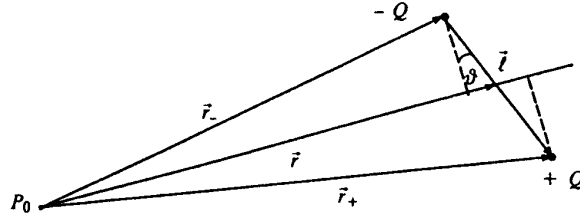


Abbildung 1.30: Der elektrische Dipol

kennengelernt (s. auch Abb. 1.30 aus [15]). Da sich die Potentiale, die von $+Q$ und $-Q$ im Aufpunkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ hervorgerufen werden, algebraisch addieren, ist das Potenzial:

$$\varphi(P_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r_+} - \frac{Q}{r_-} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_- - r_+}{r_- \cdot r_+} \right), \quad (1.68)$$

wobei r_+ und r_- die Abstände des Aufpunktes P_0 von $+Q$ und $-Q$ bezeichnen. Unter der Voraussetzung, dass r_+ und r_- groß gegen l sind, können folgende Näherungen gemacht werden:

$$r_+ \cdot r_- = r^2 \quad \text{und} \quad r_- - r_+ = l \cdot \cos \vartheta = \vec{l} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.69)$$

wobei ϑ der Winkel zwischen \vec{r} und \vec{l} ist. Somit lässt sich das Potenzial eines Dipols für $r \gg l$ schreiben als

$$\varphi(P_0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{l} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \vartheta}{r^2}. \quad (1.70)$$

Den Vektor $\vec{p} = Q \cdot \vec{l}$ nennt man **Dipolmoment**. Das Potenzial des elektrischen Dipols \vec{p} ist also proportional zum Betrag des Dipolmomentes $Q \cdot l$ und variiert mit $\cos \vartheta$ und $1/r^2$. Das Zeigerdiagramm in Abb. 1.31 (aus [15]) zeigt die Winkelabhängigkeit von φ und $\cos \vartheta$ für ein festes r . Die Länge des Zeigers ist proportional zu $\cos \vartheta$. Das Potenzial eines Dipolfeldes und seine Feldlinien sind in Abb. 1.32 dargestellt (entnommen aus [9]).

1.5.2 Kontinuierliche Ladungsverteilung

Genau wie beim elektrischen Feld ersetzen wir $\sum Q_i$ durch $\int dQ$, wobei wieder $dQ = \rho(\vec{r}) dV$ ist. Für das Potenzial ergibt sich hiermit:

$$\varphi(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{Volumen}} \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} dV. \quad (1.71)$$

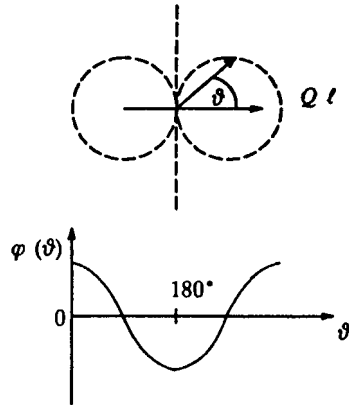


Abbildung 1.31: Zeigerdiagramm

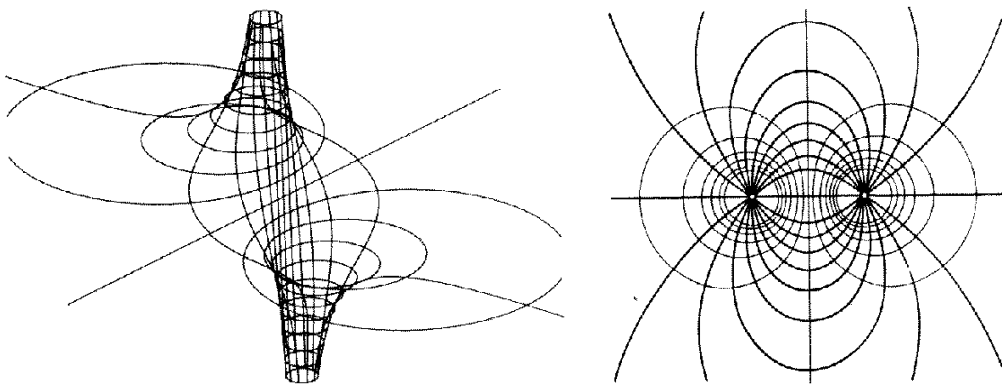


Abbildung 1.32: Das Dipolfeld

Hierbei ist \vec{r}_0 der Ortsvektor des Aufpunktes und \vec{r} der Ortsvektor des Volumenelementes (s. Abb. 1.33, entnommen aus [15]). Eine andere Schreibweise für das Potenzial erhält man, wenn man die Definition der Flächenladungsdichte

$$\sigma = \frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche}} = \frac{dQ}{dA} \quad (1.72)$$

für dQ einsetzt. Damit ist das Potenzial

$$\varphi(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\text{Fläche}} \frac{\sigma(\vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} dA. \quad (1.73)$$

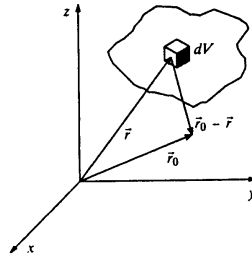


Abbildung 1.33: Kontinuierliche Ladungsverteilung

1.6 Berechnung der Feldstärke aus dem Potenzial

Die Beschreibungen des elektrischen Feldes durch den Vektor der elektrischen Feldstärke \vec{E} und durch das Potenzial φ sind äquivalent. Bei Kenntnis von \vec{E} kann für jeden Punkt das Potenzial φ als $\varphi = -\int \vec{E} \, d\vec{r}$ bestimmt werden. Häufig lassen sich aber Potenziale leichter messen als elektrische Feldstärken. Deshalb stellt sich die Frage, wie man aus einem bekannten Potenzial die Feldstärke in diesem Punkt ermitteln kann.

Bisher haben wir schon folgenden differenziellen Zusammenhang hergeleitet:

$$dW_p = -q \vec{E} \, d\vec{r} = -\vec{F} \, d\vec{r}, \quad (1.74)$$

d.h. durch Integration kann man aus der COULOMBSchen Kraft \vec{F} oder aus der elektrischen Feldstärke \vec{E} die potenzielle Energie W_p bzw. das Potenzial φ berechnen. Kann man umgekehrt auch \vec{F} bzw. \vec{E} durch Differenzieren von W_p bzw. φ berechnen?

Betrachten wir zunächst beispielsweise eine Punktladung mit $F(\vec{r}) = F_r(r)$. Dann ist

$$dW_p = -F_r(r) \, dr \quad \Leftrightarrow \quad F_r(r) = -\frac{dW_p}{dr}. \quad (1.75)$$

Dividiert man diese Gleichung durch q , so erhält man

$$E_r(r) = \frac{F_r(r)}{q} = -\frac{1}{q} \frac{dW_p}{dr} = -\frac{d\varphi}{dr}. \quad (1.76)$$

Wie lässt sich dieses Verfahren für den Vektor $\vec{E}(\vec{r})$ verallgemeinern? Erhält man etwas in der Form

$$??? \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{d\varphi}{d\vec{r}} ??? \quad (1.77)$$

Um das Problem mathematisch richtig anzugehen, betrachten wir zunächst die Komponentenschreibweise:

$$dW_p = -q (E_x, E_y, E_z)^T (dx, dy, dz)^T \quad (1.78)$$

$$= -q (E_x \, dx + E_y \, dy + E_z \, dz). \quad (1.79)$$

Nun betrachten wir die **partiellen Ableitungen** der einzelnen Komponenten, d.h. die Gleichung wird entweder nach x , y oder z abgeleitet und die beiden anderen Komponenten werden wie Konstanten behandelt. Für das partielle Differenzial $d_x W_p$ wird also nur x variiert, d.h. $dx \neq 0$, während dy und dz null sind. Damit ist

$$d_x W_p = -q E_x dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d_x W_p}{dx} = -q E_x. \quad (1.80)$$

Um das **totale Differenzial** dW_p von der **partiellen Ableitung** unterscheiden zu können, benutzt man folgende Schreibweise für die partielle Ableitung

$$\frac{d_x W_p}{dx} \equiv \frac{\partial W_p}{\partial x} = -q E_x. \quad (1.81)$$

Analog lauten die partiellen Ableitungen nach y und z

$$\frac{\partial W_p}{\partial y} = -q E_y \quad \text{und} \quad \frac{\partial W_p}{\partial z} = -q E_z. \quad (1.82)$$

Division durch q liefert:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -E_x; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -E_y; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -E_z \quad (1.83)$$

oder in Vektorschreibweise

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^T = -\text{grad } \varphi = -\nabla \varphi.} \quad (1.84)$$

$\vec{E}(\vec{r})$ ist der Vektor aus den partiellen Ableitungen des Potentials, man sagt, $\vec{E}(\vec{r})$ ist der (negative) **Gradient des Potentials**.

Was bedeutet der Gradient?

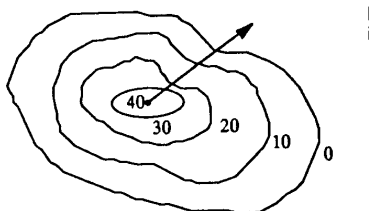


Abbildung 1.34: Der Gradient zeigt in Richtung des stärksten Gefälles

Der Gradient ist der Vektor in Richtung der größten Steigung, somit zeigt $\vec{E}(\vec{r})$ in die Richtung des stärksten Potenzialgefälles. Stellt man sich das Potenzial als eine hügelige Landschaft vor, so sind die Höhenlinien gleich den Äquipotenziallinien und die Falllinien entsprechen den Feldlinien (s. Abb. 1.34, entnommen aus [15]). Der Gradient zeigt dann in Richtung des steilsten Anstieges und steht immer senkrecht auf den Äquipotenziallinien (bzw. Höhenlinien). In Abb. 1.35 (links) ist eine skalare Funktion $F(x, y)$ als Fläche

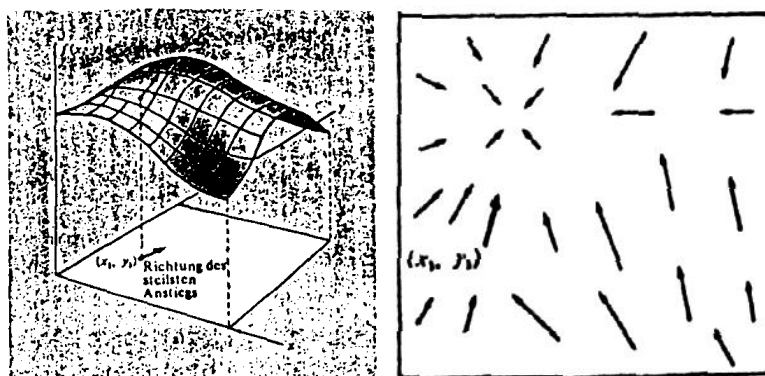


Abbildung 1.35: Veranschaulichung des Gradienten einer skalaren Funktion $f(x, y)$

dargestellt, Abb. 1.35 (rechts) zeigt die Darstellung des Vektorfeldes ∇f durch Pfeile: $\nabla f = \text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$. In Abb. 1.23 auf Seite 33 wird das Gravitationsfeld mit dem elektrischen Feld verglichen (entnommen aus [3]).

1.7 Anwendung homogener elektrischer Felder

1.7.1 Der Dipol im homogenen Feld

Wir betrachten nun einen elektrische Dipol im homogenen Feld, dessen Ursprung in den Mittelpunkt von \vec{l} gelegt wird (vgl. Abschnitt 1.5.1, Seite 40). Das elektrische Feld wirkt mit entgegengesetzten gleich großen Kräften $\vec{F} = Q \vec{E}$ und $-\vec{F} = -Q \vec{E}$ auf die Ladungen des Dipols. Die resultierende Kraft ist daher null, d.h. der Dipol ändert seinen translatoischen Bewegungszustand im Feld nicht. Das Kräftepaar erzeugt jedoch ein Drehmoment $\vec{\tau}$ um die Mittelachse senkrecht zu der von \vec{p} und \vec{E} aufgespannten Ebene (s. Abb. 1.36, entnommen aus [15]). Es ist:

$$\tau = 2 F \frac{l}{2} \sin \alpha = F l \sin \alpha = Q E l \sin \alpha = P E \sin \alpha \quad (1.85)$$

$$\text{oder} \quad \boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} = Q \vec{l} \times \vec{E}.} \quad (1.86)$$

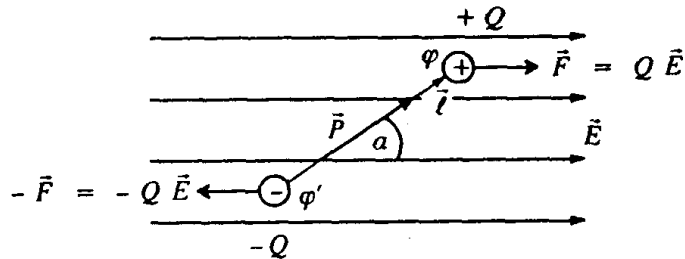


Abbildung 1.36: Dipolmoment

Versuch 1.19

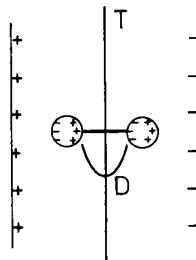


Abbildung 1.37: Dipol im homogenen Feld

Zwischen einem Plattenkondensator befinden sich als Dipol zwei graphitierte, starr miteinander verbundene Tischtennisbälle. Sie sind an einem Torsionsdraht aufgehängt und befinden sich parallel zu den Kondensatorplatten. Nun wird auf die Bälle unterschiedliche Ladung aufgebracht und ein homogenes Feld erzeugt. Der Dipol richtet sich nun senkrecht zu den Platten aus. Dreht man das Feld um, so dreht sich auch der Dipol (s. Abb. 1.37 aus [2]).

Ein freier Dipol wird also im Feld so gedreht, dass \vec{p} und \vec{E} parallel stehen. Dann wird das Drehmoment null.

Dipolanwendungen

1. Entstaubungsanlage:

Versuch 1.20

Wir lassen den Rauch einer Pfeife durch einen Metallzylinder treten, durch dessen Mittelachse ein Draht geführt ist. Erzeugt man nun mittels einer Spannung ein radiales, also inhomogenes Feld, so werden die Rauchpartikel polarisiert, d.h. sie bilden durch partikelinterne Influenz elektrische Dipole aus, und bewegen sich zum Zylinder bzw. zum Draht, wo sie sich ablagern (s. Abb. 1.38 aus [2]).

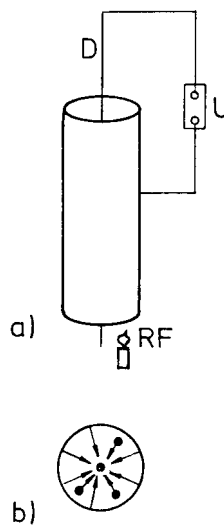


Abbildung 1.38: Entstaubungsanlage

2. Antennen: Dipole haben als Ultrakurzwellen-Antennen sehr große Bedeutung. Sie sind in der Mitte unterbrochen, wo sie beim Sender ihre Hochfrequenzenergie zugeführt bekommen, die sie abstrahlen. Die Ladungsverteilung wechselt im Rhythmus der Hochfrequenz. Sie nimmt z.B. von der Mitte über die Länge des Dipols nach den beiden Enden hin sinusförmig zu und hat zu einem bestimmten Zeitpunkt ihr Maximum. Sie ist dann in der Mitte null ($\lambda/2$ -Dipol). Beim Empfänger-Dipol wird von der unterbrochenen Mitte die empfangene Energie über eine Zweidrahtleitung dem Verstärker zugeführt. Die (horizontale oder vertikale) Lage des Sende-Dipols bestimmt die Richtung der Polarisation der Strahlung. Der empfangende Dipol muss für den optimalen Empfang die gleiche Lage wie der Sende-Dipol haben, also horizontal oder vertikal.
3. Velours Strukturen: Bringt man Textilhärchen in ein inhomogenes Feld, so entstehen

Dipole, die sich parallel ausrichten und im Feld bewegen. Lässt man sie auf eine mit einem Kleber versehene Unterlage treffen, so entsteht eine Velours-Struktur.

4. Spritzlackierung: Erzeugt man zwischen Spritzpistole und Spritzgut ein elektrisches Feld, so werden die einzelnen Lackteilchen polarisiert und folgen dem Feld. Auf diese Weise lassen sich feine Strukturen ohne Verluste lackieren.

1.7.2 Der Versuch von MILLIKAN zur Bestimmung der Elementarladung

An dieser Stelle soll nun der Versuch von R.A. MILLIKAN erklärt und gezeigt werden. Ein Plattenkondensator mit Plattenabstand $d = 6$ mm wird horizontal aufgestellt und durch eine Kunststoffkappe gegen äußere Einflüsse geschützt. In dieser Kappe befinden sich zwei kleine Löcher, durch die mittels eines Zerstäubers feine Öltröpfchen eingestäubt werden. Beim Einstäuben werden einige der Öltröpfchen durch Reibungselektrizität ne-

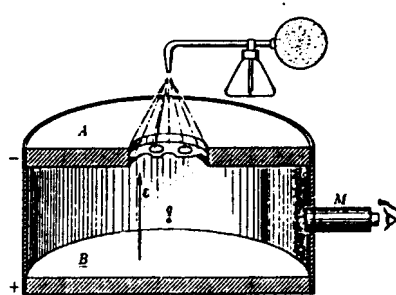


Abbildung 1.39: Millikan-Versuch im schematischen Aufbau

gativ aufgeladen. Die Bewegung, d.h. der Fall unter der Wirkung der Schwerkraft oder der Anstieg unter der Wirkung des elektrischen Feldes von einer Platte zur anderen, kann bei entsprechender Beleuchtung durch ein Mikroskop beobachtet werden. Die Geschwindigkeit wird durch Stoppen der Laufzeit gemessen, wobei eine Skala, die am Mikroskop befestigt ist, zur Streckenmessung zur Verfügung steht. Der schematische Aufbau ist in Abb. 1.39 dargestellt (entnommen aus [15]).

Im ersten Versuchsteil ist das Feld ausgeschaltet und die Öltröpfchen fallen unter der Wirkung der Schwerkraft mit einer konstanten Geschwindigkeit \vec{v}_1 . Diese kommt dadurch zustande, dass insgesamt keine Kraft wirkt, d.h. die nach oben zeigende Reibungskraft \vec{F}_R auf Grund des STOKESchen Gesetzes und der Auftrieb der Luft \vec{F}_A (wird zum Schluss berücksichtigt), sind der Gewichtskraft \vec{F}_G des Tröpfchens gleich (s. Abb 1.40, entnommen aus [15]). Für die wirkenden Kräfte ergibt sich somit bei Gleichgewicht:

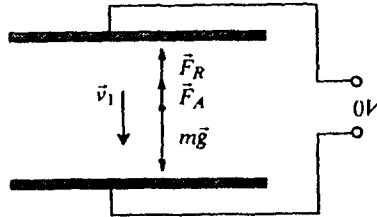


Abbildung 1.40: Wirkende Kräfte ohne E-Feld

$$\vec{F}_R \stackrel{!}{=} \vec{F}_G + \vec{F}_A = 6 \pi \eta r \vec{v}_1 = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \vec{g}, \quad (1.87)$$

wobei r der Tröpfchenradius, ρ die Dichte mit $\rho = \rho_{\text{öl}} - \rho_{\text{Luft}}$ und η die Viskosität der Luft ist. Im zweiten Versuchsteil wird das elektrische Feld eingeschaltet. Zu den bereits

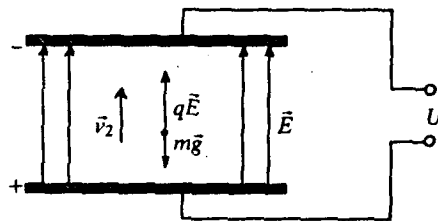


Abbildung 1.41: Wirkende Kräfte mit E-Feld

betrachteten Kräften kommt nun noch die elektrische Kraft $\vec{F}_{el} = q \vec{E}$ hinzu (s. Abb. 1.41, entnommen aus [15]):

$$\vec{F}_R = \vec{F}_G + \vec{F}_{el} - \vec{F}_A = 6 \pi \eta r \vec{v}_2 = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \vec{g} + q \vec{E}. \quad (1.88)$$

Überwiegt hierbei die Kraft des elektrischen Feldes die Schwerkraft, so bewegt sich das Tröpfchen mit der Geschwindigkeit \vec{v}_2 nach oben. Aus den Gleichungen 1.87 und 1.88 folgt für die Bewegung des Tröpfchens

$$6 \pi \eta r (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = q \vec{E} \quad (1.89)$$

$$\Rightarrow q = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \frac{6 \pi \eta r}{E} \quad (1.90)$$

Der Tröpfchenradius r lässt sich mit Gleichung 1.87 bestimmen.

$$r = 3 \sqrt{\frac{\eta \vec{v}_1}{2 \rho g}}. \quad (1.91)$$

Somit können wir allein durch Messen der Fall- und der Steiggeschwindigkeit die Ladung q bestimmen.

1.7.3 Die BRAUNsche Röhre

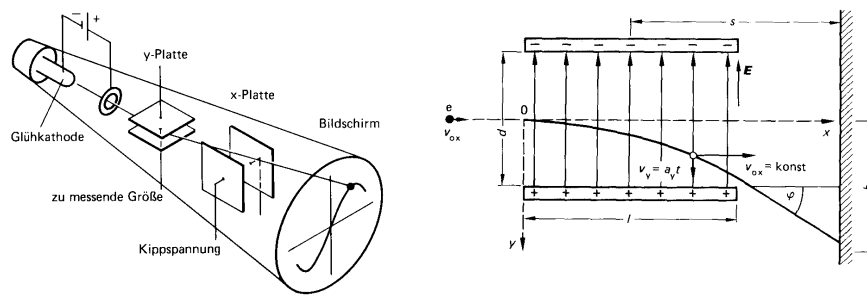


Abbildung 1.42: Elektronenröhre

Als weiteres Beispiel der Anwendung homogener Felder soll die BRAUNsche Röhre, benannt nach ihrem Erfinder F. BRAUN (1850-1918), genannt werden. Ihre Anwendung findet sie im **Kathodenstrahloszillograph**, wie er z. B. in der Vorlesung benutzt wird (s. Abb. 1.42, entnommen aus [3]). Als weiteres weit verbreitetes Beispiels ist der Fernseher zu nennen. In diesen Röhren werden Elektronen aus der Glühkathode ausgelöst und durch zwei um 90° versetzt angeordnete Ablenkcondensatoren in horizontaler und vertikaler Richtung abgelenkt. Die Elektronen treffen anschließend auf einen Fluoreszenzschirm, der am Auftreffpunkt leuchtet.

Versuch 1.21

In einer Elektronenablenkröhre werden die Elektronen durch das Auftreffen auf einem Fluoreszenzschirm sichtbar gemacht. Der Schirm ist parallel zum Elektronenstrahl ausgerichtet, so dass er als horizontaler Strich zu sehen ist. Wird nun senkrecht zu dem Strahl ein homogenes Feld erzeugt, so wird der Strahl abgelenkt, und zwar um so stärker, je stärker das elektrische Feld ist.

1.8 Der elektrische Fluss und der Satz von GAUSS

Es wurde gezeigt, dass die Dichte der Feldlinien ein anschauliches Maß für die elektrische Feldstärke darstellt. Der elektrische Fluss Φ (auch Φ_{el}) durch eine gegebene Fläche hängt mit der Feldstärke \vec{E} genauso zusammen wie der Volumenstrom einer Flüssigkeit mit der Strömungsgeschwindigkeit v . Nimmt man nun eine Fläche, die beispielsweise senkrecht

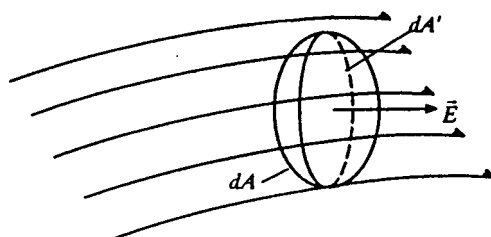


Abbildung 1.43: Anzahl der durch eine Fläche laufenden Feldlinien

zu den Feldlinien verläuft und bildet das Produkt aus dieser Fläche und dem \vec{E} -Feld, so erhält man - anschaulich gesprochen - ein Maß für die **Anzahl der Feldlinien**, die durch die Fläche hindurchtreten

$$\Phi = AE \quad (1.92)$$

(s. auch Abb. 1.43, entnommen aus [15]). Diese Betrachtungsweise wollen wir nun verfeinern. Wir betrachten dazu eine beliebig geformte Fläche A , in einem Gebiet, in dem ein elektrisches Feld vorliegt. Diese Fläche unterteilen wir in so kleine Flächenelemente dA , sodass wir diese als eben ansehen können. Der Vektor $d\vec{A}$ des Flächenelementes sei ein Normalenvektor auf diese Fläche mit der Länge dA (s. Abb. 1.44, entnommen aus [15]). Wird die Fläche im Sinne einer Rechtsschraube umfahren, so zeigt $d\vec{A}$ in Richtung der

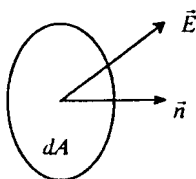


Abbildung 1.44: Normalenvektor

Fortbewegung dieser Schraube. Liegt am Ort von dA die elektrische Feldstärke \vec{E} vor, so ist der elektrische Fluss durch diese Fläche

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA \cdot \cos \alpha, \quad (1.93)$$

wobei α der Winkel zwischen \vec{E} und $d\vec{A}$ ist.

Der **gesamte Kraftfluss** Φ durch eine endliche Fläche A ergibt sich aus der Summe der Kraftflüsse durch die einzelnen Flächenelemente:

$$\Phi = \iint_{\text{Fläche}} \vec{E} d\vec{A}.$$

(1.94)

\iint bedeutet, dass über eine Fläche, d.h. über zwei Variablen integriert wird.

1.8.1 Elektrischer Kraftfluss einer Punktladung

Wir wollen den Fluss durch eine konzentrische Kugelschale mit Radius r berechnen, in deren Mittelpunkt sich eine positive Ladungsmenge Q befindet (s. Abb. 1.45, entnommen

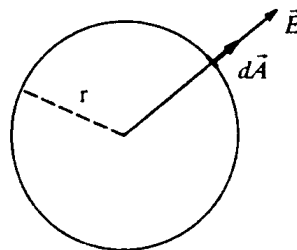


Abbildung 1.45: Feldfluss durch eine Kugelschale

aus [15]). In jedem Punkt der Kugelfläche erzeugt die Ladung eine Feldstärke

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \quad (1.95)$$

\vec{E} und der Vektor des Flächenelementes $d\vec{A}$ sind in jedem Punkt der Kugelfläche gleichgerichtet, d.h. $\alpha = 0$ bzw. $\cos \alpha = 1$, und die elektrische Feldstärke hat in jedem Punkt den gleichen Betrag. Damit ist der gesamte Kraftfluss durch die Kugelfläche der Größe

$4\pi r^2$:

$$\Phi = \oint_{\text{geschl. Kugelfläche}} \vec{E} \, d\vec{A} = \oint_{\text{geschl. Kugelfläche}} E \cdot dA \cdot \cos \alpha \quad (1.96)$$

$$\stackrel{\alpha=0}{=} \oint_{\text{geschl. Kugelfläche}} E \cdot dA = E \oint_{\text{geschl. Kugelfläche}} dA = E \cdot 4\pi r^2. \quad (1.97)$$

Mit

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (1.98)$$

erhält man dann:

$$\Phi = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (1.99)$$

$$\boxed{\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0}}$$

Fluss durch eine Kugeloberfläche um eine Punktladung Q (1.100)

Der Kraftfluss ist also proportional zu Q und unabhängig vom Radius der Kugelfläche. Dieser Zusammenhang ist eine direkte Folge der $1/r^2$ - Abhängigkeit von E und somit die einfachste Form des COULOMBSchen Gesetzes (aufgrund der Kompensation von $4\pi r^2$ und $1/4\pi r^2$).

1.8.2 Kraftfluss durch eine beliebige geschlossene Fläche

Das gleiche Ergebnis erhält man auch für den gesamten Kraftfluss durch eine beliebige geschlossene Fläche um eine Punktladung Q :

$$\oint_{\text{geschl. Fläche}} E \cdot \cos \alpha \, dA = \oint_{\text{geschl. Fläche}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot \cos \alpha \, dA = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\text{geschl. Fläche}} \frac{\cos \alpha \, dA}{r^2}. \quad (1.101)$$

Der Integrand ist gleich dem vom Q ausgehenden Raumwinkel $d\Omega$, den das Flächenelement dA aufspannt:

$$d\Omega = \frac{\cos \alpha \, dA}{r^2}. \quad (1.102)$$

Damit wird

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\text{geschl. Fläche}} d\Omega. \quad (1.103)$$

Der gesamte Raumwinkel um einen Punkt ist gleich 4π . Somit folgt:

Der durch eine geschlossene Oberfläche A gehende elektrische Fluss Φ ist gleich der Summe der von dieser Fläche eingeschlossenen Ladungen Q_{in} multipliziert mit $1/\epsilon_0$.

(1.104)

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Zu dem selben Ergebnis gelangt man auch durch folgende Überlegungen:
Der Fluss durch das Flächenelement dA der Kugel war $d\Phi = E dA$. Der Fluss durch ein

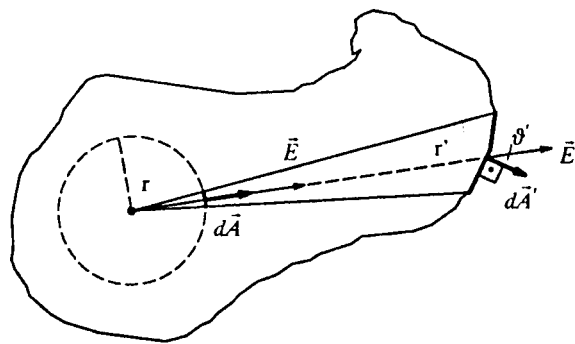


Abbildung 1.46: elektrischer Kraftfluss durch eine beliebige Fläche

beliebiges Oberflächenstück dA' einer beliebig gestalteten Fläche (s. Abb 1.46, entnommen aus [15]) ist

$$d\Phi' = \vec{E}' d\vec{A}' = E' dA' \cos \vartheta. \quad (1.105)$$

Aus $E \sim \frac{1}{r^2}$ folgt

$$E r^2 = E' r'^2 = const. \Leftrightarrow E' = \frac{r^2}{r'^2} E. \quad (1.106)$$

Für infinitesimal kleine Flächen kann der Strahlensatz angewandt werden: $dA' \cos \vartheta = dA \frac{r'^2}{r^2}$. Damit ist

$$d\Phi' = \vec{E}' d\vec{A}' = E' dA' \cos \vartheta = \frac{r^2}{r'^2} E dA \frac{r'^2}{r^2} = E dA = d\Phi. \quad (1.107)$$

Allgemein gilt also:

Der GAUSSsche Satz der Elektrostatik

$$\Phi = \oiint_{\text{beliebig geschl. Fläche}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (1.108)$$

Anschaulich bedeutet der GAUSSsche Satz der Elektrostatik, dass die Zahl der Feldlinien durch eine beliebige, die Ladung Q umschließende Fläche konstant ist (s. Abb. 1.47, entnommen aus [15]). Obwohl der Satz eigentlich nur eine andere Formulierung des

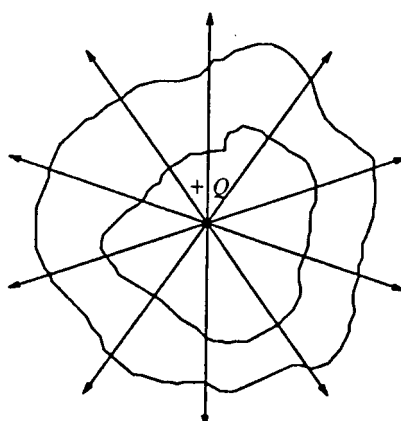


Abbildung 1.47: Die Zahl der Feldlinien ist konstant

COULOMBSchen Gesetzes ist, ist er für die einfache Formulierung der Elektrostatik sehr wichtig.

Für mehrere Ladungen Q_i gilt nach dem Superpositionsprinzip:

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_i. \quad (1.109)$$

Betrachten wir nun eine **kontinuierliche Ladungsverteilung**. Ist ∂V eine beliebige geschlossene Fläche, und ist V das von ∂V eingeschlossene Volumen, so gilt mit $dQ =$

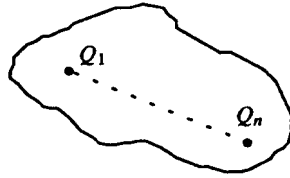


Abbildung 1.48: Superpositionsprinzip

$\varrho(\vec{r}) dV$:

$$\Phi = \oint_{\partial V} \vec{E} d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \varrho(\vec{r}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \varrho(x, y, z) dx dy dz \quad (1.110)$$

$$\Rightarrow \oint_{\substack{\text{beliebig} \\ \text{geschl. Fläche}}} \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \quad (1.111)$$

mit Q_{in} = eingeschlossene Ladung (s. Abb. 1.48, entnommen aus [15]).
Dies ist die allgemeine Integralform des Gaußschen Satzes und besagt:

Der durch eine geschlossene Oberfläche A gehende elektrische Fluss Φ ist gleich der Summe der von dieser Fläche eingeschlossenen Ladungen Q_{in} multipliziert mit $1/\epsilon_0$.

Spezialfall: $Q = 0$

$$\Rightarrow \oint_{\substack{\text{beliebig} \\ \text{geschl. Fläche}}} \vec{E} d\vec{A} = 0, \quad (1.112)$$

d.h. der Fluss durch eine geschlossene Fläche verschwindet, falls keine Ladungen eingeschlossen sind.

Dies soll an folgendem Beispiel verdeutlicht werden:

Beispiel 1.4

Die Abb. 1.49 (entnommen aus [3]) zeigt eine geschlossene Fläche, durch die die Feldlinien hindurchgehen. Da Feldlinien nur an Ladungen beginnen oder enden, gehen genausoviele Feldlinien in die Fläche hinein, wie hinaus. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Feldlinien, die in die Fläche hinein gehen negativ und die, die hinausgehen, positiv gezählt werden.

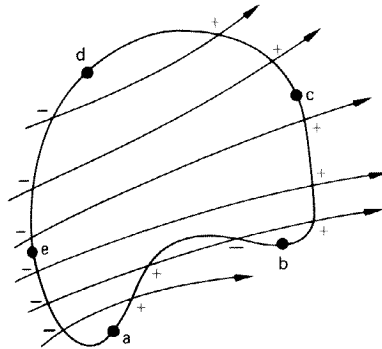


Abbildung 1.49: Die Zahl der ein- und austretenden Feldlinien ist gleich

Mit Hilfe einer mathematischen Identität, die **Satz von GAUSS** heißt (und Gegenstand der Mathematikvorlesung des 4. Semesters sein wird), lässt sich der GAUSSsche Satz umformen:

Satz von GAUSS in der Mathematik:

$$\Phi = \oint_{\partial V} d\Phi = \oint_{\partial V} \vec{E} d\vec{A} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV \quad (1.113)$$

wobei die elektrische Feldstärke \vec{E} ein beliebiges Vektorfeld in einem von der Oberfläche ∂V begrenzten Volumen V ist. In dem Satz von GAUSS ist „div“ ein Differenzialoperator, der **Divergenz** genannt wird. Er wird auf ein Vektorfeld angewendet. Ist ein Vektorfeld $\vec{E}(\vec{r})$ als Funktion von kartesischen Raumkoordinaten gegeben

$$\vec{E}(x, y, z) = \begin{pmatrix} E_x(x, y, z) \\ E_y(x, y, z) \\ E_z(x, y, z) \end{pmatrix}, \quad (1.114)$$

so lautet die Vorschrift von $\operatorname{div} \vec{E}$:

$$\operatorname{div} \vec{E}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} E_x(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} E_y(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} E_z(x, y, z) \quad (1.115)$$

Oft wird die Divergenz auch als Skalarprodukt des **Nabla-Operators** ∇ mit dem Vektorfeld ausgedrückt. Der Nabla-Operator ∇ ist ein Differenzialoperator, der die Gestalt

eines Vektors hat. In vielen Fällen kann man mit dem Nabla-Operator ∇ sogar gewohnte Vektorarithmetik durchführen (Vorsicht!). Der Nabla-Operator ∇ ist für kartesische Raumkoordinaten definiert durch

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.116)$$

Die Divergenz lässt sich dann mit Hilfe des Nabla-Operators ∇ darstellen durch

$$\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x(x, y, z) \\ E_y(x, y, z) \\ E_z(x, y, z) \end{pmatrix} \quad (1.117)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} E_x(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} E_y(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} E_z(x, y, z) \quad (1.118)$$

Um die Bedeutung von $\operatorname{div} \vec{E}$ zu erklären, betrachten wir das infinitesimale Volumenelement $dV = dx dy dz$ in Abb. 1.50 (entnommen aus [15]). Für den Nettofluss in eine

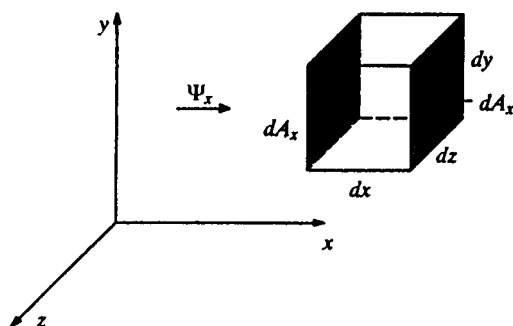


Abbildung 1.50: Nettofluss durch ein Volumenelement

Richtung, z.B. in x -Richtung, gilt:

$$d_x \Phi = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dA_x \quad \text{mit} \quad dA_x = dy \cdot dz \quad (1.119)$$

$d_x \Phi$ ist also die Änderung von E_x entlang dx multipliziert mit dA_x . Für den eindimensionalen Nettofluss in x -Richtung gilt somit:

$$d_x \Phi = \frac{\partial E_x}{\partial x} dV \quad (1.120)$$

Dies gilt entsprechend für $d_y\Phi$ und $d_z\Phi$. Für den gesamten Nettofluss in x, y, z- Richtung erhält man:

$$d\Phi = d_x\Phi + d_y\Phi + d_z\Phi \quad (1.121)$$

$$\boxed{\frac{d\Phi}{dV} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{E}.} \quad (1.122)$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes ist der Nettofluss in einem infinitesimalen Volumenelement dV , d.h. der Nettofluss aus diesem Volumen. Ist $\operatorname{div} \vec{E} > 0$, sagt man, es liegt eine **Quelle** vor, da mehr Feldlinien in das Volumenelement hinein fließen als heraus. Ist $\operatorname{div} \vec{E} < 0$, so spricht man von einer **Senke**, da dort Feldlinien verschwinden.

1.8.3 Was folgt für elektrische Leiter aus dem GAUSSschen Satz?

Wir betrachten einen geladenen Leiter, auf dem die Ladung ruhen soll, d.h. der sich im elektrischen Gleichgewicht befinden soll. In diesen Fall muss die elektrische Feldstärke im Inneren des Leiters gleich Null und die elektrische Feldstärke in Tangentenrichtung auf der Oberfläche gleich null sein. Wäre dies nicht der Fall, so würden auf die Ladungen Kräfte wirken; es käme zu Ladungsverschiebungen, d.h. zu Strömen im Leiter oder auf der Oberfläche und damit läge kein elektrisches Gleichgewicht mehr vor. Daraus folgt weiter, dass sich im elektrostatischen Gleichgewicht die Ladungen nur auf der Oberfläche befinden. Der Beweis erfolgt mit Hilfe des GAUSSschen Satzes:

Wegen $\vec{E} = 0$ im Inneren des Leiters ist der elektrische Kraftfluss durch eine beliebig dicht unter der wahren Oberfläche liegenden geschlossenen Fläche

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (1.123)$$

Nach dem GAUSSschen Satz gilt

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_i, \quad (1.124)$$

damit ist im Inneren des Leiters

$$\sum_{i=1}^n Q_i = 0, \quad (1.125)$$

also keine Ladung vorhanden. Die gesamte Ladung verteilt sich auf der Oberfläche. Die folgenden Versuche sollen das Problem veranschaulichen.

Versuch 1.22

1. Wir wiederholen den bereits auf Seite 7 beschriebenen Versuch 1.5 mit dem FARADAY- Becher. Der Becher wird mittels Reibung aufgeladen, und nun versuchen wir, aus dem Inneren des Bechers mit dem elektrischen Löffel Ladung zu entnehmen. Dies gelingt nicht. Nur von außen können wir Ladung entnehmen und auf einem Elektroskop nachweisen.
2. In diesem Versuch wird der Feldlinienverlauf in einem geschlossenen Leiter gezeigt. Dazu wird wieder die mit Grieß und Rizinusöl gefüllte Glas-

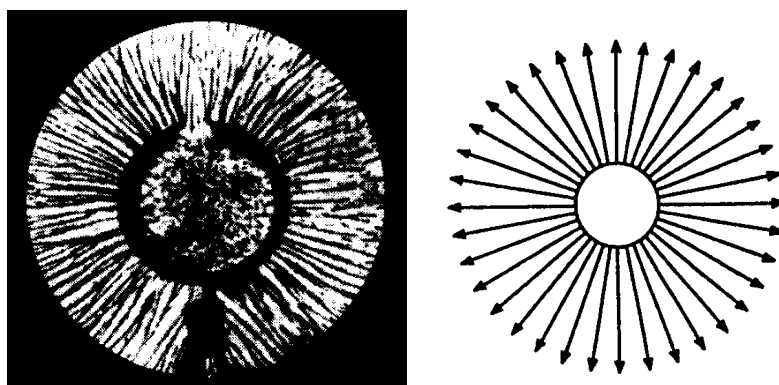


Abbildung 1.51: Versuchsergebnis und theoretischer Feldverlauf

schale genommen und ein geladener Metall-Ring hineingelegt. Am Rand der Schale befindet sich ein weiterer Ring, der geerdet werden muss, damit ein elektrisches Feld entsteht. Der Versuch zeigt anschaulich, dass in einem geschlossenen leitenden Ring kein elektrisches Feld existiert. Auch zeigt der Versuch, dass die Feldlinien senkrecht auf den Leiter stehen. Der theoretische Verlauf der Feldlinien und das experimentelle Ergebnis sind in Abb. 1.51 dargestellt (entnommen aus [1] und [15]).

3. Für den letzten Versuch wird ein großer Drahtkäfig benötigt, in den eine Versuchsperson hineinpasst. Der Käfig wird auf einen zum Hörsaalboden isoliert aufgestellten Metallteller gesetzt und geerdet. Um möglichst hohe Ladungen auf den Käfig durch Funkenüberschlag zu bekommen, wird neben ihm ein VAN-DE-GRAAFF-Generator plaziert. Nachdem sich die Versuchsperson in den Käfig gestellt hat, wird er mit dem Bandgenerator aufgeladen. Der Funkenüberschlag ist deutlich sichtbar. Auch bei noch so kräftigem Aufladen des Käfigs ist keinerlei elektrische Wirkung auf die Versuchsperson zu sehen. Auch das große Einstiegsloch lässt das elektrische Feld nicht so weit eindringen, dass die Person etwas davon merkt. Ein solches Drahtnetz heißt FARADAY-Käfig und ist nach M. FARADAY

(1791-1867) benannt, der diesen Versuch 1836 als erster durchgeführt hat. Die Wirkung des FARADAY-Käfigs ist in Abb. 1.52 dargestellt (entnommen aus [15]). Da elektrische Felder, wie wir gesehen haben, nicht in das Innere von Leitern eindringen können, sind Räume, die von einem metallischen Kasten oder einem engmaschigen Drahtnetz umgeben sind, wie z.B. die Fahrgastzelle eines Autos, elektrisch abgeschirmt.

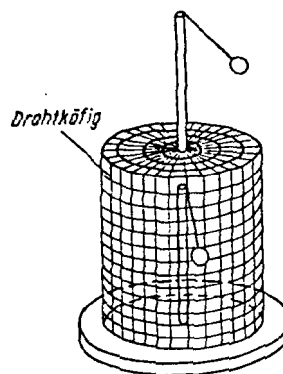


Abbildung 1.52: FARADAYkäfig

1.8.4 Beweisskizze für den mathematischen Satz von GAUSS

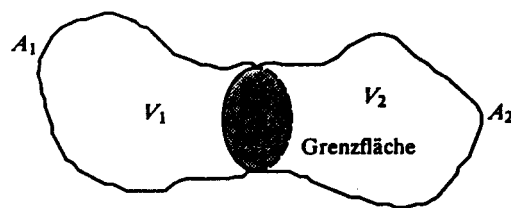


Abbildung 1.53: Das Volumen V wird in Teilvolumina aufgeteilt

Die Abb. 1.53 (aus [15]) zeigt ein Volumen V mit der Oberfläche $A = \partial V$. Dieses Volumen wird in zwei Teilvolumina V_1 und V_2 unterteilt. Mit dieser Unterteilung erhält man:

$$\oint_{A=\partial V} \vec{E} \, d\vec{A} = \oint_{\partial V_1} \vec{E} \, d\vec{A} + \oint_{\partial V_2} \vec{E} \, d\vec{A}, \quad (1.126)$$

da sich die Integrale über die Grenzfläche aufheben. Man kann also ein Volumen V in beliebig viele Teilvolumina V_i partitionieren, die jeweils die Oberfläche $A_i = \partial V_i$ haben:

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \, d\vec{A} = \sum_{i=1}^n \oint_{\partial V_i} \vec{E} \, d\vec{A}_i = \sum_{i=1}^n V_i \oint_{\partial V_i} \frac{\vec{E}}{V_i} d\vec{A}_i = \sum_{i=1}^n V_i \frac{\Phi_i}{V_i}. \quad (1.127)$$

Bildet man nun den Grenzübergang für $V_i \rightarrow 0$ und $n \rightarrow \infty$, so strebt V_i gegen dV und Φ_i gegen $d\Phi$, und die Summe wird zur Integration. Es gilt also dann:

$$\Phi = \oint_{\partial V} \vec{E} \, d\vec{A} = \iiint_V dV \frac{d\Phi}{dV} \quad (1.128)$$

Auf Seite 59 hatten wir gesehen, dass der Kraftfluss durch die (geschlossene) Oberfläche eines infinitesimalen Volumenelements die Divergenz des Vektorfeldes ist. Damit folgt:

$$\boxed{\Phi = \oint_{\partial V} \vec{E} \, d\vec{A} = \iiint_V dV \frac{d\Phi}{dV} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \, dV} \quad \text{mathematische Identität} \quad (1.129)$$

Aus 1.110 und 1.129

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \varrho(\vec{r}) \, dV \quad (1.130)$$

$$\Phi = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \, dV \quad (1.131)$$

folgt

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \varrho(\vec{r}) \, dV \quad (1.132)$$

Da diese Integralgleichung für beliebige Volumina gilt, müssen die Integranden der Volumenintegrale gleich sein.

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}} \quad \text{differenzielle Form des GAUSSschen Satzes der Elektrostatik} \quad (1.133)$$

D.h. die lokale Änderung des Flusses (Divergenz des Feldes) ist gleich $1/\varepsilon_0$ mal der Ladungsdichte ϱ . Eine lokale Änderung des Flusses bedeutet, dass Feldlinien neu entstehen oder verschwinden. Man nennt daher die positive Ladungsdichte $\varrho > 0$ auch **Quelle des elektrischen Feldes**, da aus ihr zusätzliche Feldlinien kommen. Eine negative Ladungsdichte $\varrho < 0$ heißt **Senke des elektrischen Feldes**, weil hier die Feldlinien verschwinden. Daraus folgt, dass in einem Volumenelement dV die Ladungsdichte von Null verschieden ist. Ist die Ladungsdichte gleich Null und damit auch $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, so sagt man, dass das Feldgebiet **quellenfrei** ist.

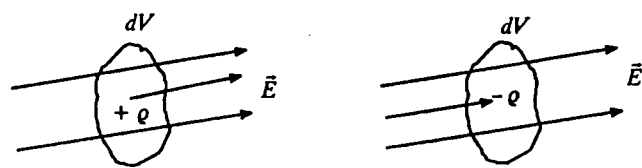


Abbildung 1.54: Quellen und Senken

Kapitel 2

Elektrostatik mit Leitern und Isolatoren

2.1 Leiter und Isolatoren

Die elektrische Leitfähigkeit (siehe Abschnitt 3.4.1, Seite 97) der verschiedenen Stoffe ist sehr unterschiedlich. Die Begriffe **Leiter** und **Isolatoren**, die wir in Abschnitt 1.1.3 auf Seite 4 eingeführt haben, sind nicht absolut. Metalle als typische Leiter haben eine 10^{20} -fach bessere Leitfähigkeit als typische Isolatoren (z.B. Glas). Ferner gibt es extreme Zustände (Supraleitung) und Zwischenzustände (z.B. Halbleiter). Mit der Leitfähigkeit und ihrer Ursache werden wir uns näher in Abschnitt 3.4.1 beschäftigen. Hier wollen wir uns nur mit dem unterschiedlichen Verhalten von Leitern und Isolatoren im elektrischen Feld befassen.

2.2 Leiter im elektrischen Feld und Influenz

In Abschnitt 1.1.5 hatten wir gesehen, dass das Innere von elektrischen Leitern im stationären Zustand feldfrei ist (z.B. FARADAYScher Käfig). Mit unseren jetzigen Kenntnissen können wir die Feldfreiheit in elektrischen Leitern erklären: Wird auf ein vorher ungeladenes Leiterstück eine Ladung Q übertragen, stoßen sich diese Überschussladungen gegenseitig ab. Daher sind sie bestrebt, einen möglichst großen Abstand zueinander einzunehmen. Den größtmöglichen Abstand haben sie dann erreicht, wenn sie sich an der Oberfläche des Leiters aufhalten. Der statische Zustand liegt genau dann vor, wenn die Ladungen sich so auf der Oberfläche verteilt haben, dass das elektrische Feld, das sie erzeugen, im Innern des Leiters verschwindet. Wäre das Innere nicht feldfrei, würde es weiterhin zu einer Ladungstrennung im Innern kommen, und der stationäre Zustand könnte nie erreicht werden. Liegt zusätzlich ein äußeres elektrisches Feld \vec{E}_0 an, so nehmen die Ladungen zwar etwas andere Plätze auf der Oberfläche ein, doch auch in diesem Fall kann

der stationäre Zustand erst erreicht werden, wenn das Innere des Leiters feldfrei ist. Dazu ordnen sich die Ladungen Q so an der Oberfläche an, dass das elektrische Feld \vec{E}_Q , das sie erzeugen, das äußere Feld \vec{E} im Innern des Leiters kompensiert. Letztere Erscheinung wird als **Influenz** bezeichnet (vgl. Abschnitt 1.1.6, Seite 8). Die Influenz tritt auch auf, wenn der Leiter ungeladen ist.

**Das elektrische Feld im Innern eines elektrischen Leiters
verschwindet im stationären Zustand.** (Vgl. Abschnitt 1.8.3,
Seite 59) (2.1)

Zusammenfassung

Für elektrische Leiter gilt im stationären Zustand:

- Das elektrische Feld im Innern verschwindet.
- Ladungen sitzen auf der Oberfläche.
- Leiteroberflächen sind Äquipotenzialflächen.
- Die elektrischen Feldvektoren stehen im Außenraum senkrecht zur Leiteroberfläche.

2.2.1 Feld an einer Leiteroberfläche

Bei elektrischen Leitern ist es sinnvoll, nicht von einer Raumladungsdichte $\rho(\vec{r})$ zu sprechen, da sich die Ladungen nur noch entlang der Oberfläche aufhalten. Aus diesem Grund diskutieren wir die Ladungsverteilung an der Oberfläche mit der **Flächenladungsdichte**

$$\sigma = \frac{dQ}{dA} \tag{2.2}$$

Die Flächenladungsdichte $\sigma(\vec{r})$ können wir uns aus dem Satz von GAUSS (1.113) beschaffen, wenn wir die nach außen gerichtete elektrische Feldstärke $\vec{E}_a(\vec{r})$ kennen. Dazu denken wir uns eine geschlossene Fläche ∂V , die, wie in Abb. 2.1 gezeigt, die Form einer Dose hat und den Teil A der Leiteroberfläche mit der Ladung $Q = \sigma A$ einschließt, für den die Flächenladungsdichte bestimmt werden soll. Die Stirnflächen von ∂V sind dabei parallel zur Leiteroberfläche A ausgerichtet, wobei die eine im Leiterinnern und die andere im Außenbereich liegt. Damit wir den Satz von GAUSS anwenden können, brauchen

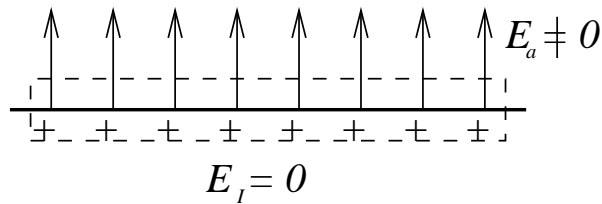


Abbildung 2.1: „Dose“ mit infinitesimaler Dicke zur Herleitung der Flächenladungsdichte σ auf der Oberfläche eines Leiters

wir eine geschlossene Oberfläche. Deshalb sind die Stirnflächen durch eine weitere Teilfläche miteinander verbunden. Der elektrische Kraftfluss durch die Stirnfläche, die sich im Leiterinnern befindet, ist null, da dort das \vec{E} -Feld verschwindet. Der elektrische Kraftfluss durch die Verbindungsfläche ist nicht direkt bekannt. Deshalb legen wir die beiden Stirnflächen so dicht an die Leiteroberfläche, dass die Verbindungsfläche gegen null geht. Dann fließt der gesamte elektrische Kraftfluss durch die Stirnfläche außerhalb des Leiters. Können wir eine konstante Ladungsverteilung auf der Leiteroberfläche voraussetzen (z.B. bei einer Kugel), gilt

$$\Phi = \oint_{\partial V} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.3)$$

$$= \iint_A \vec{E}_a \cdot d\vec{A} \quad (2.4)$$

$$(2.5)$$

Wegen $\vec{E}_a \parallel d\vec{A}$ gilt $\vec{E}_a \cdot d\vec{A} = E_a dA$:

$$\Phi = \iint_A \vec{E}_a \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.6)$$

$$= \iint_A E_a dA \quad (2.7)$$

$$= E_a A = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.8)$$

Wegen $Q = \sigma A$ folgt

$$\Phi = E_a A = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad (2.9)$$

$$\Rightarrow E_a = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.10)$$

Dieses Ergebnis gilt allgemein für den Zusammenhang des nach außen gerichteten Feldes $\vec{E}_a(\vec{r})$ mit der Flächenladungsdichte $\sigma(\vec{r})$:

$$\boxed{E_a(\vec{r}) = \frac{\sigma(\vec{r})}{\varepsilon_0}} \quad (2.11)$$

2.3 Allgemeines elektrostatisches Problem

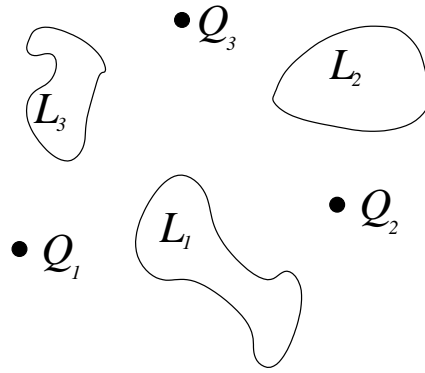


Abbildung 2.2: Die auf den drei Metallkörpern L_1 , L_2 und L_3 influenzierten Flächenladungen stören das elektrische Feld der drei Punktladungen Q_1 , Q_2 und Q_3 .

Eine sehr schwierige Aufgabe ist es, das elektrische Feld von Ladungen unter Anwesenheit von ausgedehnten Leitern zu bestimmen. In Abb. 2.2 ist ein solches Beispiel abgebildet. Ohne die Leiter L_i ließe sich das elektrische Feld \vec{E}_o als Summe der elektrischen Felder der drei Punktladungen Q_1 , Q_2 und Q_3 berechnen. Allerdings werden auf den Leiterklumpen L_1 , L_2 und L_3 Verschiebungsladungen influenziert, die das elektrische \vec{E}_o stören. Das gestörte Feld \vec{E} können wir i.d.R. nicht ohne weiteres analytisch bestimmen. Mit unseren bisherigen Kenntnissen können wir allerdings folgende Aussagen über Feld und Potenzial machen:

- Die Oberflächen der Leiter L_i sind Äquipotenzialflächen. Im Innern der Leiter verschwindet das elektrische Feld $\vec{E}_i = 0$. Daher muss das Potenzial φ_i im gesamten Leiter konstant sein.

$$\varphi_i = \text{const.} \Leftrightarrow \vec{E}_i = -\text{grad } \varphi_i = 0 \quad (2.12)$$

- Der Raum zwischen den Ladungen Q_i und den Leitern L_i ist ladungsfrei, d.h. es gilt

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad (2.13)$$

Aus 2.2 und 2.13 folgt damit

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \quad (2.14)$$

$$\Rightarrow \text{div grad } \varphi = 0 \quad (2.15)$$

Die Hintereinanderausführung der beiden Differentialoperatoren „div“ und „grad“ bezeichnet man als **LAPLACE-Operator** $\text{div grad} = \Delta$. In kartesischen Koordinaten ist er

$$\text{div grad } \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T \varphi(x, y, z) \right] \quad (2.16)$$

$$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (2.17)$$

$$= \Delta \varphi \quad (2.18)$$

Mit dieser Schreibweise lässt sich 2.15 ausdrücken durch die **Gleichung von LAPLACE**:

$$\text{div grad } \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi = 0 \quad (2.19)$$

Die Gleichung von LAPLACE ist eine partielle lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit den Randbedingungen $\varphi = \text{const}$ auf den Leitern L_i . Sie hat bis auf eine additive Konstante genau eine Lösung (ohne Beweis). Leider ist diese Gleichung nur in sehr einfachen Fällen analytisch lösbar und erfordert einen hohen Rechenaufwand, sowie mathematische Kenntnisse, die über den Stoff von HöMa I-IV hinausgehen. In einfachen Fällen kann man die Randbedingungen, dass die Leiteroberflächen Äquipotenzialflächen sind, durch ein einfacheres Modell ersetzen. Man fügt anstelle der ausgedehnten Leiter weitere Ladungen hinzu. Diese Ladungen nennt man **Spiegelladungen**. Die Spiegelladungen erzeugen zusammen mit den realen Ladungen ein elektrisches Feld \vec{E} . Man kann durch geschickte Wahl der Spiegelladungen und deren richtige Platzierung erreichen, dass das zugehörige elektrostatische Potenzial φ genau dort konstant ist, wo sonst die Oberflächen der Leiter wären. Hat man dies erreicht, lassen sich sowohl elektrisches Feld als auch Potenzial im ladungsfreien Raum (also außerhalb der Leiter) mit unserem Modell berechnen. Da der Raum außerhalb der Leiter und der realen Punktladungen ladungsfrei sein muss, können sich die Spiegelladungen nur im Leiterinnern aufhalten. Das elektrische Feld bzw. Potenzial innerhalb der Leiter unterscheidet sich dann allerdings von dem in unserem Modell. Das Modell gilt also nur außerhalb der Leiter. Im Leiterinnern ist das Feld ohnehin gleich null und bedarf daher keines komplizierten Ersatzmodells.

Beispiel 2.1

Es befinde sich eine Punktladung $+Q$ in einem Abstand R von einer unendlich ausgedehnten, leitenden Platte. Die Ladung Q influenziert auf der Platte eine Flächenladungsdichte σ genau so, dass die Platte eine Äquipotenzialfläche

bildet. Legen wir nun ein kartesisches Koordinatensystem so in den Aufbau, dass die Platte die x-y-Ebene bildet und die Punktladung Q auf der z-Achse liegt ($\vec{R}_+ = R \vec{e}_z$). Wir können das elektrische Feld bzw. Potenzial auf der Seite der Platte, auf der sich die reale Ladung Q befindet, richtig beschreiben, indem wir die Platte durch eine betragsmäßig gleichgroße Punktladung $Q' = -Q$ ersetzen, die wir an den Ort $\vec{R}' = -R \vec{e}_z$ plazieren. Diese Spiegelladung bewirkt, dass das Potenzial an der Stelle, an der sich sonst die Platte befände, verschwindet. Damit ist die Randbedingung $\varphi(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r}(x, y, 0)$ (Leiteroberfläche) erfüllt.

Das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ an einem beliebigen Ort \vec{R} mit $\vec{r} \cdot \vec{e}_z > 0$ errechnet sich dann durch Superposition der beiden Punktladungen Q und Q' :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{R}_+|^3} (\vec{r} - \vec{R}_+) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{|\vec{r} - \vec{R}'|^3} (\vec{r} - \vec{R}') \quad (2.20)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r} - \vec{R}_+}{|\vec{r} - \vec{R}_+|^3} - \frac{\vec{r} + \vec{R}_+}{|\vec{r} + \vec{R}_+|^3} \right) \quad (2.21)$$

Dieser Ausdruck ist eine geschlossene Beschreibung des elektrischen Feldes \vec{E} . Der Einfachheit dieses Problems ist es zu verdanken, dass eine solche geschlossene Form überhaupt möglich ist. Doch schon in diesem einfachen Problem ist der Ausdruck für das elektrische Feld relativ kompliziert.

Ist der Außenraum von Leitern nicht wie in Beispiel 2.1 ungeladen, so gilt

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.22)$$

$$\text{und mit } \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi \quad \text{folgt} \quad (2.23)$$

$$-\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.24)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta \varphi + \frac{\rho}{\epsilon_0}} = 0 \quad (2.25)$$

Dies ist die **Gleichung von Poisson**.

2.4 Elektrisches Feld einer geladenen Kugel

Bringen wir eine Ladung Q auf eine leitende Kugel (Radius ist R), werden sich die Ladungsträger (Elektronen) wegen der Kugelsymmetrie gleichmäßig an der Oberfläche $A = 4\pi R^2$ verteilen. Das Innere der Kugel ist wie bei allen Leitern feldfrei. Die Flächenladungsdichte σ an der Oberfläche ist deshalb

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \quad (2.26)$$

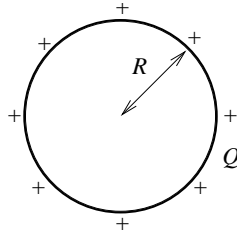


Abbildung 2.3: Auf einer geladenen Kugel befinden sich die Ladungen an der Oberfläche.

Mit der Beziehung 2.11, die die Flächenladungsdichte mit dem nach außen gerichteten Feld verknüpft, lässt sich das Feld direkt an der Außenseite der Leiteroberfläche bestimmen:

$$E_a = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Q}{R^2} \quad (2.27)$$

Für das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ im Außenraum ($r > R$) gilt mit $A_r = 4\pi r^2$ nach dem Satz von GAUSS

$$\oint_{A_r} \vec{E} \, d\vec{A} = E \, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (2.28)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (r \geq R) \quad (2.29)$$

Im Außenraum ist das elektrische Feld der geladenen Kugel mit der Ladung Q identisch mit dem einer Punktladung Q im Kugelmittelpunkt. Die elektrische Feldstärke einer geladenen Leiterkugel ist in Abb. 2.4 gegen r aufgetragen.

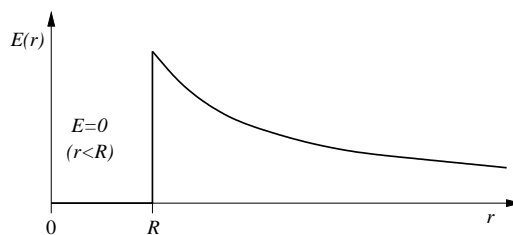


Abbildung 2.4: Die elektrische Feldstärke E einer geladenen Leiterkugel

2.5 Definition der Kapazität

Kondensatoren sind zwei gegeneinander isolierte, unterschiedlich geladene Leiteroberflächen beliebiger Geometrie, zwischen denen eine Potentialdifferenz $\Delta \varphi$ und damit eine

Spannung U herrscht.

Die Geometrie und der Abstand der Leiteroberflächen bestimmen die Ladungstrennungsarbeit und damit die Spannung U , die je getrennter Ladungsmenge Q entsteht.

$$U \sim Q \quad \text{bzw.} \quad Q = U \cdot C. \quad (2.30)$$

Diese Proportionalitätskonstante C , die nach obiger Vorstellung von der "Gesamtgeometrie" des Kondensators abhängt, wird **Kapazität** genannt.

$$\text{Kapazität} \quad C = \frac{Q}{U}. \quad (2.31)$$

Anschaulich kann man sich die Kapazität als ein Maß dafür vorstellen, wieviel Ladung Q je Spannungseinheit $1V$ gespeichert werden kann.

Die Einheit der Kapazität ist das **Farad F**

$$[C] = \frac{A \cdot s}{V} = \frac{C}{V} = F = \text{Farad}. \quad (2.32)$$

Ein Farad ist eine sehr große Einheit. In der Praxis sind kleinere Einheiten üblich wie z.B.

$$\begin{array}{ll} 1 \text{ Millifarad} = 1 \text{ mF} = 10^{-3}\text{F} & 1 \text{ Nanofarad} = 1 \text{ nF} = 10^{-9}\text{F} \\ 1 \text{ Mikrofarad} = 1 \mu\text{F} = 10^{-6}\text{F} & 1 \text{ Pikofarad} = 1 \text{ pF} = 10^{-12}\text{F} \end{array}$$

Im cgs-System ist $[C] = \text{cm}$ und $1\text{F} \stackrel{\wedge}{=} 9 \cdot 10^{11} \text{ cm}$.

2.6 Kondensatoren

Kondensatoren sind wichtige elektronische Bauelemente und dienen u. a. zur Speicherung elektrischer Ladung und elektrischer Energie.

2.6.1 Der Plattenkondensator

Ein Plattenkondensator besteht aus zwei gleich großen, parallelen Metallplatten der Fläche A , die sich im Abstand d voneinander befinden (s. Abb. 2.5). Liegt zwischen ihnen eine Spannung U an, dann herrscht an jeder Stelle im Innern des Kondensators (näherungsweise) dasselbe homogene elektrische Feld (wenn gilt: $d^2 \ll A$). Die Platten haben eine Flächenladungsdichte $\sigma = Q/A$, und das Feld hat eine Feldstärke von

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q}{A}. \quad (2.33)$$

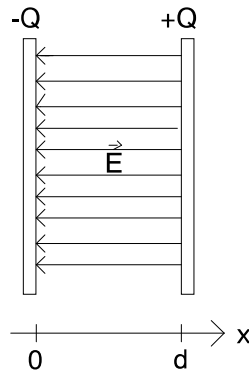


Abbildung 2.5: Kapazität eines Plattenkondensators

Die Spannung zwischen den Platten ist

$$U = - \int_{x=0}^{x=d} \vec{E} \, d\vec{r} = - \int_0^d -E \, dx = E d. \quad (2.34)$$

(U ist hier von $-$ nach $+$ definiert.)

$$U = E d = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q}{A} \cdot d. \quad (2.35)$$

Damit ist die

Kapazität des Plattenkondensators $C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}.$ (2.36)

Mit dem folgenden Versuch soll nun die $1/d$ - Proportionalität der elektrischen Feldstärke beim Plattenkondensator überprüft werden.

Versuch 2.1

Wir bringen auf eine Seite eines Plattenkondensators mit Hilfe einer Spannungsquelle Ladung auf, während wir die andere Platte erden. Wir entfernen nun die Spannungsquelle und messen die Spannung, die zwischen den Platten herrscht. Da die Spannung proportional zur Ladung ist, können wir den maximalen Ausschlag des Voltmeters auch als Ladungsmenge interpretieren. Wir führen den Versuch für die Plattenabstände $d=0.5, 1, 2$ und 4cm durch. Der Vollausschlag von 3 V entspricht 10^{-8} C .

Die Messungen liefern:

d in cm	U in V	Q in 10^{-8}C
0,5	2,9	9,66
1	1,45	4,83
2	0,8	2,67
4	0,5	1,67

Um Kondensatoren mit großen Kapazitäten zu erhalten, wählt man d klein und A groß. In der Technik vergrößert man die Fläche durch Aufwickeln von Metallfolie, Aufrauen der Oberfläche durch Ätzen bei Elektrolytkondensatoren oder beidseitiges Bedampfen dünner isolierender Schichten mit Metall, und man verkleinert die Abstände, indem man dünne Kunststofffolien (oder Oxidschichten) als Zwischenlagen verwendet.

2.6.2 Der Kugelkondensator

Der Kugelkondensator besteht aus zwei konzentrischen Kugeln der Radien r_1 und r_2 mit $r_2 > r_1$, die die Ladungen $+Q$ und $-Q$ tragen. Im Bereich $r_1 \leq r \leq r_2$ liegt ein kugelsymmetrisches Feld $E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ vor (s. Abb. 2.6, entnommen aus [3]). Die Spannung zwischen den Kugeln ist

$$U = - \int_{r_2}^{r_1} E(r) \, dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} \, dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (2.37)$$

Damit ist die

$$\text{Kapazität des Kugelkondensators} \quad C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1} \right). \quad (2.38)$$

Diskussion:

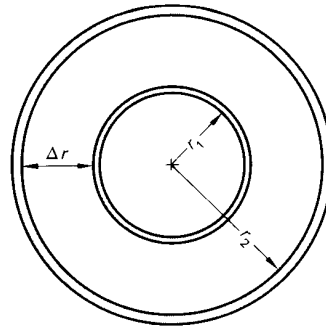


Abbildung 2.6: Kapazität eines Kugelkondensators

1. $r_2 \rightarrow \infty$: $C = 4 \pi \varepsilon_0 r_1$.

Bemerkung: Im cgs-System ist $4 \pi \varepsilon_0 = 1$ und damit $C = r$, d.h., eine Kugel vom Radius $r = 1 \text{ cm}$ hat ein Kapazität von $C = 1 \text{ cm} \hat{=} 1,1 \text{ pF}$.

2. $r_2 \approx r_1$: $\Rightarrow r_2 - r_1 = d$ damit wird $C = 4 \pi \varepsilon_0 r^2/d$ vgl. Plattenkondensator.

2.6.3 Der Zylinderkondensator

Der Zylinderkondensator besteht aus zwei coaxialen Zylindern der Länge l (s. Abb. 2.7, entnommen aus [3]). Zwischen diesen herrscht ein radialsymmetrisches Feld. Die Berech-

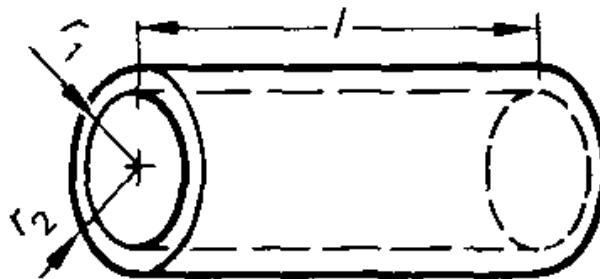


Abbildung 2.7: Kapazität eines Zylinderkondensators

nung der Kapazität erfolgt analog zu den vorherigen Beispielen und liefert:

Kapazität des Zylinderkondensators
$$C = \frac{Q}{U} = 2 \pi \varepsilon \frac{l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (2.39)$$

2.6.4 Schaltung von Kondensatoren

Schaltsymbol

In Abbildung 2.8 (entnommen aus [3]) ist das Schaltsymbol für einen Kondensator dargestellt.

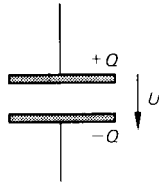


Abbildung 2.8: Schaltsymbol eines Kondensators

Parallelschaltung

Die einzelnen Kondensatoren mögen die Kapazitäten C_1, C_2, \dots, C_n haben. Bei Parallelschaltung besitzen sie alle die gleiche Spannung U (s. Abb. 2.9, entnommen aus [9]). Auf den einzelnen Kondensatoren befinden sich also die Ladungsmengen $Q_1 = C_1 U$, $Q_2 = C_2 U$, ..., $Q_n = C_n U$. Auf dem Gesamtkondensator, dessen Kapazität C gesucht wird, befindet sich also die Gesamtladung

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i \quad (2.40)$$

$$= Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n \quad (2.41)$$

$$= C_1 U + C_2 U + \dots + C_n U \quad (2.42)$$

$$= (C_1 + C_2 + \dots + C_n)U \quad (2.43)$$

$$= \sum_{i=1}^n C_i \cdot U \quad (2.44)$$

Bei Parallelschaltung von Kondensatoren addieren sich die Kapazitäten.

$$\text{Parallelschaltung} \quad \boxed{C = \sum_{i=1}^n C_i} \quad (2.45)$$

Will man also bei gegebenen Kondensatoren die Kapazität vergrößern, so muss man sie parallel schalten.

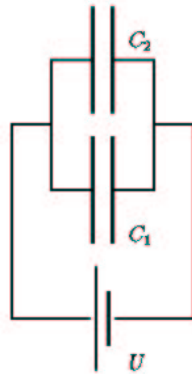


Abbildung 2.9: Parallelschaltung von Kondensatoren

Versuch 2.2

Wir nehmen zwei baugleiche Plattenkondensatoren und bestimmen ihre Einzelkapazitäten. Nun schalten wir sie parallel und messen die Gesamtkapazität. Wir sehen, die Kapazität hat sich verdoppelt.

Reihenschaltung

Aufgrund der Influenz sind die Ladungsmengen Q auf allen in Reihe geschalteten Kondensatoren gleich groß: $Q = C_i \cdot U_i$. Die am System anliegende Spannung U setzt sich aus

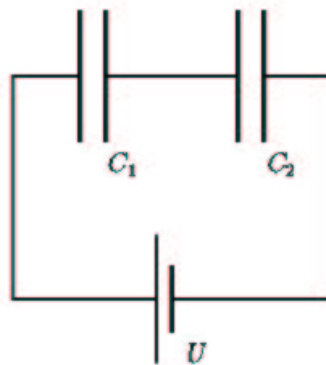


Abbildung 2.10: Reihenschaltung von Kondensatoren

den einzelnen, an den Kondensatoren liegenden Spannungen zusammen.

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}, U_2 = \frac{Q}{C_2}, \dots, U_n = \frac{Q}{C_n} \quad (2.46)$$

Damit folgt für die Gesamtspannung

$$U = \sum_{i=1}^n U_i \quad (2.47)$$

$$= U_1 + U_2 + \dots + U_n \quad (2.48)$$

$$= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} \quad (2.49)$$

$$= Q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (2.50)$$

Für die Gesamtkapazität folgt dann bei der

$$\text{Reihenschaltung} \quad \boxed{\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}} \quad (2.51)$$

Bei der Reihenschaltung von Kapazitäten (s. Abb. 2.10, entnommen aus [9]) ist der reziproke Wert der resultierenden Kapazität gleich der Summe der Kehrwerte der Einzelkapazitäten. Damit ist die Gesamtkapazität stets kleiner als die kleinste Einzelkapazität, womit sich diese Anordnung zur Herstellung kleiner Kapazitäten eignet, wenn nur große vorhanden sind. Aus $U_i = Q/C_i$ folgt weiterhin, dass an dem Kondensator mit der größten Kapazität die kleinste Spannung anliegt. Die Reihenschaltung von Kondensatoren kann damit also zur Spannungsteilung verwendet werden.

Versuch 2.3

Nun schalten wir die beiden Plattenkondensatoren in Reihe und messen wieder die Gesamtkapazität. Wir beobachten, dass die Gesamtkapazität der Kehrwert der Summe der Einzelkapazitäten ist.

2.7 Energie des elektrischen Feldes

Wir gehen von zwei parallelen neutralen Metallplatten aus und bringen von einer der Platten z.B. negative Ladung auf die andere, so dass positive Ladung zurückbleibt. Bei diesem Vorgang baut sich eine Spannung (Potenzial) auf, die bei jedem weiteren Ladungstransport überwunden werden muss. Die dabei aufzubringende Energie ist

$$dW_{12} = U dQ = U C dU = \varphi C d\varphi. \quad (2.52)$$

Die gesamte, zum Laden des Kondensators benötigte Energie beträgt dann

$$W_{12} = \int_{\varphi_1=0}^{\varphi_2=U} dW_{12} = \int_0^U \varphi C d\varphi = \frac{1}{2} C U^2. \quad (2.53)$$

Mit Hilfe der Relation $Q = C U$ lässt sich Gleichung 2.53 weiter umschreiben.

$$\text{Energie eines Kondensators} \quad \boxed{W_{12} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q U} \quad (2.54)$$

Betrachten wir nun als Beispiel den Plattenkondensator etwas genauer. Es war $E = U/d$ und $C = \varepsilon_0 A/d$ für $d^2 \ll A$. Das Feld nimmt das Volumen $V = A d$ ein. Es ist dann:

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{A}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 A d = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 V \quad (2.55)$$

Der letzte Teil der Gleichung enthält keine Besonderheiten des Plattenkondensators mehr. Dies bedeutet, dass sie allgemein in jedem beliebigen elektrischen Feld gilt.

$$\text{Energie eines beliebigen elektrischen Feldes} \quad \boxed{W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 V} \quad (2.56)$$

Führt man nun noch die **Energiedichte** w ein, so erhält man:

$$\text{Energiedichte eines beliebigen elektrischen Feldes} \quad \boxed{w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2} \quad (2.57)$$

2.8 Isolatoren im elektrischen Feld

Versuch 2.4

Schiebt man einen Isolator zwischen zwei gleichnamig geladene, frei aufgehängte Luftballons, dann beobachtet man eine Verringerung des Ausschlages (s. Abb. 2.11).

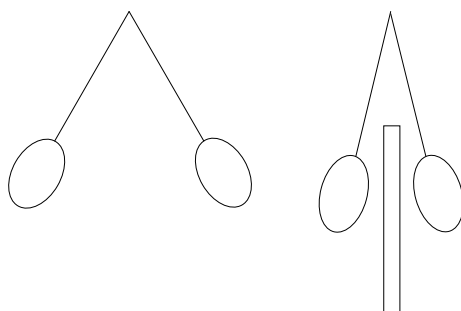


Abbildung 2.11: Der Isolator verringert das elektrische Feld

Im Isolator werden die Ladungsträger auf Grund ihrer geringen Beweglichkeit nur etwas verschoben. Das Innere des Isolators ist also nicht feldfrei. Das Feld “greift” sozusagen durch den Isolator “hindurch”, d.h. $F = q E$ wird kleiner. Solche Stoffe werden nach dem griechischen Wort “dia” (= durch) auch **Dielektrika** genannt.

Das Verhalten von Dielektrika soll genauer im homogenen Feld eines Plattenkondensators studiert werden.

Versuch 2.5

Analog zu dem Versuch mit der Metallplatte im Kondensator, führen wir nun eine Isolatorplatte in den Kondensator ein. Die Beobachtungen sind ähnlich dem vorhergehenden Versuch. Die Unterschiede werden aus der Abb. 2.12 deutlich (entnommen aus [2]).

Vor dem Einbringen der Platte sei die Feldstärke $E_o = U_o/d$. Durch das Einbringen des Dielektrikums zwischen die Kondensatorplatten verschieben sich die Ladungen auf dem Isolator, wodurch ein geringeres Feld E_m und damit eine geringere Spannung U_m zwischen den Platten herrscht. Es ist $E_m < E_o$ und damit auch $U_m < U_o$. Es gilt:

$$\frac{E_o}{E_m} = \frac{U_o}{U_m} = \epsilon_r. \quad (2.58)$$

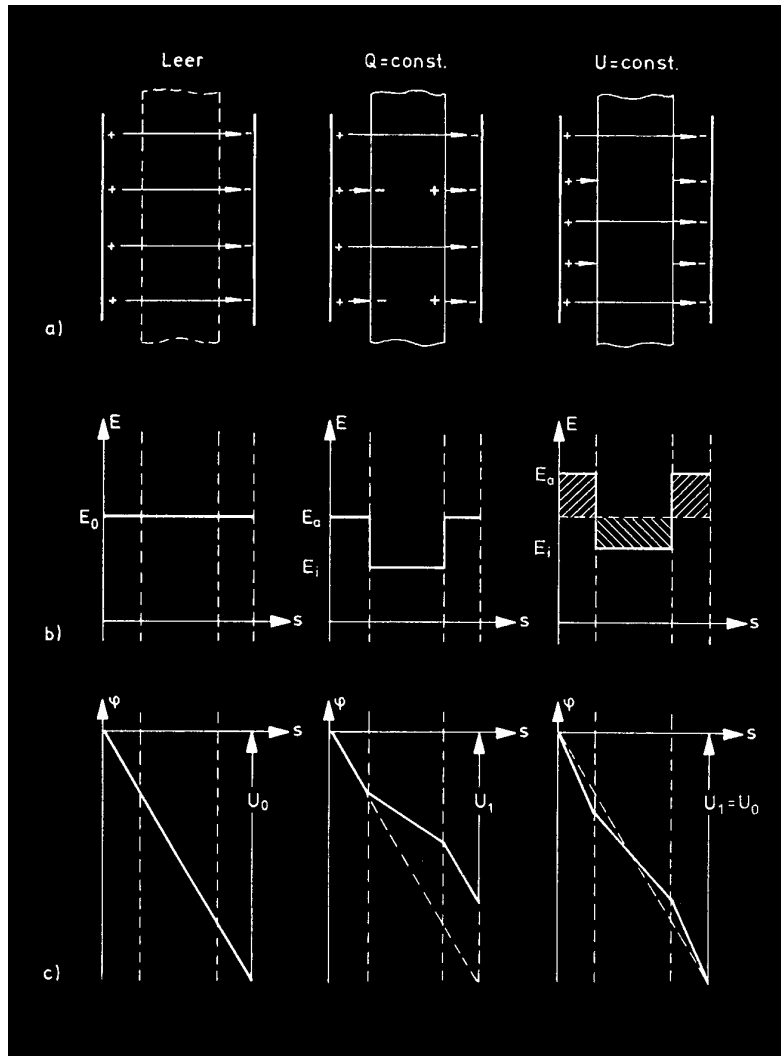


Abbildung 2.12: Isolator im elektrischen Feld

Wegen $C = Q/U$ führt dies zu

$$\frac{C_m}{C_o} = \varepsilon_r, \quad \text{bzw.} \quad C_m = \varepsilon_r C_o. \quad (2.59)$$

Wird ein Dielektrikum in ein elektrisches Feld gebracht, so nimmt die elektrische Feldstärke gegenüber der des Vakuums um das ε_r -fache ab, während die Kapazität durch das Einbringen des Dielektrikums auf das ε_r -fache steigt. Die Größe ε_r wird **Permittivitätszahl** oder **relative Dielektrizitätszahl** genannt. Sie ist eine, das Dielektrikum charakterisierende, Materialkonstante. Sie ist dimensionslos und ihr Wert ist stets ≥ 1 .

Versuch 2.6

Um die Permittivitätszahl ε_r unterschiedlicher nichtleitender Materialien zu bestimmen, führen wir diese in einen Plattenkondensator ein und bestimmen jeweils die Spannung.

Einige Werte von ε_r sind folgender Tabelle zu entnehmen:

Material	ε_r
Vakuum	1
Luft	1,000576
Papier	1,6 – 2,6
Paraffin	2 – 2,3
Glas	2 – 16
Glimmer	4 – 8
Glycerin	41
Wasser	81
Keramik (z.B. TiO ₂)	10 ⁴ – 10 ⁵

Eine Anwendung der Dielektrika findet man in den **Papierfolienkondensatoren**, die zwischen Stanniol- oder Aluminiumstreifen als Dielektrikum paraffiniertes Papier enthalten. Sie sind nur für geringe Spannungen bis 700 V brauchbar, da die Isolierfähigkeit des Papiers für höhere Spannungen nicht genügt. Wenn man Kondensatoren für höhere Spannungen bauen will, so verwendet man als Dielektrikum Glas oder Glimmer. Heute kann man auch keramische Stoffe mit Dielektrizitätszahlen von 100 oder mehr herstellen, die sich besonders für den Bau von Kondensatoren mit großen Kapazitäten eignen. Wie Abb. 2.13 (aus [3]) zeigt, wird die ursprüngliche Feldstärke \vec{E}_o durch das eingebrachte Dielektrikum um das Gegenfeld \vec{E}_p geschwächt.

$$\vec{E}_m = \vec{E}_o - \vec{E}_p \quad (2.60)$$

Schreiben wir nun das ursprüngliche Feld als

$$E_o = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q}{A} \quad (2.61)$$

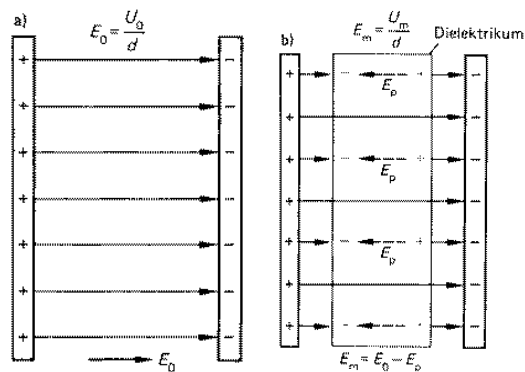


Abbildung 2.13: Das elektrische Feld wird durch das Dielektrikum geschwächt

und das Gegenfeld als

$$E_p = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q'}{A}, \quad (2.62)$$

wobei wir die Ladungsmenge Q als freie Ladung bezeichnen wollen und die Ladungsmenge Q' als gebundene. Damit können wir schreiben

$$E_m = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q - Q'}{A}, \quad (2.63)$$

Führen wir nun noch neben der

$$\text{dielektrischen Verschiebung} \quad D = \frac{Q}{A} = \frac{\text{freie Ladungen}}{\text{Fläche}} \quad (2.64)$$

die

$$\text{Polarisation} \quad P = \frac{Q'}{A} = \frac{\text{gebundene Ladungen}}{\text{Fläche}} \quad (2.65)$$

ein, so können wir die Formel umschreiben:

$$E_m = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q - Q'}{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} (D - P), \quad (2.66)$$

$$D - P = \varepsilon_0 E_m \quad \text{oder} \quad D = \varepsilon_0 E_m + P. \quad (2.67)$$

Allgemein gilt diese Gleichung auch vektoriell.

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_m + \vec{P}.} \quad (2.68)$$

2.8.1 Zusammenhang von \vec{E} und \vec{D}

Für die weitere Rechnung benötigen wir die Größe der gebundenen Ladung Q' . Sie folgt ebenfalls aus der Gleichung 2.63 von Seite 83. Es ist

$$E_m = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q - Q'}{A} = \frac{1}{\varepsilon_r} E_o = \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q}{A} \quad (2.69)$$

$$\Rightarrow Q - Q' = \frac{1}{\varepsilon_r} Q \quad \Leftrightarrow \quad Q' = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) Q, \quad (2.70)$$

$Q - Q'$ ist also die wahre Ladungsmenge. Damit können wir die Polarisation P umschreiben.

$$P = \frac{Q'}{A} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \frac{Q}{A} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) D = (\varepsilon_r - 1) \frac{1}{\varepsilon_r} D. \quad (2.71)$$

Der Faktor $(\varepsilon_r - 1)$ wird auch **dielektrische Suszeptibilität** χ_e genannt. Setzen wir dies in Gleichung 2.68 ein, so erhalten wir (vektoriell)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_m + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E}_m + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \vec{D} \quad (2.72)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_r} \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_m \quad (2.73)$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}_m = \varepsilon_0 \vec{E}_m + \vec{P}.} \quad (2.74)$$

Zusammenfassung

Bei konstanter Ladung Q gilt:

	ohne Dielektrikum	mit Dielektrikum
\vec{E} - Feld	\vec{E}_o	$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_r} \vec{E}_o$
\vec{D} - Feld	$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$	$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$

Während sich das \vec{E} - Feld im Dielektrikum erniedrigt, ändert sich das \vec{D} - Feld nicht, solange die freien Ladungen unverändert bleiben. Das \vec{D} - Feld wird also nur durch die freien Ladungen bestimmt, das \vec{E} - Feld hingegen durch alle Ladungen (s. Abb. 2.14).

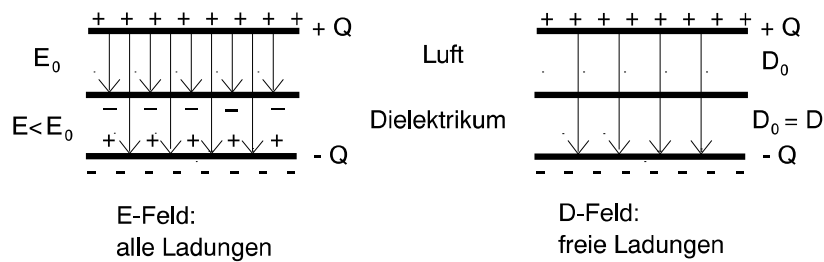


Abbildung 2.14: Vergleich \vec{E} - und \vec{D} -Feld

Gaußscher Satz für \vec{E} - und \vec{D} - Felder	
<u>\vec{E}- Feld</u>	<u>\vec{D}- Feld</u>
alle Ladungen sind Quellen von \vec{E} , d.h. $\oiint \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{Q - Q'}{\epsilon_0}$	nur die freien Ladungen sind Quellen von \vec{D} , d.h. $\oiint \vec{D} \, d\vec{A} = Q$
mit ρ = freie Ladungsdichte und ρ' = gebundene Ladungsdichte	
$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho - \rho'}{\epsilon_0}$	$\text{div } \vec{D} = \rho$ 1. MAXWELLSche Gleichung (COULOMB-Gesetz)

2.8.2 Polarisierungseffekte

Wird nicht leitendes Material in ein elektrisches Feld gebracht, so verschieben sich die Ladungsschwerpunkte der Moleküle. Es entsteht ein Dipol $p = Q \cdot d$, wobei d der Abstand zwischen den Ladungen $+Q$ und $-Q$ ist. Es sind grundsätzlich zwei Arten der Polarisierung möglich.

1. Die ursprünglich zusammenfallenden positiven und negativen Ladungen werden beim Einbringen in das elektrische Feld gegeneinander verschoben. Es wird ein Dipolmoment induziert, wie man auch auf Abb. 2.15 (aus [2]) an dem NaCl-Kristall erkennen kann (**dielektrische Polarisierung**). Die dielektrische Polarisierung ist im elektrischen Feld immer wirksam. Beim Abschalten des Feldes fallen die Ladungsschwerpunkte wieder zusammen, und das Dipolmoment und damit auch die dielektrische Polarisierung verschwinden.
2. Moleküle, wie z.B. H_2O , besitzen von vornherein ein permanentes Dipolmoment. Solche Moleküle werden beim Anlegen eines elektrischen Feldes (in Konkurrenz zu den Stößen der Wärmebewegung) ausgerichtet (s. Abb. 2.16, aus [2]) - sogen. Orientierungs- bzw. Paraelektrische Polarisierung.

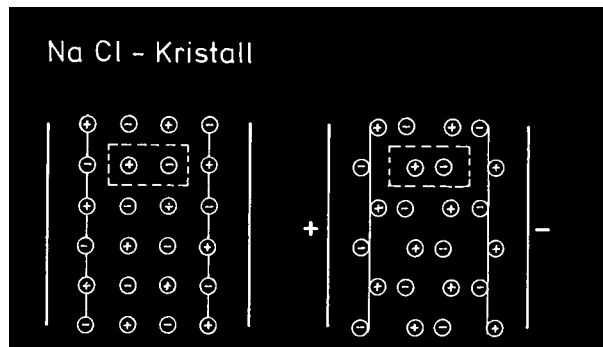


Abbildung 2.15: Dielektrische Polarisierung

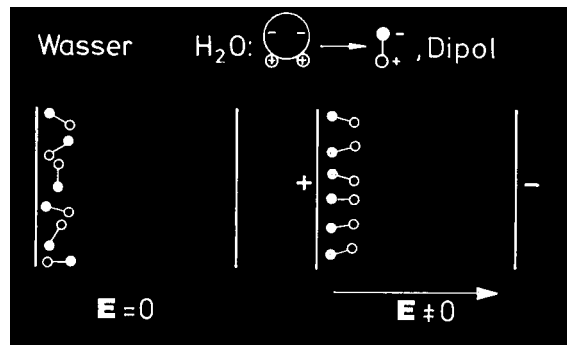


Abbildung 2.16: Orientierungs- oder paraelektrische Polarisierung

Piezoelektrizität

Von besonderem technischen Interesse ist die **Piezoelektrizität**.

Von Piezoelektrizität spricht man, wenn die Deformation eines Kristalles und damit aller Elementarzellen zu einer Polarisierung führen. Dazu betrachten wir einen Kristall, der aus einer regelmäßigen Anordnung der in Abb. 2.17 dargestellten Modellmoleküle besteht. Durch Deformation unter uniaxialem Druck (elastischer Spannung) wird ein resultierendes Dipolmoment p_{result} erzeugt. Die Erzeugung von elektrischer Polarisierung durch Druck lässt sich sehr einfach am SEIGNETTESALZ (K-Na-Tartrat) demonstrieren:

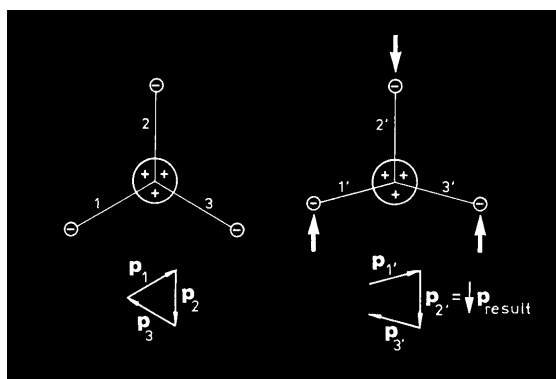


Abbildung 2.17: Piezoelektrizität

Versuch 2.7

Beim Zusammendrücken des Kristalls können wir eine Spannung messen.

Derartiges Umsetzen von Druck in elektrische Spannung wird in einer Reihe von Messwandlern technisch ausgenutzt. Weiterhin dienen piezoelektrische Kristalle als Oszillatoren für elektronische Quarzuhren. Eine allseits bekannte Anwendung findet man in den Feuerzeugen.

Versuch 2.8

Durch plötzlichen Druck (Schlag) haben wir einen Spannungstoß erzeugt, der ausreichte, um einen Funken zu erzeugen, mit dem man einen Bunsenbrenner entzünden kann.

Elektrostriktion

Einige Stoffe ziehen sich unter dem Einfluss des elektrischen Feldes, aufgrund der gegenseitigen Anziehung der mikroskopischen Dipole, zusammen. Diesen umgekehrten Effekt nennt man **Elektrostriktion**. Man nutzt sie beispielsweise in Ultraschallgeneratoren aus, insbesondere im höheren Frequenzbereich bei hohen Intensitäten.

Versuch 2.9

Wir befestigen auf dem Boden eines mit Wasser gefüllten Gefäßes einen Schwingquarz Q (s. Abb. 2.18, aus [2]), der durch ein angelegtes elektrisches Feld periodisch seine Dicke ändert. Die Schwingungen erregen im Wasser akustische Wellen, die durch Reflexion an dem Metallspiegel M ein stehendes Wellenbild ausbilden. Legt man anstatt des Spiegels eine plankonkave Linse L in das Wasser, so werden die Wellen auf einen Punkt auf der Oberfläche fokussiert und führen dort zu einem "Springbrunneneffekt".

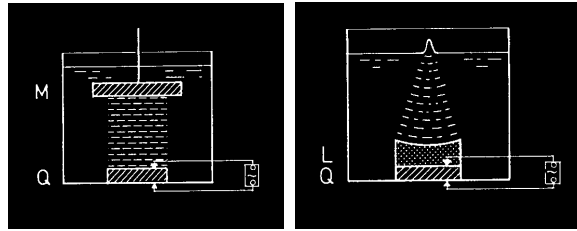


Abbildung 2.18: Versuch zur Elektrostriktion

Ferroelektrika

Eine weitere wichtige Klasse von Materialien, bei denen die dielektrische Polarisierung eine wichtige Rolle spielt, bilden die **Ferroelektrika**. Dieser Name ist etwas unglücklich gewählt, denn er hat nichts mit Eisen (Ferrum) zu tun, aber er ist schon seit langer Zeit eingeführt. Die Ferroelektrika haben eine ungewöhnlich hohe Permittivitätszahl (ϵ_r bis 10000), die aber nicht konstant ist und außerdem sehr von der Vergangenheit des Stoffes abhängt. Sie zeigen ein ähnliches Verhalten wie magnetische Größen im Magnetfeld. Dies ist der Grund für die Übernahme des ähnlichen Namens. Der älteste und bekannteste Stoff der Ferroelektrika wurde von dem französischen Apotheker P. SEIGNETTE (um 1672) entdeckt. Es ist das weinsaure Salz $\text{KNaC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ (SEIGNETTESALZ), das uns schon als Piezoelektrikum begegnet ist. Noch ein bekannter Vertreter dieser Gruppe ist Bariumtitanat (BaTiO_3). An ihm soll das charakteristische Verhalten der Ferroelektrika demonstriert werden.

Versuch 2.10

Wir geben das Bariumtitanat in einen Probenkondensator C_p , der in Reihe zu einem Vergleichskondensator C_1 geschaltet ist, so dass zu jedem Zeitpunkt t auf beiden Kondensatoren die gleiche Ladungsmenge vorhanden ist. Somit sind die Messungen von U_1 und U_p synchronisiert. Gibt man diese beiden Spannungen auf ein Oszilloskop, so kann man D als Funktion von E_m darstellen. Dies ist möglich, denn es ist

$$U_1 = d_1 \cdot E_o = d_1 \frac{1}{\epsilon_0} D = \text{const.} \cdot D \quad \Rightarrow \quad D \sim U_1 \quad (2.75)$$

$$U_p = d_p \cdot E_m = \text{const.} \cdot E_m \quad \Rightarrow \quad E_m \sim U_p \quad (2.76)$$

$$\text{Damit ist} \quad D = f(E_m) \sim U_p = f(U_1). \quad (2.77)$$

Die ferroelektrischen Stoffe zeigen ebenso wie die ferromagnetischen eine **Hysterese** (s. Abb. 2.19, entnommen aus [1]). Unter Hysterese versteht man das Zurückbleiben einer

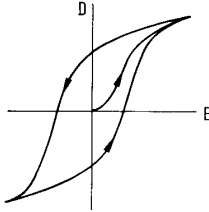


Abbildung 2.19: Hysterese eines Ferroelektrikums

Restpolarisation im Ferroelektrikum, wenn kein äußeres Feld mehr anliegt. Die Polarisati-
on in Ferroelektrika ist also von ihrer Vergangenheit abhängig. Die Fläche in der Hystere-
seschleife (siehe Abb. 2.19, entnommen aus [1]) entspricht der Arbeit, die man aufwenden
muss, um die Hystereseschleife einmal zu durchlaufen. In Bariumtitanat findet man einen

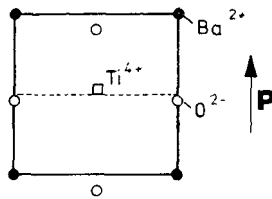


Abbildung 2.20: Bariumtitanat

bistabilen Dipol in der Elementarzelle. Die Orientierung des Dipols hängt von der Rich-
tung der Verschiebung der Ti- und O- Ionen gegenüber dem Ba- Gitter ab (Abb. 2.20,
aus [2]). Diese Dipole führen zur Ausbildung von Domänen mit fester Dipolrichtung. Bei
 $E = 0$ kommen Domänen beider Polarisationsrichtungen in gleichem Maße vor, während
bei einem angelegten äußeren Feld $E \neq 0$ einige Domänen auf Kosten anderer anwachsen.
Bei großen Feldern sind schließlich alle Domänen gleich orientiert, es tritt Sättigung ein.
Bei einer Temperaturerhöhung über den kritischen Wert hinaus wird die Domänenbil-
dung infolge des anliegenden E-Feldes auf Grund der anwachsenden Temperaturerhöhung
zerstört (s. Abb. 2.21, aus [2]).

2.8.3 Energiedichte im Dielektrikum

Ohne Dielektrikum gilt im Kondensator $W_0 = 1/2 C_0 U^2 = 1/2 \varepsilon_0 E^2 V$. Führt man nun
ein Dielektrikum ein, so gilt $C = \varepsilon_r C_0$ und damit ist die Energie im Kondensator mit



Abbildung 2.21: Domänenbildung

Dielektrikum

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_r C_0 U^2 = \varepsilon_r W_0 = \varepsilon_r \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 V. \quad (2.78)$$

Damit ist die

Energiedichte mit Dielektrikum $w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 = \frac{1}{2} E D$ (2.79)

Kapitel 3

Elektrische Stromstärke

3.1 Der elektrische Strom

In der Elektrostatik haben wir uns mit ruhenden Ladungen beschäftigt. Nun wollen wir uns mit einem anderen Teilgebiet befassen, nämlich mit der Physik der bewegten Ladungen, der Elektrodynamik.

Versuch 3.1

Die Platten eines geladenen Kondensators werden über einen feuchten Papierstreifen miteinander verbunden. Dieser Leiter hat nun nicht mehr überall das gleiche Potenzial. Zwischen den Enden des Leiters liegt eine von null verschiedene Potenzialdifferenz $d\varphi/dx$ an, und damit existiert ein elektrisches Feld $E = -d\varphi/dx$. Unter dem Einfluss des Feldes kommt es zu einer Ladungsbewegung im Leiter. Man sagt, es fließt ein Strom.

Ebenso findet ein Ladungstransport statt, wenn die Luft zwischen den Platten mit einer Flamme leitend gemacht wird.

Die bewegte elektrische Ladung bezeichnet man als **elektrischen Strom**. Den Betrag des elektrischen Stromes nennt man die **Stromstärke** I .

Pro Zeitintervall dt werden $d(N \cdot e)$ Ladungen durch den Querschnitt F des Leiters transportiert. Man definiert daher die Stromstärke I als die pro Zeiteinheit durch den Querschnitt eines Leiters transportierte Ladung (s. Abb. 3.1, aus [10]).

$$\text{Elektrische Stromstärke} \quad I = \frac{d(N \cdot e)}{dt} = \frac{dQ}{dt} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}} \quad (3.1)$$

Die Einheit der Stromstärke ist nach dem französischen Physiker A. M. AMPÈRE (1775 – 1839) benannt und eine Grundeinheit im SI-Einheitensystem.

$$[I] = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Sekunde}} = \frac{\text{C}}{\text{s}} = \text{A} = \text{Ampere}. \quad (3.2)$$

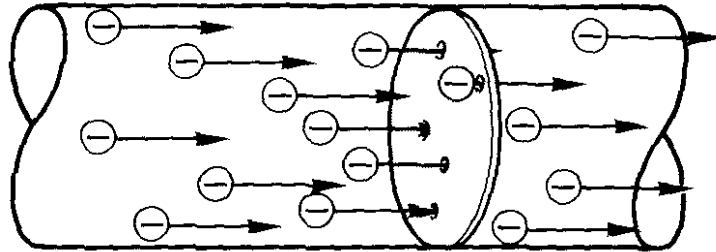


Abbildung 3.1: Bewegte Ladungen im einem Leiter

3.2 Mechanismen der Stromleitung

Betrachten wir noch einmal den Einstiegsversuch. Was ist in dem Leiter geschehen, mit dem wir die Kondensatorplatten verbunden haben? Die Elektronen bewegen sich unter dem Einfluss des elektrischen Feldes \vec{E} . Auf sie wirkt eine Kraft

$$\vec{F} = q_- \cdot \vec{E} = m \cdot \vec{a}. \quad (3.3)$$

Somit bewegen sie sich mit einer Geschwindigkeit

$$\vec{v}_- = \vec{a} \cdot t = q_- \frac{\vec{E}}{m} t, \quad (3.4)$$

d. h. v_- nimmt linear mit der Zeit zu. Betrachten wir dazu ein Beispiel:

Beispiel 3.1

Durch einen Kupferdraht mit einem Querschnitt von 1 mm^2 fließe ein Strom von 10 A . Dieser Draht befinde sich in einem elektrischen Feld von $E = 0,17 \text{ V/m}$ und es ist $|q_-| = e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ und $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. Damit ist

$$v_- \simeq 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t, \quad (3.5)$$

d. h. für $t = 10 \text{ ms}$ ist $v_- = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \simeq 1 \text{ c}$ (Lichtgeschwindigkeit). Dies ist offensichtlich unsinnig!!!

Wir müssen uns also ein anderes Bild von der Elektronenbeweglichkeit machen. In Materialien können Teilchen nämlich nur eine Zeit τ frei fliegend beschleunigt werden, bevor

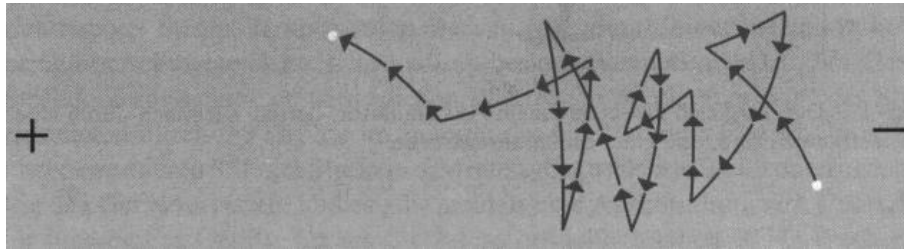


Abbildung 3.2: Elektronenbewegung

sie gegen schwingende Gitterbausteine, gegen Kristallfehler etc. stoßen und dabei ihre kinetische Energie abgeben und ihre Richtung verlieren. Dann werden sie während einer mittleren Zeit τ erneut beschleunigt usw. Die bei den Stößen abgegebene kinetische Energie ist dabei die im Leiter erzeugte Stromwärme (s. Abb. 3.2, aus [7]).

Die charakteristische freie Flugzeit, d.h. die Zeit zwischen zwei Stößen, wird **mittlere Stoßzeit** τ oder auch **Relaxationszeit** genannt. Die sich einstellende mittlere Geschwindigkeit

$$v_D = a \cdot \tau = q \frac{E}{m_e} \tau \quad (3.6)$$

wird als **Driftgeschwindigkeit** v_D bezeichnet.

Wie groß ist die Driftgeschwindigkeit?

Dazu betrachten wir einen Leiterquerschnitt der Fläche A und die Ladungsmenge, die pro Zeiteinheit durch ihn hindurchtritt. Es fließe ein Strom $I = dQ/dt$. Damit ist die Ladung $dQ = I dt$. Ein Elektron legt in der Zeit dt den Weg $ds = v_D \cdot dt$ zurück. Nehmen wir weiterhin an, es befinden sich n Elektronen pro Volumeneinheit im Leiter. Dann befinden sich im Volumen $V = A ds$ insgesamt $n A \cdot ds$ Elektronen. Alle diese Elektronen treten in der Zeit dt durch den Querschnitt A hindurch (s. Abb. 3.3, entnommen aus [7]). Damit fließt eine Ladung von

$$dQ = \text{Anzahl der Ladungsträger multipliziert mit ihrer Ladung} \quad (3.7)$$

$$= n \cdot A \cdot ds \cdot q = n \cdot q \cdot A \cdot v_D \cdot dt, \quad (3.8)$$

durch die Oberfläche. Das entspricht einem Strom von

$$I = \frac{dQ}{dt} = n \cdot q \cdot A \cdot v_D. \quad (3.9)$$

Da die Geschwindigkeit der Driftbewegung der Elektronen von der Feldstärke E abhängt, führt man den Begriff der **Beweglichkeit** μ ein:

$$\text{Beweglichkeit } \mu = \frac{\text{Driftgeschwindigkeit } v_D}{\text{elektrische Feldstärke } E}. \quad (3.10)$$

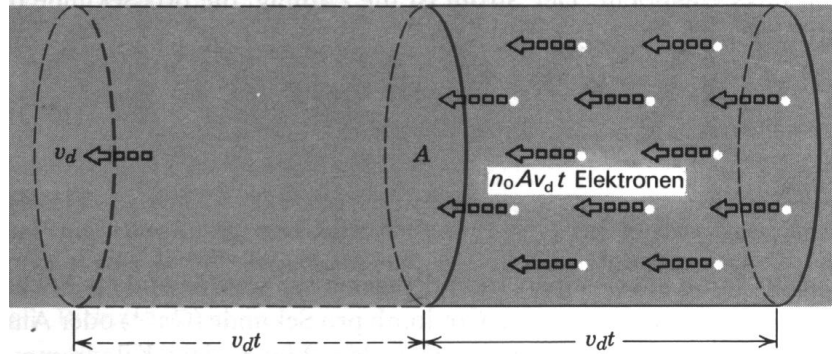


Abbildung 3.3: Die Driftgeschwindigkeit

Wenn die Stromverteilung im Draht nicht gleichförmig ist, dann betrachtet man besser die **Stromdichte** j .

$$\boxed{j = \frac{dI}{dA} = n \cdot q \cdot v_D} \quad \text{Stromdichte in Metall} \quad (3.11)$$

3.3 Allgemeine Form des Ladungstransportes

Allgemein tragen positive und negative Ladungsträger zur Stromleitung bei, z.B. bei Elektrolyten. Es gilt dann:

$$j = q_+ n_+ v_+ + q_- n_- v_- \quad (3.12)$$

$$\text{oder vektoriell} \quad \vec{j} = q_+ n_+ \vec{v}_+ + q_- n_- \vec{v}_- \quad (3.13)$$

Beachte: Historisch werden \vec{j} und \vec{I} in Richtung der positiven Ladungen gezählt! Wie groß sind v_D und τ ?

Wir betrachten wieder den Kupferdraht von Seite 92. Aus der Atomphysik weiß man, dass jedes Atom ein e^- zur Leitung beiträgt, d.h.

$$n = \frac{\text{Zahl der Atome}}{\text{Volumen}} = \frac{6 \cdot 10^{23} \frac{\text{Atome}}{\text{Mol}} \cdot 8,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}{63,5 \frac{\text{g}}{\text{Mol}}} = 8,5 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}, \quad (3.14)$$

$$\text{damit ist} \quad v_D = \frac{j}{e \cdot n} = \frac{I}{e \cdot n \cdot A} \simeq 7 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (3.15)$$

$$\text{und} \quad \tau = \frac{m}{e \cdot E} v_D \simeq 2 \cdot 10^{-14} \text{ s}. \quad (3.16)$$

Beide Werte dieses Beispiels sind in der Tat typische Werte für v_D und τ .

Energie und Leistung des elektrischen Stromes

Bei einer Kondensatorentladung, beispielsweise durch verbinden der beiden Platten mit einem Draht, fließt die gespeicherte Ladung von einer Kondensatorplatte durch den Draht zur anderen. Die vor dem Entladen im Kondensator gespeicherte Energie geht bei den Stößen der Elektronen mit dem Metallgitter des Drahtes in Wärme über. Zwischen den Enden des Drahtes besteht die Potentialdifferenz $\varphi_2 - \varphi_1 = U$, die von der Ladung $dQ = I dt$ durchlaufen wird. Dadurch wird die Energie

$$W = U dQ = U I dt \quad (3.17)$$

als Wärme frei. Man nennt sie **JOULESche Wärme**. Die elektrische Energie kann also in Wärme umgewandelt werden, aber auch in jede andere Form der Energie wie Arbeit, mechanische, kinetische oder potenzielle Energie.

Allgemein wird in der Physik die pro Zeiteinheit verrichtete Arbeit als **Leistung** bezeichnet. Damit ist die

$$\text{elektrische Leistung} \quad \boxed{P = \frac{dW}{dt} = U I.} \quad (3.18)$$

Die Einheiten von Energie und Leistung des elektrischen Stroms sind:

$$[P] = \text{V A} = \text{Watt} = \text{W} = \frac{\text{J}}{\text{s}}, \quad (3.19)$$

$$[W] = \text{Ws (Wattsekunde)} = \text{J} = \text{Nm}. \quad (3.20)$$

Beispiel:

In einer 100 W Lampe, die eine Betriebsspannung von 220 V hat, fließt also ein Strom $I = 0,45\text{A}$.

3.4 Widerstand

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, dass der Ladungstransport durch verschiedene Phänomene gehemmt wird. Man sagt, dass der Leiter dem elektrischen Feld oder dem Strom einen **Widerstand** entgegensetzt. Man definiert:

$$\text{elektrischer Widerstand} \quad \boxed{R = \frac{U}{I} = \frac{\text{Spannung}}{\text{Strom}}.} \quad (3.21)$$

Die Einheit des Widerstandes ist das Ohm, benannt nach G. S. OHM (1798 - 1854), der diesen Zusammenhang 1826 als erster entdeckt hat.

$$[R] = \frac{[U]}{[I]} = \frac{\text{V}}{\text{A}} = \Omega = \text{Ohm}. \quad (3.22)$$

Definition: Der elektrische Widerstand R beträgt 1 Ohm, wenn zwischen zwei Punkten eines Leiters beim Spannungsabfall von 1 Volt genau 1 Ampere fließt. Der Kehrwert des Widerstandes R heißt

$$\text{elektrischer Leitwert} \quad \boxed{G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U}} \quad (3.23)$$

Seine Einheit ist

$$[G] = \frac{[1]}{[R]} = \Omega^{-1} = \text{Siemens} = \text{S}. \quad (3.24)$$

3.4.1 Widerstand eines Metalldrahtes

Wir wollen nun für einfache metallische Leiter die Abhängigkeit des Widerstandes von der Länge l und des Querschnitts A bei konstanter Temperatur T experimentell bestimmen.

Versuch 3.2

Im ersten Versuchsteil messen wir bei konstantem Strom die Spannung an einem Einfachdraht, einem Zweifachdraht und einem Vierfachdraht, also an Drähten mit einfachem, doppeltem und vierfachem Querschnitt A .

Im zweiten Teil messen wir bei konstantem Strom die Spannung am Einfachdraht mit voller, halber und viertel Länge l .

Wir beobachten folgende Zusammenhänge:

$$R \sim l \quad \text{und} \quad R \sim 1/A. \quad (3.25)$$

Dies lässt sich zusammenfassen zu

$$R \sim \frac{l}{A}. \quad (3.26)$$

Die Proportionalität wird mit der Konstanten ϱ beschrieben, die **spezifischer Widerstand** heißt. Damit ist

$$\boxed{R = \varrho \frac{l}{A}}. \quad (3.27)$$

Der spezifische Widerstand ist eine Materialkonstante. In der folgenden Tabelle ist der spezifische Widerstand einiger Materialien bei Zimmertemperatur aufgeführt:

Leiter	Silber	$1,47 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$
	Kupfer	$1,72 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$
	Aluminium	$2,63 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$
	Konstantan	$4,9 \cdot 10^{-7} \Omega\text{m}$
Halbleiter	Germanium	$6,0 \cdot 10^{-1} \Omega\text{m}$
	Silizium	$2,3 \cdot 10^{+3} \Omega\text{m}$
Isolatoren	Bernstein	$5,0 \cdot 10^{14} \Omega\text{m}$
	Glas	$10^{10} - 10^{15} \Omega\text{m}$
	Holz	$10^8 - 10^{11} \Omega\text{m}$

Analog zum Leitwert ist der Kehrwert des spezifischen Widerstands die

$$\text{elektrische Leitfähigkeit} \quad \boxed{\sigma = \frac{1}{\varrho} = \frac{l}{RA}} \quad . \quad (3.28)$$

Damit können wir schreiben

$$U = R \cdot I = \varrho \frac{l}{A} I \quad \text{und} \quad E = \frac{U}{l} = \varrho \frac{I}{A} = \varrho \cdot j, \quad (3.29)$$

vektoriell gilt dann:

$$\boxed{\vec{E} = \varrho \cdot \vec{j} \quad \text{oder} \quad \vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}} \quad \text{OHmsches Gesetz} \quad (3.30)$$

Für Metalle gilt

$$j = n \cdot e \cdot v_D = \sigma E \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = n \cdot e \frac{v_D}{E} = n \cdot e \cdot \mu. \quad (3.31)$$

Bei konstanter Beweglichkeit μ folgt dann:

$$\mu = \text{const.} \Rightarrow \sigma = \text{const.} \Rightarrow R = \text{const.} \quad (3.32)$$

Das OHmsche Gesetz ist ein **empirisches Materialgesetz!** Es gilt sehr gut für Metalle und Elektrolyte bei konstanten Temperaturen. Die Proportionalität von Strom und Spannung $U = RI$ (Gleichung 3.21) heißt **integrale Form des OHmschen Gesetzes**. Oft wird sie aber vereinfachend nur als OHmsches Gesetz bezeichnet. Im Prinzip sind (3.21) und (3.30) zwei verschiedene Schreibweisen für das gleiche Gesetz, wobei in (3.30) der vektorielle Charakter der gerichteten Strombewegung berücksichtigt wird. Die Proportionalität von U und I ist jedoch kein grundlegendes Naturgesetz und keinesfalls allgemein gültig.

3.5 Temperaturabhängigkeit von R

Allgemein nimmt der Widerstand von Metallen bei Temperaturerhöhung zu. Bei verschiedenen Legierungen ist die Temperaturabhängigkeit des Widerstandes nur sehr gering. Im Temperaturbereich von $t = 0^\circ\text{C}$ und $t = 100^\circ\text{C}$ ist die Abhängigkeit des spezifischen Widerstands ϱ von der Temperatur t für metallische Leiter, einschließlich Graphit, in guter Näherung linear:

$$\varrho = \varrho_0 (1 + \alpha t). \quad (3.33)$$

α ist der **Temperaturkoeffizient** des Widerstandes. Er ist positiv für Metalle (PTC-Leiter) und negativ für Halbleiter (NTC-Leiter).

Versuch 3.3

Wir erhitzen eine Metallspirale und beobachten, dass bei konstanter Spannung der Strom durch die Spirale kleiner wird.

Nun erhitzen wir eine Si- Probe und beobachten hier, wie der Strom bei konstanter Spannung größer wird.

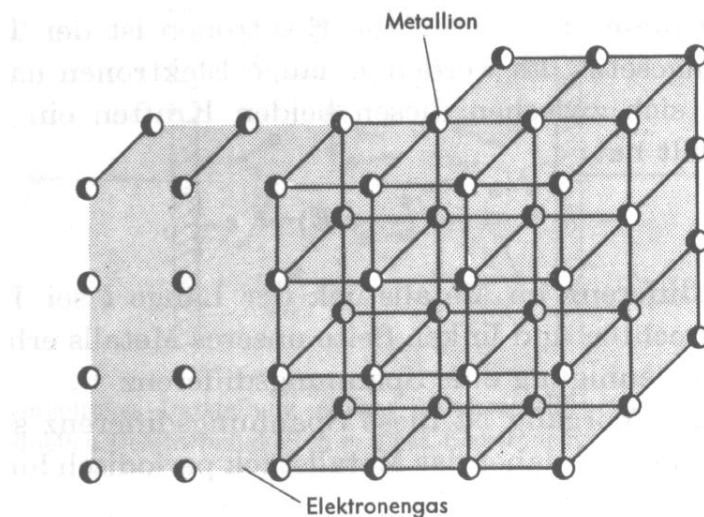


Abbildung 3.4: "Elektronengas"

Dies lässt leicht verstehen: In Metallen ist die Ladungsträgerdichte n fest vorgegeben, denn alle Valenzelektronen der Metallatome sind als "Elektronengas" durch das Gitter

der Ionenrümpfe beweglich (s. Abb. 3.4, entnommen aus [5]). Je heißer aber das Metall wird, desto stärker schwingen die Ionenrümpfe, und um so mehr behindern sie die Elektronenbewegung. Die Relaxationszeit τ nimmt also ab und da

$$\mu = \frac{v_D}{E} = \frac{q}{m_e} \tau \quad (3.34)$$

gilt, nimmt auch die Beweglichkeit μ mit steigender Temperatur ab. In Halbleitern ist dies auch der Fall. Eine viel stärkere, steigende Temperaturabhängigkeit hat hier aber die Ladungsträgerdichte n , denn die Träger müssen erst mittels thermischer Energie aus ihrem normalerweise gebundenen Zustand in einen beweglichen angehoben werden. Wie dies genau geschieht wird später erklärt.

Um zu zeigen, dass der Widerstand in Isolatoren bei steigender Temperatur abnimmt, wird folgender Versuch durchgeführt:

Versuch 3.4

Glas leitet bei Zimmertemperatur nicht. Wird es jedoch erhitzt, so wird das Glas leitend und schmilzt sogar bei Entfernen der Flamme, da es sich durch den Stromfluss weiter erwärmt.

Das Verhalten der Isolatoren wird erst in der Festkörperphysik verständlich. An dieser Stelle sei nur gesagt, dass in Isolatoren bei Zimmertemperatur keine freien Elektronen vorhanden sind. Sie müssen erst eine Energielücke ΔE überwinden, deshalb gibt es bei hohen Temperaturen mehr freie Elektronen. Es gilt:

$$\varrho(T) \sim e^{-\Delta E/kT} \Rightarrow \ln \varrho \sim -\frac{1}{T}. \quad (3.35)$$

3.5.1 Zusammenhang zwischen elektrischer Leitfähigkeit und Wärmeleitfähigkeit

Gute Wärmeleiter sind auch gute elektrische Leiter (siehe Metalle), schlechte Wärmeleiter sind auch schlechte elektrische Leiter (siehe Isolatoren). Bei konstanter Temperatur stehen Wärmeleitfähigkeit und elektrische Leitfähigkeit in einem konstanten Verhältnis zueinander. Es gilt das

WIEDEMANN- FRANZsche Gesetz

$$\text{Wärmeleitfähigkeit} = \lambda = a \cdot t \cdot \sigma \quad (3.36)$$

wobei die Konstante a für alle Metalle etwa gleich ist.

3.5.2 Supraleitung

Im Bereich tiefer Temperaturen sinkt der spezifische Widerstand ρ für reine Metalle mit abnehmender Temperatur proportional zu T^5 . In der Nähe des absoluten Nullpunktes gilt dieses Verhalten jedoch nicht mehr. Hier strebt ρ nicht wie zu erwarten gegen null, sondern nähert sich einem von null verschiedenen endlichen Widerstand, dem sogenannten Restwiderstand ρ_{Rest} (s. Abb. 3.5, entnommen aus [2]). Dieser ist etwa um den Faktor 1000 kleiner als der Widerstand ρ_0 bei $t = 0^\circ C$ ($\rho_{Rest} = 10^{-3} \rho_0$). Er lässt sich durch

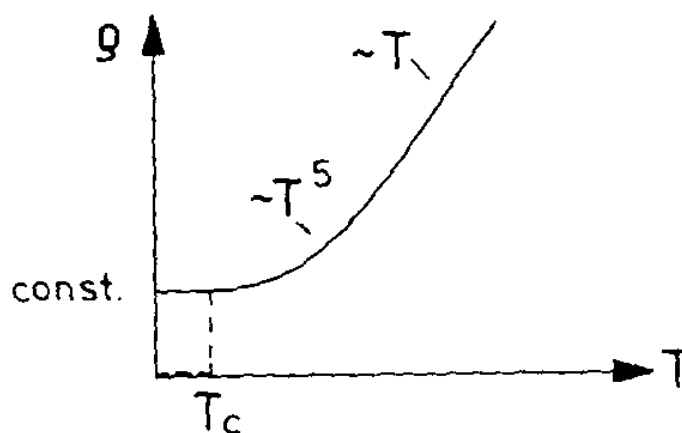


Abbildung 3.5: Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstands bei Metallen

die Verunreinigungen und Störungen des Kristallgitters erklären, an denen die Elektronen gestreut werden. Die thermische Bewegung des Gitters spielt hier keine Rolle mehr. Unterhalb einer bestimmten Temperatur zeigen einige Metalle und Keramiken hingegen ein völlig anderes Verhalten. Bei einer bestimmten, für das jeweilige Material charakteristischen Temperatur T_c , **Sprungtemperatur** oder **kritische Temperatur** genannt, fällt der Widerstand auf einen unmessbar kleinen Wert ab. Unterhalb der kritischen Temperatur besitzen diese Stoffe keinen elektrischen Widerstand mehr. Ein bei dieser Temperatur vorhandener Strom fließt in einem solchen Leiter auch dann dauernd weiter (in Experimenten schon über Jahre hinweg !!), wenn die Stromquelle abgeschaltet (überbrückt) wird. Man sagt: diese Materialien befinden sich im Zustand der **Supraleitung**. Diese Erscheinung wurde 1911 von H. KAMERLINGH- ONNES (1853- 1926) an Quecksilber entdeckt, nachdem es ihm drei Jahre vorher gelungen war, Helium als letztes der Edelgase zu verflüssigen und damit den Temperaturbereich in der Nähe des absoluten Nullpunktes ($1K - 10K$) zu erschließen.

Versuch 3.5

Wir halten einen Supraleiter, durch den ein konstanter Strom fließt, in flüssigen Stickstoff. Wir beobachten, dass die Spannung gegen Null geht, d.h. der Widerstand verschwindet.

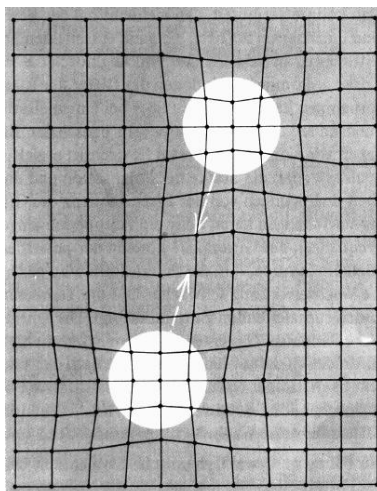


Abbildung 3.6: Veranschaulichung der Cooper-Paare

Nach der BCS- Theorie (von J. BARDEEN, L. COOPER und J.R. SCHRIEFFER 1957 entwickelt; Physiknobelpreis 1972) bilden je zwei Leitungselektronen eines supraleitenden Materials unterhalb der Sprungtemperatur sogenannte **Cooper-Paare**. Dies kann man sich anschaulich so erklären: In der Umgebung, in der sich ein Elektron aufhält, deformiert es das Kristallgitter, da die positiven Rumpfnionen von ihm angezogen werden. Diese Ansammlung von Rumpfnionen wiederum zieht nun ein weiteres Elektron an. Die resultierende effektive Anziehungskraft ist größer als die abstoßende Kraft zwischen den Elektronen. Dies ist so ähnlich, wie wenn man zwei Kugeln auf eine Membran legt. An den Stellen, an denen sie liegen, entstehen Mulden, sie deformieren also die Membran. Sind die Mulden in ausreichend kleinem Abstand, so vereinen sie sich zu einer Mulde, in der sich beide Kugeln befinden. Natürlich hinkt dieser Vergleich, denn die Kugeln auf der Membran sind statisch, während sich die Elektronen mit großen Geschwindigkeiten bewegen. Siehe auch Abb. 3.6, entnommen aus [14].

Die Cooper-Paare befinden sich nun in dem Zustand der kleinstmöglichen Energie. Sie können sich durch das Metallgitter bewegen, das heißt, der elektrische Widerstand verschwindet. Ihren Zustand halten die Cooper-Paare so lange bei, bis die Temperatur die Sprungtemperatur wieder übersteigt. Dann werden sie getrennt und treten wieder als normale Leitungselektronen auf. Bis vor etwa 10 Jahren lagen alle Sprungtemperaturen

unterhalb von 30 K. Im Jahr 1986 entdeckten A. MÜLLER UND J. BEDNARZ die Supraleitung in Y-Ba-Cu-Oxyd mit einer Sprungtemperatur von 35 K. Sie erhielten dafür 1987 den Nobelpreis. Ein Jahr später fand man weitere, sogenannte **warme Supraleiter**, wie Y-Ba₂-Cu₃-O₇, das bei T = 95 K supraleitend wird oder Tl-Ca₂Ba₂-Cu₃-O₁₀, welches bei T = 125 K supraleitend wird.

An Supraleitern beobachtet man folgende weitere Phänomene:

1. Ein Magnetfeld hat einen wesentlichen Einfluss auf die Supraleitung. Oberhalb einer für jeden Supraleiter charakteristischen magnetischen Feldstärke tritt auch bei tiefster Temperatur keine Supraleitung mehr auf. Bei einer magnetischen Feldstärke unterhalb der kritischen Feldstärke tritt Supraleitung erst bei einer Temperatur unterhalb der kritischen Temperatur, wie sie ohne Magnetfeld ist, auf. Diese Erscheinung hat zur Folge, dass in Supraleitern nicht beliebig große Ströme fließen können, denn bei einer bestimmten Stromstärke zerstört das Magnetfeld des Stromes selbst die Supraleitfähigkeit.
2. In einen Supraleiter dringt kein Magnetfeld ein (MEISSNER– OCHSENFELD– Effekt). Bei Temperaturen oberhalb der kritischen Temperatur durchdringt ein Magnetfeld zunächst den Leiter. Kühlt er bis unterhalb der kritischen Temperatur ab, so werden die magnetischen Kraftlinien aus ihm herausgedrängt.
3. Die Supraleitung hängt nicht vom Atomaufbau, sondern von der Kristallstruktur des Materials ab. So unterscheiden sich beispielsweise das weiße und das graue Zinn im Kristallaufbau, und nur das weiße Zinn wird supraleitend.
4. Verschiedene Isotope des gleichen Elements haben auch verschiedene Sprungtemperaturen.

Supraleiter werden als Stromleiter und zur Erzeugung großer Magnetfelder, z.B. in Teilchenbeschleunigern, eingesetzt.

3.5.3 Technische Widerstände

Dieser kleine Exkurs soll die verschiedenen Arten von Widerständen und ihre Anwendung erläutern. Man unterscheidet zwischen festen und einstellbaren Widerständen.

- Die **Festwiderstände** können weiter unterteilt werden in lineare und nichtlineare Widerstände.
 - Die **linearen Widerstände** genügen dem OHMSchen Gesetz, d.h. bis auf ihr Temperaturverhalten. Sie werden aus Draht (Nicklin, Konstantan) oder aus Schichtmaterialien wie Kohlenstoff, Metallen oder Edelmetallen hergestellt und überwiegend in der Nachrichten-, Mess-, Daten- und Starkstromtechnik sowie bei extremen Klimabeanspruchungen, zur Temperaturkompensation, als

Sicherheitswiderstand und als Vorwiderstand bei hohen Spannungen eingesetzt. Der Widerstandswert und die Toleranzen werden häufig als Farbringe aufgebracht.

- Bei den **nicht-linearen Widerständen** ist der Widerstand von folgenden physikalischen Größen abhängig:

Temperatur: Es gibt Heißeleiter und Kalteleiter. Ein Heißeleiter zeichnet sich durch einen fallenden Widerstand bei steigender Temperatur aus (**Negative Temperature Coefficient**). Sie werden als Temperaturfühler, zur Messung von Strömungsgeschwindigkeiten oder zur Spannungsstabilisierung verwendet und bestehen aus einer halbleitenden Oxidkeramik. Bei Kalteleitern steigt der Widerstand stark bei zunehmender Temperatur (**Positive Temperature Coefficient**). Sie werden als Temperaturfühler, als Thermostat und zur Stromstabilisierung verwendet und bestehen aus Metalldrähten.

Spannung: VDR-Widerstände oder Variatoren (**Voltage Dependent Resistance**) sind stark spannungsabhängig und werden zur Spannungsstabilisierung und zur Stoßspannungsbegrenzung eingesetzt.

Licht: Hierbei handelt es sich um lichtempfindliche Widerstände (**Light Dependent Resistance**), die z.B. in Belichtungsmessern eingesetzt werden.

- Die **einstellbaren Widerstände** ändern den Widerstand entweder linear oder logarithmisch. Linear einteilbare Widerstände werden als Spannungsteiler (Potenziometer oder Trimmer) eingesetzt, logarithmisch verstellbare Widerstände zur Lautstärkeregelung verwendet. Als Werkstoffe werden Draht, Kohleschichten und Keramikträger mit eingebranntem Metalloxid und Glaspulver (Cermet) eingesetzt.

3.6 Stromkreise

3.6.1 Die KIRCHHOFFSchen Gesetze

Bisher haben wir den elektrischen Strom in nur einem Leiter betrachtet. Nun wollen wir uns mit der Stromverteilung in einem Leitersystem befassen, in dem die einzelnen Stromführenden Leiter zu einem beliebig komplizierten Netz verknüpft sind. Dabei helfen uns folgende Regeln:

Erstes Kirchhoffsches Gesetz (Knotenregel)

Knotenregel:

An jedem Knoten (Verzweigungspunkt) mehrerer Leitungen ist die Summe der auf ihn zufließenden Ströme gleich der Summe der von ihm abfließenden Ströme, kurz (s. Abb. 3.7, entnommen aus [3]):

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0.$$

(3.37)

(Hier haben die zufließenden Ströme positives und die abfließenden Ströme negatives Vorzeichen)

Dieses Gesetz folgt aus dem Gesetz der Ladungserhaltung, da in einem Knoten weder Ladung erzeugt noch vernichtet werden kann.

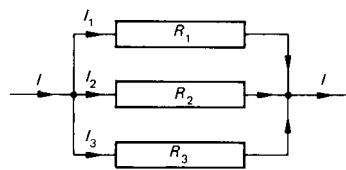


Abbildung 3.7: Knotenregel

Zweites Kirchhoffsches Gesetz (Maschenregel)

Maschenregel:

In jedem geschlossenen Teilkreis (Masche) eines Netzwerkes ist die Summe der Spannungsabfälle $R_i I_i$ an den Widerständen gleich der Summe der Klemmenspannungen U_i der Spannungsquelle (s. Abb. 3.8, aus [3]), kurz:

(3.38)

$$\sum_{\text{Masche}} R_i I_i = \sum_{\text{Masche}} U_i.$$

Hierbei muss eine positive Umlaufrichtung gewählt werden. Ströme und Spannungen, die der Umlaufrichtung entgegengesetzt sind, sind entsprechend negativ zu werten. Dieses Gesetz folgt aus dem Energieerhaltungssatz. Eine andere dazu äquivalente Formulierung ist: Die Summe aller Spannungen U_i in einer Masche ist immer gleich null:

$$\sum_{\text{Masche}} U_i = 0 \quad (3.39)$$

Hier müssen sowohl Klemmenspannungen als auch Spannungsabfälle an Widerständen aufsummiert werden (siehe Abb. 3.8).

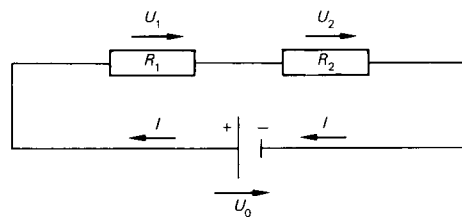


Abbildung 3.8: Maschenregel

Beispiel 3.2

Die **Reihenschaltung** (auch **Serienschaltung** genannt) (s. Abb. 3.9, aus [9]): Durch alle Widerstände fließt der gleiche Strom. Damit fällt an den Wi-

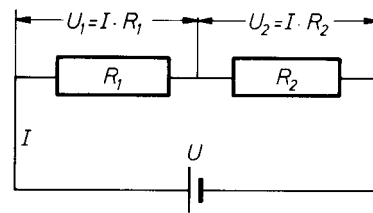


Abbildung 3.9: Reihenschaltung von Widerständen

derständen die gleiche Spannung ab:

$$U_1 = R_1 I \quad \text{bzw.} \quad U_2 = R_2 I \quad (3.40)$$

Anwendung der Maschenregel liefert

$$U = U_1 + U_2 = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2)I \quad (3.41)$$

$$\frac{U}{I} = R_1 + R_2 =: R_{\text{ges}} \quad (3.42)$$

Allgemein gilt: Bei einer Serienschaltung addieren sich die Widerstände R_i zum Gesamtwiderstand R_{ges} auf.

Serienschaltung
$$R_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n R_i \quad (3.43)$$

Beispiel 3.3

Parallelschaltung (s. Abb. 3.10, entnommen aus [9]):
An allen Widerständen liegt die gleiche Spannung an. Es gilt also:

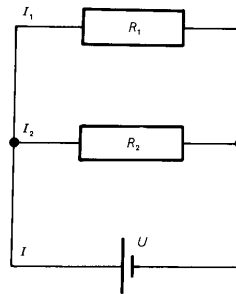


Abbildung 3.10: Parallelschaltung von Widerständen

$$U = R_1 I_1 = R_2 I_2 \quad (3.44)$$

Anwendung der Knotenregel liefert

$$\frac{U}{R_{\text{ges}}} = I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} \quad (3.45)$$

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{oder} \quad R_{\text{ges}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.46)$$

Allgemein gilt: Bei einer Parallelschaltung addieren sich die Kehrwerte der Widerstände R_i zum Gesamtwiderstand R_{ges} .

Parallelschaltung
$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (3.47)$$

Beispiel 3.4

Übung: Zur Übung betrachten wir die vier verschiedenen Möglichkeiten, die es gibt, um drei Widerstände zu schalten (s. Abb. 3.11, aus [5]).

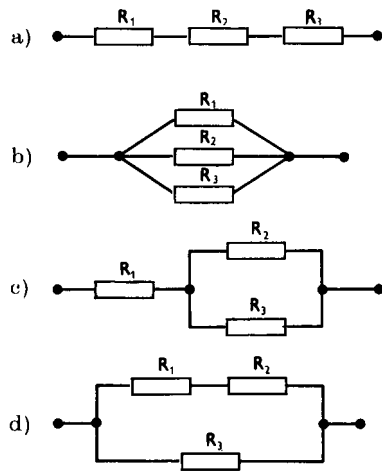


Abbildung 3.11: Vier Möglichkeiten 3 Widerstände zuschalten

1. alle drei in Reihe geschaltet: $R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + R_3$
2. alle drei parallel geschaltet: $\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$
3. zwei parallel, dazu den dritten in Serie geschaltet: $R_{\text{ges}} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$
4. zwei in Serie, dazu den dritten parallel geschaltet: $R_{\text{ges}} = \frac{(R_1 + R_2) R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

Nicht immer lassen sich Schaltungen von Widerständen in eine Kombination von Parallel- und Reihenschaltungen reduzieren, wie man in Abb. 3.12 (entnommen aus [5]) sieht. Hier

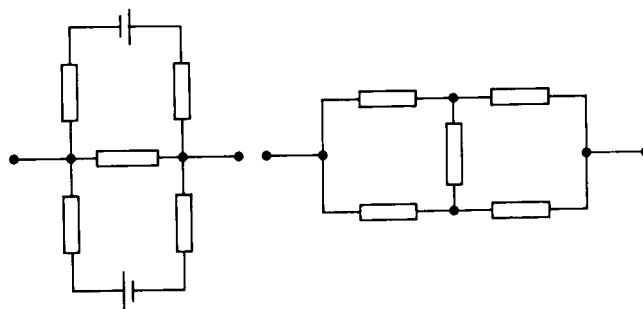


Abbildung 3.12: Irreduzible Netzwerke

muss eine allgemeinere Methode zur Berechnung solcher sogenannter Netzwerke ange-

wandt werden. Solche Netzwerke sind Gegenstand eines selbständigen Gebietes der Elektrotechnik, der sogenannten Netzwerktheorie, und sollen hier nicht weiter diskutiert werden.

3.6.2 Innenwiderstand

Nicht nur Widerstände und Drähte, sondern auch alle übrigen Geräte, haben einen Widerstand, der **Innenwiderstand** genannt wird und mit betrachtet werden muss.

Schließt man eine Spannungsquelle, z.B. eine Batterie, kurz, so fließt ein endlicher Strom I , obwohl der Außenwiderstand $R_a = 0$ ist. Dieses Verhalten kann man mit dem zusätz-

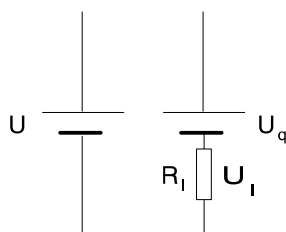


Abbildung 3.13: Ersatzschaltbild

lichen Innenwiderstand R_i erklären. Dazu fertigen wir das folgende **Ersatzschaltbild** (Abb. 3.13) an: Es ist nach der KIRCHHOFFSchen Maschenregel

$$U_q = U_a + U_i = I(R_a + R_i) \quad \Leftrightarrow \quad I = \frac{U_q}{R_a + R_i}. \quad (3.48)$$

Bei Kurzschluss ($R_a = 0$) fließt somit noch ein endlicher Strom $I_k = U_q/R_i$. Man kann also aus dem Kurzschlussstrom den Innenwiderstand bestimmen.

An den Klemmen 1 und 2 der Spannungsquelle misst man je nach Stromentnahme die Spannung

$$U = U_q - U_i = I(R_a + R_i) - R_i I = I R_a = \frac{U_q}{R_a + R_i} R_a = U_q \frac{R_a}{R_a + R_i}. \quad (3.49)$$

U wird **Klemmenspannung** genannt. U_q ist die sog. elektromotorische Kraft (EMK). Man kann die EMK an den Klemmen der unbelasteten Spannungsquelle messen (Stromkreis nicht geschlossen). Man beachte, dass durch den Spannungsmesser auch ein Strom fließt, der die Messung verfälscht.

Versuch 3.6

Wir messen bei einer alten und bei einer neuen Monozelle die Leerlaufspannung (bei offenem Stromkreis) und die Kurzschlussspannung (bei geschlossenem Stromkreis).

3.6.3 Strommessung

Um die Stromstärke in einem Stromkreis messen zu können, muss das Messgerät (AMPÈREmeter genannt) im Stromkreis (Hauptschluss) liegen. Doch anstatt den „wahren“ Strom $I = U/R$ zu messen, misst man

$$I' = \frac{U}{R + R_i} = \frac{U}{R} \frac{R}{R + R_i} = I \frac{R}{R + R_i}. \quad (3.50)$$

wobei R_i der Innenwiderstand des Strommessgerätes ist. Ein idealer Strommesser hat $R_i = 0$, der technisch allerdings nicht zu realisieren ist. Damit der Messvorgang den zu messenden Strom durch den Innenwiderstand R_i des AMPÈREmeters möglichst nicht beeinflusst, und die volle Spannung am äußeren Widerstand abfallen kann, muss R_i möglichst klein (niederohmig) sein ($R_i \ll R$).

Übersteigt der zu messende Strom den Messbereich, so kann mit einem weiteren Widerstand der Messbereich erweitert werden. Dieser Widerstand R_s (Shunt genannt) wird parallel zum AMPÈREmeter (Nebenschluss) geschaltet (s. Abb 3.14, entnommen aus [2]).

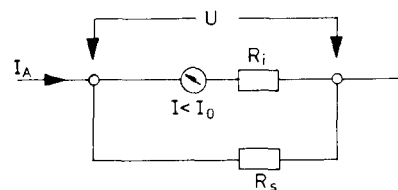


Abbildung 3.14: Strommessung

Sei der Maximalausschlag ohne Messbereichserweiterung bei einem Strom I_0 und der Innenwiderstand sei R_i . Der Messbereich soll n -fach erweitert werden, so dass der maximale Ausschlag bei $I_A = n I_0$ liegt. Bei konstanter Spannung U ist dann

$$I_0 = \frac{U}{R_i}, \quad I_a = U \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_s} \right) = n I_0 = n \frac{U}{R_i} \quad (3.51)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_s} = n \frac{1}{R_i} \Leftrightarrow R_s = \frac{R_i}{(n - 1)}. \quad (3.52)$$

Um den Messbereich um das zehnfache zu erhöhen, muss man also einen neunmal kleineren Widerstand parallel schalten!

3.6.4 Spannungsmessung

Die heute gebräuchlichen Spannungsmesser sind mit Hilfe des OHMschen Gesetzes umgeichtete AMPÈREmeter. Einem AMPÈREmeter wird ein Vorwiderstand $R_v \gg R_i$ vorgeschal-

tet. Das so entstandene VOLTmeter wird in stromführenden Kreisen in den Nebenschluss geschaltet. Durch das Instrument fließt ein Strom I_v und es zeigt die Spannung $U = I_v R_v$ an (siehe Abb. 3.15). In dem Stromkreis a hat sich aber jetzt die Stromstärke verändert.

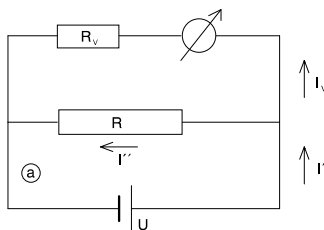


Abbildung 3.15: Spannungsmessung

Ohne das VOLTmeter floss ein Strom $I = U/R$, mit VOLTmeter liefert die Quelle aber den Strom

$$I' = U \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_v} \right) = R I \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_v} \right) = I \left(\frac{R}{R} + \frac{R}{R_v} \right) \quad (3.53)$$

$$= I \left(\frac{R_v}{R_v} + \frac{R}{R_v} \right) = I \frac{R + R_v}{R_v} > I. \quad (3.54)$$

Um die Verfälschung der Messung möglichst gering zu halten, muss man R_v groß (hochohmig) wählen (Typisch $R_v > 10 \text{ k}\Omega$).

Um den Messbereich eines VOLTmeters zu erweitern, lässt man die „überschüssige“ Spannung an einem zusätzlich in Serie geschalteten Widerstand abfallen (s. Abb. 3.16, aus [2]).

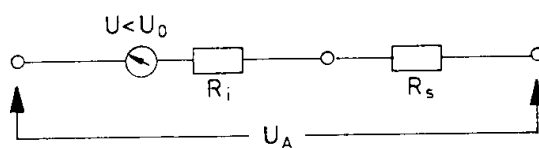


Abbildung 3.16: Messbereichserweiterung

Soll der Messbereich auf $U_a = n U_0$ erweitert werden, dann ist

$$U_0 = R_i I, \quad U_a = (R_i + R_s) I = n U_0 = n R_i I \quad (3.55)$$

$$\Rightarrow R_i + R_s = n R_i \Leftrightarrow R_s = (n - 1) R_i. \quad (3.56)$$

Um den Messbereich eines VOLTmeters um das zehnfache zu erhöhen, muss man einen neunmal größeren Widerstand in Serie schalten!

3.6.5 Vorwiderstand und Potenziometerschaltung

Wenn ein Verbraucher eine niedrigere Spannung verlangt als in Form einer Spannungsquelle vorliegt, kann man diese auf zwei Arten reduzieren (in der Wechselstromtechnik gibt es noch zahlreiche andere, energetisch sinnvollere Möglichkeiten):

1. Man schaltet einen Vorwiderstand R_v vor den Verbraucher R . Dann teilen sich die Spannungen im Verhältnis R/R_v auf beide auf, da durch beide der gleiche Strom fließt. Allerdings teilt sich auch die Gesamtleistung auf. Nur ein Teil wird im Verbraucher genutzt.
2. Als **Potenzimeter** (Spannungsteiler) bezeichnet man einen Widerstand, bei dem man über einen Schleifkontakt eine gewünschte Spannung U_a abgreifen kann. Im unbelasteten Fall gilt (s. Abb. 3.17.a):

$$I = \frac{U_1}{R_1 + R_2} \quad \text{und} \quad U_x = R_2 I \quad (3.57)$$

$$\text{einsetzen liefert :} \quad U_x = U_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.58)$$

d.h., dass sich die Gesamtspannung im Verhältnis des Teilwiderstandes zum Gesamtwiderstand aufteilt.

Beim belasteten Potenziometer muss man beachten, dass sich der Strom I am Mit-

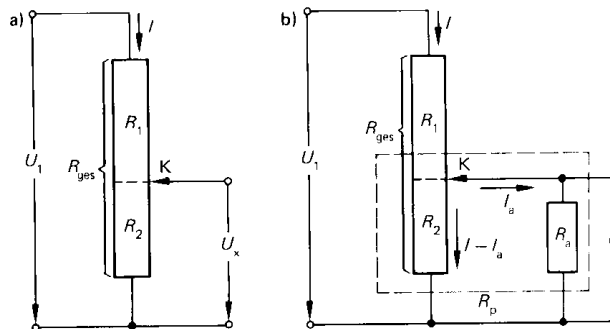


Abbildung 3.17: Unbelasteter und belasteter Spannungsteiler

telabgriff aufteilt (s. Abb. 3.17.b, beide entnommen aus [3]). Durch R_a fließt der Strom I_a und durch R_2 nur noch der Strom $I - I_a$. Da R_2 und R_a parallel geschaltet sind, ist der Gesamtwiderstand

$$R_p = \frac{R_2 R_a}{R_2 + R_a}. \quad (3.59)$$

Setzt man diesen anstelle von R_2 in die obige Gleichung ein, so erhält man

$$U'_x = U_1 \frac{R_p}{R_1 + R_p} \quad (3.60)$$

$$\text{oder} \quad U'_x = U_1 \frac{\frac{R_2 R_a}{R_2 + R_a}}{R_1 + \frac{R_2 R_a}{R_2 + R_a}} = U_1 \frac{\frac{R_2 R_a}{R_2 + R_a}}{R_1 \frac{R_2 + R_a}{R_2 + R_a} + \frac{R_2 R_a}{R_2 + R_a}} \quad (3.61)$$

$$= U_1 \frac{R_2 R_a}{R_1 R_2 + R_1 R_a + R_2 R_a} = U_1 \frac{R_2 R_a}{R_1 R_2 + R_a (R_1 + R_2)}. \quad (3.62)$$

Die Gleichung für das belastete Potenziometer geht in die Gleichung für das unbelastete über, wenn $R_1 R_2 \ll R_a (R_1 + R_2)$ ist. Dann ist der Strom I_a durch den Außenwiderstand R_a vernachlässigbar klein.

3.6.6 Widerstandsmessung

Prinzipiell kann man den Widerstand messen, in dem man die Spannung U an ihm und den Strom I durch ihn bestimmt und beides durcheinander teilt. Da aber beide Messwerte durch die Innenwiderstände der Geräte verfälscht sind, erhält man ein sehr ungenaues Ergebnis. Um dies zu vermeiden misst man **stromlos**. Dies geschieht mit einer WHEAT-

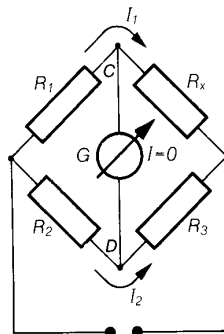


Abbildung 3.18: Wheatstonsche Brücke

STONSchen **Brückenschaltung**. Hier schaltet man den zu bestimmenden Widerstand mit drei bekannten Widerständen zusammen (s. Abb. 3.18, entnommen aus [9]), von denen mindestens einer, der o.B.d.A der Widerstand R_3 sei, verstellbar ist. Man stellt R_3 so ein, dass durch das Instrument G kein Strom fließt (Abgleichen der Brücke). Dies ist dann der Fall, wenn die Spannung zwischen C und D verschwindet, d.h. die Spannungsabfälle an R_x und R_3 sind gleich (wobei die Spannungsabfälle an R_1 und R_2 auch wieder gleich sein müssen). Dadurch, dass kein Strom durch G fließt, geht der Strom I_1 bei C vollständig

weiter durch R_x . Damit ergibt sich

$$I_2 R_3 = I_1 R_x \quad \text{und} \quad I_1 R_1 = I_2 R_2. \quad (3.63)$$

Durch Division beider Gleichungen folgt

$$R_x = R_3 \frac{R_1}{R_2}. \quad (3.64)$$

Somit ist R_x auf die bekannten Widerstände zurückgeführt. Die Spannung U der Spannungsquelle ist unwichtig und darf durchaus zeitlich schwanken, so dass sie auch für Wechselstrom geeignet ist.

3.7 Beispiel für einen nicht stationären Vorgang: der RC- Kreis

Die Kombinationen von Widerständen und Kondensatoren sind in der Elektrotechnik besonders wichtig. Wird in einen Stromkreis ein Kondensator eingeschaltet, so stellt dieser eine Unterbrechung des Stromes dar. Wird der Kondensator jedoch an eine Stromquelle angeschlossen, so wird er geladen. Innerhalb einer gewissen Zeit fließen Ladungen auf die Platten, bis dass der Kondensator die gleiche Spannung wie die Quelle hat. Es fließt also eine Zeitlang ein Strom, der sogenannte **Ladestrom**. Wird dann die Stromquelle abgetrennt und die Kondensatorplatten leitend miteinander verbunden, so entlädt sich der Kondensator. Es fließt ein **Entladestrom**. Ein Stromkreis, in dem ein Kondensator C , eine Spannungsquelle U_0 und ein OHMScher Widerstand R in Serie geschaltet sind, wird RC -Glied genannt (siehe Abb. 3.19).

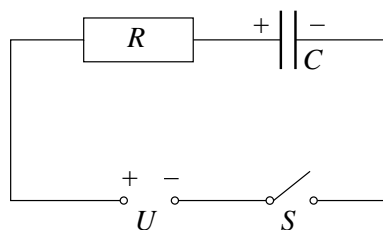


Abbildung 3.19: RC -Glied

3.7.1 Der Ladevorgang

Der Ladevorgang beginne zum Zeitpunkt $t = 0$ bei geschlossenem Schalter (S geöffnet). Zu diesem Zeitpunkt fließt der maximale Strom $I_0 = U_0/R$. Durch das weitere Laden

des Kondensators wirkt sich dessen Spannung $U_C = Q/C$ als Gegenspannung zu U_0 aus, so dass der Ladestrom immer kleiner wird, bis er bei $U_0 = U_C$ vollständig zum Erliegen kommt. Zu jedem Zeitpunkt gilt nach der KIRCHHOFFSchen Maschenregel

$$U_0 = U_R + U_C \quad \text{mit} \quad U_R = R I \quad \text{und} \quad U_C = \frac{Q}{C} \quad (3.65)$$

$$\text{folgt} \quad U_0 = R I + \frac{Q}{C}. \quad (3.66)$$

Aufgrund der konstanten Spannungsquelle ist

$$\frac{dU_0}{dt} = 0 \Rightarrow 0 \stackrel{(3.66)}{=} R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt}, \quad \text{mit} \quad I = \frac{dQ}{dt} \quad \text{folgt} \quad (3.67)$$

$$\boxed{\frac{dI}{dt} + \frac{1}{RC} I = 0.} \quad (3.68)$$

Um diese Differenzialgleichung mit der Randbedingung $I = I_0 = U_0/R$ für $t = 0$ zu lösen, formen wir sie weiter um, integrieren beide Seiten über die Zeit und nutzen die Randwerte, um die Integrationsgrenzen der linken Seiten zu transformieren:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{1}{RC} I = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{I} \frac{dI}{dt} dt = -\frac{1}{RC} dt \quad (3.69)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t \frac{1}{I} \frac{dI}{dt} dt = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \Leftrightarrow \int_{I_0}^{I(t)} \frac{1}{I'} dI' = -\frac{1}{RC} t \Leftrightarrow \ln \frac{I(t)}{I_0} = -\frac{t}{RC} \quad (3.70)$$

$$\Rightarrow \boxed{I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}} \quad (3.71)$$

Man setzt $RC = \tau$ und nennt dies die **Zeitkonstante** des RC- Kreises.

3.7.2 Der Entladevorgang

Der Kondensator sei vollständig aufgeladen und besitze die Ladungsmenge $Q = C U_0$. Zur Zeit $t = 0$ werde er über den Widerstand R kurzgeschlossen (S geschlossen). Zu jedem Zeitpunkt gilt $U_C = R I$.

$$\text{wegen} \quad I = -\frac{dQ}{dt} = -C \frac{dU_C}{dt} \quad \text{ist} \quad U_C = R I = -RC \frac{dU_C}{dt}. \quad (3.72)$$

Das Minuszeichen kommt daher, weil ein positiver Strom die Ladung am Kondensator verkleinert.

$$\boxed{\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC} U_C = 0.} \quad (3.73)$$

Mit der Randwertbedingung $U_C = U_0$ liefern analoge Rechnungen:

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC} U_C = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{U_C} \frac{dU_C}{dt} dt = -\frac{1}{RC} dt \quad (3.74)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t \frac{1}{U_C} \frac{dU_C}{dt} dt = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \quad (3.75)$$

$$\Leftrightarrow \int_{U_0}^{U_C(t)} \frac{1}{U'_C} dU'_C = -\frac{1}{RC} t \Leftrightarrow \ln \frac{U_C(t)}{U_0} = -\frac{t}{RC} \quad (3.76)$$

$$\Rightarrow \boxed{U_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}} \quad (3.77)$$

3.8 Leitung in Flüssigkeiten

3.8.1 Elektrolytische Leitfähigkeit

An der elektrolytischen Leitfähigkeit in Flüssigkeiten sind in der Regel Salze, Säuren oder Basen beteiligt. Diese Lösungen werden **Elektrolyte** genannt.

Versuch 3.7

Wir tauchen zwei, an eine Spannungsquelle angeschlossene, Leiter in eine Bleiazetatlösung ($\text{Pb}(\text{CH}_3\text{COO})_2 \cdot 3 \text{H}_2\text{O}$). Nach Anlegen des Stromes beobachten wir an einem Draht eine Bleiabscheidung. In der Projektion erscheint die Abscheidung als Baum (Bleibaum) (s. Abb. 3.20, aus [11]). Wenn wir die Stromrichtung umdrehen, so wird der Baum wieder abgebaut und entsteht am anderen Draht.

Im folgenden Versuch wollen wir prüfen, ob an der Stromleitung in einer Flüssigkeit ein Salz, eine Säure oder eine Base beteiligt sein muss.

Versuch 3.8

In ein mit destilliertem Wasser gefülltes Becken tauchen wir zwei Bleche (Elektroden) aus Platin oder Nickel, die an ein AMPÈREmeter angeschlossen sind. Wir beobachten, dass reines Wasser ein schlechter Leiter ist, denn das AMPÈREmeter zeigt keinen Strom an. Erst wenn wir ein paar Körner Kochsalz (NaCl) dazu geben, fließt ein Strom (s. Abb. 3.21, entnommen aus [9]).

Die Leitfähigkeit einer Kochsalzlösung findet folgende einfache Erklärung:

Beim Einbringen der Kochsalzmoleküle werden diese in positive Natriumionen (Na^+) und

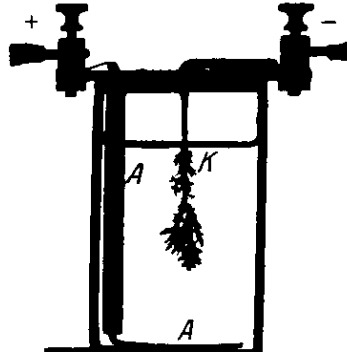


Abbildung 3.20: Bleibaum

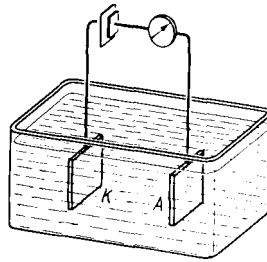


Abbildung 3.21: Elektrolyse

in negative Chlorionen (Cl^-) aufgespalten (dissoziiert). Unter **Ionen** fasst man allgemein geladene Atome bzw. Moleküle zusammen. Dabei sind **Kationen** positiv geladene und **Anionen** negativ geladene Ionen



In Flüssigkeiten tragen also, anders als bei Metallen, sowohl positive als auch negative Ladungsträger zur Leitung bei. Bei der **Dissoziation** in Wasser schieben sich die Wassermoleküle durch ihr anisotropes Dipolmoment zwischen die Ionen und ordnen sich um diese an (s. Abb. 3.22, entnommen aus [3]), sie werden **hydratisiert**. Die bei der Anlagerung der Wasserdipole frei werdende Energie reicht zur Abtrennung der Ionen aus dem Kristallgitter aus. Beide Ionen sind in der Lösung bis auf einen Reibungswiderstand frei beweglich. Das elektrische Feld treibt die positiven Ionen zum Minuspol (**Kathode**), weshalb sie **Kationen** genannt werden, während die negativen Ionen, die zur **Anode** (Pluspol) wandern, **Anionen** heißen. Kationen sind die Metallionen einschließlich NH_4^+ und H^+ , Anionen sind die Säurerest- und OH^- -Ionen (eigentlich sind viele dieser Ionen

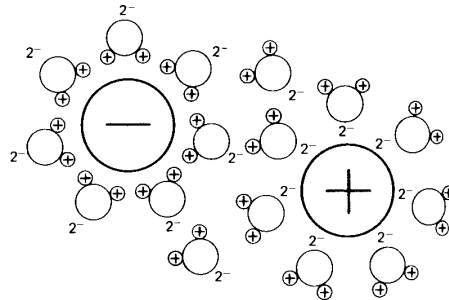


Abbildung 3.22: Hydratisierung von Wasser

als größere Komplexe aufzufassen, z.B. H_3O^+ anstatt H^+).

An den Elektroden angekommen, werden die Ionen neutralisiert: die Kationen nehmen Elektronen auf, die Anionen geben welche ab. Dabei ändern sie vollständig ihren chemischen Charakter. Die H^+ -Ionen werden zu H-Atomen, die wiederum zu H_2 -Molekülen werden, welche als Gas entweichen. Bei Metallen, deren Ionen weniger leicht in Lösung bleiben, schlagen sie sich als Niederschlag auf den Elektroden ab. Allgemein lässt sich sagen, dass an den Elektroden folgende Reduktions- bzw. Oxidationsprozesse ablaufen (s. Abb. 3.23, entnommen aus [3]):

Das Elektrolyt gibt an die Anode Elektronen ab, es kommt zu einer Oxidation. Für eine metallische Anode gilt:



An der Anode löst sich das Metall auf und geht in Lösung. An der Kathode findet dagegen

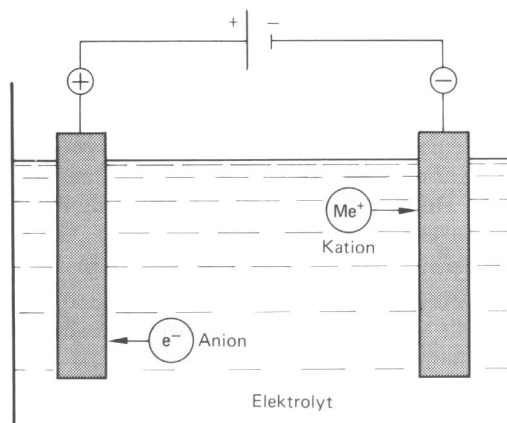


Abbildung 3.23: Reduktions- bzw. Oxidationsprozess bei der Elektrolyse

durch die Elektronenaufnahme immer eine Reduktion statt. In unserem Fall wird das

Metallion zum Metall reduziert:



Das Metall wird also an der Kathode abgeschieden. Im elektrischen Feld eines Elektrolyten erfahren die Ionen eine angreifende Kraft

$$\vec{F}_E = q \vec{E}. \quad (3.81)$$

Setzen wir nun im Elektrolyten laminare Strömungsverhältnisse für die Ionen voraus, so ist der Reibungswiderstand auf die als kugelförmig anzusehenden Ionen mit Radius r nach dem STOKESchen Gesetz gegeben als

$$\vec{F}_R = -6\pi\eta r \vec{v}, \quad (3.82)$$

wobei η die Zähigkeit der Flüssigkeit und \vec{v} die mittlere Ionengeschwindigkeit ist. Nach dem Einstellvorgang tritt ein Gleichgewicht zwischen der elektrischen Kraft \vec{F}_E und dem Reibungswiderstand \vec{F}_R ein:

$$\vec{F}_E = -\vec{F}_R \quad (3.83)$$

$$\text{oder} \quad q \vec{E} = 6\pi\eta r \vec{v}. \quad (3.84)$$

Die Ionen bewegen sich dann in diesem stationären Zustand mit der konstanten Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \frac{q}{6\pi\eta r} \vec{E} = \mu \vec{E}, \quad (3.85)$$

wobei μ wieder die **Beweglichkeit** ist.

Die Driftgeschwindigkeit der Ionen in einem Elektrolyt ist sehr klein. Sie beträgt für

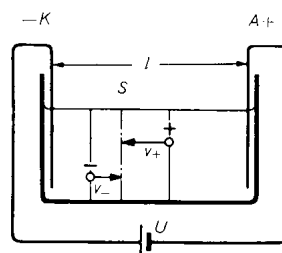


Abbildung 3.24: Zur Elektrolyse tragen positive und negative Ladungsträger bei

$E = 100 \text{ V/m}$ ungefähr $v \approx 0,00001 \text{ m/s}$.

Dieses Ein-Ladungsmodell eines Elektrolyts ist aber zu einfach, denn wir müssen sowohl

positive als auch negative Ladungsträger betrachten (s. Abb. 3.24, entnommen aus [3]). Auf Seite 94 hatten wir uns schon allgemein mit dem Leitungsmechanismus beschäftigt. Wir hatten die Formel für die Stromdichte in Elektrolyten hergeleitet, sie war

$$j = q_+ n_+ v_+ + q_- n_- v_- . \quad (3.86)$$

Es ist zu beachten, dass q_i die Ladung eines Iones ist und es gilt $q = z \cdot e$, also Wertigkeit des Iones mal der Elementarladung. Setzen wir nun nach Gleichung 3.85 v_+ und v_- in die Stromdichte ein, so erhalten wir

$$\text{mit} \quad \vec{v}_\pm = \frac{q_\pm}{6\pi\eta r_\pm} \vec{E} \quad (3.87)$$

$$j = E \frac{1}{6\pi\eta} \left[\frac{n_+ q_+^2}{r_+} + \frac{n_- q_-^2}{r_-} \right] \quad (3.88)$$

Die Stromdichte ist nach diesem Modell also proportional zur Konzentration n . Bei verdünnten Lösungen ist diese Gesetzmäßigkeit gut erfüllt. Bei größeren Konzentrationen treten beträchtliche Abweichungen von dieser einfachen Proportionalität auf, da das angewandte Modell zu einfach ist. Im Gegensatz zum metallischen Leiter wird bei der Elektrolyse nicht nur Ladung, sondern auch Materie transportiert, wie folgender Versuch zeigt. Desweiteren kann man in diesem Versuch die Driftgeschwindigkeit beobachten.

Versuch 3.9

In eine Ionenwanderungskammer wird farblose KNO_3 -Lösung gegeben. An beiden Seiten der Kammer werden Elektroden angebracht. In der Nähe der Kathode geben wir etwas violette KMnO_4 -Lösung dazu. Nach dem Anlegen der Spannung sieht man von der Kathode aus eine violette Wolke mit scharfer Grenze zur Anode vorrücken. Im klaren Teil wandern unsichtbare NO_3^- -Anionen, im violetten Teil MnO_4^- -Anionen. Desweiteren wandern in beiden Teilen

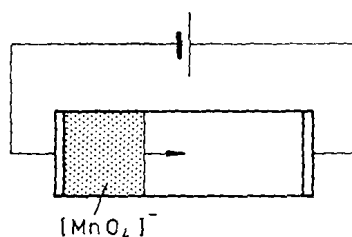


Abbildung 3.25: Ionenwanderungskammer

K^+ -Kationen. Kehrt man das Feld um, so läuft die Wolke zurück (s. Abb. 3.25, aus [2]). Legt man ein Plexiglaslineal neben die Kammer und misst die

Zeit für das Fortschreiten der MnO_4^- -Ionen über 2 cm, so ergibt sich für die Driftgeschwindigkeit

$$\mu(\text{MnO}_4^-) = 5,6 \cdot 10^{-4} \frac{\text{cm/s}}{\text{V/cm}}. \quad (3.89)$$

Die Elektrolyse spielt in der Technik eine große Rolle:

1. beim Aufbringen von Metallüberzügen (GALVANISIEREN genannt nach L. GALVANI (1737 – 1798)). Die häufigsten GALVANISCHEN Metallüberzüge bestehen aus Chrom, Nickel, Cadmium, Gold oder Silber. Sie dienen
 - a) zur Erhöhung der mechanischen (Hartverchromen) oder chemischen Widerstandsfähigkeit (Vernickeln von Eisen),
 - b) zur Verbesserung der elektrischen Leitfähigkeit (vergolden oder versilbern von Kontakten).
2. bei der Metallgewinnung aus Metallsalzlösungen

3.8.2 GALVANISCHE ELEMENTE

Versuch 3.10

Wir tauchen eine Stativstange in eine Kupfersulfatlösung und beobachten, dass sich die Stange langsam mit Kupfer überzieht.

Versuch 3.11

Wir tauchen einen Zinkstab in eine Zinksulfatlösung und beobachten, dass sich der Zinkstab negativ auflädt.

Bei dem Eintauchen eines Metalles in eine Lösung treten Metallionen in das Lösungsmittel, während die Elektronen im Metall bleiben, sodass sich die Elektrode negativ auflädt und ein weiteres Austreten von positiven Ionen verhindert. Dieses Verhalten nennt man **Lösungstension** der Metalle (s. Abb. 3.26, entnommen aus [9]). Der Vorgang des Aufladens endet bei einer materialspezifischen Spannung. Dieses elektrolytische Potenzial kann nicht direkt gemessen werden, da man zur Messung eine zweite Elektrode in die Lösung bringen müsste und dann die Potentialdifferenz der beiden Metalle messen würde.

Versuch 3.12

In eine Kochsalzlösung tauchen wir einen Kohlestab und nacheinander ein Kupfer-, ein Eisen- und ein Zinkblech und messen die Spannung zwischen der Kohle- und der Metallelektrode.

Die gemessenen Spannungen waren:

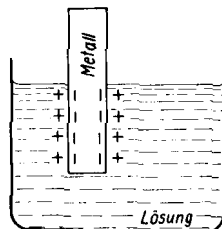


Abbildung 3.26: Lösungstension der Metalle

Kohle-	Zink	1,9 V
Kohle-	Eisen	1,4 V
Kohle-	Kupfer	1,0 V

Zwischen chemisch verschiedenen Elektroden besteht eine Spannung. Je unedler das Metall der negativen Elektrode ist, desto höher ist die Spannung gegen Kohle.

Üblicherweise wird als Bezugs elektrode die Standardwasserstoffelektrode gewählt, deren Potenzial als Null definiert ist. Sie besteht aus einem von Wasserstoff umspülten Platinblech. Das zu untersuchende Metall der Wertigkeit z wird in eine Lösung getaucht, die $1/z$ mol Ionen des Metalls pro Liter enthält (1- normale Lösung). Beide Lösungen sind durch eine poröse Wand miteinander verbunden. Die zwischen den beiden Elektroden auftretende Spannung ist dann definitionsgemäß das Normalpotenzial des Metalls. Ordnet man die Metalle nach wachsenden Normalpotenzialen, so erhält man die **elektrochemische Spannungsreihe**.

Elektrochemische Spannungsreihe		
Metall	Reaktion	Spannung in Volt
K	$K^+ + e$	-2,92
Na	$Na^+ + e$	-2,71
Zn	$Zn^{++} + 2e$	-0,76
Pb	$Pb^{++} + 2e$	-0,13
H	$H^+ + e$	0
Cu	$Cu^{++} + 2e$	+0,34
Cu	$Cu^+ + e$	+0,52
Ag	$Ag^+ + e$	+0,80
Au	$Au^+ + e$	+1,42
Au	$Au^{+++} + 3e$	+1,50
Pt	$Pt^{++} + 2e$	+1,60

Mit diesem Wissen können Spannungsquellen, die sogenannten **GALVANISCHEN ELEMENTE**, gebaut werden. Als Beispiel betrachten wir das **DANIELL-Element**.

Versuch 3.13

Bei dem DANIELL-Element befindet sich ein Zinkstab in einer Zinksulfatlösung und ein Kupferstab in einer Kupfersulfatlösung, die beide durch eine poröse Wand miteinander verbunden sind (s. Abb. 3.27, entnommen aus [1]). Die gemessene Potenzialdifferenz zwischen ihnen betrug

$$\Delta\varphi = \varphi_{\text{Zn}} - \varphi_{\text{Cu}} = 0,35 \text{ V} - 0,76 \text{ V} = 1,11 \text{ V}.$$

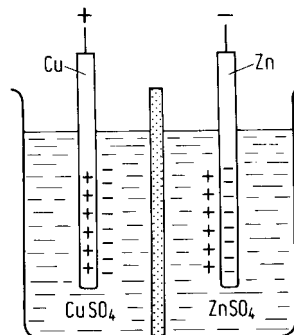
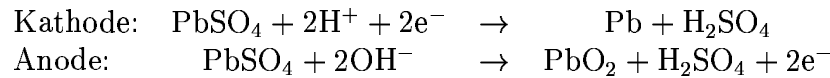


Abbildung 3.27: Daniell-Element

Verbindet man die beiden Elektroden mit einem Draht, so fließt ein Strom vom Zink zum Kupfer. Dabei wird das Zink positiver und scheidet mehr Ionen in die Lösung, die wiederum SO_4^- -Ionen aus der Kupfersulfatlösung abziehen. Die so entstandenen Cu^{++} -Ionen in der Lösung werden von der mittlerweile negativen Kupfer-Kathode angezogen, neutralisieren sich dort und schlagen sich an der Kathode nieder. Dadurch nimmt die Konzentration der Kupfersulfatlösung ab, die der Zinklösung hingegen steigt. Bei dieser Reaktion wird das Zinkblech immer dünner, während das Kupferblech immer dicker wird. Der Vorgang wird erst gestoppt, wenn kein Kupfer mehr in der Lösung ist. Spannung und Strom versiegen jetzt, weil sich die Kupferelektrode auch mit Zink überzieht und somit als Zinkelektrode wirkt.

Eine wichtige Erweiterung der GALVANischen Elemente ist der **Akkumulator**. Bei ihm können die abgelaufenen chemischen Prozesse durch Aufladen umgekehrt werden, wodurch er wiederverwendbar ist. Ein bekanntes Beispiel ist der Bleiakku. Er besteht aus zwei Bleiplatten, die sich in verdünnter Schwefelsäure (H_2SO_4) befinden und sich mit einer PbSO_4 -Schicht überziehen.

Beim Aufladen wird die Spannung von außen angelegt und es entsteht an der Kathode Blei und an der Anode Bleioxid:



Nach dem Aufladen liefert der Bleiakku eine Spannung von 2 V. Bei der Stromentnahme läuft der Prozess umgekehrt, bis der Anfangszustand fast wieder hergestellt ist. Man erhält etwa 70-80 % der investierten Energie zurück. Eine typische Autobatterie mit 12 V bei 55 Ah (Amperestunde) kann eine Energie von

$$W = Q U = 12 \text{ V} \cdot 55 \text{ Ah} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 2,4 \cdot 10^6 \text{ VA s} = 2,4 \cdot 10^6 \text{ J}$$

speichern.

3.9 Leitung in Metallen

Wir wollen uns an dieser Stelle noch einmal etwas genauer mit den Leitungsmechanismen in Metallen beschäftigen. Für eine exakte Beschreibung ist allerdings die Kenntnis des atomaren Aufbaus und der Gitterstruktur im Festkörper, sowie der Quantentheorie, nötig, welche erst in den folgenden Semestern gelehrt werden. Deshalb wollen wir uns hier auf einige wesentliche Ergebnisse beschränken, die unter der Bezeichnung **Bändermodell** zusammengefasst sind. Das Bändermodell ermöglicht eine einheitliche Deutung der unterschiedlichen elektrischen Leitfähigkeit von Metallen, Halbleitern und Isolatoren.

Bereits in dem Abschnitt über die Temperaturabhängigkeit des Widerstands haben wir uns etwas mit dem Leitungsmechanismus in Metallen beschäftigt. Wir wissen, dass jedes Metallatom ein Valenzelektron als Leitungselektron abgibt. Diese Elektronen sind frei beweglich und werden auch **Elektronengas** genannt. Sie bewegen sich frei durch das Ionengitter, ähnlich den Gasatomen. Durch ihre Wärmebewegung verursachen sie keinen Strom. Erst wenn sich das Metall in einem elektrischen Feld befindet, wird diese Bewegung durch die Driftbewegung überlagert und es fließt ein Strom. (vgl. Seite 93) Die Valenzelektronen sind nicht an die einzelnen Gitterbausteine gebunden, sondern nur an den Kristall als Ganzen. Sie befinden sich in gebundenen Zuständen, die laut Quantentheorie nicht beliebige Energiewerte annehmen können. Die Valenzelektronen können sich nur in einer endlichen, allerdings sehr großen Anzahl von diskreten Zuständen aufhalten. Die Zustände sind nicht kontinuierlich über den Energiebereich verteilt, sondern es gibt Bereiche, sogenannte **Bänder**, erlaubter Energieniveaus, die durch die **verbotenen Zonen** getrennt sind (s. Abb. 3.28, entnommen aus [5]). In den verbotenen Zonen können sich aus energetischen Gründen keine Elektronen aufhalten. Die Bänder kann man als kontinuierliche Zonen erlaubter Energiewerte betrachten, denn die Abstände zwischen den einzelnen Zuständen des einzelnen Bandes sind so gering, dass die Elektronen aufgrund der Wärmebewegung praktisch ungehindert zwischen den einzelnen Zuständen wechseln können. Sie sind aber bestrebt, immer den tiefstmöglichen Zustand einzunehmen. Wegen des PAULI-Prinzips (siehe Vorlesung des 4. Semesters) kann jeder Zustand nur zweimal

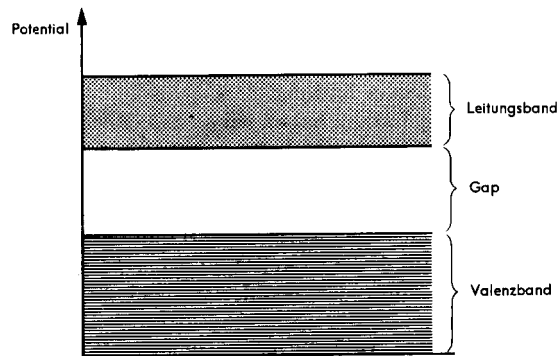


Abbildung 3.28: Prinzip des Bändermodells

besetzt werden. Daher können auch die einzelnen Bänder wegen der endlichen Zahl ihrer Zustände nur eine endliche Anzahl von Elektronen aufnehmen. Deshalb unterscheidet man zwischen vollständig, teilweise gefüllten und leeren Energiebändern.

Bei einer Besetzung des oberen Bandes von 10 - 90 % liegt ein metallischer Leiter vor. Legt man hier nun eine elektrische Spannung an, so bildet sich im Inneren ein elektrisches Feld E aus, und auf die Elektronen wirkt eine beschleunigende Kraft $F = -e E$. Dadurch erhalten die Elektronen mehr Bewegungsenergie und werden auf höhere Energiezustände angehoben. Ist das obere Band nur teilweise gefüllt, können die Elektronen leicht in einen höheren Energiezustand gelangen, da hier genügend freie Zustände zur Verfügung stehen. Da alle in dem obersten Band befindlichen Elektronen im Feld zusätzlich Energie aufnehmen und zur Leitung beitragen, nennt man dieses Band das **Leitungsband** und die Elektronen **Leitungselektronen**. Das darunter liegende Band heißt **Valenzband**. Wenn das oberste Band ganz gefüllt ist, können die Elektronen nicht mehr durch das

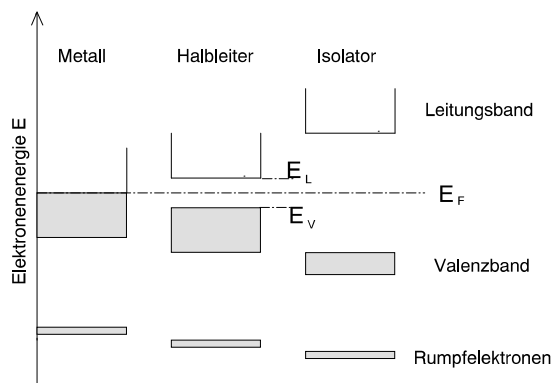


Abbildung 3.29: Bändermodell für Metalle, Halbleiter und Isolatoren

angelegte Feld beschleunigt werden, es liegt ein **Isolator** vor. Für jedes Elektron, dass aus einem niedrigeren Energiezustand des Bandes in einen höheren angehoben wird, muss umgekehrt ein Elektron aus diesem Zustand in das tiefere Niveau übergehen. Deshalb ist in einem vollbesetzten Zustand keine Stromleitung möglich.

Besteht zwischen dem obersten vollbesetzten Band und dem darüberliegenden nächsten leeren Band ein relativ geringer Abstand, dann ist der Stoff zwar bei niedrigen Temperaturen ein Isolator, aber bei Zimmertemperatur kann er jedoch eine wesentlich höhere elektrische Leitfähigkeit besitzen. Man spricht dann von einem **Halbleiter**. Seine Leitfähigkeit wird durch die thermische Anregung von Elektronen aus dem Valenzband in das darüberliegende Band verursacht. Die Wahrscheinlichkeit einer solchen Anregung nimmt exponentiell mit dem Bandabstand E_B ab und mit der Temperatur T zu. Halbleitende Eigenschaften zeigen sich erfahrungsgemäß bis zur Energielücke (gap) von etwa $E_B = 2,5\text{eV}$, während bei Isolatoren größere Werte zu finden sind. Beim Halbleiter tragen sowohl die in das Leitungsband gehobenen Elektronen als auch die im Valenzband zurückbleibenden Löcher zur Leitfähigkeit bei (Eigenleitung reiner Halbleiter). Eine Darstellung der beschriebenen Modelle findet man in Abb. 3.29.

3.10 Leitung in Halbleitern

3.10.1 p,n- Halbleiter

Wir wollen uns nun intensiver mit den Leitungsmechanismen in Halbleitern beschäftigen. Als typischen Vertreter der Halbleiter wollen wir uns mit dem Element Germanium aus der IV. Hauptgruppe des Periodensystems befassen. Alle der 4-wertigen Germaniumatome verbinden sich jeweils mit vier benachbarten Germaniumatomen, indem sich jedes der Valenzelektronen mit einem Valenzelektron der Nachbaratome zu einem Elektronenpaar verbindet (s. Abb. 3.30, aus [5]). In diesem Zustand sind alle Valenzelektronen gebunden und das Germanium verhält sich wie ein Isolator. Da die Bindungsenergie aber gering ist, sie beträgt nur $0,75\text{ eV}$, gilt dies nur bei tiefen Temperaturen. Je höher die Temperatur ist, desto stärker schwingen die Elektronen, bis sie eine Schwingungsenergie von mehr als $0,75\text{ eV}$ haben und die Bindungen aufbrechen. Dies ist schon bei Zimmertemperatur der Fall. An den Stellen, an denen ein Elektron freigesetzt worden ist, entsteht ein Elektronenfehlplatz, den man als **Defektelektron** oder **Loch** bezeichnet. Die freien Elektronen führen ähnlich wie in einem Metall Wärmebewegungen aus. Kommen sie dabei in die Nähe der Löcher, treten sie wieder in diese ein, sie **rekombinieren**. Die Wahrscheinlichkeit der Rekombination steigt mit der Dichte der freien Elektronen und Löcher. Es entsteht ein Gleichgewichtszustand, bei dem die Anzahl der pro Zeiteinheit entstehenden freien Elektronen und Löcher genauso groß ist, wie die durch Rekombination verschwindenden. Daraus ergibt sich eine konstante Dichte an freien Elektronen und Löchern, die umso größer ist, je höher die Temperatur ist.

Legt man an einen Halbleiterkristall eine Spannung an, so wandern die freien Elektronen

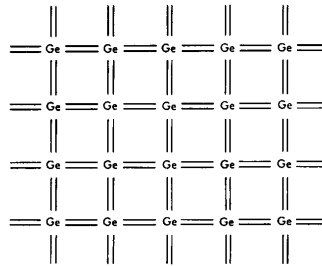


Abbildung 3.30: Die Bindung der Germaniumatome

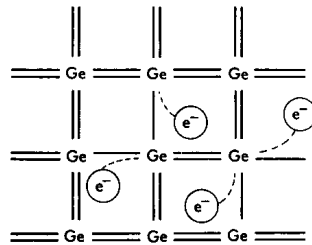


Abbildung 3.31: Eigenleitung im Halbleiter

vom Minuspol zum Pluspol und bilden damit einen Elektronenstrom. Zusätzlich kann aber auch ein gebundenes Elektron, das sich in der Nähe eines Loches befindet, in dieses Loch wandern. Dadurch verschwindet das alte Loch, während ein neues an der Stelle des abgewanderten Elektrons entsteht. Dieser Vorgang wiederholt sich beliebig oft, sodass die Löcher in entgegengesetzter Richtung zu den Elektronen wandern. Man kann die Löcher also als bewegliche, positiv geladene Ladungsträger auffassen, deren Strom durch den Leiter Löcherstrom genannt wird. Der gesamte Strom in einem Halbleiter im elektrischen Feld besteht also aus dem Elektronenstrom und dem Löcherstrom. Diesen Vorgang bezeichnet man als die **Eigenleitung** im Halbleiter (s. Abb. 3.31, entnommen aus [3]). Bei Zimmertemperatur stehen für die Eigenleitung in einem Mol Germanium jeweils $1,3 \cdot 10^{13}$ Elektronen und Löcher zur Verfügung, bei Silizium sind es $7,7 \cdot 10^9$ und bei Tellur $5 \cdot 10^{16}$.

Dotierte Halbleiter

Um die Leitfähigkeit der Halbleiter zu erhöhen, baut man Fremdatome ein. Besonders gut lassen sich in die 4-wertigen Atome wie Germanium und Silizium 3- und 5-wertige Fremdatome wie Bor, Aluminium, Gallium, Indium bzw. Phosphor, Arsen und Antimon einbauen. Die Fremdatome nehmen im Gitter jeweils den Platz eines 4-wertigen Atoms

ein. Diese Plätze nennt man **Störstellen** und ihren Beitrag zur elektrischen Leitung **Störstellenleitung**. Der Einbau der Fremdatome geschieht entweder bei hoher Temperatur durch Einlegieren oder indem man die Fremdatome in Gasform im Vakuumofen in dünne Halbleiterplättchen eindiffundieren lässt. Den gezielten Einbau von Fremdatomen nennt man **dotieren**. Betrachten wir nun am Beispiel der 4-wertigen Atome Silizium und Germanium, wie die Leitfähigkeit durch die Dotierung verändert wird.

Dotiert man Silizium mit einem 3-wertigen Fremdatom, beispielsweise mit Indium, dann verbinden sich die drei Valenzelektronen des Indiumatoms mit je einem Valenzelektron von drei benachbarten Siliziumatomen. Dabei bleibt ein Valenzelektron des vierten benachbarten Siliziumatoms ungepaart (s. Abb. 3.32a). In diese Lücke der Elektronenbindung tritt ein Valenzelektron eines benachbarten Siliziumatoms. Als Folge davon entsteht ähnlich wie oben ein im elektrischen Feld bewegliches positives Loch, gleichzeitig wird das Indiumatom zu einem negativen Ion. Jedes in das Halbleitergitter eingebaute 3-wertige

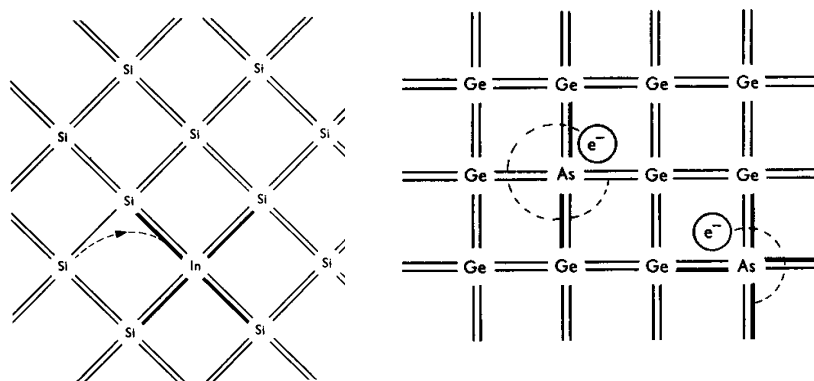


Abbildung 3.32: p- und n- dotierte Halbleiter

Fremdatom liefert also ein bewegliches Loch und ein fest in das Gitter eingebundenes negatives Ion. Daher bezeichnet man diese Fremdatome auch als Elektronenaufnehmer oder **Akzeptoren**. Auch nach dem Einbau von Akzeptoren bleibt der Halbleiter insgesamt elektrisch neutral. Es wird also nur die Dichte der positiven Löcher gegenüber dem Halbleiter erhöht, deshalb bezeichnet man einen mit Akzeptoren dotierten Halbleiter als **p- Halbleiter**. Der Strom in p-Halbleitern ist also hauptsächlich ein Löcherstrom.

Bei der Dotierung mit einem 5-wertigen Atom wie Arsen bleibt bei der Verbindung der Valenzelektronen das fünfte Valenzelektron des Arsenatoms ungepaart (s. Abb. 3.32b, beide entnommen aus [5]). Durch die schwache Bindung wird es bei der Wärmebewegung leicht vom Atom abgetrennt. Das Arsenatom wird dadurch zu einem feststehenden positiven Ion. Dies geschieht bei jedem eingebauten Atom, weshalb man diese Störatome auch als Elektronenspender oder **Donatoren** bezeichnet. Durch den Einbau von Donatoren wird also die Elektronendichte erhöht. Aufgrund des negativen Elektronenstroms spricht

man auch von einem **n-Halbleiter**. Auch die Störstellenleitung kann mit dem Bändermodell veranschaulicht werden. Bei den Donatoren (mit überschüssigen Elektronen) werden unterhalb der unteren Kante E_C des Leitungsbandes lokalisierte Elektronenterme in das Donatorniveau E_D eingetragen. Die Differenz $E_C - E_D$ entspricht dabei der Energie, die notwendig ist, um das Elektron von Störatom in das Leitungsband anzuregen (**Ionisierungsenergie**). Diese Energie ist vergleichbar mit der Wärmeenergie bei Zimmertemperatur, so dass in hohem Maße die Störatome ionisiert sind und ihr überschüssiges Atom

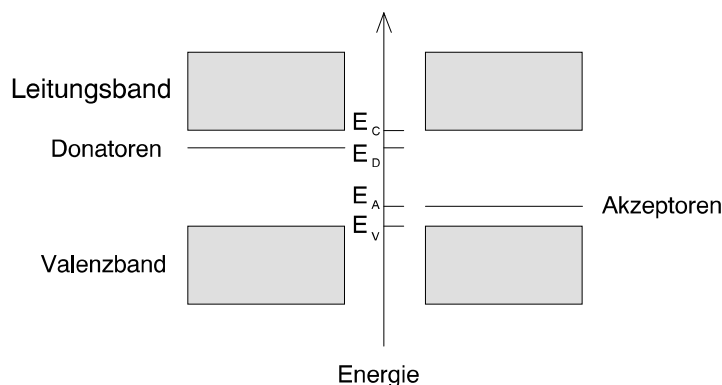


Abbildung 3.33: Störstellenleitung im Bändermodell

an das Leitungsband abgegeben haben. Die Akzeptoren (die zuwenig Elektronen haben) hingegen nehmen leicht das fehlende Bindungselektron auf, indem sie dem Valenzband des Halbleiterkristalls ein Elektron entziehen. Deshalb liegt das Akzeptorniveau E_A oberhalb der oberen Kante des Valenzbandes E_V . Die Differenz $E_A - E_V$ entspricht dabei der Energie, die benötigt wird, um das Elektron aus dem Valenzband an das Akzeptoratom anzulagern (s. Abb. 3.33).

3.10.2 Der pn- Übergang

Fügt man p-Germanium und n-Germanium zusammen, so entsteht ein sogenannter **pn-Übergang**. An der Kontaktfläche fangen die Ladungsträger aufgrund ihrer unterschiedlichen Konzentration an zu diffundieren. Die Löcher aus dem p-Germanium wandern durch die Grenzfläche in das n-Germanium, und die Elektronen aus dem n-Germanium bewegen sich in entgegengesetzter Richtung. Treffen ein Elektron und ein Loch aufeinander, so rekombinieren sie und stehen nicht mehr als Ladungsträger zur Verfügung. Dadurch verändert sich die Umgebung des pn-Übergangs. Es entsteht eine **Grenzschicht**, deren Ladungsverteilung wir nun näher untersuchen wollen. Durch das Abwandern der Löcher aus dem p-Germanium in Grenzfläche fehlen hier positive Ladungen. Da die ortsfesten negativen Ionen zurück bleiben, spricht man dort von einer **negativen Raumladung**. Im grenznahen Bereich des n-Germaniums hat sich ein Analog-Vorgang abgespielt. Aufgrund

der übriggebliebenen ortsfesten positiven Ionen spricht man hier von einer **positiven Raumladung**. Die beiden Raumladungszonen können aber nicht unbegrenzt wachsen, da die negative Raumladung des p-Germaniums mit zunehmender Größe das Eindringen weiterer Elektronen aufgrund der gleichnamigen Ladung erschwert. Dasselbe gilt für das Eindringen der Löcher in die positive Raumladungszone des n-Germaniums. Auf diese Weise bildet sich ein Gleichgewichtszustand aus, der durch bestimmte Raumladungen zu beiden Seiten der Grenze gekennzeichnet ist (s. Abb. 3.39 auf Seite 134, entnommen aus [3]). Da also innerhalb der Grenzschicht nur wenige bewegliche Ladungsträger zur Verfügung stehen, bildet die Grenzschicht eine Zone großen elektrischen Widerstandes. Ihre Dicke beträgt etwa $1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$.

3.10.3 Die Halbleiterdiode

Die Dicke der Grenzschicht zwischen einem p- und einem n-Halbleiter ist durch Anlegen einer äußeren Spannung steuerbar, wie es bei der **Halbleiterdiode** ausgenutzt wird. Es gibt zwei Möglichkeiten, die Spannung an die Diode anzulegen (s. Abb. 3.34, aus [1]):

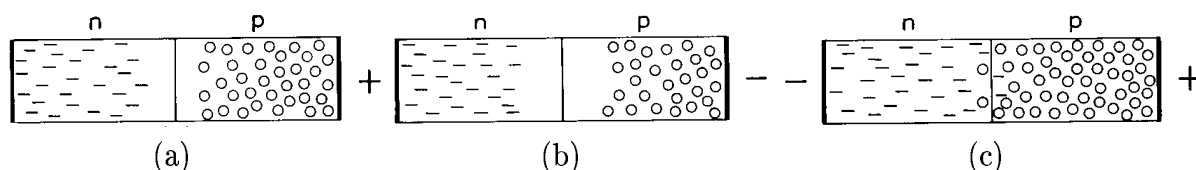


Abbildung 3.34: Die Halbleiterdiode (a) in Sperrichtung (b) und in Durchlassrichtung (c) geschaltet

1. Der positive Pol liegt an der n-Seite und der negative Pol an der p-Seite. Da die beweglichen Elektronen des n-Halbleiters vom positiven Pol und die beweglichen Löcher vom negativen Pol der Spannungsquelle angezogen werden, verbreitert sich die Grenzschicht, und die Anzahl der beweglichen Ladungsträger in der Nähe des pn-Übergangs nimmt weiter ab. Es wird kaum noch Strom geleitet, und der Widerstand des Übergangs hat sich um einige Zehnerpotenzen erhöht. Die Diode wirkt praktisch wie ein Isolator. Man sagt, dass der pn-Übergang **in Sperrichtung vorgespannt** ist und bezeichnet die Grenzschicht als Sperrschicht. Innerhalb der Sperrschicht findet man aber noch einige wenige Elektronen und Löcher, auf die die Spannung nicht sperrend wirkt, sondern die zu einem kleinen Stromfluss führt, dem **Sperrstrom**.
2. Der positive Pol liegt an der p-Seite und der negative Pol an der n-Seite. Bei dieser Schaltung tritt die entgegengesetzte Wirkung ein: die Elektronen und Löcher bewegen sich auf die Grenzschicht zu, sodass diese schmaler wird. Bei entsprechend hoher

Spannung kann sie sogar praktisch ganz abgebaut werden. Sie wird niederohmig und damit ist der pn-Übergang jetzt stromdurchlässig. Die Elektronen und Löcher treffen am Übergang zusammen und rekombinieren in großer Zahl. Die dadurch laufend verschwindenden Elektronen und Löcher werden von der Spannungsquelle nachgeliefert, in dem in den n-leitenden Teil neue Elektronen hineingedrückt und aus dem p-Halbleiter Elektronen unter Zurücklassung neuer Löcher abgesaugt werden. Im äußeren Leiterkreis fließt ein Elektronenstrom, dessen Stärke von der angelegten Spannung abhängt. Grafisch wird diese Abhängigkeit in der **Kennlinie** der Halbleiterdiode aufgezeichnet. Man sagt, dass der pn-Übergang **in Durchlassrichtung vorgespannt ist**.

Für die Halbleiterdiode verwendet man das Schaltsymbol aus Abb. 3.35. Die Pfeilrichtung

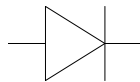


Abbildung 3.35: Schaltsymbol einer Diode

bezieht sich auf die international festgelegte Stromrichtung von plus nach minus und stimmt somit mit der Bewegungsrichtung der Löcher überein.

Versuch 3.14

Wir nehmen die Kennlinie einer Halbleiterdiode in Durchlassrichtung und in Sperrichtung mit einem Oszilloskop auf.

Die Abb. 3.36 (entnommen aus [1]) zeigt die Kennlinie einer Diode. Wird die Diode in Durchlassrichtung betrieben, so steigt die Stromstärke zunächst nach einer Exponentialfunktion an, dann linear mit der Spannung. Wird sie dagegen in Sperrichtung geschaltet, so entsteht nur ein sehr geringer Sperrstrom (man beachte den Maßstab!). Bei sehr hohen Spannungen steigt die Stromstärke ab einer bestimmten Spannung stark an. Diesen Bereich nennt man nach seinem Entdecker den ZENER-Bereich. Hier erreicht die elektrische Feldstärke E in der Grenzschicht so hohe Werte, dass die Kraft $F = -e E$ ausreicht, um Valenzelektronen aus ihren Bindungen zu reißen. Dadurch entstehen in der Grenzschicht plötzlich zahlreiche stark beschleunigte Ladungsträger, die ihrerseits durch Stoßionisation weitere Ladungsträger freisetzen können. Man kann diesen Effekt zur Spannungsstabilisierung ausnutzen.

3.10.4 Der Transistor

Das wichtigste Schaltelement aus der Halbleiterfamilie ist der Transistor. Er besteht aus drei Halbleitern, die über zwei pn-Übergänge zusammen gefügt sind. Es handelt sich also

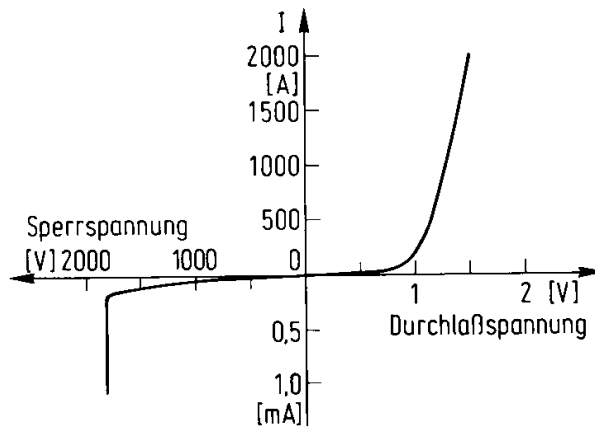


Abbildung 3.36: Kennlinie einer Diode

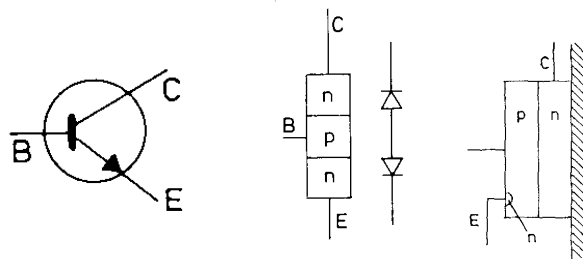


Abbildung 3.37: Der Transistor

entweder um pnp- oder npn-Transistoren. Man bezeichnet die beiden äußeren Schichten als **Emitter** E und als **Kollektor** K und die mittlere als die **Basis** B . Sie hat eine Dicke von nur 0,02 bis 0,03 mm (s. Abb. 3.37, entnommen aus [2]).

Für beide Transistorarten gelten grundsätzlich die gleichen physikalischen Zusammenhänge, nur dass die Wirkung des pnp-Transistors durch einen Strom von Löchern und die des npn-Transistors durch einen Strom von Elektronen zustande kommt.

Um die Wirkungsweise von Transistoren verstehen zu können, betrachten wir einen npn-Transistor in einem Schaltkreis. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, einen Transistor zu schalten. Bei der **Basisschaltung** ist die Basis der gemeinsame Kontakt von Eingangs- und Ausgangskreis (s. Abb. 3.38, entnommen aus [3]). Im Eingangskreis ist der Transistor in Durchlassrichtung geschaltet, weil die Spannungsquelle zwischen Basis und Emitter mit ihrem negativen Pol am Emitter liegt und dadurch Elektronen in die Emitter-Basis-Grenzschicht drücken kann. Im Ausgangskreis ist der Transistor dagegen in Sperrichtung geschaltet, weil die Spannungsquelle zwischen Kollektor und Basis bzw. zwischen Kollektor-

tor und Emitter mit ihrem positiven Pol am Kollektor liegt und dadurch Elektronen aus der Basis-Kollektor-Grenzschicht absaugt. Der wesentliche Vorgang, ohne den ein Transistor überhaupt nicht arbeiten könnte, ist folgender:

Die Elektronen, die durch die Basis-Emitter-Spannung in die Basis getrieben werden, rekombinieren dort nur zu 0,5 - 5 % mit den Löchern der Basis. Da die Basis so schmal ist, diffundieren fast alle Elektronen aufgrund ihrer hohen Diffusionsgeschwindigkeit durch sie hindurch und gelangen in die Basis-Kollektor-Grenzschicht. Hier werden sie durch das elektrische Feld in die Kollektorzone getrieben und dort am positiven Pol abgesaugt.

Fasst man den Transistor als einen Stromknoten auf, so muss nach dem KIRCHHOFFSchen-Gesetz die Summe der zufließenden und abfließenden Ströme gleich sein. Unter Beachtung der international festgelegten Stromrichtung (von plus nach minus) sind die zufließenden Ströme der Basisstrom I_B und der Kollektorstrom I_K , der abfließende Strom ist der Emitterstrom I_E . Es ist also

$$I_B + I_K = I_E. \quad (3.90)$$

Betrachten wir noch einmal die Elektronenbewegung. Beim npn-Transistor fließen die Elektronen über den Emitter in den Transistor hinein, fast alle fließen über den Kollektor wieder ab und ein geringer Teil fließt über die Basis.

In der Basisschaltung kann der Kollektorstrom I_K durch den Emitterstrom I_E gesteuert werden. Stromstärkeänderungen im Eingangskreis haben Stromstärkeänderungen im Ausgangskreis zur Folge. In der Basisschaltung sind die Stromstärken I_E und I_K fast gleich groß, denn nur ein geringer Teil des Emitterstroms fließt ja als Basisstrom ab, sodass in dieser Schaltung also keine Stromverstärkung vorliegt. Dagegen ergibt sich eine Leistungsverstärkung, denn die Sperrspannung U_{KB} kann nämlich viel größer gewählt werden als die Spannung U_{BE} zwischen Emitter und Basis, sodass die Ausgangsleistung $U_{KB} \cdot I_K \sim U_{KB} \cdot I_E$ viel größer ist als die Eingangsleistung $U_{BE} \cdot I_E$. Befindet sich ein Lastwiderstand R_{Last} im Ausgangskreis, so ist der Transistor auch als Spannungsverstärker wirksam. Geringe Spannungsänderungen im Eingangskreis bewirken große Änderungen der Stromstärke $I_K \sim I_E$.

In der **Emitterschaltung** wird der Kollektorstrom I_K durch den kleineren Basisstrom $I_B = I_E - I_K$ gesteuert (s. Abb. 3.38). Hier wirkt der Transistor als Stromverstärker. Auch in dieser Schaltung erfolgt eine Spannungsverstärkung am Lastwiderstand und insgesamt eine Leistungsverstärkung. Wegen der günstigen Verstärkereigenschaften wird die Emitterschaltung gegenüber der Basisschaltung bevorzugt.

Versuch 3.15

Wir nehmen die Kennlinien eines npn-Transistors in Basis- und Emitterschaltung auf.

Über die Betriebsdaten eines Transistors erhält man am übersichtlichsten Auskunft durch das **Kennlinienfeld** dieses Transistors, das für jeden Transistor unterschiedlich ist. Ein Beispiel sieht man in Abb. 3.38.

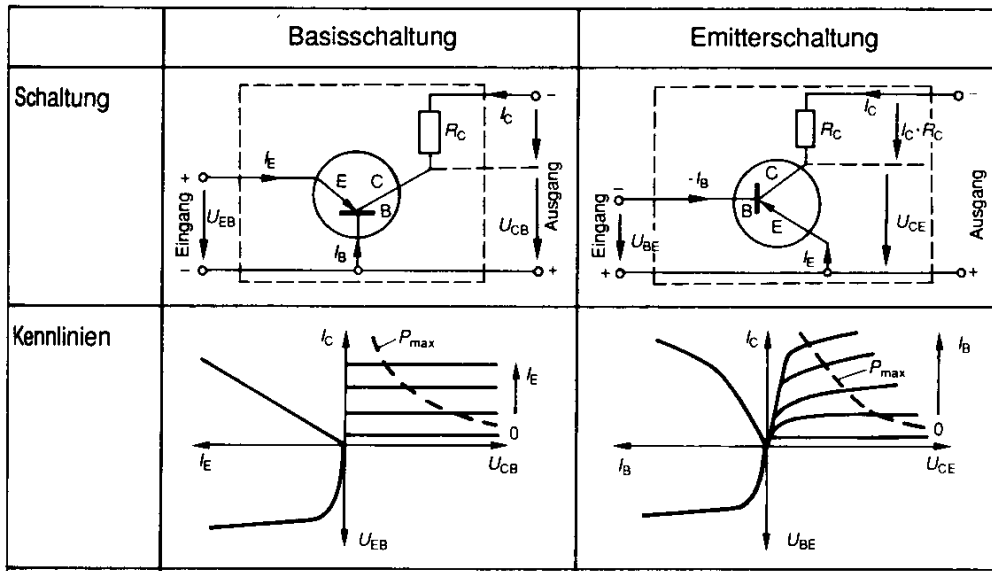


Abbildung 3.38: Basis- und Emitterschaltung eines Transistors mit den dazugehörigen Kennlinien

3.11 Ladungstransport im Hochvakuum

Wenn wir von Ladungstransport im Hochvakuum sprechen, dann meinen wir den Ladungstransport bei einem Druck von $10^{-2} - 10^{-4}$ Pa. Bei diesen Drücken beträgt die freie Weglänge 0,5 – 50 m. Die Teilchen wechselwirken nicht mehr miteinander, sondern mit der Gefäßwand. Für die Leitung im Vakuum müssen also Ladungsträger injiziert werden.

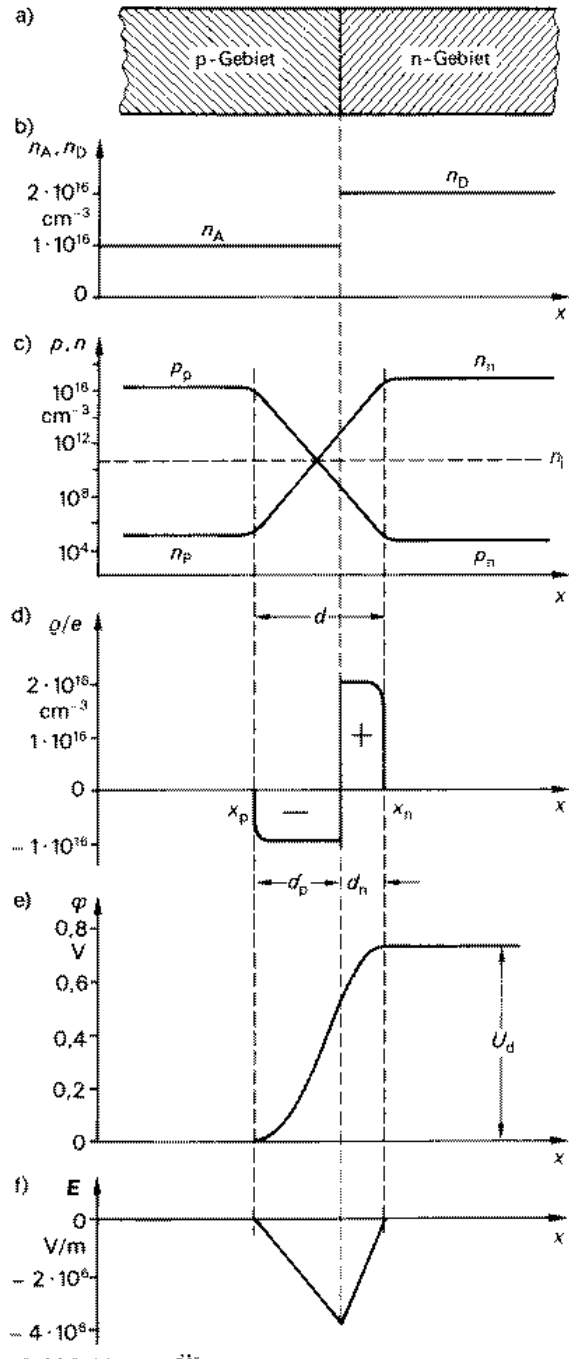


Abbildung 3.39: Der pn-Übergang

3.11.1 Glühemission

Das am häufigsten verwendete Verfahren zur Injektion von Ladungsträgern im Vakuum beruht auf der **thermischen Emission (Glühemission)** von Elektronen.

Dieser Prozess ähnelt dem Verdampfen von Molekülen aus einer Flüssigkeitsoberfläche. Wir wollen ihn nun anhand der **Elektronenröhren** betrachten. Eine Elektronenröhre besteht aus zwei Elektroden, der Kathode und der Anode, die in einem evakuierten Glaskolben eingeschmolzen sind (s. Abb. 3.40, entnommen aus [2]). Durch das Erhitzen der

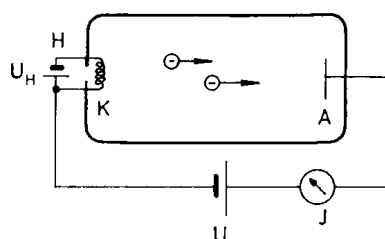


Abbildung 3.40: Elektronenröhre

Glühkathode nimmt die mittlere kinetische Energie der Elektronen in dem Metall so stark zu, dass sie die Anziehungskraft der zurückbleibenden Atomrümpfe überwinden und aus der Heizspirale austreten können (Austrittsarbeit W_A). Diese Elektronen können dann zur Anode gelangen. Eine Elektronenröhre, die nur aus Kathode und Anode besteht, nennt man **(Vakuum)Diode**.

Die Verdampfung der Elektronen können wir durch den Anlaufstrom messen, den wir beim Anlegen einer Gegenspannung ($U < 0$ V) erhalten.

Versuch 3.16

Wir messen die Abhängigkeit des Anodenstroms I_A von der Anodenspannung U_A einer Vakuumdiode bei verschiedenen Heizströmen. (Aufnehmen einer I/U - Kennlinie)

Abbildung 3.41 zeigt die Diodenkennlinien (entnommen aus [2]). Bei $U > 0$ V steigt der Strom mit wachsender Spannung rasch an bis schließlich eine Sättigung eintritt. Mit steigender Temperatur der Heizwendel (größerer Heizstrom) steigt der Anlaufstrom stark an. Die Abhängigkeit der Stromdichte j der austretenden Elektronen von der Austrittsarbeit W_A und der Temperatur T der Heizwendel wird durch die **RICHARDSON-Gleichung** beschrieben (O. RICHARDSON, 1879 - 1959):

$$j = A T^2 e^{-\frac{W_A}{kT}}. \quad (3.91)$$

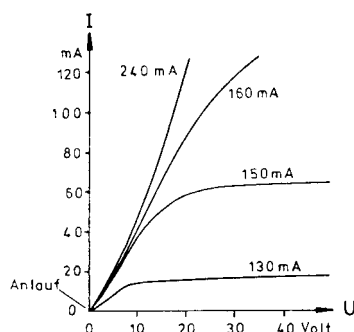


Abbildung 3.41: Kennlinie der Vakuumdiode

Die Richardson- Konstante A ist materialabhängig und liegt zwischen $10^6 \text{ A}/(\text{m}^2 \text{ K}^2)$ für Wolfram und $10^2 \text{ A}/(\text{m}^2 \text{ K}^2)$ für Metalloxide. Die ebenfalls werkstoffabhängige Austrittsarbeit W_A liegt zwischen 1 eV bei Metalloxiden und 5 eV bei Nickel. Die Größe des durch eine Vakuumdiode fließenden Stromes kann durch eine von außen angelegte Steuerungspannung verändert werden, indem man zwischen Kathode und Anode ein oder mehrere Steuergitter anbringt. Je nach Anzahl der Gitter werden diese Röhren dann Triode, Tetrode, Pentode usw. genannt. Bei der **Triode** wird ein Gitter zwischen Kathode und Anode gebracht, das eine negative Vorspannung erhält. Durch die Höhe des Gitterpotenzials lässt sich der Anodenstrom beeinflussen. Der Anodenstrom wird durch die Raumladung vor der Kathode bestimmt, die jetzt sowohl von der Gitterspannung als auch von der Anodenspannung beeinflusst wird. Aufgrund der geometrischen Abschirmung des Gitters ist nur noch ein Anteil $D \cdot U_A$ mit $D \ll 1$ des Anodenpotenzials im Raum vor der Kathode strombestimmend wirksam. Die Größe D nennt man **Durchgriff**; sie gibt an, wie stark das Anodenpotenzial durch das Steuergitter “hindurchgreift”. Bei Trioden hat der Durchgriff D Werte zwischen 0,1 und 0,5. Die daraus resultierende starke Rückwirkung der Anodenspannung auf den Anodenstrom (geringer innerer Widerstand) ist für viele Anwendungen störend.

Daher führt man bei der **Pentode** zwei weitere Gitter in das Elektrodensystem zwischen Steuergitter und Anode ein: ein erheblich positiv vorgespanntes Schirmgitter g_2 ($U_{g_2} \approx U_a$) und ein auf Kathodenpotenzial liegendes Bremsgitter g_3 . Das Schirmgitter schirmt den Raum zwischen Kathode und erstem Gitter gegen die Einflüsse des Anodenraums ab, während das Bremsgitter nur eine Hilfsfunktion hat.

3.11.2 Photoemission

Eine weitere Möglichkeit, Elektronen in das Vakuum zu injizieren, bietet die **Photoemission**. Der Effekt besteht darin, dass, wenn man Lichtquanten auf eine Metallplatte strahlt, dadurch Elektronen aus dem Metallverbund auslöst werden. Dies gelingt allerdings nur, wenn die Energie der Photonen (Lichtquanten) größer als die Austrittsarbeit ist. Diese Elektronen werden als Photostrom außerhalb des Metalls registriert.

Eine Anwendung findet der Photoeffekt in der **Photozelle**. Hier steht einer metallverspiegelten Wand aus Kalium, Cäsium, Cadmium o.ä. eine ringförmige Anode gegenüber (s. Abb. 3.42). Licht, das auf die Metallschicht (Kathode) fällt, löst dort Elektronen aus, die von der Anode gesammelt und vom Galvanometer G als Photostrom gemessen werden.

Versuch 3.17

Wir bestrahlen bei konstanter Spannung eine Photodiode und messen den Strom. Wir beobachten, dass der Strom zur Lichtintensität proportional ist und oberhalb einer Sättigungsspannung unabhängig von der angelegten Spannung ist (s. Abb. 3.42, entnommen aus [9]).

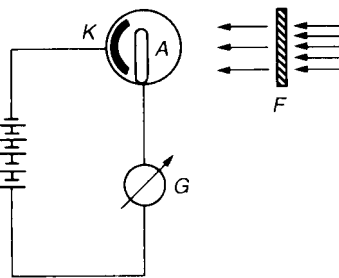


Abbildung 3.42: Photodiode

Photozellen können evakuiert oder gasgefüllt sein. Im zweiten Fall wird der Elektronenstrom durch Stoßionisation verstärkt.

3.11.3 Sekundärelektronenemission

Die bereits freigesetzten Elektronen können wiederum soviel kinetische Energie erlangen, dass sie weitere Elektronen durch Stoß freisetzen können (**Sekundärelektronen** genannt). Schnelle Elektronen können sogar mehrere Sekundärelektronen freisetzen. Dies nutzt man im Sekundärelektronen- Vervielfacher (kurz SEV oder **Multiplifier**) aus, um einzelne Elektronen, vor allem aber geringe Lichtintensitäten bis herab zu einzelnen Photonen nachzuweisen. Das Licht löst aus der Photokathode Elektronen aus, die dann durch

eine Spannung von einigen 100 V bis zur nächsten Elektrode (Dynode) beschleunigt werden, wo jedes Elektron mehrere Sekundärelektronen auslöst. Dieser Vorgang wiederholt sich so lange, bis nach mehreren Verstärkungsstufen (oft 10 oder mehr) ein gut messbarer Strom entstanden ist.

3.12 Leitung in Gasen

3.12.1 Die Gasentladung

Die Atome und Moleküle von Gasen sind unter Normalbedingungen nicht thermisch ionisiert, also elektrisch neutral. Da keine Ladungsträger vorhanden sind, tritt in ihnen im allgemeinen auch keine Stromleitung auf.

Versuch 3.18

An einen Plattenkondensator mit einem Plattenabstand von einigen cm wird eine Spannung von einigen 100 V gelegt. Bei normaler Luftatmosphäre zeigt ein in den Kreis eingeschaltetes Strommessinstrument keinen Strom an. Hält man hingegen eine Flamme zwischen die Kondensatorplatten, so zeigt das AMPÈREmeter einen Strom an.

Durch die erhöhte Temperatur können in dem Gas Ladungsträger ionisiert werden, die sich in dem elektrischen Feld bewegen. Darüber hinaus kann die Ionisation auch durch Licht oder radioaktive Strahlung erfolgen, dabei entstehen positive Ionen und Elektronen. Die Elektronen können sich nachträglich an neutrale Atome bzw. Moleküle anlagern, sodass auch negative Ionen auftreten.

Die unselbständige Gasentladung

Immer, wenn die Stromleitung erst eintritt, wenn durch äußere Einflüsse Ladungsträger im Gas erzeugt werden, spricht man von **unselbständiger Gasentladung**.

Bei einer konstanten Gasionisierung (pro Zeiteinheit wird eine konstante Anzahl von Ladungen erzeugt) zeigt die unselbständige Gasentladung eine charakteristische Abhängigkeit der Stromstärke von der Spannung (s. Abb. 3.43, entnommen aus [3]):

Für kleine Spannungen (Bereich I) nimmt die Stromstärke zunächst linear mit der Zeit zu, d.h., es gilt das OHMSche Gesetz $U/I = konst.$. Die Gasionen stoßen auf dem Weg zur gegenpoligen Elektrode auf andere Gasatome. Ferner können sie mit Ionen entgegengesetzter Ladung wieder rekombinieren, deshalb wird dieser erste Bereich auch **Rekombinationsbereich** genannt. Steigt die Spannung weiterhin, dann gelangen die Ionen so schnell zu den Elektroden, dass keine Rekombinationprozesse mehr möglich sind. Alle Gasionen fließen jetzt in einem konstanten Strom ab, der Sättigungsstrom genannt wird (Bereich II).

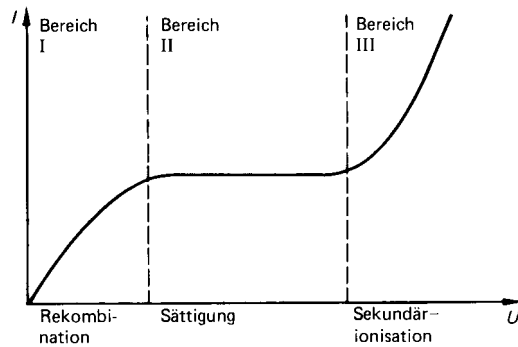


Abbildung 3.43: Unselbständige Gasentladung

Werden die Ionen durch die zunehmende Spannung so stark beschleunigt, dass ihre kinetische Energie ausreicht, um bei einem Stoß mit den neutralen Atomen diese ionisieren zu können (**Stoßionisation**), dann werden **Sekundärelektronen** erzeugt (Bereich III), und es läuft nun eine selbständige Gasentladung ab.

Die Ionisation von Materie wird zur Messung der Aktivität oder der Energie der Strahlung eines radioaktiven Präparates ausgenutzt. Bei diesen sogenannten **Ionisationskammern** (s. Abb. 3.44.a) wird die durch die Strahlung im Zählgas oder Halbleiterkristall erzeugte Ladung gemessen (**Primärionisation**). Die erzeugten Ionen und Elektronen wandern aufgrund eines angelegten elektrischen Feldes zu den Elektroden. Erhöht man die angelegte Spannung, so werden die primär erzeugten Elektronen so stark beschleunigt, dass sie ihrerseits ionisieren können (**Sekundärionisation**). Die ist in Abb. 3.44.b dargestellt. Beide Abbildungen stammen aus [9].

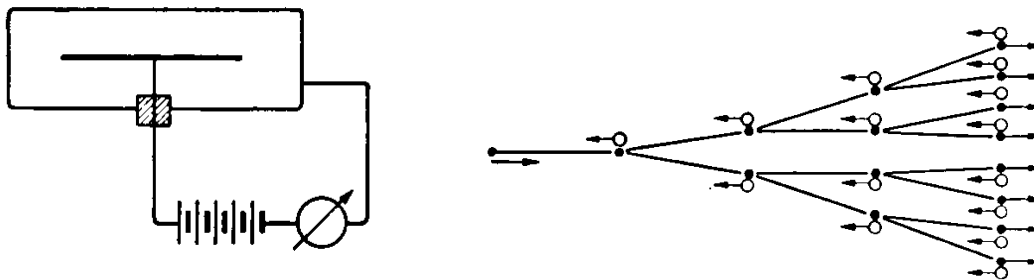


Abbildung 3.44: Ionisationskammer und Sekundärionisation

Selbständige Gasentladung bei normalem Gasdruck

Bei der **selbständigen Gasentladung** findet der Ladungsfluss ohne äußere Einwirkung statt. Dazu müssen aber immer schon ein paar Ladungsträger im Gas vorhanden sein, was aber immer der Fall ist, da die Höhenstrahlung und die von Spuren radioaktiver Stoffe ausgehende Strahlung immer einige Ionen und Elektronen in den Gasen bilden (etwa 10 positive Ionen und Elektronen pro Sekunde in 1 cm^3 Luft). Die Gasatome können aufgrund ihrer kinetischen Energie andere durch Stoßionisation ionisieren. Dieser Vorgang läuft lawinenartig ab. Die dazu erforderliche kinetische Energie stammt aus der Energie des elektrischen Feldes. Sowohl die Elektronen als auch die Ionen müssen auf der mittleren freien Weglänge l eine Mindestspannung $\Delta U = E l$ durchlaufen, damit die dabei gewonnene Energie $E_{\text{kin}} = 1/2 m v^2 = Q \Delta U$ der zur Stoßionisation benötigten Energie entspricht. Je größer die mittlere freie Weglänge, d.h., je geringer die Dichte bzw. der Druck des Gases ist, um so kleiner ist die Spannung, bei der die selbständige Entladung zündet. Je nach Spannung, Gasdruck sowie Gestalt der Elektroden gibt es verschiedene Erscheinungsformen der Gasentladung.

Spitzen- oder Koronaentladung: In der Nähe geladener Leiter herrscht eine besonders hohe Feldstärke an den Stellen, an denen die Oberfläche einen kleinen Krümmungsradius hat, wie z. B. an Spitzen, Kanten und dünnen Drähten. Die hohe Feldstärke kann dazu führen, dass in dem umgebenden Gas eine Stoßionisation angeregt wird und eine Entladung des Leiters erfolgt. Von der Spitze geht eine büschelförmige Lichterscheinung aus, die in der Luft rötlich-violett ist. Diese Erscheinung kann man oft an Hochspannungsleitungen beobachten.

Funkenentladung: Bei hoher Spannung kann es zu einem schlagartigen Übergang großer Ladungsmengen zwischen Leitern kommen. Der momentan sehr starke Funkenstrom führt zur Erhitzung des Gases in der Entladebahn, von der eine Druckwelle (Knall) ausgeht. Die Spannung, bei der der Funke auftritt, hängt von der Form und von dem Abstand der Elektroden und vom Gasdruck und der Gasart ab. Man kann daher aus der Schlagweite von Funken zwischen zwei Elektroden auf die Spannung schließen (Messfunkenstrecke).

Bogenentladung: Die Bogenentladung wollen wir uns am Beispiel der auch in der Vorlesung häufig benutzten Kohlebogenlampe ansehen. Zwischen zwei Kohlestäben wird eine Spannung von mindestens 60 V angelegt. Bringt man die Stäbe in Kontakt und zieht sie dann wieder auseinander, so entsteht zwischen ihnen ein Lichtbogen. Bei der Berührung entsteht an der Kontaktstelle ein großer Übergangswiderstand, der die Kohlen zum Glühen bringt. Das umgebende Gas wird erhitzt und kann Gasatome ionisieren. Beim Auseinanderziehen der Kohlen tritt daher eine Gasentladung auf. Die positiven Ionen schlagen auf der Kathode auf und erhitzen diese auf 3000 K. Durch Glühemission sendet die Kathode weitere Elektronen aus, die auf ihrem Weg

zur Anode weitere Ionen erzeugen. Durch den Aufprall der Elektronen auf die Anode wird diese auf 5000 K aufgeheizt. Hier bildet sich ein Krater, der die Quelle des intensiven Lichtes ist. Im Lichtbogen herrschen Temperaturen von 10000 K.

Selbständige Gasentladung in verdünnten Gasen: die Glimmentladung

Versuch 3.19

In eine Glasröhre sind an den Enden zwei Elektroden vakuumdicht eingeschmolzen und es besteht die Möglichkeit, die Röhre zu evakuieren. An den Elektroden wird eine Spannung von einigen 1000 V angelegt. Solange Atmosphärendruck in der Röhre vorherrscht, findet keine Entladung statt. Erst wenn man durch Abpumpen den Gasdruck erniedrigt, so setzt bei etwa 50mbar eine Entladung ein, die der Funkenentladung ähnlich ist. Zwischen den Elektroden beobachtet man einen unruhigen Lichtfaden. Bei weiterer Druckerniedrigung verbreitert sich der Lichtfaden. Bei dem Druck von etwa 1 mbar erfüllt eine Leuchterscheinung die ganze Röhre, die in verschiedene helle und dunkle Zonen unterteilt ist (s. Abb. 3.45, entnommen aus [1]).

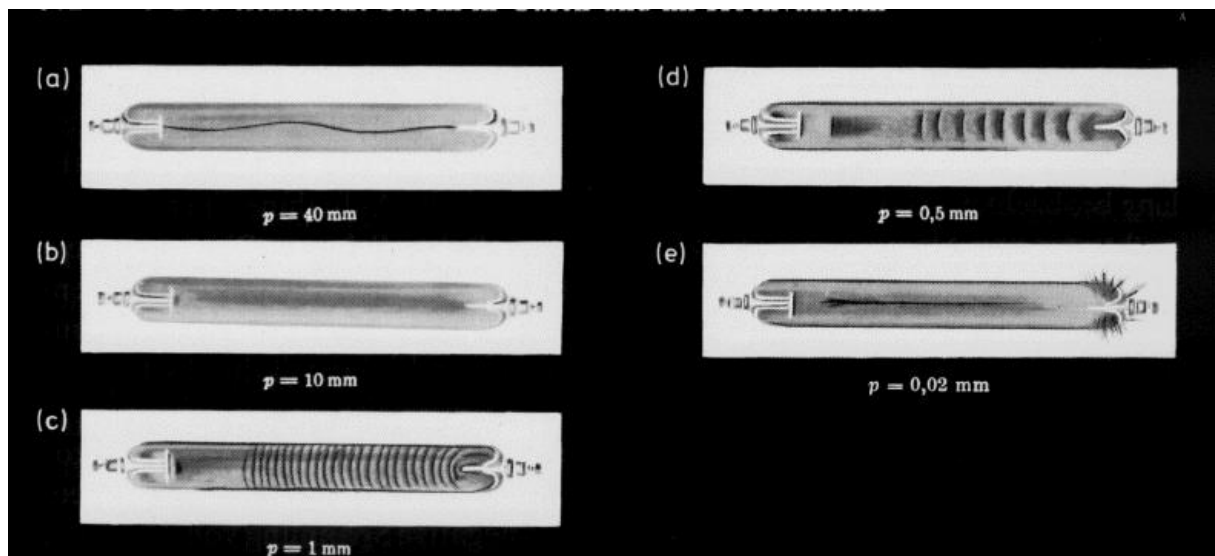


Abbildung 3.45: Die Glimmentladung

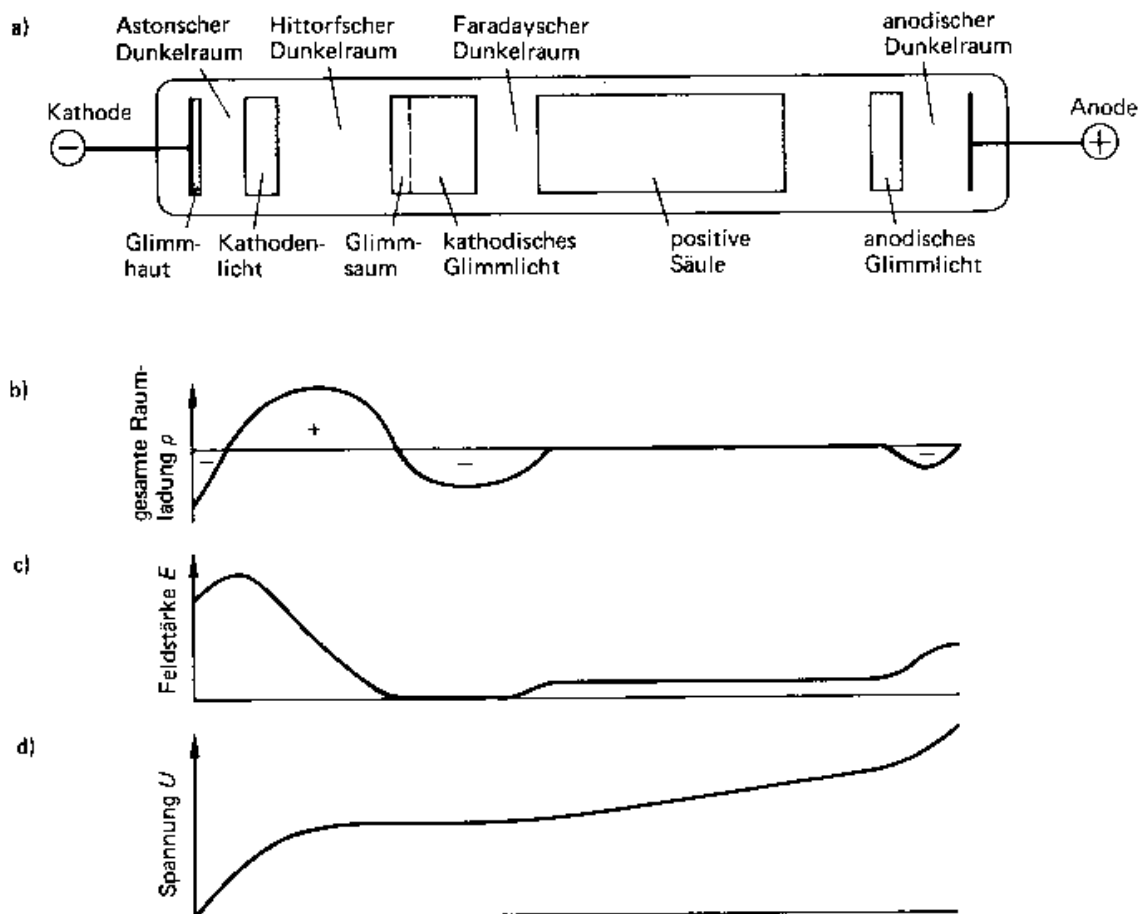


Abbildung 3.46: Charakteristische Zonen bei der Glimmentladung

Zwischen der Kathode und dem Kathodenlicht liegt ein kleiner dunkler Bereich, der ASTONsche Dunkelraum. In diesem Raum ist die Feldstärke E am größten. Durch den Aufprall positiver Ionen auf die Kathode werden Elektronen freigesetzt (negative Raumladung), die zunehmend Feldenergie aufnehmen. Im Bereich des HITTORFschen Dunkelraums werden durch die schnellen Elektronen viele Gasatome ionisiert, so dass eine starke positive Raumladung entsteht. Die Energie der Elektronen wird im kathodischen Glimmlicht (beginnend mit einem Glühsaum) durch die Lichtaussendung verbraucht. Deshalb nimmt hier die Feldstärke bis auf Null ab, und es entsteht eine große negative Ladungsdichte. Nach dem FARADAYSchen Dunkelraum leuchtet eine positive Säule. In diesem Gebiet

sind gleich viele Elektronen und positive Ionen vorhanden. Hier diffundieren fortwährend Elektronen und Ionen an die Wand und rekombinieren dort unter Lichtausstrahlung. Die Energie zur Erzeugung neuer Ladungsträger wird dem konstanten elektrischen Feld entnommen. Die positive Säule ist der längste leuchtende Teil einer Glimmentladung. Zwischen ihr und der Anode kann ein kleiner glimmender Bereich liegen (anodisches Glimmlicht). Unmittelbar vor der Anode ist ein Feldstärkeanstieg zu verzeichnen, der von der negativen Raumladung der schnell abfließenden Elektronen herrührt. Die ist in Abb. 3.46 (entnommen aus [3]) graphisch dargestellt.

Die positive Säule von Glimmentladungen wird zu Beleuchtungszwecken benutzt. Man verwendet ziemlich lange Röhren, denen man alle möglichen Formen (z.B. Buchstaben) geben kann, besonders zur Lichtreklame. Die Säule folgt nämlich allen Windungen des Rohres ohne Schwierigkeiten, wie folgender Versuch zeigt.

Versuch 3.20

Wir legen an das Umwegrohr nach HITTORF (s. Abb. 3.47 aus [1]) eine Hochspannung an und evakuieren das Rohr langsam. Wir beobachten, dass bei hohen Drücken die Entladung direkt zwischen den Elektroden erfolgt, bei niedrigen Drücken hingegen über den Umweg.

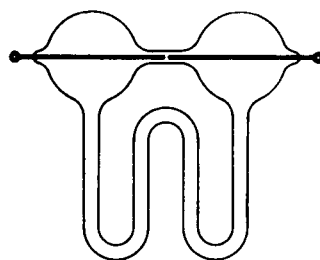


Abbildung 3.47: Umwegrohr nach Hittorf

Je nach Gasfüllung erhält man verschiedene Farben, so leuchtet beispielsweise die Säule mit Neon rot, mit Argon und einer Spur Quecksilberdampf erhält man blaues Licht und mit Helium gelbes. Die kathodischen Entladungsteile sind bei solchen Leuchtröhren unscheinbar und spielen für die Lichtausbeute keine Rolle. Man kann sogar Leuchtröhren in allen möglichen Farben bauen, indem man die Innenfläche der Glasröhre mit Leuchtstoffen überzieht, die in der gewünschten Farbe fluoreszieren.

3.12.2 Plasmaströme

Ein Plasma besteht aus positiven Ionen und negativen Elektronen großer Dichte. Wegen der annähernd vollständigen Ionisation der Materie (bis zu 99 %) wird der Plasmazustand

auch der **vierte Aggregatzustand** genannt. Ein Beispiel eines quasineutralen Plasmas, d.h. mit gleich vielen positiven und negativen Ladungsträgern, ist die positive Säule bei einer Glimmentladung.

Das physikalische Verhalten von Materie im Plasmazustand spielt vor allem in der Astro- und in der Kernphysik eine Rolle. Die Ladungsträgerkonzentrationen liegen beispielsweise in der Ionosphäre bei 10^{10} Ladungsträgern pro m^3 , in der Sternatmosphäre bei 10^{20} Ladungsträgern pro m^3 und im Sterninnern sogar bei 10^{30} Ladungsträgern pro m^3 . Diese hohen Konzentrationen werden durch extrem hohe Temperaturen (10 000 bis 30 000 K) verursacht. Atomkerne und Elektronen sind bei einer Temperatur von 10^8 K völlig von einander getrennt, so dass es zu einer Atomkernverschmelzung (Kernfusion) kommen kann.

Kapitel 4

Magnetostatik

4.1 Einleitung

4.1.1 Geschichte des Magnetismus

Das Phänomen des Magnetismus ist bei weitem länger bekannt als die Elektrizität. Bereits die Griechen kannten den natürlich vorkommenden Magnetstein oder Magnetit, der auf Eisen eine anziehende Wirkung hat.

Erste qualitative Untersuchungen über den Magnetismus gehen auf PIERRE DE MARICOURT (13. Jh.) zurück. Er hatte entdeckt, dass eine Nadel, die man in die Nähe eines kugelförmigen Magneten legt, sich entlang von Linien ausrichtet, die an sich gegenüberliegenden Punkten des Magneten zusammenlaufen. Diese Endpunkte nannte er Pole. Schon bald entdeckte man, dass jeder Magnet zwei Pole, einen Nord- und einen Südpol, hat, an denen die magnetische Kraft am größten ist, und dass sich gleichnamige Pole abstoßen und ungleichnamige anziehen. Im Mittelalter wurden bereits Magnetnadeln als Kompass in der Navigation eingesetzt.

Die erste umfassende schriftliche Abhandlung über den Magnetismus verfasste WILLIAM GILBERT im Jahre 1600 in seinem Werk „De Magnete“.

Im Jahre 1750 wurden erste quantitative Untersuchungen von JOHN MITCHELL mit einer Torsionswaage durchgeführt. Er fand heraus, dass die Kraft zwischen zwei Magneten umgekehrt proportional zu ihrem Abstand ist, ähnlich, wie wir es bei der elektrischen Kraftwirkung festgestellt haben (vgl. Kapitel 2, Das COULOMBSche Gesetz, S.15 ff.). Bis in das 19. Jh. hinein waren Elektrizität und Magnetismus zwei als voneinander unabhängig geltende Wissenschaften, bis HANS CHRISTIAN OERSTED 1820 in einer Vorlesung auf den Vorschlag eines Studenten hin Versuche mit elektrischem Strom und Magneten durchführte: Die Beobachtung war, dass ein Strom durchflossener Draht in der Nähe einer Kompassnadel bewirkt, dass die Nadel aus ihrer ursprünglichen Richtung ablenkt wird. Kurze Zeit darauf entdeckte ANDRÉ-MARIE AMPÈRE, dass elektrische Ströme nicht nur Kräfte auf Magnetnadeln ausüben, sondern dass elektrische Ströme auch Kräfte auf an-

dere Strom durchflossene Leiter ausüben.

Es zeigt sich, dass auch die magnetische Kraftwirkung, ähnlich wie die elektrische, durch ein Feld, das **Magnetfeld**, vermittelt wird. Schon bald wurde die Wissenschaft des Magnetismus auf den heute noch gültigen Stand gebracht: Schon im Jahre 1832 entdeckte MICHAEL FARADAY, dass nicht nur elektrische Ströme Magnetfelder erzeugen, sondern dass auch umgekehrt elektrische Felder über Magnetfelder „induziert“ werden können (Siehe Kapitel „Magnetische Induktion“). Ungefähr zeitgleich entdeckten er und JOSEPH HENRY unabhängig voneinander, dass auch sich zeitlich ändernde Magnetfelder elektrische Felder erzeugen (Siehe „Verschiebungsstrom“).

Dem Schotten JAMES CLERK MAXWELL gelang es 1860, die von AMPÈRE, FARADAY, HENRY etc. experimentell gefundenen Gesetzmäßigkeiten in eine knappe mathematische Formulierung von vier Gleichungen zu bringen. Diese **MAXWELL-Gleichungen** sind die Grundlage der gesamten **klassischen Elektrodynamik**. Das erstaunliche an den MAXWELL-Gleichungen ist, dass sie ohne zusätzliche Modifikationen die erste Revolution der modernen Physik, das Aufstellen der EINSTEINSchen **Relativitätstheorie** (1905-1916), überstehen konnten. Die MAXWELLSchen Gleichungen sind somit bereits relativistisch, ohne dass MAXWELL von der Relativitätstheorie wusste.

Die relativistische Elektrodynamik berechtigt uns später, die elektrische und die magnetische Wechselwirkung als ein und dasselbe aufzufassen. Wir sprechen dann von dem **elektromagnetischen Feld**.

Durch die Quantenphysik (Anfang 20. Jh) verloren die MAXWELL-Gleichungen ihre globale Gültigkeit. Die Wissenschaft, die sich damit beschäftigt ist die **Quantenelektrodynamik**.

Es gibt jedoch einen entscheidenden Unterschied zwischen elektrischen und magnetischen Kräften: Ein Magnet hat immer zwei unterschiedliche Pole, elektrische Ladungen hingegen können aber auch nur einen Pol enthalten. Mit anderen Worten: Es gibt keine **magnetischen Monopole**. Es ist bisher in einer Vielzahl von Experimenten niemandem gelungen, magnetische Monopole nachzuweisen. Trotz allem wird noch heute nach ihnen gesucht und über ihre mögliche Existenz diskutiert.

Trotz der Kenntnis der knappen, vollständigen Beschreibung der klassischen Elektrodynamik durch die MAXWELL-Gleichungen, wollen wir in dieser Vorlesung den traditionellen, historischen Weg gehen und die Gesetze des Magnetismus experimentell erschließen. Der Teilbereich des Magnetismus, mit dem wir uns zuerst beschäftigen werden, ist die **Magnetostatik**. Die Magnetostatik beschäftigt sich mit stationären (d.h. mit zeitlich konstanten) Strömen und Feldern.

4.1.2 Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen Magnetismus und Elektrizität

In Abschnitt 4.1.1 haben wir bereits folgende Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen Magnetismus und Elektrizität herausgefunden:

- So wie es positive und negative elektrische Ladungen gibt, hat ein Magnet zwei verschiedene Pole: den **Nord-** und den **Südpol**. Diese Benennung kommt daher, dass sich im Erdmagnetfeld (siehe Abb. 4.2, entnommen aus [20]) der magnetische Nordpol eines frei beweglichen Stabmagneten nach Norden ausrichtet. Ähnlich wie in der Elektrizität gilt: Gleichnamige Pole stoßen sich ab und ungleichnamige Pole ziehen sich an.
- Im Gegensatz zu elektrischen Ladungen lassen sich magnetische Pole nicht trennen. Magnetische Feldlinien sind immer geschlossene Kurven.
⇒ Es gibt kein Analogon zum COULOMBSchen Gesetz.
- Es lassen sich wie bei elektrischen Ladungen sehr ähnliche Felder darstellen (Dipolfelder, Multipolfelder, etc.).

Wir können zunächst die Vermutung aufstellen:

Magnete sind von einem Feld umgeben, das ähnlich dem elektrischen Feld ein Vektorfeld ist: das magnetische Feld \vec{B} (auch Magnetfeld , magnetische Kraftflussdichte oder magnetische Induktion genannt)	(4.1)
--	-------

Analog zum elektrischen Feld hat das magnetische Feld (kurz: B -Feld) folgende Eigenschaften:

- Die Stärke des magnetischen Feldes ist proportional zur Zahl der Feldlinien pro Querschnittsfläche.
- Für die Richtung der Magnetfeld-Vektoren gilt: Sie verlaufen tangential zu den Feldlinien.
- Vorzeichenkonvention: Magnetfeldlinien (kurz: B -Feldlinien) laufen vom Nordpol zum Südpol (z.B. eines Stabmagneten). Achtung: Der magnetische Nordpol der Erde ist in diesem Sinne ein magnetischer Südpol.

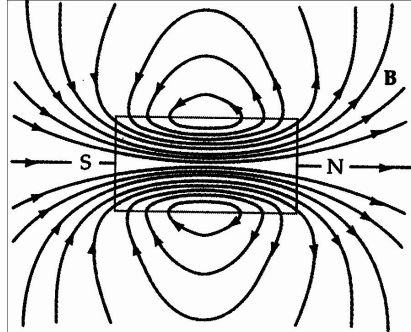


Abbildung 4.1: Das magnetische Feld eines Stabmagneten (entnommen aus [21])

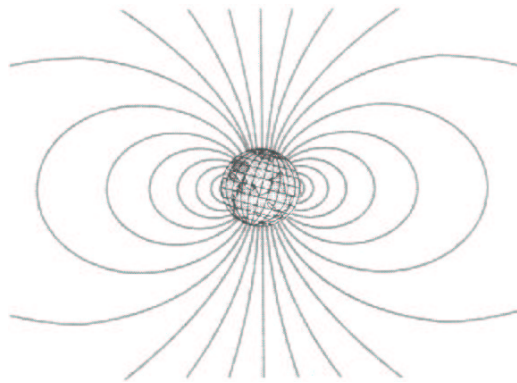


Abbildung 4.2: Das Magnetfeld der Erde

Zu der Tatsache, dass es keine magnetischen Monopole gibt, sind folgende Aussagen äquivalent:

- Es gibt keine magnetischen Monopole.
- Magnetische Feldlinien sind immer geschlossene Kurven.
- Magnetfelder haben weder Quellen noch Senken, d.h. durch die Oberfläche ∂V eines Volumens V führen genauso viele Magnetfeldlinien hinein wie hinaus.
- Auf mathematischer Ebene lassen sich diese Sachverhalte durch die **3. MAXWELL-Gleichung** darstellen, die als **Abwesenheit magnetischer Monopole** bezeichnet

wird.

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \, d\vec{A} = 0 \quad (\text{makroskopische oder integrale Form}) \quad (4.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{mikroskopische oder differenzielle Form}) \quad (4.3)$$

Beim elektrischen Feld konnten wir die Feldstärke über die auf eine Probeladung q wirkende Kraft definieren mit

$$\vec{F} = q\vec{E} \iff \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad (4.4)$$

Dieser Ansatz schlägt allerdings für das Magnetfeld \vec{B} fehl, da es keine magnetischen Ladungen gibt. Stattdessen zeigen die Versuche von OERSTED und AMPÈRE, dass ein Magnetfeld eine Kraft auf elektrische Ströme ausübt. Ein elektrischer Strom ist aber nichts anderes als ein Strom von Ladungen. Es zeigt sich, dass auf bewegte Ladungen in einem Magnetfeld eine Kraft, die LORENTZ-Kraft, wirkt.

4.2 LORENTZ-Kraft

Versuch 4.1

Es wird ein Permanentmagnet an eine BRAUNSCHE Elektronenstrahlröhre (siehe Abschnitt 1.21) gehalten. Es zeigt sich, dass der Elektronenstrahl senkrecht zu den vom Permanentmagneten erzeugten Feldlinien abgelenkt wird (Siehe Abb. 4.3).

Aus dem Versuch können wir schließen, dass die Ablenkung des Elektronenstrahls durch eine Kraft bewirkt wird. Diese Kraft ist offensichtlich sowohl senkrecht zur Bewegungsrichtung der Elektronen, als auch senkrecht zu den Magnetfeldlinien ($\vec{F} \perp \vec{B}, \vec{v}$). Diese Kraft heißt **LORENTZ-KRAFT** die sich durch folgenden Ausdruck darstellen lässt:

$$\boxed{\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}} \quad (4.5)$$

Sie ist nach dem Physiker HENDRIK A. LORENTZ (1853-1928) benannt. Über die LORENTZ-Kraft lässt sich die **magnetische Feldstärke** \vec{B} definieren:

$$\boxed{B = \frac{F}{qv}} \quad \text{mit} \quad \vec{e}_B = \vec{e}_F \times \vec{e}_v \quad (4.6)$$

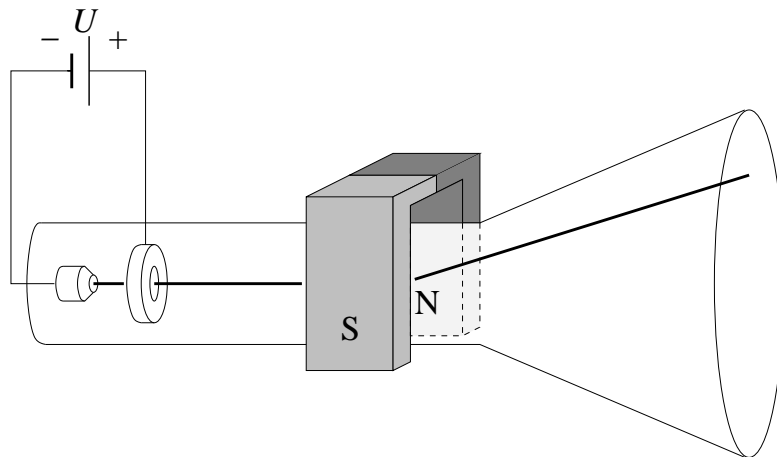


Abbildung 4.3: Der Elektronenstrahl einer Elektronenstrahlröhre wird durch das Magnetfeld eines Permanentmagneten abgelenkt

Die **Dimension des magnetischen Feldes** ist

$$[B] = \frac{\text{N}}{\text{C m s}^{-1}} = \frac{\text{N}}{\text{A m}} = \frac{\text{N m}}{\text{A m}^2} = \frac{\text{A V s}}{\text{A m}^2} = \frac{\text{V s}}{\text{m}^2} = \text{T} = \text{Tesla} \quad (4.7)$$

Die SI-Einheit für die magnetische Feldstärke ist das Tesla, benannt nach dem amerikanischen Physiker NICOLA TESLA (1856-1943). Da ein Tesla in der physikalischen Praxis schon sehr viel ist (das Erdmagnetfeld hat magnetische Feldstärken von etwa 10^{-4}T) ist noch heute die Einheit **Gauß** üblich, die sich aus dem cgs-System herleitet. Sie ist nach dem deutschen Physiker und Mathematiker CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855) benannt. Es gilt

$$10^{-4} \text{ T} = 1 \text{ G} = 1 \text{ Gauß} \quad (4.8)$$

Wie beim elektrischen Feld nennt man Magnetfelder, deren Feldstärke \vec{B} (innerhalb des betrachteten Systems) räumlich konstant ist (d.h. überall sind Betrag und Richtung von \vec{B} gleich), **homogene Magnetfelder** (vgl. 1.37). Auch für Magnetfelder gilt wie für das elektrische Feld das Superpositionsprinzip, nach dem aus n sich überlagernden Magnetfeldern \vec{B}_i mit $i \in \mathbb{N}, i \leq n$ ein Gesamtmagnetfeld

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i \quad (4.9)$$

resultiert.

Versuch 4.2

Der Versuchsaufbau besteht aus einem Fadenstrahlrohr, einem nahezu evakuierten Glaskolben, in dem ein Elektronenstrahl mit einem Elektronenbeschleuniger erzeugt wird (siehe Abb. 4.2). Ferner muss in dem Kolben ein geringer Druck eines leuchtfähigen Gases vorliegen, um den Elektronenstrahl sichtbar zu machen. Ein Elektronenbeschleuniger besteht im wesentlichen aus einer Glühkathode, die Elektronen emittiert, und einer Beschleunigungsanode. Die ausgetretenen Elektronen werden durch eine Spannung U , die zwischen Kathode und Anode angelegt wird, beschleunigt. Damit wird den Elektronen eine kinetische Energie von $E_{kin} = eU$ übergeben. Mit Hilfe zweier Spulen wird ein nahezu homogenes Magnetfeld erzeugt (siehe Abschnitt 4.4.3). Wir beobachten, dass sich der Elektronenstrahl auf eine Kreisbahn senkrecht zum angelegten Magnetfeld krümmt. Je stärker das Magnetfeld, desto kleiner der Radius der Kreisbahn.

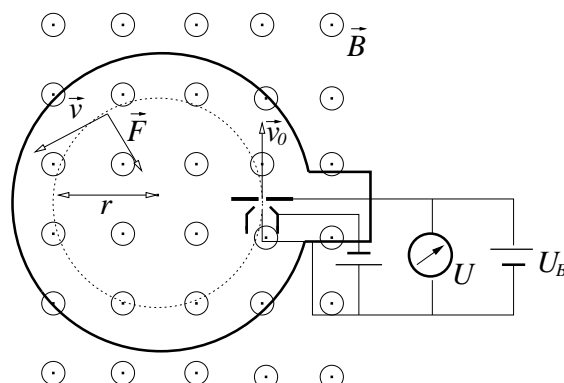
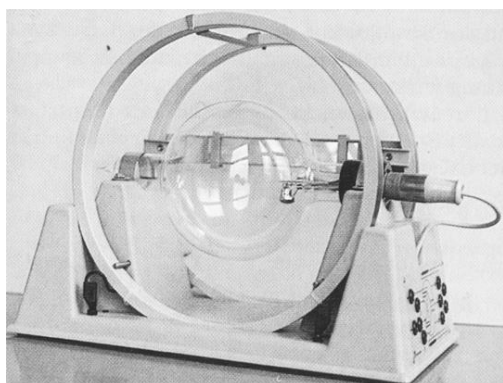


Abbildung 4.4: Fadenstrahlrohr (Foto entnommen aus [22])

Erklärung des Versuchs: Die LORENTZ-Kraft \vec{F}_L wirkt immer senkrecht zur Bewegungsrichtung. Damit leistet sie keine Arbeit. Sie dient hier als Zentripetalkraft, die die Elektronen auf eine Kreisbahn zwingt. Aus dem dynamischen Kräftegleichgewicht ergibt sich durch gleichsetzen der LORENTZ-Kraft \vec{F}_L mit der Zentrifugalkraft \vec{F}_Z :

$$|\vec{F}_L| = |\vec{F}_Z| \quad (4.10)$$

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \quad (4.11)$$

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB} \quad (4.12)$$

Die Bahngeschwindigkeit v lässt sich mit Hilfe des Radius r in die Kreisfrequenz ω umrechnen:

$$\omega = \frac{v}{r} \stackrel{(4.12)}{=} \frac{v}{\frac{mv}{qB}} \quad (4.13)$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{qB}{m} \quad (4.14)$$

Diese Kreisfrequenz ω wird **Zyklotronfrequenz** genannt. Wie wir sehen, ist sie unabhängig von der Einschussgeschwindigkeit. Aus der Beschleunigungsspannung U lassen sich mit Hilfe der Energiebeziehung $E_{kin} = eU$ (siehe Abschnitt 1.4.1) folgende Abhängigkeiten aufstellen:

$$eU = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m}eU} \quad (4.15)$$

$$\Rightarrow r \sim \frac{1}{B} \quad (4.16)$$

Wichtig:

Der Betrag des Impulses ändert sich nicht!

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} \parallel \vec{F} \text{ und } d\vec{v} \perp \vec{B}, \vec{v} \quad (4.17)$$

$$\text{wegen } d\vec{v} \perp \vec{v} \text{ folgt} \quad (4.18)$$

$$|\vec{v}| = \text{konst} \quad (4.19)$$

Da die LORENTZ-Kraft immer senkrecht auf der Bewegungsrichtung der Ladung steht, leistet sie keine Arbeit.

Misst man den Radius der Elektronenstrahl-Kreisbahn, so kann man z.B. den Impuls der Elektronen über (4.12)

$$r = \frac{p}{qB} \Rightarrow p = qrB \quad (4.20)$$

bestimmen.

Was passiert aber, wenn wir ein geladenes Teilchen mit der Ladung q so in ein homogenes magnetisches Feld \vec{B} einschließen, dass die Teilchengeschwindigkeit \vec{v} und das Magnetfeld \vec{B} keinen rechten Winkel zueinander bilden? Um diese Frage beantworten zu können, betrachten wir das Problem vektoriell: Seien

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Dann wirkt auf das geladene Teilchen die LORENTZ-Kraft

$$\vec{F}_L(t) = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (4.22)$$

$$= q \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

$$= qB \begin{pmatrix} v_y(t) \\ -v_x(t) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Für $\vec{v}_z(t) = 0$ liegt der oben behandelte Fall vor, wo das Teilchen senkrecht zum homogenen Magnetfeld \vec{B} eingeschossen wird: Auf das Teilchen wirkt in z-Richtung keine Kraft, so dass es nur in x-y-Richtung beschleunigt wird. Wir hatten gesehen, dass es eine Kreisbahn ausführt, die senkrecht zum Magnetfeld steht, also in x-y-Richtung verläuft. Wird das Teilchen nicht senkrecht in das Magnetfeld eingeschossen, gilt $\vec{v}_z(t) \neq 0$. Da der Ausdruck für die LORENTZ-Kraft

$$\vec{F}_L = qB \begin{pmatrix} v_y(t) \\ -v_x(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

nicht von $v_z(t)$ abhängt, wirkt auch für $v_z(t) \neq 0$ die gleiche Kraft auf das Teilchen, wie in dem obigen Fall der Kreisbahn. Da die z-Komponente der LORENTZ-Kraft \vec{F}_L gleich null ist, behält das Teilchen seine Anfangsgeschwindigkeit $v_z(0) = v_z(t) = konst.$ in z-Richtung bei. In x-y-Richtung erhält es die gleiche Beschleunigung wie im Fall des senkrechten Einschusses. Projizieren wir die Bahn (Trajektorie) des Teilchens in die x-y-Ebene, ergibt sich wieder eine Kreisbahn. Dieser Kreisbahn überlagert ist die konstante Bewegung in z-Richtung mit $v_z(t) = konst.$ Das Teilchen führt also eine Spiralbewegung durch (siehe Abb. 4.5). Die Trajektorie $\vec{s}(t)$ des Teilchens lässt sich für die Anfangsbedingungen $v_y(0) = 0$ und $x(0) = \frac{mv_x(0)}{qB}$ in Abhängigkeit von der Zeit t darstellen durch:

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \cos \omega t \\ x(0) \sin \omega t \\ v_z(0) \cdot t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{mv_x(0)}{qB} \cos \left(\frac{qB}{m} t \right) \\ \frac{mv_x(0)}{qB} \sin \left(\frac{qB}{m} t \right) \\ v_z(0) \cdot t \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Hier ist $\omega = \frac{qB}{m}$ die Zyklotronfrequenz aus (4.14).

4.2.1 Magnetische Flasche

Die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem beliebigen inhomogenen Magnetfeld kann sehr kompliziert sein. In den meisten Fällen lassen sich keine Trajektorien in geschlossener Form berechnen, so, wie wir es für den schrägen Einschuss eines geladenen

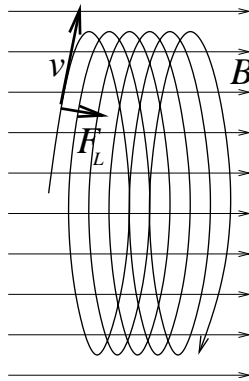


Abbildung 4.5: Spiralbewegung eines geladenen Teilchens nach schrägem Einschuss in ein homogenes Magnetfeld

Teilchens in ein homogenes Magnetfeld getan haben (siehe Ausdruck 4.26). Stattdessen können wir qualitative Untersuchungen durchführen: Ein Beispiel für ein inhomogenes Magnetfeld ist die **magnetische Flasche**, ein zylindersymmetrisches Magnetfeld, das an den Enden eine im Vergleich zur Mitte starke Magnetfeldstärke \vec{B} hat. Eine solche magnetische Flasche ist in Abb. 4.6 abgebildet. An den Enden der magnetischen Flasche, d.h.

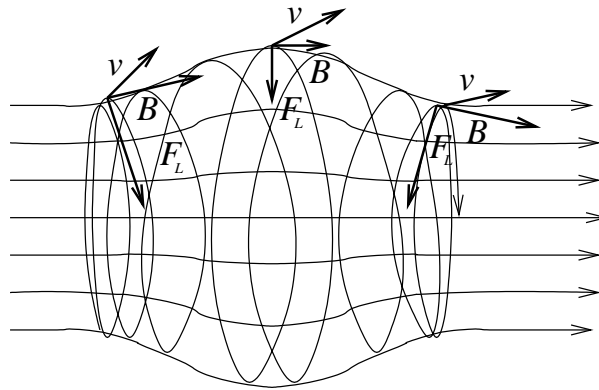


Abbildung 4.6: Magnetische Flasche

in den Bereichen, wo das Magnetfeld stärker wird, hat die LORENTZ-Kraft, die auf das Teilchen wirkt, einen Beitrag in Richtung der Symmetrieachse der magnetischen Flasche, der in Richtung des schwächeren Magnetfeldes zeigt. Auf das Teilchen wirkt also eine rücktreibende Kraft, die verhindert, dass das Teilchen die magnetische Flasche verlässt. Es ist also in der magnetischen Flasche eingefangen.

Magnetische Flaschen werden z.B. bei Versuchen zur Kernfusion eingesetzt, um Plasmen (siehe Abschnitt 3.12.2, Seite 143) einzuschließen.

Auch das Erdmagnetfeld ist ein inhomogenes Magnetfeld, das im Außenbereich der Erde

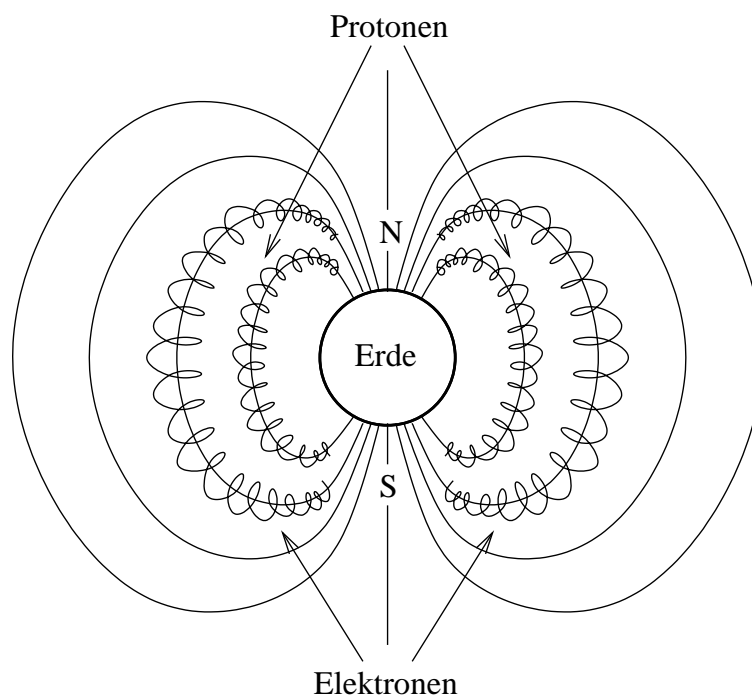


Abbildung 4.7: Van-Allen-Gürtel

sogar eine magnetische Flasche bildet. Die Magnetfeldlinien treten im Bereich der magnetischen Pole der Erde in sehr hoher Dichte ins Erdinnere ein. Zwischen den Polen laufen sie im Außenbereich der Erde weit auseinander, wo dementsprechend die Magnetfeldstärke schwächer ist. Eine solche Magnetfeldkonfiguration bildet eine magnetische Flasche. Treten geladene Teilchen, die mit dem Sonnenwind mit hoher Geschwindigkeit auf die Erde zufliegen, in das Erdmagnetfeld ein, werden sie in dieser magnetischen Flasche eingefangen. Die Bereiche des Erdmagnetfeldes, die solche geladenen Teilchen einfangen können, heißen **VAN-ALLEN-GÜRTEL**. Die im Sonnenwind enthaltenen Elektronen werden schon in großer Entfernung von der Erde auf Spiralbahnen gezwungen, auf denen sie zwischen den magnetischen Polen hin und her oszillieren. Sie bilden den äußeren Gürtel. Protonen gelangen i.d.R. wesentlich näher an die Erde heran, werden schließlich aber auch eingefangen und bewegen sich ebenfalls auf Spiralbahnen von Pol zu Pol. Die Spiralbahnen der Protonen bilden den inneren Gürtel. In der Nähe der magnetischen Pole, können die Spiralbahnen bis in die Erdatmosphäre hinein reichen, wo sie durch Stoßionisation Gasmoleküle zum leuchten bringen können. Diese Leuchterscheinung kann als **Polarlicht** beobachtet werden.

4.3 Kräfte auf Strom durchflossene Leiter

Nach Gleichung (4.5) gilt für die LORENTZ-Kraft $\vec{F}_L = q \vec{v} \times \vec{B}$. Der elektrische Strom in Metallen ist nichts anderes, als viele sich entlang des Leiters bewegend Elektronen (Strom im Metall =: Elektronendrift). Ist n die Elektronendichte (Anzahl der Elektronen pro Volumen des Leiters), A die Querschnittsfläche des Leiters und \vec{v}_D die Driftgeschwindigkeit der Elektronen, so lässt sich der elektrische Strom \vec{I} im Leiter nach der Beziehung (3.9) darstellen durch

$$\vec{I} = -n e A \vec{v}_D \quad (4.27)$$

Dabei ist die Kraft \vec{F}_e auf ein Elektron nach (4.5)

$$\vec{F}_e = -e \vec{v}_D \times \vec{B} = \frac{1}{nA} \vec{I} \times \vec{B} \quad (4.28)$$

Betrachten wir ein Leiterstück der Länge l , so enthält dieses $N = n A l$ Elektronen. Daher wirkt auf das Leiterstück der Länge l das N -fache der Kraft \vec{F} . Damit ist die Kraft \vec{F} auf den Leiter der Länge l

$$\boxed{\vec{F} = l \vec{I} \times \vec{B}} \quad (4.29)$$

oder die Kraft pro Längeneinheit

$$\frac{\vec{F}}{l} = \vec{I} \times \vec{B} \quad (4.30)$$

Versuch 4.3

Wir lassen durch zwei parallel angeordnete Leiter die Ströme I_1 bzw. I_2 fließen. Wir beobachten, dass die Leiter aneinander gezogen werden, wenn I_1 und I_2 gleiches Vorzeichen haben, d.h., wenn beide Ströme in die gleiche Richtung fließen. Lassen wir die Ströme entgegengesetzt fließen (I_1 und I_2 haben unterschiedliche Vorzeichen), so werden die Leiterdrähte auseinander gedrückt.

Experimentell findet man die Gesetzmäßigkeit:

$$\frac{F}{l} \sim \pm \frac{I_1 I_2}{r} \quad (4.31)$$

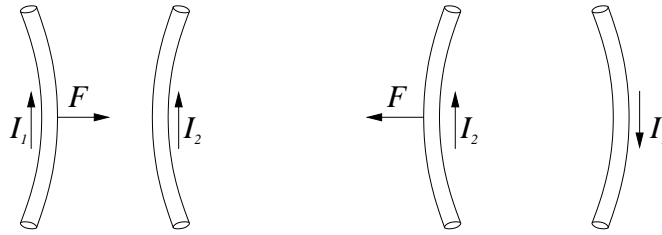


Abbildung 4.8: Zwei Strom durchflossene parallele Leiter üben Kräfte aufeinander aus. Sie werden je nach Stromrichtung aneinander gezogen bzw. auseinander gedrückt.

Hierbei ist $\frac{F}{l}$ die Kraft pro Längeneinheit, I_1 der Strom durch Leiter 1, I_2 der Strom durch Leiter 2 und r der Abstand der beiden Leiter voneinander.

Aus historischen Gründen wird in dem experimentell gefundenen Gesetz (4.31) als Proportionalitätsfaktor $\frac{\mu_0}{2\pi}$ festgelegt (Dies ist eine Definition), mit

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad (4.32)$$

Die Naturkonstante

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad (4.33)$$

heißt **magnetische Feldkonstante** oder **Permeabilität des Vakuums**

Der Ausdruck für die Kraft des einen auf den anderen Leiter ist dann:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} \quad (4.34)$$

Damit ergibt sich die eindeutige Definition der SI-Einheit Ampère :

Zwei unendlich lange, parallele Drähte, die einen Abstand von 1m zueinander haben, üben aufeinander die Kraft pro Einheitslänge (1 m) von $2 \cdot 10^{-7} \text{ Nm}^{-1}$ aus, wenn sie von einem Strom von **1 A = 1 Ampère** durchflossen werden (vgl. 1.18, Seite 18). (4.35)

In unserem Versuch hieße das konkret:

$$I_1 = I_2 = 1 \text{ A}, r = 1 \text{ m} \quad (4.36)$$

$$\frac{F}{l} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N}}{2\pi \text{ m}} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (4.37)$$

4.3.1 Feldkonstanten und Maßsysteme

Später werden wir sehen, dass

$$\varepsilon_0 \cdot \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad (4.38)$$

gilt. Damit hängen die drei Naturkonstanten ε_0 , μ_0 und c voneinander ab. In dem seit dem 5. Juli 1970 gesetzlich vorgesehene SI-Maßsystem ist die Definition (4.33) das Fundament, auf dem alle Größen und deren Einheiten der Elektrodynamik aufbauen. Mit dieser willkürlichen Festlegung der Grundgröße I (Strom) und deren SI-Basiseinheit Ampère sind alle anderen elektrodynamischen Einheiten (z.B. Volt, Ohm, Farad...) eindeutig festgelegt.

Der Willkür sind hier aber keine Grenzen gesetzt. So sind auch andere Maßsysteme wie z.B. das GAUSSsche Maßsystem (cgs-System) möglich. Das GAUSSsche Maßsystem fußt auf der Definition

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 1. \quad (4.39)$$

Die Grundgröße ist hier die Ladung Q . Dieses Maßsystem findet z.T. heute noch in der theoretischen Physik Verwendung. Wir wollen aber in der Experimentalphysik das SI-System gebrauchen. In der folgenden Tabelle werden die beiden Maßsysteme gegenübergestellt:

	SI-Maßsystem	GAUSSsches Maßsystem
ε_0	$= \frac{1}{\mu_0 c^2} = \frac{10^7}{4\pi c^2}$	$\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} = 1$
μ_0	$= 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V s}}{\text{A m}}$	$= \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} = \frac{4\pi}{c^2}$
Grundgröße	Strom I	Ladung Q

4.4 Magnetisches Feld eines Strom durchflossenen Leiters

Bisher haben wir die Kräfte zwischen den beiden Leitern aus Versuch 4.3 einfach so hingegenommen und über sie die Basiseinheit Ampère definiert, ohne dass wir uns über die

Ursache der Kräfte Gedanken gemacht haben. Betrachtet man den Ausdruck für die Kraft (4.34) des einen auf den anderen Leiter aus Versuch 4.3, so liegt es nahe, die Kraft durch die Existenz eines Magnetfeldes zu erklären. Vergleicht man die aus der LORENTZ-Kraft hergeleitete Beziehung (4.30) mit (4.34),

$$\frac{\vec{F}}{l} = \vec{I}_1 \times \vec{B} \xrightarrow{\vec{I}_1 \perp \vec{B}} \frac{F}{l} = I_1 \cdot B \quad (4.40)$$

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} \quad (4.41)$$

$$\xrightarrow{(4.40),(4.41)} \boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_2}{r}} \quad (4.42)$$

kann man also schließen, dass der Strom in Leiter 2 ein Magnetfeld B der Stärke $B = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}$ erzeugt, welches die Kraft auf den Leiter 1 ausübt.

Der Betrag des Magnetfeldes B eines unendlich langen, geraden Leiters, durch den ein Strom I fließt, ist

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (4.43)$$

Hierbei ist r der senkrechte Abstand zum Leiter.

Diese Gesetz ist tatsächlich eine konsistente Erklärung der in Versuch 4.3 auftretenden Kräfte. Die Richtung von \vec{B} können wir argumentativ erschließen: Die Magnetfeldlinien ($\Rightarrow \vec{B}$ -Feld-Vektoren) können auf keinen Fall parallel zum Leiter verlaufen, da sie sonst auf einen weiteren parallelen Leiter wegen

$$\frac{\vec{F}}{l} = \vec{I} \times \vec{B} \quad \text{mit} \quad \vec{B} \parallel \vec{I} \quad (4.44)$$

$$\Rightarrow \vec{I} \times \vec{B} = \frac{\vec{F}}{l} = 0 \quad (4.45)$$

keine Kraft ausüben würden. Da dies aber der Fall ist (wir haben sogar das Ampère über diese Kraft definiert), können die \vec{B} -Feldlinien nicht parallel zum Leiter verlaufen. In unserem Versuchsaufbau (Versuch 4.3) gibt es bis auf die Richtung des Leiters selbst keine weitere bevorzugte Richtung. Da die vom Leiter erzeugten Magnetfeldlinien diese Richtung nicht annehmen dürfen, müssen sie aus Symmetriegründen senkrecht zu \vec{I} verlaufen. Auch diese Einschränkung reicht noch nicht aus, um die Richtung der \vec{B} -Feld-Vektoren eindeutig ausmachen zu können. So könnten die Feldlinien z.B. ringförmig um den Leiter oder aber auch radial nach außen verlaufen. Letztere Möglichkeit ist allerdings wegen der

Eigenschaft des \vec{B} -Feldes, dass seine Feldlinien immer geschlossen sind (vgl. Abschnitt 4.1.2 auf Seite 147) ausgeschlossen. Es zeigt sich, dass nur ringförmig um den Leiter verlaufende Magnetfeldlinien möglich sind. Es stehen also die Magnetfeld-Vektoren immer sowohl senkrecht zur Richtung des Stromes \vec{I} , als auch senkrecht zum Lot \vec{r} auf den Leiter (\vec{r} zeigt vom Leiter weg). Nun bleibt nur noch das Vorzeichen offen, das man experimentell bestimmen kann. Damit können wir das Magnetfeld \vec{B} eines unendlich langen, geraden Leiters vektoriell als eine Funktion von \vec{r} aufstellen:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \vec{I} \times \vec{r}}{2\pi r^2} \quad (4.46)$$

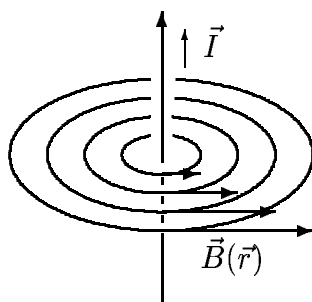


Abbildung 4.9: Das Magnetfeld eines unendlich langen, geraden Leiters

4.4.1 Experimentelle Überprüfung

Versuch 4.4

Ein elektrolytischer Leiter befindet sich in einem zylinderförmigen Gefäß, dessen Länge groß ist im Vergleich zum Radius R . Zwischen den Enden des Leiters wird eine Wechselspannung angelegt, die einen Wechselstrom hervorruft. So können wir die Stärke des Magnetfeldes senkrecht zu \vec{I} sowohl innerhalb des Leiters als auch außerhalb des Leiters messen. Durch den (sinusförmigen) Wechselstrom im Leiter wird ein sich sinusförmig veränderndes Magnetfeld erzeugt. Wie wir in Kapitel 5 „magnetische Induktion“ sehen werden, kann ein sich zeitlich veränderliches Magnetfeld eine Spannung erzeugen (man sagt: „induzieren“). Bei einem sich sinusförmig ändernden Magnetfeld wird an den Enden einer Probenspule (Spule: siehe Abschnitt 4.4.3 auf Seite 163) eine Wechselspannung U induziert. Die Amplituden dieser Wechselspannung U sind proportional zu den Amplituden des Magnetfeldes. Wir können also die Abhängigkeit der Magnetfeldstärke vom Abstand r über die Induktionsspannung U

qualitativ bestimmen. Die gemessene Abhängigkeit von B und r ist in Abb. 4.10 in einem Diagramm aufgetragen. Wir beobachten, dass in der Mitte des Leiters das Magnetfeld gleich null ist und dann proportional zum Abstand r von der Mitte ansteigt, bis der Rand des elektrolytischen Leiters erreicht ist. Außerhalb des Leiters nimmt die Magnetfeldstärke proportional zu $1/r$ ab.

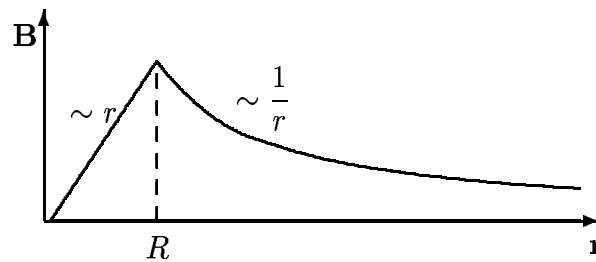


Abbildung 4.10: Magnetfeldstärke in Abhängigkeit von Abstand r zum Leiter

Der Versuch bestätigt also das Gesetz (4.46)

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, r \geq R. \quad (4.47)$$

Die Magnetfeldstärke B hat also auf dem Rand des Leiters ($r = R$) den Wert

$$B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (4.48)$$

Für $r < R$ gilt, wie wir beobachtet haben,

$$B \sim r \Leftrightarrow B(r) = kr \quad \text{für} \quad r < R. \quad (4.49)$$

Die Randbedingung

$$B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (4.50)$$

muss aus Stetigkeitsgründen auch (4.49) erfüllen. Dies ist für $k = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}$ erfüllt. Die empirisch bestimmte Abhängigkeit der Magnetfeldstärke B vom Abstand r lautet also:

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}, & \text{für } r < R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & \text{für } r \geq R \end{cases} \quad (4.51)$$

4.4.2 Allgemeiner Zusammenhang zwischen \vec{B} und \vec{I}

In Kapitel 4 hatten wir gesehen, dass das elektrostatische Feld \vec{E} ein konservatives Kraftfeld ist, d.h. das $\oint \vec{E} d\vec{r} = 0$ ist. Mit anderen Worten, das Wegintegral von \vec{E} entlang einer geschlossenen Kurve ist gleich Null. Nun überprüfen wir, ob das magnetische Feld ein ähnliches Verhalten zeigt: Wählen wir als geschlossenen Weg einen Kreis, der den Radius r habe und axialsymmetrisch um den Leiter verlaufe.

$$\oint_{\text{Kreis}} \vec{B}(\vec{r}) d\vec{r} \stackrel{\vec{B}(\vec{r}) \parallel d\vec{r}}{=} \oint_{\text{Kreis}} B dr \quad (4.52)$$

Parametrisieren wir den Kreis durch den Winkel φ , folgt $dr = r \cdot d\varphi$

$$\Rightarrow \oint_{\text{Kreis}} \vec{B}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_0^{2\pi} B r d\varphi \quad (4.53)$$

$$= 2\pi r B = 2\pi r \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \mu_0 I \quad (4.54)$$

Wegen $\oint_{\text{Kreis}} \vec{B}(\vec{r}) d\vec{r} \neq 0$ ist das magnetische Feld nicht konservativ. Wie man sieht, ist der Wert $\mu_0 I$ des Ringintegrals $\oint_{\text{Kreis}} \vec{B}(\vec{r}) d\vec{r}$ unabhängig vom Radius des Kreises, den wir als Integrationsweg wählen. Sogar jedes beliebige Wegintegral der Form $\oint_{\gamma} \vec{B}(\vec{r}) d\vec{r}$ hat den Wert $\mu_0 I$, wenn γ ein geschlossener Weg ist, der den Leiter einmal einschließt (gilt also auch für nicht kreisförmige geschlossene Wege). Hierbei kann der Leiter mit dem Strom I , der von dem Weg γ eingeschlossen wird, eine beliebige Form annehmen. Es muss sich also nicht mehr um den unendlich langen, geraden Leiter handeln. Dieses Gesetz ist das AMPÈRESche Gesetz, das allgemein für beliebige Ströme gilt:

**AMPÈRESches Gesetz oder
Durchflutungsgesetz:**

$$\oint \vec{B}(\vec{r}) d\vec{r} = \mu_0 I$$

(4.55)

Das AMPÈRESche Gesetz setzt voraus, dass ein stetiger Stromfluss vorliegt, d.h. der Strom darf nicht in einem Punkt verschwinden oder aus dem nichts entstehen. Leider hilft einem das AMPÈRESche Gesetz nur in sehr einfachen Fällen bei der Berechnung des Magnetfeldes. Dazu muss das Problem entweder symmetrisch angeordnet sein, wie es beim unendlich langen, geraden Leiter der Fall ist, oder wir müssen irgendwelche vereinfachenden Annahmen über die Verteilung des Magnetfeldes machen können, wie wir es im Abschnitt 4.4.3 bei der Berechnung des Magnetfeldes in einer Zylinderspule dürfen. Mit Hilfe des AMPÈRESchen Gesetzes lässt sich auch die Proportionalität $B \sim r$ im Innern

eines Leiters erklären:

Wird der unendlich lange, gerade Leiter mit Radius R von dem Strom I_0 durchflossen, können wir eine gleichmäßig über den Leiterquerschnitt $A_0 = \pi R^2$ verteilte Stromdichte

$$j = \frac{I_0}{A_0} = \frac{I_0}{\pi R^2} \quad (4.56)$$

erwarten. Das Magnetfeld im Innern des Leiters können wir wieder über das AMPÈRESche Gesetz berechnen. Dazu wählen wir als Integrationsweg einen geschlossenen Kreisweg mit Radius $r < R$, der senkrecht zum Leiter steht und dessen Mittelpunkt auf der Leiterachse liegt. Aus Symmetriegründen wird jedes Leiterstück gleicher Länge den gleichen Beitrag zum Ringintegral liefern. Der Kreis mit dem Radius $r < R$ umschließt jetzt nur noch die Fläche $A(r) = \pi r^2$. Durch diese fließt also nur noch der Strom

$$I(r) = j A(r) = j \pi r^2 \stackrel{(4.56)}{=} I_0 \frac{r^2}{R^2} \quad (4.57)$$

$$\Rightarrow \oint_{\text{Kreis}} \vec{B} \, d\vec{r} = 2 \pi r B \stackrel{(4.55)}{=} \mu_0 I(r) \quad (4.58)$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{\mu_0 I(r)}{2 \pi r} \stackrel{(4.57)}{=} \frac{\mu_0 I_0 r}{2 \pi R^2} \quad (4.59)$$

Hiermit haben wir die in (4.51) empirisch aufgestellte Formel mit Hilfe des AMPÈRESchen Gesetzes hergeleitet.

4.4.3 Magnetfeld einer Spule (schematisch)

Die erste Anwendung des AMPÈRESchen Gesetzes ist die Berechnung des Magnetfeldes im Innern einer Zylinderspule (kurz: Spule). Eine Spule ist ein fest zu einer Helix aufgewickelter Leiterdraht, wobei die Windungen (Anzahl der Windungen ist N) sehr eng beieinander liegen (Abb. 4.11).

Fließt durch eine Spule, die im Verhältnis zu ihrem Durchmesser lang ist, ein Strom I , so wird sich im Innern der Spule ein nahezu homogenes Magnetfeld aufbauen. Eine Spule dieser Art, die aufgrund eines von außen angelegten Stromes I ein Magnetfeld erzeugt, nennt man auch Elektromagnet. Später werden wir feststellen, dass man bei gleichem Strom I ein um Zehner-Potenzen stärkeres \vec{B} -Feld erzeugen kann, wenn man in das Innere der Spule einen Eisenkern gibt (siehe Kapitel 6 „Materie im Magnetfeld“).

Wählen wir nun als Integrationsweg ein Rechteck, wie in Abb. 4.12, so kann man aus der Skizze erkennen, dass an den beiden senkrechten Wegstücken (Wegstücke 2 und 4) die Magnetfeldlinien senkrecht auf den Integrationsweg stehen (d.h. $\vec{B} \perp d\vec{r}$). Das Skalarprodukt von Magnetfeld \vec{B} und Wegelement $d\vec{r}$ verschwindet also ($\vec{B} \cdot d\vec{r} = 0$), so dass die Wegstücke 2 und 4 keinen Beitrag zum gesamten Ringintegral liefern. Das Wegstück außerhalb der Spule parallel zur Symmetrieachse der Spule (Wegstück 3) liefert ebenfalls

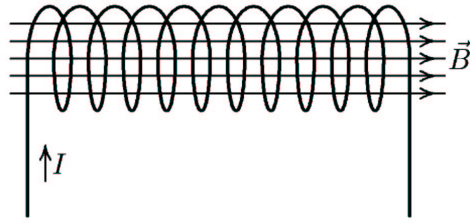


Abbildung 4.11: Zylinderspule, die von einem Strom I durchflossen wird. Der Strom erzeugt im Inneren der Spule ein nahezu homogenes Magnetfeld.

keinen Beitrag zum gesamten Ringintegral, da wir hier $\vec{B} \approx 0$ annehmen können. Es gilt also

$$\int_{\text{Weg}_2} \vec{B} d\vec{r} = \int_{\text{Weg}_3} \vec{B} d\vec{r} = \int_{\text{Weg}_4} \vec{B} d\vec{r} = 0 \quad (4.60)$$

Einzig der Teilweg 1 liefert einen Beitrag, da wir hier ein homogenes Magnetfeld erwarten, das parallel zu Weg 1 ausgerichtet ist (siehe Abb. 4.12). Wegen der Homogenität des magnetischen Feldes im Innern der Spule gilt

$$\int_{\text{Weg}_1} \vec{B} d\vec{r} = \int_{\text{Weg}_1} B dr = Br \Big|_0^l = Bl \quad (4.61)$$

Hier ist l die Länge der Spule. Ferner ist zu beachten, dass hier durch unseren geschlossenen Integrationsweg das N -fache des Stromes I durch den Leiterdraht fließt. Damit gilt nach dem AMPÈRESchen Gesetz (4.55)

$$\oint \vec{B}(\vec{r}) d\vec{r} = N\mu_0 I \quad (4.62)$$

$$\Rightarrow N\mu_0 l \stackrel{(4.61)}{=} Bl \quad (4.63)$$

$$\boxed{B = \frac{N}{l} \mu_0 I} \quad (4.64)$$

Dies ist der Betrag des Magnetfeldes im Innern einer Spule. $\frac{N}{l}$ bezeichnet man auch als **Windungszahldichte**.

Eine andere Anwendung des AMPÈRESchen Gesetzes findet sich z. B. in der Herleitung des Magnetfeldes innerhalb einer Kreisspule (Selbst).

4.4.4 Das BIOT-SAVARTSche Gesetz

In einfachen Fällen können wir durch Symmetrieüberlegungen und andere vereinfachende Annahmen das Magnetfeld Strom durchflossener Leiter über das Durchflutungsgesetz

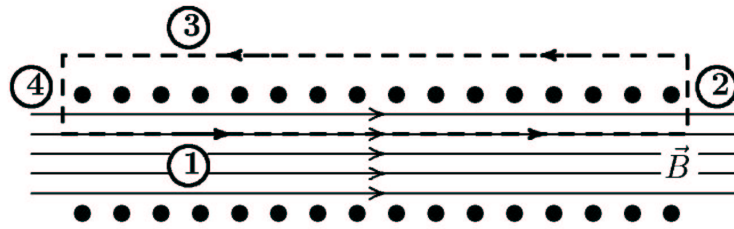


Abbildung 4.12: Geschlossener Weg zur Herleitung des Magnetfeldes in einer Spule

(AMPÈRESches Gesetz) berechnen. In den meisten Fällen versagt dieses Verfahren allerdings, da die Form des Leiters zu kompliziert ist. Wir brauchen also ein ebenfalls allgemeingültiges Gesetz zur Berechnung von Magnetfeldern, das im Gegensatz zum Durchflutungsgesetz jede beliebige Stromverteilung zulässt. Diese Bedingungen erfüllt das **BIOT-SAVARTSche Gesetz**. Mit dem BIOT-SAVARTSchen Gesetz lässt sich für einen festen Ort mit dem Ortsvektor \vec{r}_0 der (infinitesimale) Beitrag $d\vec{B}(\vec{r}_0)$ zum magnetischen Feld $\vec{B}(\vec{r}_0)$ bestimmen, der durch den Strom I in einem Leiterstück infinitesimaler Länge $d\vec{l}$ erzeugt wird. Die Richtung von $d\vec{l}$ zeigt in die Richtung des Stromflusses. Können wir den elektrischen Leiter, durch den der Strom I fließt, als unendlich dünn annehmen, nimmt das BIOT-SAVARTSche Gesetz die folgende Form an:

Das **BIOT-SAVARTSche Gesetz**
für Ströme in elektrischen Leitern
mit verschwindender Dicke :

$$d\vec{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \tag{4.65}$$

Dabei ist \vec{r} der Ortsvektor, der von dem Leiterstück $d\vec{l}$ zu dem Bezugspunkt \vec{r}_0 zeigt, für den das magnetische Feld $d\vec{B}(\vec{r}_0)$ bestimmt werden soll. Das gesamte magnetische Feld $\vec{B}(\vec{r}_0)$ erhält man dann durch Integration über den gesamten Leiter.

Beispiel 4.1

Führen wir nun die praktische Berechnung des magnetischen Feldes \vec{B} mit Hilfe des BIOT-SAVARTSchen Gesetzes an einem Beispiel durch, das wir schon kennen: der unendlich lange, gerade Leiter (siehe Abb. 4.13). Außerdem nehmen wir an, dass der Leiter unendlich dünn sei. An dem Vektorprodukt im

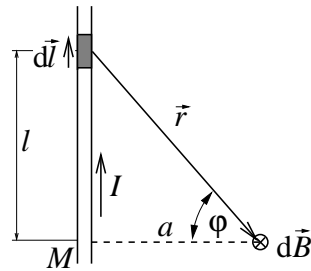


Abbildung 4.13: Skizze zur Berechnung des magnetischen Feldes eines unendlich langen, geraden Leiters mit Hilfe des BIOT-SAVARTSchen Gesetzes.

BIOT-SAVARTSchen Gesetz können wir ablesen, dass

$$d\vec{B}(\vec{r}_0) \perp d\vec{l} \quad (4.66)$$

gelten muss. Ferner liefert nur der Teil des relativen Ortsvektors \vec{r} einen Beitrag zum magnetischen Feld, der senkrecht auf $d\vec{l}$ steht. Dieser Beitrag ist für alle infinitesimalen Leiterstücke der gleiche, nämlich der senkrechte Abstand a zwischen Bezugspunkt und Leiter (siehe Abb. 4.13). Daher können wir das Vektorprodukt betraglich schreiben als

$$|d\vec{l} \times \vec{r}| = dl a \quad (4.67)$$

$$\Rightarrow dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl a}{r^3} \quad (4.68)$$

Der Abstand r hängt allerdings noch von der Integrationsvariablen l ab, da jedes einzelne Leiterstück dl einen anderen Abstand r zum Bezugspunkt hat. Um diese Abhängigkeit zu berücksichtigen, parametrisieren wir den Leiter durch den Winkel φ (siehe Abb. 4.13). Für den Abstand r gilt dann

$$r = \frac{a}{\cos \varphi} \quad (4.69)$$

Setzen wir (4.69) in (4.68) ein, folgt

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a dl}{(a/\cos \varphi)^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos^3 \varphi dl}{a^2} \quad (4.70)$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^3 \varphi dl}{a^2} \quad (4.71)$$

Der Abstand l des Leiterstückes dl zum Punkt M beträgt $l = a \tan \varphi$, wie

der Skizze (Abb. 4.13) zu entnehmen ist. Daraus folgt für dl :

$$l = a \tan \varphi \quad (4.72)$$

$$\Rightarrow \frac{dl}{d\varphi} = \frac{a}{\cos^2 \varphi} \Leftrightarrow dl = \frac{a}{\cos^2 \varphi} d\varphi. \quad (4.73)$$

Außerdem müssen wir noch die Integrationsgrenzen transformieren. Es gilt

$$l_1 = -\infty \hat{=} \varphi_1 = -\frac{\pi}{2} \quad (4.74)$$

$$l_2 = \infty \hat{=} \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \quad (4.75)$$

Nun setzen wir den Ausdruck (4.73) für dl in Gleichung (4.71) ein:

$$\Leftrightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi}{a} d\varphi \quad (4.76)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{\sin \varphi}{a} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \quad (4.77)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2}{a} \quad (4.78)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (4.79)$$

Offensichtlich ist dieser Ausdruck für das magnetische Feld des unendlich langen, geraden Leiters identisch mit dem aus (4.43).

Das BIOT-SAVARTSche Gesetz scheint also offenbar das magnetische Feld richtig zu beschreiben. Es lassen sich auf diese Weise zu jedem beliebig geformten Leiter mit verschwindender Dicke die zugehörigen magnetischen Felder berechnen. In den meisten Fällen wird zwar das Linienintegral recht kompliziert ausfallen, so dass es u.U. nicht mehr analytisch lösbar ist, jedoch kann so ein Linienintegral mit relativ wenig Aufwand auf einem Computer numerisch gelöst werden. In den Übungen werden uns noch einige einfache Beispiele für die Anwendung des BIOT-SAVARTSchen Gesetzes begegnen.

Diese Form des BIOT-SAVARTSchen Gesetzes (4.65) dient wohl gemerkt nur zur Berechnung von magnetischen Feldern, die von einem Strom durch einen Leiter mit verschwindender Dicke erzeugt werden. Die allgemeine Form des BIOT-SAVARTSchen Gesetzes lässt auch Ströme zu, die durch einen Leiter mit nicht verschwindendem Querschnitt fließen. Man betrachtet nun nicht die elektrische Stromstärke I , sondern die elektrische Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$, die außerdem noch ortsabhängig sein kann. Das Linienintegral aus (4.65)

geht dabei in ein Volumenintegral über.

**Allgemeine Form des
BIOT-SAVARTSchen Gesetzes:**

$$d\vec{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3} dV \quad (4.80)$$

Beispielsweise ließe sich das magnetische Feld \vec{B} im Innern des geraden, unendlich langen, Strom durchflossenen Leiters mit einem von null verschiedenen Radius berechnen. Das Ergebnis der Rechnung liefert dann den Ausdruck für (4.51) für das magnetische Feld.

4.4.5 Permanentmagnete

Die bisherigen Erkenntnisse über den Magnetismus haben uns gezeigt, dass wir mit Hilfe von Strömen Magnetfelder erzeugen können. Uns sind allen schon oft im Alltag aber auch in einigen bisherigen Versuchen Permanentmagnete begegnet. Wie aber können wir erklären, dass Permanentmagnete dauerhaft von einem Magnetfeld umgeben sind, ohne dass wir eine Spannungsquelle anlegen, die einen Stromfluss erzeugt? Die Antwort zu dieser Frage finden wir auf atomarer Ebene. Obwohl dies erst in Experimentalphysik IV näher besprochen wird, wissen wir sicher schon alle, dass Atome aus einem positiv geladenen Atomkern bestehen, die von negativ geladenen Elektronen umkreist werden (BOHRsches Atommodell, benannt nach dem Dänen NIELS BOHR). Diese kreisenden Elektronen stellen Ringströme dar, die ein (sehr schwaches) Magnetfeld erzeugen. Bei Permanentmagneten ist die Ausrichtung dieser Ringströme überall gleich, so dass sich deren schwache Magnetfelder zu einem u.U. starken Magnetfeld superpositionieren.

4.4.6 Zusammenfassung

- Ströme treten immer in Begleitung von Magnetfeldern auf.
- Es gibt keine magnetischen Monopole.
 \Leftrightarrow Magnetische Feldlinien sind immer geschlossene Kurven. \Leftrightarrow Magnetfelder haben weder Quellen noch Senken, d.h. durch die Oberfläche ∂V eines Volumens V führen genauso viele Magnetfeldlinien hinein wie hinaus. \Leftrightarrow

$$\iint_{\partial V} \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad \text{oder} \quad (4.81)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (3. \text{ MAXWELL-Gleichung}) \quad (4.82)$$

- Auf eine bewegte Ladung im magnetischen Feld wirkt die **LORENTZ-Kraft** \vec{F}_L :

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (4.83)$$

- Wird ein Teilchen mit der Ladung q senkrecht in ein homogenes Magnetfeld \vec{B} mit der Geschwindigkeit \vec{v} eingeschossen, so beschreibt dieses eine Kreisbahn mit Radius

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (4.84)$$

- Kraft F auf einen unendlich langen, geraden Leiterdraht, durch den ein Strom \vec{I} fließt, ist

$$\vec{F} = l \cdot \vec{I} \times \vec{B} \quad (4.85)$$

- Sind zwei unendlich lange, gerade Leiter, durch die die Ströme I_1 bzw. I_2 fließen, mit einem Abstand r zueinander parallel angeordnet, so bewirkt Leiter 1 eine Kraft $\frac{F}{l}$ auf eine Längeneinheit von Leiter 2:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} \quad (4.86)$$

$$(4.87)$$

- Die magnetische Feldkonstante ist

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad (4.88)$$

- Das SI-Maßsystem wird über die Kraftwirkung zwischen zwei Leitern definiert. Das GAUSSSche Maßsystem wird über die elektrostatische Kraftwirkung (COULOMB-Kraft) definiert.
- Ein unendlich langer, gerader Leiter, durch den ein Strom I fließt, erzeugt ein Magnetfeld der Stärke

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \vec{I} \times \vec{r}}{2\pi r^2} \quad (4.89)$$

oder betraglich

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad \text{wenn} \quad \vec{I} \perp \vec{r} \quad (4.90)$$

- **AMPÈRESches Gesetz:** Fließt durch einen beliebigen geschlossenen Weg S ein Strom I , so gilt für das Linienintegral von \vec{B} entlang des Weges S :

$$\oint_S \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 I \quad (4.91)$$

- **BIOT-SAVARTSches Gesetz:** Der Beitrag $d\vec{B}(\vec{r}_0)$ zum magnetischen Feld $\vec{B}(\vec{r}_0)$, das ein Leiterstück verschwindender Dicke mit der Länge $d\vec{l}$ erzeugt, beträgt am Ort \vec{r}_0 (Bezugspunkt)

$$d\vec{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (4.92)$$

Hier ist \vec{r} der relative Ortsvektor, der von $d\vec{l}$ auf den Bezugspunkt zeigt.

Für Leiter endlicher Dicke geht die obige Form des BIOT-SAVARTSchen Gesetzes in die allgemeine Form über:

$$d\vec{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3} dV \quad (4.93)$$

- Permanentmagnete bestehen aus vielen mikroskopisch kleinen Ringströmen.

4.5 Relativität elektrischer und magnetischer Kräfte

Wie die bereits behandelten Phänomene dieses Kapitels zeigen, sind Elektrizität und Magnetismus keine voneinander unabhängigen Erscheinungen: Wir hatten gesehen, dass bewegte elektrische Ladungen magnetische Felder erzeugen, und dass umgekehrt magnetische Felder Kräfte auf bewegte Ladungen ausüben. Später werden wir noch sehen, dass auch magnetische Felder elektrische Felder erzeugen können und umgekehrt. Der daraus resultierende Wunsch, beide Erscheinungen in eine Theorie zu fassen, ist deshalb nicht unberechtigt. Dem Schotten JAMES CLERK MAXWELL ist es 1860 tatsächlich geglückt, den Magnetismus und die Elektrizität in einer Theorie zu vereinheitlichen, die sich mathematisch durch die vier MAXWELL-Gleichungen darstellen lässt. Als zu Anfang des 20. Jh. der Relativitätsbegriff aufkam, stellte sich heraus, dass sich Magnetismus und Elektrizität nicht nur gegenseitig beeinflussen, sondern dass sie tatsächlich ein und dasselbe sind. Erstaunlicherweise sind die vor der Kenntnis der Relativitätstheorie aufgestellten MAXWELL-Gleichungen bereits relativistisch, so dass die Elektrodynamik keiner Modifikation bedurfte, wie es bei der Mechanik der Fall war.

Wir wollen nicht die komplette Theorie des relativistischen Elektromagnetismus aufstellen, was wir ohnehin mit unseren bisherigen Kenntnissen nicht könnten. Damit müssen wir bis zur Vorlesung „theoretische Elektrodynamik“ warten. Wir wollen stattdessen an

einem einfachen Beispiel zeigen, dass, je nach Wahl des Bezugssystems, die LORENTZ-Kraft auch als COULOMB-Kraft aufgefasst werden kann:

Betrachten wir wieder die zwei unendlich langen, geraden Leiter aus Versuch 4.3, die parallel zueinander angeordnet sind (siehe Abb. 4.14). Wie wir in Versuch 4.3 gesehen

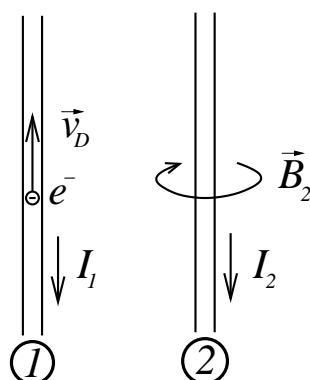


Abbildung 4.14: Zwei parallele unendlich lange, gerade Leiter

haben, bewirkt der Strom in Draht 2 eine Kraft auf den Draht 1. Es gibt nun zwei Möglichkeiten diese Kraft zu interpretieren:

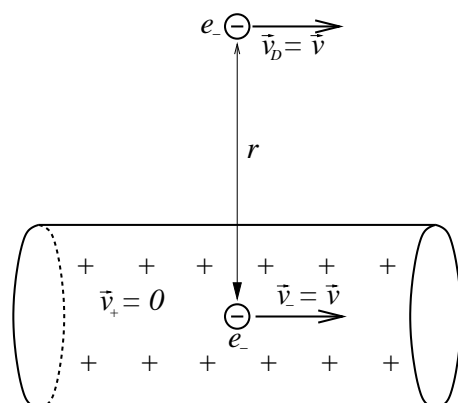


Abbildung 4.15: Leiter aus Sicht des Laborsystems S , in dem sich die Leitungselektronen bewegen

In S : Betrachten wir die Situation aus dem Laborsystem S , das ein Inertialsystem sei. Der Strom I_2 erzeugt ein Magnetfeld \vec{B}_2 , das ringförmig um den Leiter 2 verläuft. \vec{B}_2 wiederum übt im Leiter 1 eine LORENTZ-Kraft auf die Leitungselektronen e^- aus. Ist \vec{v}_D die Driftgeschwindigkeit der Elektronen, So ist diese Kraft

$$\vec{F}_L = -e \vec{v}_D \times \vec{B} \quad (4.94)$$

Die anziehende Kraft

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} \quad (4.95)$$

zwischen den beiden Leitern ist dann, wie wir in Abschnitt 4.3 gesehen haben, eine Folge der LORENTZ-Kraft.

Gehen wir davon aus, dass der Draht 2 im Laborsystem S elektrisch neutral sei, d.h. die Ladungsdichte ϱ verschwindet ($\varrho = 0$). Die Ladungsdichte ϱ von Draht 2, die in S gemessen wird, setzt sich zusammen aus der positiven Ladungsdichte ϱ_+ der ruhenden, positiv geladenen Gitteratome und der Ladungsdichte ϱ_- der negativen Ladungsträger (Leitungselektronen), die sich mit $\vec{v}_- = \vec{v}$ relativ zu S bewegen. Es gilt also

$$\varrho = \varrho_+ + \varrho_- = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{außerhalb des Drahtes} \quad E = 0. \quad (4.96)$$

In S besteht daher die Kraft, die auf die bewegte Ladung e^- wirkt, allein aus der LORENTZ-Kraft

$$\vec{F} = -e \vec{v} \times \vec{B}. \quad (4.97)$$

$$\text{mit} \quad B = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} \quad \text{und} \quad \mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \quad (4.98)$$

Es folgt für den Betrag von \vec{F} :

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{2I_2}{r} e v \quad (4.99)$$

Der Strom I_2 hängt mit der Ladungsträgerdichte ϱ_- nach (3.11) wie folgt zusammen:

$$j_2 = -n e v \quad \Rightarrow \quad I_2 = j_2 A = -n e A v = \varrho_- A v \quad (4.100)$$

wobei n die Ladungsträgerdichte und A der Leiterquerschnitt sind. Daher folgt für die Kraft F

$$F = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2} 2\varrho_- \frac{A v^2}{r}. \quad (4.101)$$

In S' : Begeben wir uns nun in das Ruhssystem S' eines Leitungselektrons e^- des Stromes I_1 . Da sich das Leitungselektron e^- mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v}_D bzgl. S bewegt, ist S' ebenfalls ein Inertialsystem. Das Leitungselektron e^- hat im System S' die Geschwindigkeit $\vec{v}'_D = 0$. Daher muss die LORENTZ-Kraft, die proportional zur Geschwindigkeit ist, verschwinden ($\vec{F}'_L = 0$). Dennoch muss nach wie vor die gleiche Kraft auf das Leitungselektron e^- in Richtung von Leiterdraht 2 wirken. Woher

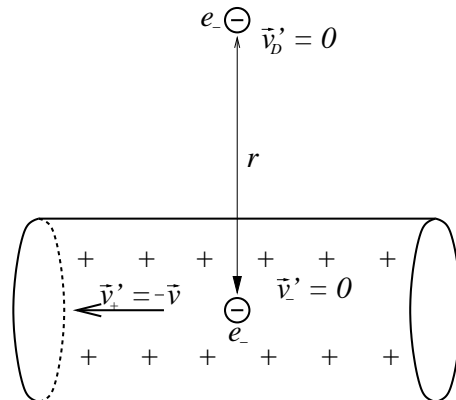


Abbildung 4.16: Leiter aus Sicht des mit den Leitungselektronen bewegten Systems S' . Hier bewegen sich die positiv geladenen Gitteratome des Leiters.

kommt diese Kraft?

Da wir die gleiche Driftgeschwindigkeit \vec{v}_D in beiden Leitern voraussetzen, befinden sich in S' auch alle negativen Ladungsträger in Leiter 2 in Ruhe. Es gilt also $\vec{v}'_- = 0$. Der Strom I_2 wird jetzt durch die positiv geladenen Gitteratome gebildet, die sich bzgl. S' mit der Geschwindigkeit $\vec{v}'_+ = -\vec{v}$ bewegen. Nach dem Ladungserhaltungssatz (1.2) ist die Summe aller Ladungen konstant. Es gilt darüberhinaus sogar: **Ladungen sind relativistisch invariant**, d.h. Ladungen werden in allen Inertialsystemen als gleich groß beobachtet. Sei nun die Ladung Q_+ gleichmäßig über ein Leiterstück der Länge L_0 (gemessen in S) verteilt, so gilt:

$$Q_+ = \varrho_+ L_0 A \quad (4.102)$$

Obwohl sich die Ladung Q_+ in diesem Leiterstück wegen der Ladungserhaltung beim Übergang von S nach S' nicht ändert, ändert sich die Ladungsdichte ϱ_+ aufgrund der LORENTZ-Kontraktion: Der Querschnitt $A = A'$ ist in beiden Inertialsystemen gleich groß, da seine Abmessungen senkrecht auf \vec{v} stehen. Hingegen ändert sich die Länge des Leiterstückes wegen der LORENTZ-Kontraktion, mit

$$L' = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (4.103)$$

Nach dem Ladungserhaltungssatz gilt

$$Q_+ = \varrho'_+ L' A = \varrho_+ L_0 A \quad (4.104)$$

$$\Rightarrow \varrho'_+ = \varrho_+ \frac{L_0}{L'} = \gamma \varrho_+ \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.105)$$

Für die Ladungsträgerdichte der negativen Leitungselektronen müssen wir berücksichtigen, dass beim Übergang von S nach S' die LORENTZ-Kontraktion in umgekehrter Richtung erfolgt. Entsprechend gilt

$$L'_0 = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = L \gamma \quad (4.106)$$

$$\Rightarrow Q_- = \varrho_- L A = \varrho'_- L'_0 A \quad (4.107)$$

$$\Rightarrow \varrho'_- = \varrho_- \frac{L}{L'_0} = \frac{\varrho_-}{\gamma} \quad (4.108)$$

Für die Gesamtladungsdichte $\varrho' = \varrho'_+ + \varrho'_-$ gilt dann wegen $\varrho_+ = -\varrho_-$:

$$\varrho' = \varrho_+ \gamma + \frac{\varrho_-}{\gamma} = \varrho_+ \left(\gamma - \frac{1}{\gamma} \right) \quad (4.109)$$

$$= \varrho_+ \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \quad (4.110)$$

$$= \varrho_+ \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.111)$$

Wir sehen, dass aus der LORENTZ-Kontraktion $\varrho' \neq 0$ für $v \neq 0$ folgt. In S' ist der Leiter 2 nun nicht mehr elektrisch neutral. Entsprechend bewirkt der Leiterdraht 2 ein von null verschiedenes elektrisches Feld E' . Dieses erhält man durch Integration über die gesamte Länge von Leiter 2 (siehe Übung 6, Aufgabe 1.a):

$$E' = \frac{\varrho' A}{2 \pi \varepsilon_0 r}. \quad (4.112)$$

Das elektrische Feld E' bewirkt dann auf das in S' ruhende Leitungselektron im Leiterdraht 1 eine Kraft

$$F' = \frac{e \varrho' A}{2 \pi \varepsilon_0 r} \quad (4.113)$$

$$= \frac{e A}{2 \pi \varepsilon_0 r} \varrho_+ \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.114)$$

Ein Vergleich mit dem Ausdruck (4.101) zeigt, dass

$$F' = \frac{F}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = F \gamma \quad (4.115)$$

gilt. Für $v^2 \ll c^2$ ist die elektrische COULOMB-Kraft F' in S' gleich der magnetischen LORENTZ-Kraft F in S . Für große v^2 muss man die LORENTZ-Transformation der Kraft berücksichtigen. Diese ist gerade (siehe Theorie)

$$F' = \frac{F}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = F \gamma. \quad (4.116)$$

Damit stimmen beide Kräfte exakt überein. Obwohl wir mit diesem Gedankenexperiment noch keine vollständige Theorie aufgebaut haben, die Elektrizität und Magnetismus vereinheitlicht, haben wir in diesem Beispiel gezeigt, dass die grundlegend verschieden erscheinenden Kraftgesetze (LORENTZ-Kraft und COULOMB-Kraft) durch den Wechsel der Systeme das gleiche Phänomen richtig beschreiben können. Im Gegensatz zur Mechanik erlaubt uns die Elektrodynamik schon bei kleinen Geschwindigkeiten in der Größenordnung $\approx 1 \text{ cm s}^{-1}$, relativistische Effekte zu beobachten.

Zusammenfassung:

- Magnetische und elektrische Erscheinungen sind untrennbar miteinander verknüpft.
- Magnetische und elektrische Felder sind vom Bezugssystem abhängig. Sie zeigen ein gemeinsames Transformationsverhalten (siehe Vorlesung „theoretische Elektrodynamik“: elektromagnetischer Feldtensor).
- In der Regel liegen beide Felder vor (elektrisches und magnetisches). Die allgemeine Kraft ist dann

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B} \quad (4.117)$$

- Beim Übergang von S nach S' müssen alle Größen transformiert werden. Einzige Invariante ist die Ladung.

4.6 Der HALL-Effekt

4.6.1 Klassischer HALL-Effekt

Der HALL-Effekt wurde 1880 von EDWIN H. HALL entdeckt: Halten wir einen stromdurchflossenen elektrischen Leiter so in ein Magnetfeld, dass die Feldlinien senkrecht auf ihm stehen, so wirkt auf die fließenden Ladungsträger (bei Metallen sind dies Elektronen) die LORENTZ-Kraft

$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = -e \vec{v} \times \vec{B} \quad (4.118)$$

(siehe Ausdruck (4.5), Seite 149). Diese bewirkt, dass die Ladungsträger zur Seite getrieben werden. Es findet so eine Trennung von bewegten und nicht bewegten Ladungen

statt. Dadurch baut sich aber ein elektrisches Feld \vec{E}_H auf, das auf die Ladungsträger die elektrostatische Kraft

$$\vec{F}_E = q \cdot \vec{E}_H \quad (4.119)$$

$$(\text{=} -e \cdot \vec{E}_H \text{ bei Metallen)} \quad (4.120)$$

ausübt. Es wird sich ein Kräftegleichgewicht einstellen, in dem F_L und F_E betraglich gleich sind, aber entgegengesetzte Richtungen haben. Aus (4.118) und (4.120) folgt damit:

$$\vec{F}_L = -\vec{F}_E \Rightarrow -e\vec{v} \times \vec{B} = e\vec{E}_H \quad (4.121)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_H = -\vec{v} \times \vec{B} = \vec{B} \times \vec{v}} \quad (4.122)$$

Das Interessante daran ist, dass bei gleicher Stromrichtung und gleichem magnetischen Feld sowohl positive als auch negative Ladungsträger in die gleiche Richtung beschleunigt werden, sofern sie eine Driftgeschwindigkeit \vec{v}_D haben und so zum Stromfluss beitragen. Das geht sowohl aus dem Ausdruck (4.122), der nicht von der Ladung q und deren Vorzeichen abhängt, als auch aus den Abbildungen 4.17 (a) und (b) hervor.

Betrachten wir nun den allgemeinen Fall, dass sowohl positive als auch negative Ladungen

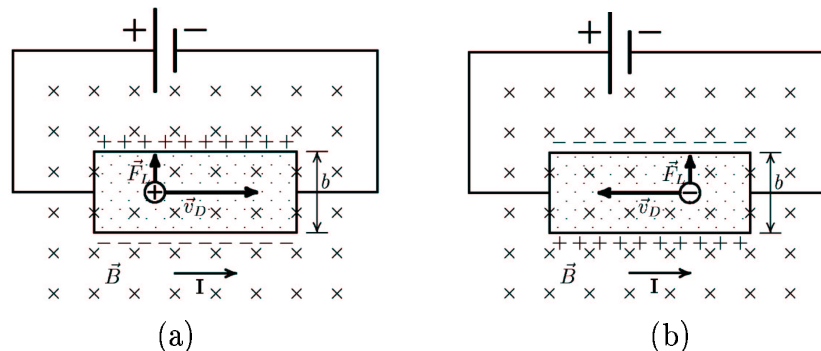


Abbildung 4.17: HALL-Sonde einmal mit positiven und einmal mit negativen Ladungsträgern. Bei gleichem B -Feld und gleicher Stromrichtung werden sowohl positive als auch negative Ladungsträger in die gleiche Richtung abgelenkt.

zum Stromfluss beitragen können. Dies ist z.B. in Elektrolyten oder Halbleitern der Fall. Die Geschwindigkeit \vec{v} in 4.122 wird nun durch die Driftgeschwindigkeit \vec{v}_D der Ladungsträger ersetzt. Der Strom \vec{I} innerhalb des Leiters steht mit der Driftgeschwindigkeit \vec{v}_D in folgendem Zusammenhang:

$$\vec{I} = qnA\vec{v}_D \quad (4.123)$$

$n = \frac{N}{V}$ ist die Ladungsträgerdichte, die Anzahl N der mit \vec{v}_D bewegten Ladungsträger pro Volumen V . $A = bd$ ist der Querschnitt des Leiters. Setzen wir (4.123) in (4.122) ein

so folgt (ab hier nur noch betraglich):

$$E_H = \frac{B I}{n q A} \quad (4.124)$$

$$\Leftrightarrow U_H = E_H \cdot b = \frac{B I b}{n q A} = \frac{1}{n q} \frac{B}{d} I \quad (4.125)$$

U_H ist diejenige Spannung, die man zwischen den beiden Seiten des Leiters messen kann. Sie wird als **HALL-Spannung** bezeichnet. Da die Driftgeschwindigkeiten \vec{v}_D innerhalb von Leitern i.d.R. sehr klein sind (um ca. $1 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$), ist die HALL-Spannung U_H auch bei starken Magnetfeldern sehr klein. Den Ausdruck $\frac{1}{n q} \frac{B}{d}$ aus 4.125 wird als **HALL-Widerstand** R_H bezeichnet.

$$R_H = \frac{1}{n q} \frac{B}{d} \quad (4.126)$$

Damit lässt sich 4.125 in der Form des OHMSchen Gesetzes darstellen:

$$U_H = R_H \cdot I \quad (4.127)$$

Den Bruch $\frac{1}{n q}$ bezeichnet man als **HALL-Koeffizient** A_H .

$$A_H := \frac{1}{n q} \quad (4.128)$$

Liegen sowohl positive als auch negative Ladungsträger vor (wie z.B. in Elektrolyten), so haben sie jeweils eigene Ladungsträgersdichten n_+ bzw. n_- . Der HALL-Koeffizient, ausgedrückt durch n_+ und n_- , ist dann:

$$A_H := \frac{1}{n q} = \frac{1}{e(n_+ - n_-)} \quad (4.129)$$

Gilt $A_H < 0$, so wird der elektrische Strom I (überwiegend) von durch den Leiter fließenden negativen Ladungsträgern gebildet. Ist $A_H > 0$, so besteht der Strom I überwiegend aus positiven bewegten Ladungen. Der Fall $A_H = 0$ kann bedeuten, dass weder positive noch negative Ladungen fließen (damit würde natürlich auch der Strom I verschwinden), oder, dass $n_+ = n_-$ ist. Letzteres heißt, dass keine HALL-Spannung gemessen werden kann, obwohl ein Strom I fließt.

Beispiele für HALL-Koeffizienten:

$$A_H(\text{Bi}) = 5 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^3}{\text{A s}}, \quad A_H(\text{Ge}) = 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{A s}}$$

Anwendungen

- Bei bekanntem Magnetfeld kann man durch Messung der HALL-Spannung U_H die Ladungsträgerdichten n_+ und n_- bestimmen.
- Falls der HALL-Koeffizient A_H bekannt ist, kann ein solcher Leiter als **HALL-Sonde** zum Ausmessen von Magnetfeldern dienen.

Als Beispiel wollen wir die HALL-Spannung U_H für eine Kupfer-HALL-Sonde abschätzen. Nehmen wir an, es liegen folgende Werte für Strom, Magnetfeldstärke, Leiterdicke und Ladungsträgerdichte vor:

$$\begin{aligned} I &= 1\text{A}, & d &= 10\mu\text{m} = 10^{-5}\text{m}, \\ B &= 1\text{T}, & \text{Cu} : n &\approx 6 \cdot 10^{22}\text{cm}^{-3} = 6 \cdot 10^{28}\text{m}^{-3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U_H = \frac{1\text{T} \cdot 1\text{A}}{6 \cdot 10^{28}\text{m}^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\text{C} \cdot 10^{-5}\text{m}} \approx 10^{-5}\text{V} \quad (4.130)$$

4.6.2 Quanten-HALL-Effekt

Der Quanten-HALL-Effekt ist eine der jüngsten Entdeckungen in der Physik. Er wurde 1980 von KLAUS VON KLITZING entdeckt, wofür er 1985 den Nobelpreis erhielt. Die genaue Erklärung dieses Effekts würde weit über den Stoff des zweiten Semesters hinaus führen, so dass wir uns hier nur auf eine kurze Beschreibung des Phänomens beschränken. In Abschnitt 4.6.1 hatten wir festgestellt, dass der HALL-Widerstand R_H proportional zum umgebenden Magnetfeld ist. KLAUS VON KLITZING belegte experimentell, dass der HALL-Widerstand R_H bei sehr niedrigen Temperaturen ($T \lesssim 1\text{K}$), starken Magnetfeldern und dünnen HALL-Sonden quantisiert ist. Es können sich die Elektronen jetzt nur noch 2-dimensional auf vorgegebenen Niveaus (Kreisen) bewegen. Diese Kreisradien sind allerdings quantisiert, was eine Quantisierung des HALL-Widerstand R_H zur Folge hat. Trägt man in einem Diagramm R_H gegen B auf, so kann man einen stufenförmigen Kurvenverlauf erkennen, der die Ursprungsgrade des klassischen HALL-Effekts umgibt. Mögliche Werte für den HALL-Widerstand sind

$$R_H = \frac{h}{n e^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.131)$$

$$= \frac{R_K}{n} \quad (4.132)$$

wobei $h \approx 6,626 \cdot 10^{-34}\text{J s}$ das PLANCKSche Wirkungsquantum und $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}$ die Elementarladung sind. R_K wird als **VON-KLITZING-Konstante** bezeichnet. Sie hat den

Wert

$$R_K = \frac{h}{e^2} = 25813\Omega \quad (4.133)$$

Seit 1990 wird die SI-Einheit OHM (= Ω) des elektrischen Widerstandes R über die VON-KLITZING-Konstante definiert.

Kapitel 5

Magnetische Induktion

Bisher haben wir uns nur mit dem Magnetismus von stationären d.h. zeitlich konstanten Strömen befasst. Man nennt die Wissenschaft, die den Magnetismus stationärer Ströme behandelt, **Magnetostatik**. In diesem Kapitel verlassen wir die Magnetostatik und beschäftigen uns mit zeitlich veränderlichen Strömen und Feldern.

5.1 Experimentelle Tatsachen und deren Deutung

Versuch 5.1

In diesem Versuch verwenden wir eine Zylinderspule mit N Windungen, wie sie in Abschnitt 4.4.3 beschrieben wurde, allerdings legen wir an die Enden der Spule keine Spannungsquelle, sondern ein Spannungsmesser (Voltmeter) an.

1. Lassen wir die Spule ruhen und schieben einen Stabmagneten (Permanentmagnet) in die Spule hinein, zeigt der Spannungsmesser schon bei Annäherung des Magneten an die Spule eine Spannung U_i an, die umso größer ist, je schneller sich der Magnet annähert. Ziehen wir den Stabmagneten mit gleicher Geschwindigkeit wieder heraus, messen wir die gleiche Spannung, allerdings mit umgekehrtem Vorzeichen.
2. Halten wir nun umgekehrt den Permanentmagneten in Ruhe und bewegen die Spule über diesen, so wird auch hier schon bei Annäherung der Spule an den Magneten eine Spannung U_i gemessen, die umso größer ist, je schneller wir die Bewegung durchführen. Entfernen wir den Stabmagneten wieder mit gleicher Geschwindigkeit, messen wir auch hier die gleiche Spannung, ebenfalls mit umgekehrtem Vorzeichen.

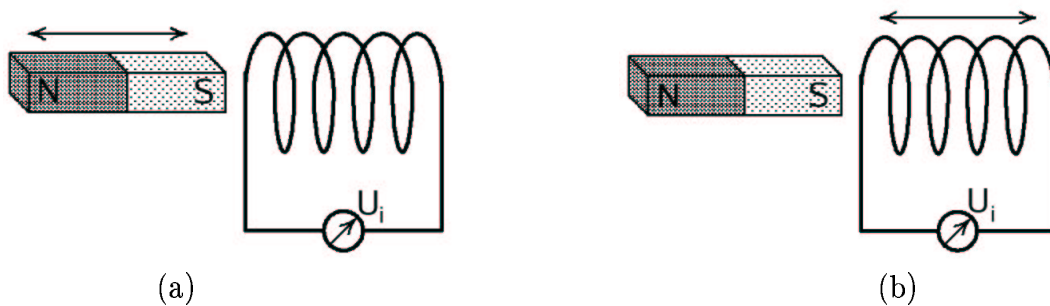


Abbildung 5.1: (a) Ein Permanentmagnet wird in das Innere einer ruhenden Zylinderspule geschoben. (b) Die Zylinderspule wird auf einen ruhenden Permanentmagneten geschoben.

Deutung 1:

Unabhängig davon, ob wir den Magneten in die ruhende Spule schieben (Versuch 1) oder ob wir mit gleicher Relativgeschwindigkeit die Spule über den ruhenden Stabmagneten schieben, ist die gemessene Spannung die gleiche. Es kommt also auf die Relativgeschwindigkeit zueinander an. Was ist aber der Grund, dass überhaupt eine Spannung U_i entstehen kann? Ist es nur der sich ändernde Abstand? Dass ein Magnet in der Nähe der Spule ist, wird die Spule nur über das Magnetfeld des Magneten erfahren. Eine Änderung des Abstandes bemerkt die Spule also über die Änderung des magnetischen Feldes.

Denken wir uns eine Spule mit nur einer Windung. Auch hier tritt der gleiche Effekt auf,

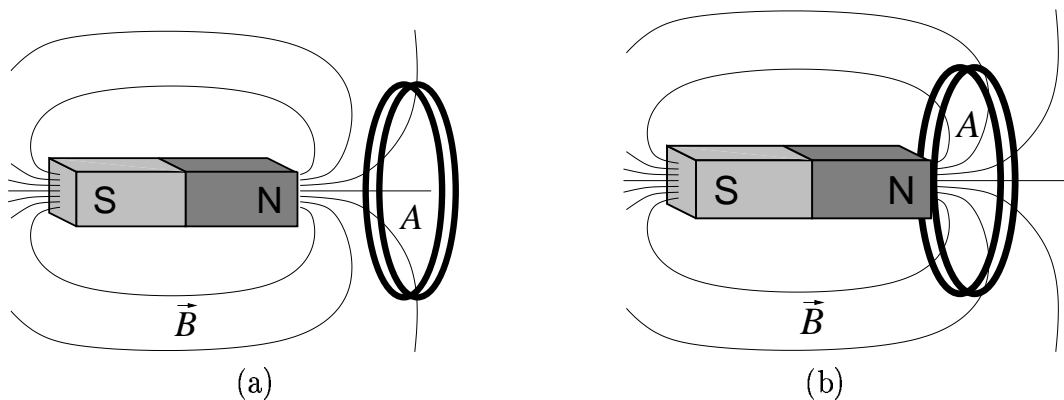


Abbildung 5.2: Der magnetische Fluss Φ_M durch die Spule in (a) ist klein im Vergleich zum magnetischen Fluss in Abb. (b). Anschaulich kann man sich das durch die niedrigere Zahl der Magnetfeldlinien erklären, die durch die Spule gehen.

nur ist die entstehende Spannung U_I N -mal kleiner. Diese Reduzierung macht aus der 3-dimensionalen Spule aus dem Versuch eine 2-dimensionale **Leiterschleife**. Bei der rela-

tiven Annäherung von Stabmagneten und Leiterschleife ändert sich - anschaulich gesagt - die „Anzahl der Magnetfeldlinien“, die durch die Leiterschleife gehen. Formal wird die „Anzahl der Magnetfeldlinien“ durch eine Fläche A durch die Größe des **magnetischen Flusses** Φ_M ausgedrückt:

Der **magnetische Fluss** eines Magnetfeldes \vec{B} durch eine Fläche A ist definiert durch

$$\Phi_M = \iint_A \vec{B} d\vec{A} \quad (5.1)$$

Anschaulich stellt Φ_M die Anzahl der \vec{B} -Feldlinien durch die Fläche A dar (siehe Abb. 5.2 (a) und (b)). In Abb. 5.2 (a) ist der magnetische Fluss Φ_M kleiner als in Abb. 5.2 (b), da in (a) weniger Feldlinien durch die Leiterschleife laufen als in (b). Genauso kann man sagen, der magnetische Kraftfluss Φ_M ist in (a) kleiner, da hier das magnetische Feld \vec{B} schwächer ist, was sich durch weniger eng beieinander liegende Feldlinien zeigt. An dieser Stelle wird auch klar, warum man das magnetische Feld auch **magnetische Kraftflussdichte** nennt (vgl. (4.1) auf Seite 147). Die SI-Einheit des magnetischen Flusses ist das **Weber**. Der magnetische Fluss wird damit analog zum elektrischen Kraftfluss definiert (vgl. 1.8

$$[\Phi_M] = 1 \text{ Weber} = 1 \text{ Wb} = 1 \text{ T m}^2 = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2 \text{ A}} \quad (5.2)$$

Tatsächlich wurde experimentell bestätigt, dass die entstandene (oder induzierte) Spannung U_i proportional zur zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses Φ_M ist:

$$U_i \sim \frac{d\Phi_M}{dt} \quad (5.3)$$

Die Spannung U_i , die durch die Änderung des magnetischen Flusses entsteht, nennt man **Induktionsspannung**. Man sagt, die Spannung U_i wird **induziert**. Den Vorgang, dass eine Spannung induziert wird, bezeichnet man als **magnetische Induktion**. Man kann den magnetischen Fluss durch eine Leiterschleife (oder Spule) auch auf andere Art verändern, ohne den räumlichen Abstand von Magneten und Spule zu verändern. So kann man z.B. die Leiterschleife in dem Magnetfeld drehen. Verwendet man anstelle des Permanentmagneten einen Elektromagneten, kann man das Magnetfeld \vec{B} und damit den magnetischen Fluss Φ_M zeitlich ändern, indem man den Strom I durch den Elektromagneten zeitlich verändert, sofern man Spule und Elektromagnet dabei in Ruhe lässt. In allen diesen Fällen wird durch die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses Φ_M eine Spannung $U_i \sim \frac{d\Phi_M}{dt}$ induziert.

Deutung 2:

Wir können die magnetische Induktion auch mit Hilfe der LORENTZ-Kraft (siehe Abschnitt 4.5, Seite 149) erklären:

Betrachten wir die Situation aus Versuch 2 nun aus der Sicht eines mitbewegten Beobachters: Wir können uns den mitbewegten Beobachter als einen negativ geladenen Ladungsträger (Elektron) vorstellen, da es in einem ungeladenen elektrischen Leiter ebenso viele negative wie positive Ladungsträger gibt. Auch hier wählen wir den vereinfachten Fall, dass unsere Spule nur eine Windung hat ($N = 1$). So können wir statt von einer Spule wieder von einer Leiterschleife sprechen. Wird die Leiterschleife wie in Abb. 5.2 durch das Magnetfeld des Stabmagneten bewegt, verändert sich der magnetische Fluss Φ_M durch die Leiterschleife - oder mit anderen Worten: Die „Zahl der Magnetfeldlinien“ durch die Leiterschleife verändert sich. Dies kann aber nur dadurch geschehen, dass der Leiter bei der Bewegung durch das Magnetfeld Magnetfeldlinien durchquert. Es können hier also Feldlinien und Leitergeschwindigkeit \vec{v} nicht die gleiche Richtung haben, da sonst ein Überqueren unmöglich wäre. Das magnetische Feld hat daher auch eine Vertikalkomponente \vec{B}_\perp bzgl. \vec{v} , so dass hier eine LORENTZ-Kraft auf den geladenen Beobachter wirkt. Formal bedeutet das:

$$\vec{B} = \vec{B}_\parallel + \vec{B}_\perp \quad (5.4)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_L = -e\vec{v} \times \vec{B} \quad (5.5)$$

$$= -e\vec{v} \times (\vec{B}_\parallel + \vec{B}_\perp) \quad (5.6)$$

$$= -e\vec{v} \times \vec{B}_\parallel - e\vec{v} \times \vec{B}_\perp \quad (5.7)$$

Wegen $\vec{v} \parallel \vec{B}_\parallel$ gilt $-e\vec{v} \times \vec{B}_\parallel = 0$

$$\Rightarrow \vec{F}_L = -e\vec{v} \times \vec{B}_\perp \quad (5.8)$$

oder betraglich

$$F_L = e v B_\perp \quad (5.9)$$

Die Richtung von \vec{F}_L zeigt entlang des Leiters. Diese LORENTZ-Kraft hat aber genau die gleiche Wirkung auf die Ladung wie eine elektrische Kraft $\vec{F}_E = -e\vec{E}$, die entlang des Leiters wirkt. Interpretieren wir nun die Kraft auf den geladenen Beobachter als elektrische Kraft, muss wegen $\vec{F} = -e\vec{E}$ ein elektrisches Feld vorliegen, das in Richtung des Leiters ausgerichtet ist ($\vec{E} \parallel d\vec{l}$). Da entlang der gesamten Leiterschleife

$$\vec{E} \parallel d\vec{l} \quad (5.10)$$

gilt, muss über der Leiterschleife mit Radius r eine Spannung U_i anliegen:

$$U_i = \oint_{\text{Leiter-
schleife}} \vec{E} d\vec{l} = \int_0^{2\pi r} E dl \quad (5.11)$$

$$U_i = 2\pi r E \quad (5.12)$$

5.1.1 Quantitative Herleitung des Induktionsgesetzes

Bisher haben wir uns mit der Frage beschäftigt, warum in Versuch 5.1 eine Spannung induziert wird. Hier haben wir zwei plausible Erklärungen gefunden, wobei wir in „Deutung 1“ eine Proportionalität zwischen induzierter Spannung U_i und der zeitlichen Änderung $\frac{d\Phi_M}{dt}$ von Φ_M festgestellt haben.

$$U_i = k \cdot \frac{d\Phi_M}{dt} \quad (5.13)$$

Eigentlich haben wir diese Proportionalität nur anhand von Messergebnissen vermutet. Dies ist aber noch kein vollständiges Induktionsgesetz, da noch die Proportionalitätskonstante k offen bleibt. In „Deutung 2“ konnten wir unser Experiment über die schon bekannte LORENTZ-Kraft erklären. Im Folgenden wollen wir nun das Induktionsgesetz herleiten, indem wir uns beide Deutungen zunutze machen. Das Induktionsgesetz soll die Proportionalität von U_i und $\frac{d\Phi_M}{dt}$ beinhalten (Deutung 1). Die Proportionalitätskonstante beschaffen wir uns über die LORENTZ-Kraft (Deutung 2). Führen wir gedanklich das in Abb. 5.3 abgebildete Experiment durch: Eine rechteckige Leiterschleife mit einem Spannungsmesser wird mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (5.14)$$

senkrecht so durch ein scharf begrenztes homogenes Magnetfeld bewegt, dass die Rechteckseiten der Länge b parallel und die verbleibenden zwei Rechteckseiten mit der Länge l senkrecht zur Bewegungsrichtung \vec{v} der Leiterschleife stehen. In Abb. 5.3 zeigen die Magnetfeld-Vektoren \vec{B} aus der Papierebene heraus. Dies ist symbolisiert durch \odot . Die Feldlinien des B -Feldes verlaufen nur durch den Anteil $A(t) = s(t)l$ der gesamten Fläche $F = bl$, die von dem Leiter eingeschlossen wird. Also trägt auch nur $A(t) = s(t)l$ zum magnetischen Fluss Φ_M durch die Fläche $F = bl$ bei. Der magnetische Fluss lässt sich in diesem Gedankenexperiment sehr leicht berechnen, da die \vec{B} -Feld-Vektoren überall

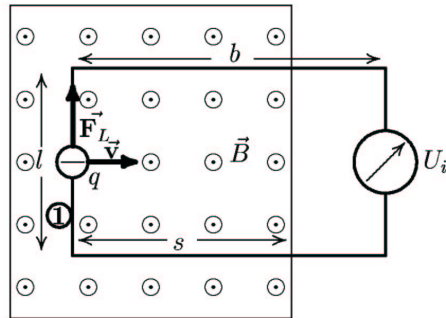


Abbildung 5.3: Eine rechteckige Leiterschleife wird durch ein scharf begrenztes homogenes Magnetfeld gezogen, das senkrecht aus der Papierebene herausragt. An den Enden der Leiterschleife lässt sich mit einem Spannungsmesser eine Spannung U_i messen. Diese lässt sich durch die LORENTZ-Kraft erklären, die auf eine Ladung innerhalb des Leiters wirkt.

senkrecht auf $A(t)$ stehen und dort wegen der Homogenität räumlich konstant sind:

$$\vec{B} \parallel d\vec{A} \quad (5.15)$$

$$\Rightarrow \Phi_M = \iint_{A(t)} \vec{B} d\vec{A} = \iint_{A(t)} B dA = B A(t) \quad (5.16)$$

$$= B l s(t) \quad (5.17)$$

Die induzierte Spannung U_i ist der zeitlichen Änderung $\frac{d\Phi_M}{dt}$ des magnetischen Flusses proportional:

$$U_i \sim \frac{d\Phi_M}{dt} \quad (5.18)$$

$$\Leftrightarrow U_i = k \frac{d\Phi_M}{dt} \quad (5.19)$$

$$\stackrel{(5.17)}{\Rightarrow} U_i = k \frac{d}{dt}(B l s(t)) \quad (5.20)$$

$$= k B l \frac{d}{dt} s(t) \quad (5.21)$$

$$\stackrel{(5.14)}{\Rightarrow} U_i = k B l v \quad (5.22)$$

Die LORENTZ-Kraft wirkt zwar auf alle Ladungsträger innerhalb des Magnetfeldes, kann aber nur auf dem Leiterstück 1 Ladungen verschieben. Wegen

$$F_L = q v B \stackrel{!}{=} F_E = q E \quad (5.23)$$

$$\Rightarrow E = v B \quad (5.24)$$

$$\Rightarrow U_i = E l = B l v \quad (5.25)$$

Der Vergleich von (5.22) und (5.25) zeigt, dass $|k| = 1$ sein muss. Das Vorzeichen von k lässt sich mit energetischen Überlegungen klären: ersetzen wir den Spannungsmesser in Abb. 5.3 durch einen OHMSchen Widerstand R , so wird ein Strom

$$I = \frac{U}{R} \quad (5.26)$$

fließen, und im Widerstand R wird eine Leistung $P = UI$ umgesetzt. Auf den Strom I wirkt innerhalb des Magnetfeldes die LORENTZ-Kraft, die der Bewegungsrichtung entgegenwirken muss, da sie sonst der Bewegung durch das Magnetfeld mithelfen würde, also positive mechanische Arbeit verrichten würde, während sie in R positive elektrische Arbeit leisten würde. Damit hätten wir ein Perpetuum Mobile, das es aus energetischen Gründen nicht geben kann. Der Strom bewirkt also eine LORENTZ-Kraft, die der Bewegung und damit $\frac{d\Phi_M}{dt}$ entgegenwirkt (LENZsche Regel).

<p>LENZsche Regel: Die Induktionsspannung und der Strom, den sie hervorruft, sind stets so gerichtet, dass sie ihrer Ursache entgegenwirken.</p>	(5.27)
---	--------

Aus diesem Grunde schreibt man ein negatives Vorzeichen in das Induktionsgesetz:

<p>Induktionsgesetz: Eine zeitliche Änderung $\frac{d\Phi_M}{dt}$ des magnetischen Flusses Φ_M induziert eine Spannung</p> $U_i = -\frac{d\Phi_M}{dt}$	(5.28)
--	--------

5.1.2 Leistungsbilanz der Induktion

Hier berufen wir uns wieder auf das in Abschnitt 5.1.1 vorgestellte Experiment. Bewegen wir die Leiterschleife in der Zeit dt um ein Stück ds , so leisten wir die mechanische Arbeit $dW = F_L ds$ gegen die LORENTZ-Kraft. Die mechanische Leistung ist per Definition

$$P_{\text{mech}} = \frac{dW}{dt} = F_L \frac{ds}{dt} \stackrel{(5.14)}{=} F_L v. \quad (5.29)$$

In Abschnitt 4.3 auf Seite 156 hatten wir gesehen, dass LORENTZ-Kraft \vec{F}_L und Strom \vec{I}_i den Zusammenhang $\vec{F}_L = l \vec{I}_i \times \vec{B}$ (4.29) haben.

$$\text{Aus } \vec{I}_i \perp \vec{B} \text{ folgt } F_L = l I_i B. \quad (5.30)$$

Wegen

$$F_L = l I_i B \quad \text{und} \quad U_i = B l v \Leftrightarrow v = \frac{U_i}{B l} \quad (5.31)$$

gilt

$$P_{\text{mech}} = F_L v = l I_i B \frac{U_i}{B l} = I_i U_i \quad (5.32)$$

Wie wir in (3.18) auf Seite 95 gesehen haben, ist $P_{\text{el}} = I U$ gleich der elektrischen Leistung in einem Verbraucher, an dem eine Spannung U anliegt und durch den ein Strom I fließt. Damit gilt:

$$P_{\text{mech}} = I_i U_i = P_{\text{el}} \quad (5.33)$$

Offensichtlich wird die mechanische Leistung vollständig in elektrische Leistung umgewandelt.

5.2 Allgemeine Formulierung des Induktionsgesetzes

In Abschnitt 5.1.1 konnten wir über die LORENTZ-Kraft erklären, dass eine Spannung U_i induziert werden muss, wenn wir eine Leiterschleife durch ein Magnetfeld bewegen. In diesem Fall konnten wir auch den Zusammenhang $U_i = -\frac{d\Phi_M}{dt}$ mit dem magnetischen Fluss aus der LORENTZ-Kraft herleiten. Wie wir in Abschnitt 5.1 (Seite 183) schon erwähnt hatten, kann man den magnetischen Fluss Φ_M aber auch auf andere Weise zeitlich ändern. Lässt man die Leiterschleife ruhen und verändert stattdessen das Magnetfeld \vec{B} , so wird auch hier der magnetische Fluss Φ_M zeitlich verändert. Sogar hier wird eine Spannung induziert, obwohl wir das Phänomen nicht mit schon Bekanntem (wie der LORENTZ-Kraft) erklären können.

Leiter wird bewegt:

$$U_i = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -\frac{d}{dt}(B A) = -B \frac{dA}{dt} \rightarrow \text{bewegter Leiter} \rightarrow \text{LORENTZ}$$

Magnetfeld wird verändert:

$$U_i = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -\frac{d}{dt}(B A) = -A \frac{dB}{dt} \rightarrow \text{nicht auf Bekanntes zurückzuführen}$$

Betrachten wir jetzt den zweiten Fall, dass die Leiterschleife ruht, und der magnetische Fluss Φ_M durch eine zeitliche Änderung des Magnetfeldes $\vec{B}(x, y, z, t)$ verändert wird. Das Magnetfeld müssen wir mit Hilfe eines Elektromagneten erzeugen, denn so können wir die Stärke des B -Feldes über den Strom I durch den Elektromagneten zeitlich verändern.

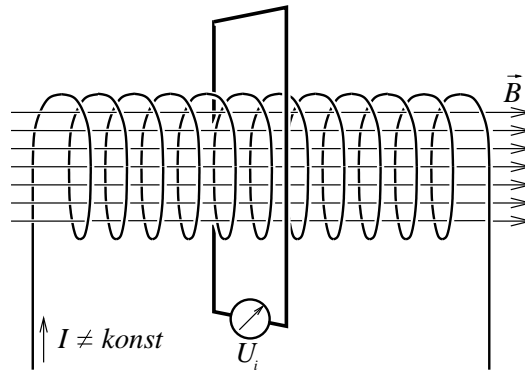


Abbildung 5.4: Der magnetische Fluss Φ_M durch die Leiterschleife wird zeitlich verändert, indem man das Magnetfeld \vec{B} mit Hilfe eines Elektromagneten verändert. Es kann eine Spannung U_I an den Enden der Leiterschleife abgegriffen werden.

In diesem Fall erfährt nur \vec{B} eine Änderung, und \vec{A} bleibt zeitlich konstant. Die zeitliche Änderung des Magnetfeldes ist

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(x, y, z, t). \quad (5.34)$$

Damit lässt sich die Induktionsspannung U_i berechnen durch:

$$U_i = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A} \quad (5.35)$$

A ist hier die Fläche, die von der Leiterschleife umrandet wird. Man kann allgemein aus einer Spannung, die über einem Leiter anliegt, auf die Existenz eines elektrischen Feldes \vec{E} schließen. Es gilt

$$\int_{\text{Leiter}} \vec{E} d\vec{r} = U \quad (5.36)$$

In unserem Fall haben wir eine geschlossene Leiterschleife, die die Fläche A umrandet. Der Integrationsweg ist also der Rand ∂A der Fläche A , und die Spannung ist die Induk-

tionsspannung U_i . Damit geht 5.36 in unserem Fall über in

die integrale Form des
FARADAYSchen Induktionsgesetzes:

$$\oint_{\partial A} \vec{E} d\vec{r} = - \iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A}. \quad (5.37)$$

Dies ist eine der vier MAXWELL-Gleichungen (vgl. Kapitel 7).

Wichtig!

Bisher waren wir davon ausgegangen, dass elektrische Felder konservative Kraftfelder sind, d.h. dass Wegintegrale des E -Feldes entlang geschlossener Wege stets verschwinden. Dann dürfte aber nach (5.37) nie eine Spannung induziert werden. Elektrische Felder sind nur konservative Kraftfelder, solange sie von elektrischen Ladungen erzeugt werden. Elektrische Felder die durch magnetische Induktion induziert werden, sind keine konservativen Kraftfelder.

5.3 Differenzielle Schreibweise

Zu jeder der vier MAXWELL-Gleichungen (siehe Kapitel 7) gibt es eine „integrale“ oder „makroskopische“ Form sowie eine „differenzielle“ oder „mikroskopische“ Form (z.B. 4.3 auf Seite 149). Im letzten Abschnitt hatten wir bereits die integrale Form des FARADAYSchen Induktionsgesetzes hergeleitet. Um die differenzielle Schreibweise aufschreiben zu können, müssen wir zunächst einige mathematische Voraussetzungen schaffen.

5.3.1 Die Rotation

Ein neuer Begriff aus der Differenzialgeometrie ist der Differenzialoperator der **Rotation**. Er kann auf ein Vektorfeld (z.B. auf das \vec{E} -Feld) angewendet werden.

Die **Rotation** eines Vektorfeldes $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)^T$, dargestellt in kartesischen Koordinaten, ist definiert durch

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

Anschaulich bedeutet $\operatorname{rot} \vec{E} =$ „Wirbel von \vec{E} “. Ein anschauliches Vektorfeld, an dem wir uns die Rotation verdeutlichen wollen, ist das Strömungsfeld \vec{v} einer strömenden Flüssigkeit. Ein Styropor-Kügelchen, das auf einem Fluss mit der Strömung mitschwimmt, beginnt zu rotieren, falls die einzelnen Flüssigkeitsschichten mit unterschiedlicher Geschwindigkeit aneinander vorbei gleiten. Der Drehsinn des Styropor-Kügelchens lässt sich aus $\operatorname{rot} \vec{v}$ mit der Rechten-Hand-Regel ablesen.

Rechte-Hand-Regel:

Zeigt der rechte Daumen in die Richtung von $\operatorname{rot} \vec{v}$, so geben die gekrümmten Finger den Drehsinn der Rotation an.

(5.39)

Die Länge des Vektors $\operatorname{rot} \vec{v}$ gibt die Stärke der Drehung an. In Abb. 5.5 ist ein einfaches Strömungsfeld $\vec{v}(x, y, z) = k_0 \cdot (y_0 - y)\vec{e}_x$ mit $\operatorname{rot} \vec{v}$ abgebildet.

Beispiel 5.1

Die Rotation wird der Anschaulichkeit halber am Beispiel einer strömenden Flüssigkeit mit dem Strömungsfeld $\vec{v}(x, y, z) = k_0 \cdot (y_0 - y)\vec{e}_x$ verdeutlicht. Für $\vec{v}(x, y, z) = k_0 \cdot (y_0 - y)\vec{e}_x$ lässt sich die Rotation $\operatorname{rot} \vec{v}$ ausrechnen:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0 \cdot (y_0 - y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_0 \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

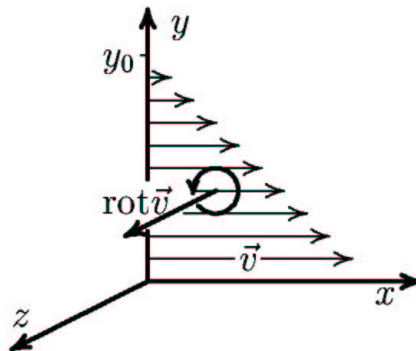


Abbildung 5.5: Ein mit der Strömung mit schwimmendes Styropor-Kügelchen beginnt um eine Achse zu rotieren, die die Richtung von $\text{rot } \vec{v}$ hat. Für den Drehsinn gilt die Rechte-Hand-Regel (Siehe 5.39) In diesem Beispiel (Bsp. 5.3.1) ist $\text{rot } \vec{v} = k_0$.

Wie wir sehen, ist die Rotation im gesamten Vektorfeld konstant. Überall würde sich das Styroporkügelchen gleich schnell gegen den Uhrzeigersinn drehen.

Ferner kann man sich die Rotation in folgendem Kriterium zunutze machen:

Konservative Kraftfelder sind wirbelfrei, d.h. für alle konservativen Kraftfelder \vec{E} gilt (ohne Beweis)

(5.42)

$$\text{rot } \vec{E} = 0.$$

Die für uns wichtigste Bedeutung gewinnt die Rotation dagegen im Satz von STOKES.

5.3.2 Satz von STOKES

Für die Rotation $\text{rot } \vec{E}$ eines Vektorfeldes \vec{E} gilt (unter gewissen Voraussetzungen wie Stetigkeit) der

Satz von STOKES: oder
STOKESScher Integralsatz
Ist ∂A der Rand einer Fläche A , gilt

(5.43)

$$\oint_{\partial A} \vec{E} d\vec{r} = \iint_A (\text{rot } \vec{E}) d\vec{A}.$$

Wichtig ist hierbei, dass der Umlaufsinn des Weges ∂A mit dem Vektor $d\vec{A}$ durch die Rechte-Hand-Regel in Zusammenhang steht. Mit dem Satz von STOKES geht die integrale Form des FARADAYSchen Induktionsgesetzes (5.37) über in die

**differenzielle Form des FARADAYSchen
Induktionsgesetzes:**

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

(5.44)

In Worten:

„Die Wirbel des \vec{E} -Feldes werden durch Änderungen von \vec{B} erzeugt.“ Beweis: Nach der integralen Form des FARADAYSchen Induktionsgesetzes gilt:

$$\oint_{\partial A} \vec{E} d\vec{r} = - \iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A}$$

(5.45)

Dieser Ausdruck geht mit dem STOKESSchen Integralsatz über in

$$\Leftrightarrow \iint_A (\text{rot } \vec{E}) d\vec{A} = - \iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A}$$

(5.46)

Da (5.46) für beliebige Flächen A gelten muss, müssen die Integranden gleich sein. Dies liefert uns die differenzielle Form des FARADAYSchen Induktionsgesetzes (5.44).

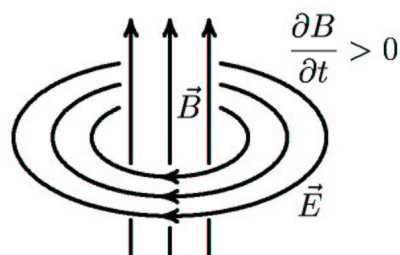


Abbildung 5.6: Die zeitliche Änderung $\frac{\partial B}{\partial t} > 0$ des Magnetfeldes induziert Wirbel des elektrischen Feldes. Bei diesem Umlaufsinn der \vec{E} -Feld-Wirbel muss die zeitliche Änderung des Magnetfeldes positiv sein.

5.4 Gegen- und Selbstinduktion

5.4.1 Gegeninduktion

Jeder beliebige Strom durchflossene Leiter erzeugt ein Magnetfeld \vec{B} . Ändert man den Strom I durch den Leiter, ist auch das erzeugte Magnetfeld \vec{B} zeitlich veränderlich ($\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$). Dieses zeitlich veränderliche Magnetfeld vermag in anderen elektrischen Leitern nach dem FARADAYSchen Induktionsgesetz eine Spannung U_i zu induzieren. Dieses Prinzip nennt man **Gegeninduktion**. Die Gegeninduktion ist im Grunde nichts Neues; in Abschnitt 5.2 haben wir das Prinzip der Gegeninduktion schon einmal angewendet, ohne es beim Namen zu nennen. Im Folgenden wollen wir die Gegeninduktion etwas detaillierter behandeln. Einen einfachen Fall der Gegeninduktion können wir an folgendem Beispiel untersuchen: Es werden zwei Leiterschleifen (Schleife 1 und 2) parallel zu einander angeordnet, wobei ihre Symmetrieachsen identisch sind. Durch Schleife 1 fließt ein zeitlich veränderlicher Strom $I_1(t)$. Für das von Schleife 1 erzeugte Magnetfeld $B_1(t)$ gilt bekanntlich

$$B_1(t) \sim I_1(t) \quad (5.47)$$

Die Leiterschleife 2 wird dabei von $B_1(t)$ durchsetzt. Da $B_1(t)$ zeitlich veränderlich ist, wird in Schleife 2 eine Spannung U_2 induziert. Für diese gilt:

$$U_2 = -\frac{d\Phi_M}{dt} \sim \frac{\partial B_1}{\partial t} \sim \frac{dI_1}{dt} \quad (5.48)$$

$$\Leftrightarrow U_2 \sim \frac{dI_1}{dt} \quad (5.49)$$

$$\Leftrightarrow U_2 = -L_{12} \frac{dI_1}{dt} \quad (5.50)$$

Spannung U_2 über Schleife 2 und Stromänderung $\frac{dI_1}{dt}$ durch Schleife 1 sind also proportional zueinander. Der Proportionalitätsfaktor L_{12} wird **Gegeninduktivität** genannt. Für die Dimension der Gegeninduktivität gilt

$$[L_{12}] = \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = \text{Henry} = \text{H} \quad (5.51)$$

Man kann natürlich auch durch Schleife 2 einen Strom I_2 fließen lassen. Für die Spannung U_1 über der Schleife 1 gilt dann analog

$$U_1 = -L_{21} \frac{dI_2}{dt} \quad (5.52)$$

Erstaunlicherweise gilt allgemein das

Reziprozitätsgesetz

$$L_{21} = L_{12}$$

(5.53)

Einen allgemeinen Beweis des Reziprozitätsgesetzes wollen wir hier nicht führen. Stattdessen wollen wir das Reziprozitätsgesetz an einem einfachen Fall verifizieren.

Beispiel 5.2

Denken wir uns zwei sehr lange, ineinander geschobene Zylinderspulen mit gleicher Länge ($l := l_1 = l_2$), aber unterschiedlichem Querschnitt ($A_1 \neq A_2$). Hier sei Spule 1 die innere mit N_1 Windungen, und Spule 2 die äußere Spule ($A_1 < A_2$) mit N_2 Windungen. Wir betrachten nun beide Fälle: Im ersten Fall wird eine Spannung U_2 in Spule 2 durch ein zeitlich veränderliches Magnetfeld $B_1(t)$ induziert, das wiederum durch den Strom $I_1(t)$ durch die Spule 1 erzeugt wird. Für das Magnetfeld $B_1(t)$ gilt nach (4.64):

$$B_1(t) = \mu_0 I_1(t) \frac{N_1}{l} \quad (5.54)$$

Im zweiten Fall induziert nun umgekehrt ein zeitlich veränderliches Magnetfeld $B_2(t)$, das von $I_2(t)$ erzeugt wird, eine Spannung U_1 in Spule 1. Für das Magnetfeld $B_2(t)$ gilt:

$$B_2(t) = \mu_0 I_2(t) \frac{N_2}{l} \quad (5.55)$$

Um die magnetischen Flüsse Φ_1 und Φ_2 zu berechnen, müssen wir berücksichtigen, dass in beiden Fällen nur die Fläche A_1 einen Beitrag zum magnetischen Fluss liefert. In Fall 1 ist der Querschnitt A_2 der äußeren Spule (Spule 2) zwar größer als A_1 , allerdings können wir den Bereich außerhalb der Spule 1 als feldfrei annehmen. Im Inneren der Spule 1 wird ein homogenes Magnetfeld $B_1(t) = \mu_0 I_1(t) \frac{N_1}{l}$ vorliegen. Daher wird

$$\Phi_2 = N_2 A_1 B_1(t) = N_2 A_1 \mu_0 I_1(t) \frac{N_1}{l} \quad (5.56)$$

$$\Rightarrow U_2 = -N_2 A_1 \frac{\partial B_1(t)}{\partial t} = -N_2 A_1 \mu_0 \frac{dI_1(t)}{dt} \frac{N_1}{l} =: -L_{12} \frac{dI_1}{dt} \quad (5.57)$$

gelten. In Fall 2 ist das Magnetfeld $B_2(t) = \mu_0 I_2(t) \frac{N_2}{l}$ zwar über das ganze Innere von Spule 2 verteilt, jedoch wird die Spannung U_1 in Spule 1 nur durch den Fluss durch den Querschnitt A_1 der Spule 1 induziert. Deshalb geht auch hier nur die Fläche A_1 in den Ausdruck der Induktionsspannung U_1 ein.

$$\Phi_1 = N_1 A_1 B_2(t) = N_1 A_1 \mu_0 I_2(t) \frac{N_2}{l} \quad (5.58)$$

$$\Rightarrow U_1 = -N_1 A_1 \frac{\partial B_2(t)}{\partial t} = -N_1 A_1 \mu_0 \frac{dI_2(t)}{dt} \frac{N_2}{l} =: -L_{21} \frac{dI_2}{dt} \quad (5.59)$$

Ein Vergleich von (5.57) und (5.59) zeigt, dass

$$L_{21} = L_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A_1}{l} \quad (5.60)$$

gilt. Das Reziprozitätsgesetz (5.53) haben wir also an diesem einfachen Beispiel nachvollziehen können.

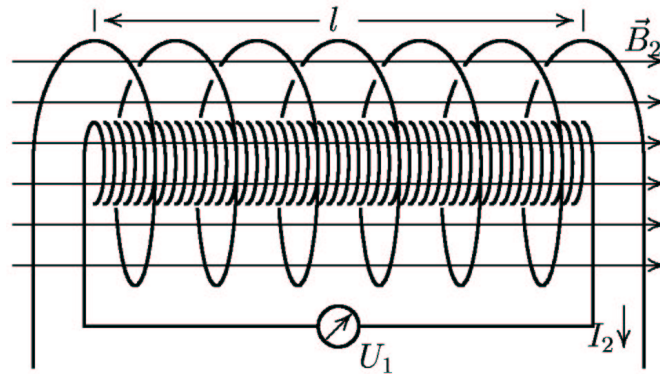


Abbildung 5.7: Ein zeitlich nicht konstanter Strom I_2 in der Spule 2 (äußere Spule) erzeugt ein zeitlich veränderliches Magnetfeld \vec{B}_2 , das in der Spule 1 (innere Spule) eine Spannung induziert. Hier hat die innere Spule $N_1 = 49$ Windungen, und die äußere Spule $N_2 = 7$ Windungen.

5.4.2 Selbstinduktion

Ein veränderlicher Strom $I(t)$ in einer Spule induziert nicht nur in anderen Spulen eine Spannung, er induziert selbst in der Spule, durch die er fließt, eine Spannung U_i , die nach der LENZschen Regel der Änderung des Stromes $\frac{dI}{dt}$ entgegenwirkt. Es gilt

$$U_i = -L \frac{dI}{dt} \quad (5.61)$$

Hier ist L die **Selbstinduktivität**. Sie wird auch kurz als **Induktivität** bezeichnet. Die Dimension der Induktivität ist die gleiche wie die der Gegeninduktivität:

$$[L] = \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = \text{Henry} = \text{H} \quad (5.62)$$

Das Phänomen der Selbstinduktion tritt nicht nur bei Spulen auf, sondern bei allen elektrischen Leitern, in denen ein zeitlich veränderlicher Strom I fließt. Bei Spulen tritt

die Selbstinduktion jedoch besonders stark auf.

Ist A der Querschnitt, N die Windungszahl und l die Länge der Spule, so gilt speziell für die Induktivität einer Spule

$$B(t) = \mu_0 I(t) \frac{N}{l} \quad (5.63)$$

$$\Rightarrow \Phi_M(t) = N \int_A \vec{B}(t) d\vec{A} = NB(t) A \quad (5.64)$$

$$\Rightarrow U_i = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -N A \frac{\partial B(t)}{\partial t} = -\mu_0 A \frac{N^2}{l} \frac{dI(t)}{dt} \quad (5.65)$$

$$\Rightarrow L = \mu_0 \frac{N^2 A}{l} \quad (5.66)$$

Versuch 5.2

Eine Gleichspannungsquelle mit der Spannung U wird mit einem Strommesser I , einer Spule L und einem variablen Widerstand R (Schiebewiderstand) in Serie geschaltet (siehe Abb. 5.8). Die Spule in unserem Versuch ist keine ideale Spule, d.h. unsere Spule hat wie jeder elektrische Leiter auch einen OHMSchen Widerstand. Dieser ist zwar klein im Vergleich zu R , aber dennoch wird der Spannungsmesser auch im elektrostatischen Fall einen kleinen Spannungsabfall anzeigen. Verschieben wir allerdings den Metallabgriff des Schiebewiderstandes, verändern damit also den Wert von R , wird damit der Strom I nach dem OHMSchen Gesetz $I(t) = \frac{U}{R(t)}$ verändert. Es wird durch die zeitliche Änderung $\frac{dI(t)}{dt}$ des Stromes $I(t)$ eine Spannung U_i zwischen den Enden der Spule induziert (Selbstinduktion). Für diese Induktionsspannung gilt

$$U_i = -L \frac{dI(t)}{dt} = -L \frac{d}{dt} \left(\frac{U}{R(t)} \right) = \frac{LU}{R^2(t)} \cdot \frac{dR(t)}{dt}. \quad (5.67)$$

Je schneller wir den Schiebewiderstand hin und her schieben, desto größer wird die Induktionsspannung U_i sein. Sie kann auch größere Werte als die Klemmenspannung U der Spannungsquelle annehmen.

5.4.3 Ersatzschaltbild

Da eine Spule eine Spannung U_i induziert, die dann in der KIRCHHOFFSchen Maschenregel (siehe Abschnitt 10.1 auf Seite 100) mit in die Summe aller Einzelspannungen eingeht, fasst man sie oft als eigene Spannungsquelle auf und zeichnet auch anstelle der Spule eine

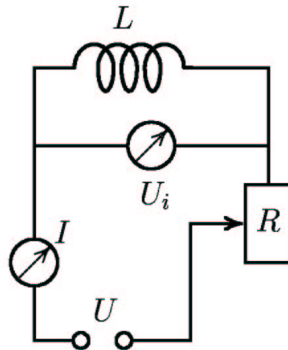


Abbildung 5.8: Aufbau von Versuch 5.2 zur Selbstinduktion

Spannungsquelle in den Schaltplan (Ersatzschaltbild). Diese Spannung U_i ist in der Regel abhängig von anderen Größen im Stromkreis und daher nicht sehr leicht zu berechnen. So ist die Induktionsspannung U_i , ähnlich wie der Spannungsabfall über einem OHMSchen Widerstand, in erster Linie abhängig vom Strom I , dieser ist aber wiederum abhängig von allen Widerständen und Spannungen im Stromkreis. Die Berechnung der Spannungsabfälle in Stromkreisen, die nur OHMSche Widerstände enthalten, führt auf z.T. schwierige Gleichungssysteme (siehe Abschnitt 10.1, Seite 100ff). Bei Induktionsspannungen hängt die Spannung aber nicht nur vom Strom I alleine ab, sondern von der zeitlichen Ableitung. Dies führt i.d.R. auf Differenzialgleichungen, dessen Lösungen Aufschluss über den zeitlichen Verlauf von Strom und Spannungen geben. Einfache Beispiele sind Ein- und Ausschaltvorgänge von RL -Gliedern (siehe Abschnitt 5.5, Seite 201).

5.4.4 Der Transformator

Oft möchte man mit elektrischen Geräten oder Schaltungen arbeiten, die eine ganz bestimmte Spannung benötigen. In der Regel ist die von den Stadtwerken vorgegebene Netzspannung von 230V Wechselspannung (siehe Abschnitt 5.7 „Wechselstrom“) nicht die Richtige. Wir müssen die Netzspannung in eine geeignete Spannung „transformieren“. Diese Spannungsumwandlung übernimmt der **Transformator**, ein Schaltelement, das wir im Folgenden behandeln werden:

Zwei Spulen werden so ineinander gewickelt, dass sie den gleichen Spulenquerschnitt A haben. Ferner müssen wir beim Aufwickeln darauf achten, dass wir den gleichen Drehsinn wählen, so dass in beiden Spule Φ_M das gleiche Vorzeichen hat. Wichtig ist nun, dass sich die Windungszahl N_1 der Spule 1 von der Windungszahl N_2 der anderen Spule unterscheidet. Legen wir nun an die Spule 1 (die sog. Primärspule) eine zeitlich veränderliche (!) Spannung $U_1(t)$ an, verursacht diese einen Stromfluss $I(t)$, der in der Spule einen zeitlich veränderlichen magnetischen Fluss Φ_M bewirkt. Dadurch wird eine Spannung U_i induziert

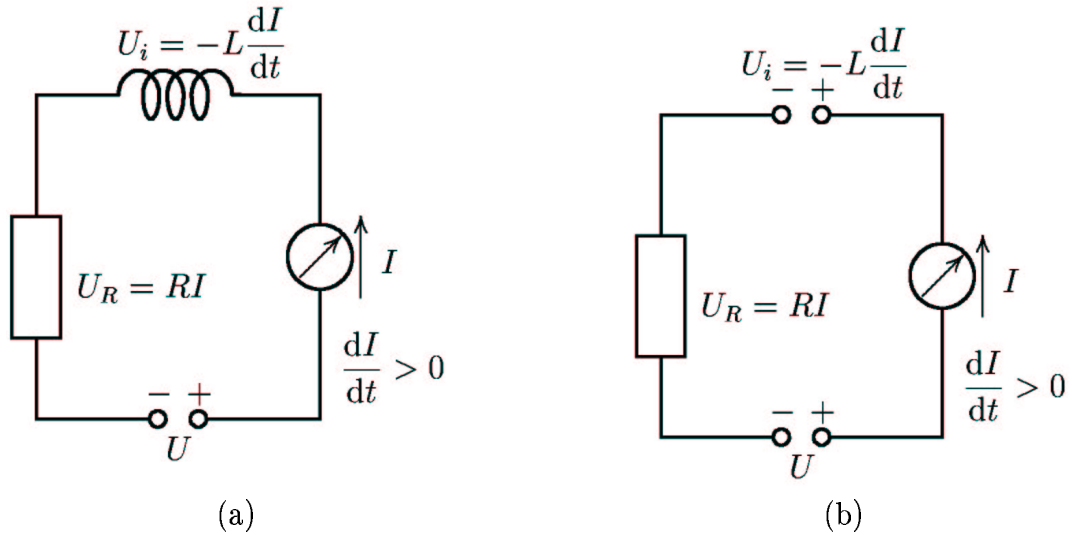


Abbildung 5.9: Es sind eine Spannungsquelle U , ein OHMScher Widerstand, eine Spule L und ein Strommesser in Serie geschaltet. Da die Spule bei nicht konstantem Strom - hier sei $\frac{dI}{dt} > 0$ angenommen - eine Spannung U_i induziert, wird die Spule L oft als Spannungsquelle in sog. Ersatzschaltbildern eingezeichnet.

(Selbstinduktion). Nehmen wir an, dass der Stromkreis keinen OHMSchen Widerstand enthält, gilt dann im Primärstromkreis nach der KIRCHHOFFSchen Maschenregel:

$$U_1 + U_{i_1} = 0 \quad (5.68)$$

$$\Leftrightarrow U_1 - N_1 \frac{d\Phi_M}{dt} = 0 \quad (5.69)$$

$$\Leftrightarrow U_1 = N_1 \frac{d\Phi_M}{dt} \quad (5.70)$$

$$(5.71)$$

Der magnetische Fluss Φ_M ist aber in beiden Spulen der gleiche. Deshalb wird auch in Spule 2 (Sekundärspule) eine Spannung U_{i_2} induziert (Gegeninduktion), die sich nur aufgrund der unterschiedlichen Windungszahlen N_1 und N_2 unterscheidet. Im Sekundärstromkreis kann daher an den Enden eine Spannung U_2 abgegriffen werden, für die gilt:

$$U_2 = -N_2 \frac{d\Phi_M}{dt} \quad (5.72)$$

$$(5.73)$$

Aus den Gleichungen (5.70) und (5.73) folgt dann die

Transformator-Gleichung:

$$\frac{U_1}{U_2} = -\frac{N_1}{N_2} \quad (5.74)$$

In der physikalischen Praxis verwendet man Spulen, die um einen Eisenkern gewickelt sind. Der Eisenkern verstärkt das Magnetfeld und damit den magnetischen Fluss in der Spule (siehe „Materie im Magnetfeld“).

Die Transformation der Spannungen kann aber nur erfolgen, wenn sich die angelegte Spannung $U_1(t)$ permanent ändert. Bei idealen Spulen (die es in der Realität nicht gibt) würde der Strom I_1 in der Primärspule bei einer konstanten Spannung U_1 divergieren, da weder ein Spannungsabfall über einem OHMschen Widerstand erfolgen, noch eine Gegenspannung induziert werden kann (wegen $\frac{dI}{dt} = 0$).

Am zweckmäßigsten sind Transformatoren mit geschlossenem Eisenkern (z.B. einem Torus). Hier ist das Äußere des Eisenkerns so gut wie feldfrei, so dass die geschlossenen Magnetfeldlinien entlang des Eisenkerns verlaufen. Deshalb brauchen Primär- und Sekundärspule jetzt auch nicht mehr ineinander gewickelt zu sein, da durch beide Spulen die gleiche Anzahl von Feldlinien verläuft, also der magnetische Fluss Φ_M in beiden gleich ist.

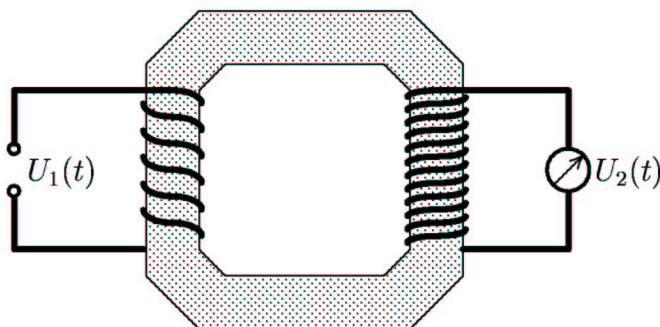


Abbildung 5.10: Der abgebildete Transformator hat in der Primärspule $N_1 = 6$ Windungen und in der Sekundärspule $N_2 = 12$ Windungen. Die Sekundärspannung $U_2(t)$ ist also wegen $\frac{U_1}{U_2} = -\frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{2}$ doppelt so groß wie die Primärspannung $U_1(t)$.

5.5 Ein- und Abschaltvorgänge

Im nun Folgenden diskutieren wir Ein- und Abschaltvorgänge von RL -Kreisen. Ein RL -Kreis besteht aus einer Gleichspannungsquelle U_0 , einem Schalter S , einem OHMschen Widerstand R und einer Induktivität L , die alle in Serie geschaltet sind (siehe Abb.5.11). Wird S zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ geschlossen, wächst der Strom $I(t)$ langsam an, da die In-

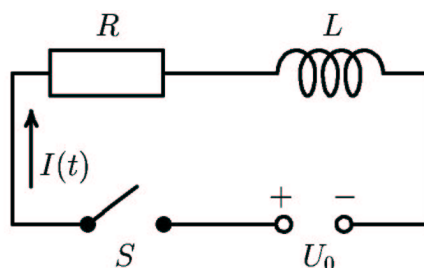


Abbildung 5.11: Eine Gleichspannungsquelle U_0 , ein Schalter S , ein OHMscher Widerstand R und eine Induktivität L sind in Serie geschaltet. Dieser Aufbau wird als RL -Kreis oder als RL -Schaltung bezeichnet.

duktionsspannung $U_i = \frac{dI}{dt}$ dem Stromfluss I entgegenwirkt (LENZsche Regel). Zu Beginn des Ladevorgangs gilt:

$$I(0) = 0 \quad (5.75)$$

Der zeitliche Verlauf des Stromes $I(t)$ lässt sich über die KIRCHHOFFSche Maschenregel bestimmen: Zunächst müssen wir alle einzelnen Spannungsabfälle bestimmen. Dabei ist es wichtig, dass wir die Vorzeichen richtig einsetzen. Wir müssen also einen positiven Umlaufsinn wählen. Diesen wählen wir so, dass die Gleichspannung U_0 mit positivem Vorzeichen in die Maschenregel eingeht (In Abb. 5.11 ist das der Uhrzeigersinn). Für den Spannungsabfall U_R über dem OHMschen Widerstand R gilt

$$U_R = -RI \quad (5.76)$$

und für die Induktionsspannung U_i über L gilt

$$U_i = -L \frac{dI}{dt}. \quad (5.77)$$

Nach der KIRCHHOFFSchen Maschenregel muss die Summe aller Einzelspannungen gleich null sein:

$$U_0 + U_R + U_i = 0 \quad (5.78)$$

$$\Rightarrow U_0 - RI + U_i = 0 \quad (5.79)$$

Aus (5.77) folgt durch Integration über dt :

$$\int_{t_0=0}^t U_i dt = -L \cdot \tilde{I}(t) \Big|_{I(0)=0}^{I(t)} = -L I(t) \quad (5.80)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{L} \int_0^t U_i dt = I(t) = I \quad (5.81)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (5.79) für den Strom ein, folgt:

$$U_0 + \frac{R}{L} \int_0^t U_i dt + U_i = 0 \quad (5.82)$$

$$\Leftrightarrow U_i + \frac{R}{L} \int_0^t U_i dt = -U_0 \quad \Big| \frac{d}{dt} \quad (5.83)$$

$$\frac{dU_0}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{dU_i}{dt} + \frac{R}{L} U_i \quad (5.84)$$

Dies ist eine homogene lineare DGL 1. Ordnung, die wir durch den Separationsansatz lösen können:

$$\Leftrightarrow \frac{dU_i}{U_i} = -\frac{R}{L} dt \quad (5.85)$$

$$\Leftrightarrow \int_{U_i(0)}^{U_i(t)} \frac{d\tilde{U}_i}{\tilde{U}_i} = -\int_0^t \frac{R}{L} d\tilde{t} \quad (5.86)$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{U_i(t)}{U_i(0)} = -\frac{R}{L} t \quad (5.87)$$

$$\Leftrightarrow U_i(t) = U_i(0) e^{-\frac{R}{L} t} \quad (5.88)$$

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ fließt noch kein Strom. Daher fällt noch keine Spannung über dem OHMSchen Widerstand R ab. Induktionsspannung $U_i(0)$ und Quellspannung U_0 sind deshalb für $t_0 = 0$ entgegengesetzt gleich ($U_i(0) = -U_0$). Eingesetzt in (5.88) ergibt dies

$$U_i(t) = -U_0 e^{-\frac{R}{L} t} \quad (5.89)$$

Wie bei allen zeitlich exponentiell verlaufenden Vorgängen definiert man auch hier eine Zeitkonstante $\tau := \frac{L}{R}$. Damit gilt für den Einschaltvorgang

$$\boxed{U_i(t) = -U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}} \quad (5.90)$$

Für den Strom beim Ladevorgang gilt dann:

$$U_i = -L \frac{dI}{dt} \quad (5.91)$$

$$\int_0^t U_i d\tilde{t} = -L \int_{I(0)=0}^{I(t)} d\tilde{t} \quad (5.92)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t U_0 e^{-\frac{R}{L}\tilde{t}} d\tilde{t} = -L I(t) \quad (5.93)$$

$$\Leftrightarrow \frac{U_0 L}{R} e^{-\frac{R}{L}\tilde{t}} \Big|_0^t = -L I(t) \quad (5.94)$$

$$\Leftrightarrow \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = I(t) \quad (5.95)$$

Mit $\tau = \frac{L}{R}$ gilt dann

$$\Leftrightarrow \boxed{I(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)} \quad (5.96)$$

Der Strom wird nach dem Einschalten steil ansteigen und einen Grenzwert von

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \frac{U_0}{R}, \quad (5.97)$$

je nach Größe des OHMSchen Widerstandes, schon bald sehr nahe kommen. Man kann in guter Näherung $I(t) = \frac{U_0}{R}$ annehmen, wenn t einige Zeitkonstanten τ beträgt.

Beim Abschaltvorgang nehmen wir an, dass der Schalter vor dem Öffnen ($t = 0$) bereits

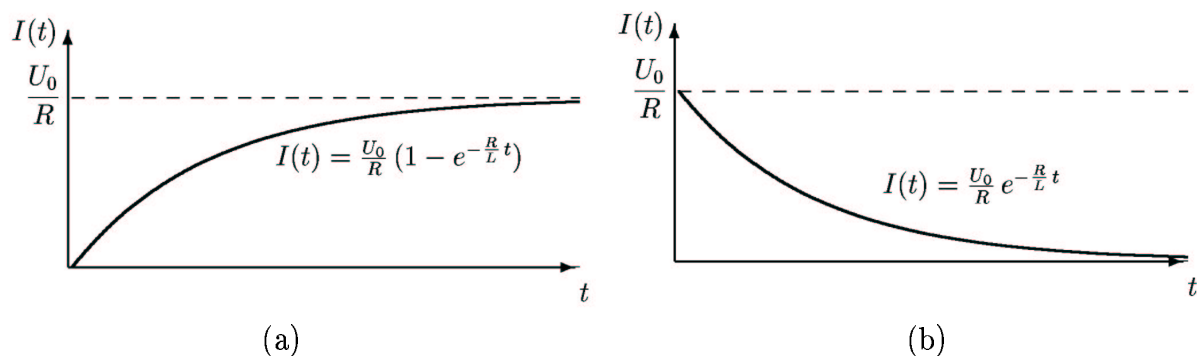


Abbildung 5.12: Stromverlauf in der RL -Schaltung: (a) Beim Einschaltvorgang steigt der Strom am Anfang steil an und nähert sich dann dem Grenzwert $\frac{U_0}{R}$ an. (b) Beim Abschaltvorgang hört der Strom nicht sofort auf zu fließen. Er fällt exponentiell ab und nähert sich dem Grenzwert null an.

eine Zeit lang ($\gg \tau$) geschlossen gewesen ist, denn dann können wir

$$I(0) = \frac{U_0}{R} = I_0 \quad (5.98)$$

annehmen. Die Diffeferenzialgleichung (DGL) für den Abschaltvorgang erhalten wir wieder über die KIRCHHOFFSche Maschenregel. In diesem Fall entfällt der inhomogene Teil der Gleichspannung, da diese durch den offenen Schalter nicht mehr zum Stromfluss I beitragen kann. Die DGL des Abschaltvorgangs ist deshalb:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0 \quad (5.99)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0 \quad (5.100)$$

Hier wenden wir wieder den Separationsansatz an:

$$-\frac{L}{R} \frac{dI}{I} = dt \quad (5.101)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{L}{R} \int_{I(0)=I_0}^{I(t)} \frac{d\tilde{I}}{\tilde{I}} = \int_{t=0}^t d\tilde{t} \quad (5.102)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{L}{R} \ln \frac{I(t)}{I_0} = t \quad (5.103)$$

$$\Leftrightarrow I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L} t} \quad (5.104)$$

Der Strom $I(t)$ klingt also exponentiell ab:

$$\boxed{I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}} \quad (5.105)$$

5.6 Wechselstrom

Wir haben in Abschnitt 5.4.4 über Transformatoren festgestellt, dass in der Sekundärspule überhaupt nur eine Spannung induziert werden kann, wenn der Strom in der Primärspule zeitlich veränderlich ist. Wir können daher keine Gleichströme transformieren. Da man mit dieser Einschränkung nicht leben möchte, wird von den Stadtwerken eine sinusförmige Wechselspannung vorgegeben. Der Vorteil liegt auf der Hand: Man kann nun die vorgegebene Wechselspannung in die spezielle Wechselspannung transformieren, die ein Verbraucher zum Betrieb benötigt. Die Wechselspannung hat einen weiteren Vorteil: Sie ist weitaus bequemer herzustellen als Gleichspannungen.

5.6.1 Erzeugung von Wechselspannung

Versuch 5.3

In einem homogenen, zeitlich konstanten Magnetfeld \vec{B} lassen wir eine rechteckige Leiterschleife, wie in Abb. 5.13 gezeigt, mit einer Winkelgeschwindigkeit ω rotieren. Hier sind sowohl das magnetische Feld, als auch die Fläche, die von der Leiterschleife eingeschlossen wird, zeitlich konstant. Dennoch ändert sich der magnetische Fluss Φ_M , da die Flächennormale \vec{A} mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert und daher der Winkel $\varphi = \omega t$, den die Flächennormale \vec{A} und die Magnetfeldlinien miteinander einschließen, ständig seinen Wert ändert. Da die Fläche \vec{A} nicht gekrümmt und das magnetische Feld \vec{B} homogen ist, geht das Oberflächenintegral zur Berechnung des magnetischen Flusses Φ_M in ein Skalarprodukt über:

$$\Phi_M = \iint_A \vec{B} \, d\vec{A} = \vec{B} \cdot \vec{A} = B A \cos \phi \quad (5.106)$$

$$\Leftrightarrow \Phi_M = B A \cos(\omega t) \quad (5.107)$$

Damit sehen wir, dass sich der magnetische Kraftfluss Φ_M zeitlich ändert. Anschaulich kann man sich das verdeutlichen, dass sich die Zahl der Feldlinien, die die Leiterschleife durchsetzen, permanent ändert. Daher wird eine Spannung $U(t)$ induziert:

$$U(t) = -\frac{d\Phi_M}{dt} \stackrel{(5.107)}{=} \frac{d}{dt}[B A \cos(\omega t)] \quad (5.108)$$

$$\Leftrightarrow U(t) = -B A \omega \sin(\omega t) \quad (5.109)$$

Um das negative Vorzeichen zu entfernen, das durch das Ableiten des Kosinus entstanden ist, verlegen wir den Zeitnullpunkt um eine halbe Periodendauer, so dass die Induktionsspannung die Form annimmt:

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t) \quad \text{mit} \quad U_0 = B A \omega. \quad (5.110)$$

An den Enden der Leiterschleife können wir also eine sinusförmige Wechselspannung $U(t)$ messen, die die Winkelgeschwindigkeit ω der rotierenden Leiterschleife hat.

5.6.2 Wechselstromwiderstände

Bei Gleichströmen konnten wir bisher nur einen Widerstand: den OHMSchen Widerstand R . Schalten wir eine Kapazität (Kondensator) in einen elektrischen Gleichstromkreis, so kann im stationären Zustand (d.h. zu einem Zeitpunkt $t \gg \tau$) kein Strom mehr fließen.

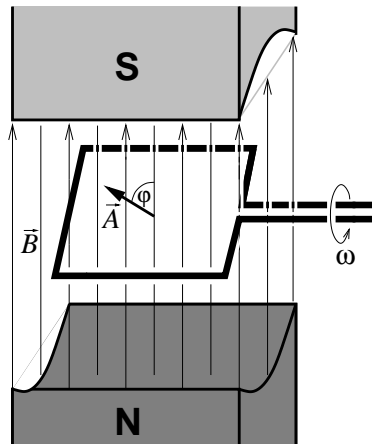


Abbildung 5.13: Eine rechteckige Leiterschleife rotiert in einem homogenen Magnetfeld. An den Enden der Spule kann eine sinusförmige Wechselspannung abgegriffen werden.

Man kann also im Gleichstromkreis den Kondensator als unendlich großen OHMschen Widerstand auffassen. Schalten wir dagegen eine ideale Induktivität (Spule) in einen Gleichstromkreis, kann (im stationären Zustand) der Strom ungehindert durch die Spule fließen, so dass wir zwischen den Enden der Spule keinen Spannungsabfall messen können. Die Spule hat also einen verschwindenden OHMschen Widerstand. In Wechselstromkreisen hingegen können auch Spulen und Kondensatoren endliche Widerstände annehmen:

OHMscher Widerstand

Wird an einen OHMscher Widerstand R eine Wechselspannung $U(t)$ angelegt, fällt an ihm eine Spannung

$$U_R = U(t) = RI(t) \quad (5.111)$$

ab. Aus

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t) \quad (5.112)$$

folgt daher

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \sin(\omega t) \quad (5.113)$$

Da dieser Ausdruck nicht von ω abhängt, gilt das OHMsche Gesetz für alle Kreisfrequenzen ω . Der Strom $I(t)$ schwingt genauso wie die Spannung $U(t)$ sinusförmig. Strom und Spannung sind daher zu jedem Zeitpunkt proportional zueinander, d.h. sie sind in Phase.

Induktiver Widerstand

Legen wir nun an die Enden einer idealen Spule mit der Induktivität L eine Wechselspannung $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ an, stellt sich der Strom $I(t)$ so ein, dass Induktionsspannung

$U_i(t) = -L \frac{dI(t)}{dt}$ und Quellspannung $U(t)$ die KIRCHHOFFSche Maschenregel erfüllen:

$$U(t) + U_i(t) = 0 \quad (5.114)$$

$$\Leftrightarrow U(t) = L \frac{dI}{dt} \quad (5.115)$$

$$\Leftrightarrow U_0 \sin(\omega t) = L \frac{dI(t)}{dt} \quad (5.116)$$

Durch Integration dieser Gleichung erhalten wir

$$U_0 \sin(\omega t) = L \frac{dI(t)}{dt} \quad \Bigg| \int \quad (5.117)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{U_0}{L\omega} \cos(\omega t) = I(t) \quad (5.118)$$

$$\Leftrightarrow \frac{U_0}{L\omega} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = I(t) \quad (5.119)$$

Hier sind Strom $I(t)$ und Spannung $U(t)$ nicht mehr phasengleich. Der Strom eilt der Spannung um $\frac{\pi}{2}$ hinterher. Die Amplitude des Stroms $I(t)$ ist jetzt frequenzabhängig. Setzen wir die Amplituden von Spannung $U(t)$ und Strom $I(t)$ ins Verhältnis, können wir analog zum OHMSchen Widerstand den **induktiven Widerstand** R_L definieren:

<p>Induktiver Widerstand:</p> $R_L = \omega L$	(5.120)
---	---------

Im Falle des Gleichstromkreises verschwindet der induktive Widerstand wegen $\omega = 0$, so dass der Strom divergiert, sofern es keine anderen OHMSchen Widerstände gibt.

Kapazitiver Widerstand

Nun legen wir an die Platten eines Kondensators mit der Kapazität C eine Wechselspannung an. Es fließt im Gegensatz zum Gleichstromkreis ein Strom $I(t)$, der umso größer ist, je größer die Kreisfrequenz ω ist. Es muss wieder die KIRCHHOFFSche Maschenregel erfüllt sein,

$$U(t) + U_C = U_0 \sin(\omega t) - \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad (5.121)$$

d.h. die Spannung U_C , die zwischen den Kondensatorplatten anliegt, muss entgegengesetzt gleich der Quellspannung $U(t)$ sein. Der Strom $I(t)$ muss sich so einstellen, dass er die

Ladungen

$$Q(t) = \int I(t) dt \quad (5.122)$$

genau so zwischen den Kondensatorplatten hin und her schiebt, dass die KIRCHHOFFSche Maschenregel erfüllt ist. Wenn wir (5.122) in (5.121) einsetzen und nach t ableiten, erhalten wir die Zeitabhängigkeit des Stroms:

$$U_0 \sin(\omega t) - \frac{1}{C} \int I(t) dt = 0 \quad \left| \frac{d}{dt} \right. \quad (5.123)$$

$$\Leftrightarrow U_0 \omega \cos(\omega t) = \frac{1}{C} I(t) \quad (5.124)$$

$$\Leftrightarrow U_0 \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{C} I(t) \quad (5.125)$$

$$\Leftrightarrow I(t) = U_0 \omega C \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (5.126)$$

Auch hier sind Strom $I(t)$ und Spannung $U(t)$ nicht phasengleich. Der Strom eilt der Spannung um $\frac{\pi}{2}$ voraus. Genau wie beim induktiven Widerstand kann man die Amplituden von Strom und Spannung ins Verhältnis setzen, wodurch man den **kapazitiven Widerstand** R_C erhält:

Kapazitiver Widerstand:

$$R_C = \frac{1}{\omega C} \quad (5.127)$$

Der kapazitive Widerstand ist umso kleiner, je größer die Kreisfrequenz ist. Für kleine Kreisfrequenzen nimmt er große Werte an, bis er für $\omega \rightarrow 0$ (Gleichstromkreis) unendlich groß wird. Kompliziertere Stromkreise können wir mit den Ausdrücken (5.120) und (5.127) für die Wechselstromwiderstände jedoch noch nicht ausrechnen, da so die Phasenunterschiede nicht in die Rechnung mit eingehen. In der Wechselstromtechnik ist es zweckmäßig mit komplexen Wechselstromwiderständen zu rechnen, da man so die Phasenunterschiede von Strom und Spannung mitberücksichtigen kann. Dieses Verfahren werden wir im nächsten Semester kennenlernen.

5.7 Kräfte auf Strom durchflossene Leiterschleifen

Versuch 5.4

Wir halten eine rechteckige Leiterschleife so in ein homogenes Magnetfeld, dass die Flächennormale der Fläche, die von dem Leiter eingeschlossen wird, einen Winkel ϑ mit den Magnetfeldlinien einschließt. Im Gegensatz zu Versuch 5.3 (Seite 205) lassen wir die Schleife nicht rotieren, dagegen lassen wir einen Strom I durch die Schleife fließen. Unsere Beobachtung zeigt, dass die Schleife um eine Achse zu rotieren beginnt, die senkrecht zur Flächennormaler und zum Magnetfeld steht.

In Abschnitt 4.3 (Seite 156) hatten wir aus der LORENTZ-Kraft hergeleitet, dass sich die auf eine Längeneinheit bezogene Kraft $\frac{\vec{F}}{l}$, die ein Magnetfeld \vec{B} auf einen geraden, vom Strom \vec{I} durchflossenen Leiter ausübt, darstellen lässt durch

$$\frac{\vec{F}}{l} = \vec{I} \times \vec{B}. \quad (5.128)$$

In der Regel haben wir es allerdings nicht mit geraden, sondern mit beliebig geformten Leitern zu tun. Hier reicht es nicht aus, jedes infinitesimale Leiterelement der Länge dl gesondert zu betrachten und dann über den Leiter zu integrieren. Die Gesamtkraft wäre in einem homogenen Magnetfeld stets gleich null (ohne Beweis). Obwohl sich zwei Kraftvektoren, die entgegengesetzt gleich groß sind, zu einer resultierenden Kraft von null superpositionieren, können sie durchaus ein Drehmoment bewirken. Dazu müssen sie an zwei verschiedenen Orten angreifen, die nicht auf einer Geraden mit der Richtung der Kraftvektoren liegen. Wir müssen daher berücksichtigen, wo die Kräfte auf den Leiter ansetzen. Unsere Beobachtung in Versuch 5.4 zeigt, dass die resultierende Kraft durchaus gleich null ist, da sich die Leiterschleife nicht entfernt, sondern nur zu einer Drehung gezwungen wird.

Die Leiterschleife habe zwei Rechteckseiten der Länge a und zwei der Länge b . Die Leiterschleife sei, wie in Abb. 5.14 gezeigt, um den Winkel ϑ gegen das Magnetfeld geneigt. Auf jeden der vier Rechteckseiten wirkt eine LORENTZ-Kraft, jedoch nur die LORENTZ-Kräfte auf die beiden Leiterstücke der Länge b bewirken ein Drehmoment $\vec{\tau}$, da die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte nicht die gleiche Richtung wie \vec{F} hat. Der Hebelarm ist jetzt $\frac{\vec{a}}{2}$. \vec{a} und \vec{F} schließen den Winkel ϑ miteinander ein. Deshalb gilt für das Drehmoment $\vec{\tau}$ auf die Leiterschleife:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{a}}{2} \times \vec{F} + \frac{-\vec{a}}{2} \times (-\vec{F}) \quad (5.129)$$

$$= 2 \frac{\vec{a}}{2} \times \vec{F} = \vec{a} \times \vec{F} \quad (5.130)$$

$$= a F \sin \vartheta \quad (5.131)$$

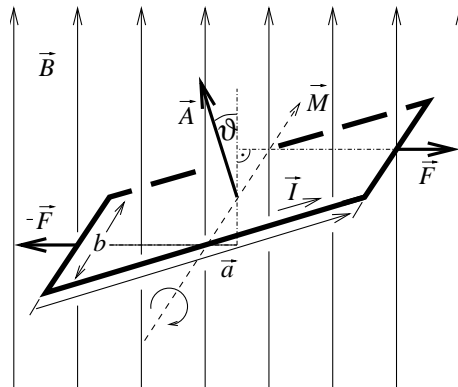


Abbildung 5.14: Auf eine Strom durchflossene Leiterschleife wirkt im homogenen Magnetfeld ein Drehmoment.

Die Kraft F lässt sich wegen $\vec{I} \perp \vec{B}$ skalar schreiben als

$$F = b I B \quad (5.132)$$

Eingesetzt in (5.131) ergibt sich für das Drehmoment:

$$\tau = a b I B \sin \vartheta \quad (5.133)$$

$$= A I B \sin \vartheta \quad \text{mit} \quad A = a b \quad (5.134)$$

Man definiert an dieser Stelle eine Größe, die man **magnetisches Moment** nennt:

Magnetisches Moment:

$$\vec{\mu} = I \vec{A}$$

(5.135)

Das magnetische Moment $\vec{\mu}$ ist das Produkt des Stromes I durch eine geschlossene Leiterschleife mit der Flächennormalen \vec{A} . Die Richtung der Flächennormalen \vec{A} muss dabei so gewählt werden, dass der Strom im mathematisch positiven Sinn die Fläche umrundet. Dies ist dann der Fall, wenn die Rechte-Hand-Regel erfüllt ist: „Zeigt der ausgestreckte Daumen der rechten Hand in Richtung der Flächennormalen \vec{A} (= Richtung von $\vec{\mu}$), geben die gekrümmten Finger den Umlaufsinn des Stromes I an“ (vgl. (5.39) auf Seite 191). Auch magnetische Momente lassen sich superpositionieren. Hat man statt einer einfachen Leiterschleife eine N -fach gewickelte Spule, kann man diese als N Leiterschleifen auffassen, so dass die Spule ein N -mal größeres magnetisches Moment als die einfache

Leiterschleife hat. Mit dieser Definition können wir das auf das magnetische Moment $\vec{\mu}$ der Leiterschleife wirkende Drehmoment $\vec{\tau}$ vektoriell schreiben als:

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}} \quad (5.136)$$

Das magnetische Moment versucht sich in Richtung von \vec{B} auszurichten. Damit zeigt das magnetische Moment im Magnetfeld ein analoges Verhalten zum elektrischen Dipolmoment im elektrischen Feld. Eine Kompassnadel ist z.B. ein solcher frei beweglicher magnetischer Dipol, dessen Dipolmoment entlang der Nadel ausgerichtet ist. Das Erdmagnetfeld bewirkt ein Drehmoment auf die Kompassnadel, so dass sie sich in Richtung der Erdmagnetfeldlinien ausrichtet.

5.7.1 Potenzielle Energie des magnetischen Momentes

Will man ein magnetisches Moment $\vec{\mu}$, das senkrecht zu einem homogenen Magnetfeld \vec{B} steht ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$), so weit verdrehen, dass $\vec{\mu}$ und \vec{B} einen Winkel α einschließen, wird dabei die Arbeit W gewonnen. Es gilt:

$$W = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \tau \, d\vartheta \stackrel{(5.136)}{=} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \mu B \sin \vartheta \, d\vartheta \quad (5.137)$$

$$\left[\mu B \cos \vartheta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} = \vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (5.138)$$

Die gewonnene Arbeit können wir hier als eine potenzielle Energiedifferenz auffassen. Wir setzen den Nullpunkt der potenziellen Energie E_{pot} für den Winkel $\vartheta = 0$ gleich null. Dann gilt für die potenzielle Energie E_{pot} des magnetischen Momentes $\vec{\mu}$

$$\boxed{E_{\text{pot}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}} \quad (5.139)$$

Auch die potenzielle Energie des magnetischen Momentes im Magnetfeld hat die gleiche Form wie die des elektrischen Dipolmomentes im elektrischen Feld.

5.7.2 Der magnetische Dipol im inhomogenen Magnetfeld

Befindet sich ein magnetischer Dipol $\vec{\mu}$ in einem inhomogenen Magnetfeld $\vec{B}(x, y, z)$, wirkt auf ihn nicht nur ein Drehmoment, sondern auch eine beschleunigende Kraft \vec{F} , die umso größer, je stärker die Inhomogenität des Magnetfeldes, d.h. je stärker die Magnetfeldänderung im Vergleich zur Ortsänderung ist. Stellen wir uns dazu eine rechteckige Leiterschleife vor, die eine Fläche \vec{A} einschließt und vom Strom I durchflossen wird. Sie hat damit das magnetische Moment $\vec{\mu}$. Diese Leiterschleife bringen wir der Einfachheit halber so in ein rotationssymmetrisches inhomogenes Magnetfeld \vec{B} , dass sich die Mitte der Leiterschleife

auf der Symmetrieachse des Magnetfeldes befindet, und dass das Dipolmoment entlang der Feldlinien ausgerichtet ist (siehe Abb. 5.15). Das Magnetfeld \vec{B} nehme in Richtung der Feldlinien ab. Damit haben wir die gleiche Inhomogenität wie die der magnetischen Flasche aus Abschnitt 4.2.1 (Seite 153). Das Magnetfeld kann an den vier Rechteckseiten nicht überall parallel zur Symmetrieachse verlaufen, da sonst Feldlinien aus dem Nichts entstehen würden. Wegen $\text{div } \vec{B} = 0$ ist dies aber ausgeschlossen. Die LORENTZ-Kräfte, die auf die Rechteckseiten der Leiterschleife wirken, sind jetzt nicht mehr in Richtung des Leiterschleifenmittelpunktes gerichtet, sondern haben eine Komponente in Richtung des Dipolvektors $\vec{\mu}$. Da diese Kraftkomponenten von allen vier Rechteckseiten in die gleiche Richtung weisen, wirkt eine resultierende beschleunigende Kraft. Der magnetische Dipol wird in den stärkeren Bereich des Magnetfeldes hineingezogen.

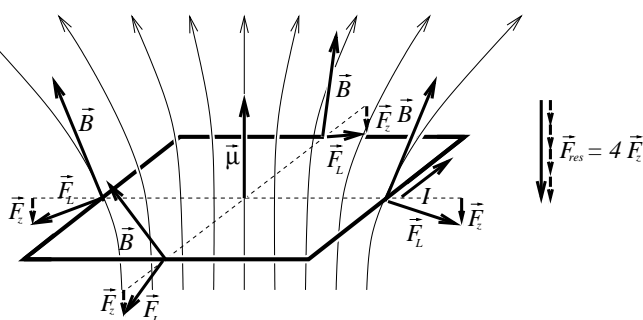


Abbildung 5.15: Auf eine Strom durchflossene Leiterschleife mit dem magnetischen Dipol $\vec{\mu}$ wirkt im inhomogenen Magnetfeld \vec{B} eine resultierende Kraft \vec{F} , da sich die Kräfte auf die Rechteckseiten des Leiters nicht komplett kompensieren.

Formal können wir uns diese Kraft \vec{F} über die potenzielle Energie $E_{\text{pot}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(x, y, z)$ des Dipols herleiten. Aus der Mechanik wissen wir, dass die Kraft \vec{F} der negative Gradient der potenziellen Energie E_{pot} ist. Damit gilt für die Kraft \vec{F} auf den magnetischen Dipol $\vec{\mu}$ im inhomogenen Magnetfeld $\vec{B}(x, y, z)$:

$$\vec{F} = -\nabla E_{\text{pot}} = -\nabla \vec{\mu} \cdot \vec{B} = - \left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right) (\mu_x B_x + \mu_y B_y + \mu_z B_z) \quad (5.140)$$

$$= - \left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} (\mu_x B_x + \mu_y B_y + \mu_z B_z) \\ \frac{\partial}{\partial y} (\mu_x B_x + \mu_y B_y + \mu_z B_z) \\ \frac{\partial}{\partial z} (\mu_x B_x + \mu_y B_y + \mu_z B_z) \end{array} \right) = - \left(\begin{array}{c} \mu_x \frac{\partial}{\partial x} B_x + \mu_y \frac{\partial}{\partial x} B_y + \mu_z \frac{\partial}{\partial x} B_z \\ \mu_x \frac{\partial}{\partial y} B_x + \mu_y \frac{\partial}{\partial y} B_y + \mu_z \frac{\partial}{\partial y} B_z \\ \mu_x \frac{\partial}{\partial z} B_x + \mu_y \frac{\partial}{\partial z} B_y + \mu_z \frac{\partial}{\partial z} B_z \end{array} \right) \quad (5.141)$$

$$\Leftrightarrow \vec{F} = - \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x} B_x & \frac{\partial}{\partial x} B_y & \frac{\partial}{\partial x} B_z \\ \frac{\partial}{\partial y} B_x & \frac{\partial}{\partial y} B_y & \frac{\partial}{\partial y} B_z \\ \frac{\partial}{\partial z} B_x & \frac{\partial}{\partial z} B_y & \frac{\partial}{\partial z} B_z \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{array} \right) \quad (5.142)$$

Diese komplizierte Kraft ist uns wahrscheinlich aus dem Alltag noch eher bekannt als die LORENTZ-Kraft auf Strom durchflossene Leiter. Halten wir zwei Stabmagneten so aneinander, dass ihre Pole auf einer Linie liegen, wirkt auf sie entweder eine abstoßende oder eine anziehende Kraft, je nachdem, ob wir gleichnamige oder ungleichnamige Pole aneinander halten. Dieses Phänomen können mit obiger Kraft erklären: Ein Stabmagnet ist einerseits von einem inhomogenen Magnetfeld \vec{B} umgeben, andererseits hat ein Stabmagnet auch ein magnetisches Dipolmoment $\vec{\mu}$. Auf das Dipolmoment des einen wirkt aufgrund der Inhomogenität des Magnetfeldes \vec{B} des anderen Stabmagneten nach (5.142) eine Kraft \vec{F} .

Aus (5.142) geht außerdem hervor, dass auf ein Dipolmoment im homogenen Magnetfeld keine Kraft wirken kann, da wegen $\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = 0$ der ganze Tensor in (5.142) und damit auch die Kraft \vec{F} verschwindet:

$$\vec{F} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} B_x & \frac{\partial}{\partial x} B_y & \frac{\partial}{\partial x} B_z \\ \frac{\partial}{\partial y} B_x & \frac{\partial}{\partial y} B_y & \frac{\partial}{\partial y} B_z \\ \frac{\partial}{\partial z} B_x & \frac{\partial}{\partial z} B_y & \frac{\partial}{\partial z} B_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.143)$$

5.7.3 Drehspulinstrumente

Eine wichtige Anwendung findet das magnetische Moment in den Drehspulinstrumenten, die zur Messung von sehr kleinen Strömen verwendet werden. Ein Drehspulinstrument besteht aus einer drehbar in einem homogenen Magnetfeld \vec{B} gelagerten, N -fach gewickelten Spule mit Querschnitt A , durch die ein Strom I fließt. Das magnetische Moment der Spule ist daher

$$\vec{\mu} = N I \vec{A}. \quad (5.144)$$

Wegen des Drehmoments

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (5.145)$$

$$\Rightarrow \tau = \mu B \sin \vartheta \quad (5.146)$$

ist die Spule bestrebt, ihr magnetisches Moment in Richtung der Magnetfeldlinien auszurichten. Auf das Drehmoment $\vec{\tau}$ wird aber durch eine Torsionsfeder mit der Federkonstanten D ein rücktreibendes Drehmoment $\tau_R = -D \vartheta$ ausgeübt. Es stellt sich ein Momentengleichgewicht

$$\tau = -\tau_R \quad (5.147)$$

$$\Leftrightarrow \mu B \sin \vartheta = D \vartheta \quad (5.148)$$

$$\Leftrightarrow A I B \sin \vartheta = D \vartheta \quad (5.149)$$

ein. Mit (5.149) hängen die Gleichgewichtslage ϑ und der zu messende Strom I voneinander ab. So kann man an die Spule einen Zeiger anbringen, der auf einer Skala anstelle des Winkels ϑ direkt den dazugehörigen Strom I anzeigt (Siehe Abb. 5.16).

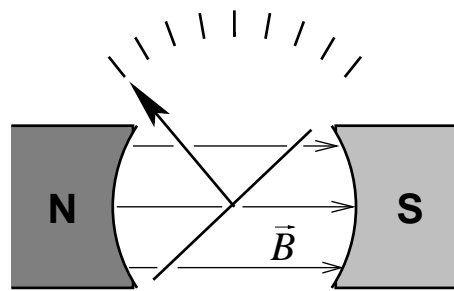


Abbildung 5.16: Drehspulinstrument

Kapitel 6

Materie im Magnetfeld

6.1 Experimentelle Beobachtungen

In Kapitel 2 „Elektrostatik mit Leitern und Isolatoren“ (siehe Seiten 65 ff.) haben wir gesehen, dass das elektrische Feld durch die Anwesenheit von Materie stark verändert wird. Dielektrika können das elektrische Feld beträchtlich abschwächen, elektrische Leiter vermögen es sogar komplett abzuschirmen. Diese experimentellen Tatsachen konnten wir uns durch Effekte wie Ladungsverschiebung und Polarisation erklären, die sich auf atomarer Ebene im Festkörperkristall abspielen.

Nun stellt sich die Frage, ob das Magnetfeld ein ähnliches Verhalten in Anwesenheit von Materie zeigt. In den vorangegangenen beiden Kapiteln ist bereits mehrfach erwähnt worden, dass Eisen Magnetfelder verstärken und ihre Feldlinien umlenken kann (siehe „Transformator“ auf Seite 198 ff.). Dieses Phänomen wollen wir nun näher analysieren:

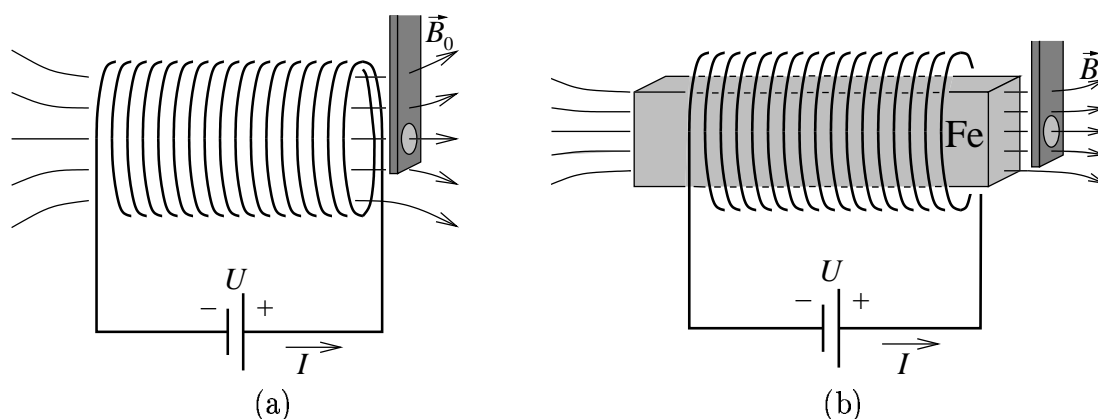


Abbildung 6.1: Das magnetische Feld einer Spule wird unmittelbar an ihrer Öffnung mit einer HALL-Sonde (a) einmal ohne und (b) einmal mit Eisenkern ausgemessen.

Versuch 6.1

Wir lassen durch eine Zylinderspule einen konstanten Strom I fließen und messen mit einer HALL-Sonde an den Enden der Spule, so wie in Abb. 6.1 (a) abgebildet, das Magnetfeld B_0 . Wir stellen fest, dass, wie erwartet, die in Abschnitt 4.4.3 hergeleitete Beziehung (4.64)

$$B_0 = \frac{N}{l} \mu_0 I \quad (6.1)$$

das Magnetfeld B_0 innerhalb des Spulenquerschnitts recht gut beschreibt. Wenn wir verschiedene Stromstärken I durch die Spule fließen lassen, messen wir entsprechend (6.1) verschiedene Werte für B_0 .

Nun schieben wir einen Eisenkern in das Spuleninnere und führen die gleiche Messung durch (siehe Abb. 6.1 (b)). Das Magnetfeld B an der Stirnfläche des Eisenkerns ist bei gleichem Strom I um die Größenordnung 1000 größer als das Magnetfeld B_0 ohne Kern. Wir können den Spulenstrom I stufenweise erhöhen, wobei das Magnetfeld B_0 ebenfalls stufenweise ansteigt. Für kleine Ströme können wir in guter Näherung eine Proportionalität zwischen den Magnetfeldern B und B_0 feststellen.

Nicht nur Eisen verändert das magnetische Feld, eigentlich alle Stoffe haben einen, wenn auch viel schwächeren Einfluss auf Magnetfelder. Einige Materialien verstärken das Magnetfeld um das hundert- bis tausendfache. Diesen Effekt bezeichnet man als Ferromagnetismus, der in Abschnitt 6.3 (Seite 233) näher besprochen wird. Führen wir Versuch 6.1 für verschiedene Stoffe durch, dann messen wir auch bei diesen eine Abweichung des Magnetfeldes B gegenüber des Magnetfeldes B_0 der leeren Spule. Bei den meisten Materialien weicht das Magnetfeld B vom vorgegeben Magnetfeld B_0 allerdings nur geringfügig ab. Dafür gilt hier eine strengere Proportionalität zwischen gemessenem Magnetfeld B und dem Magnetfeld B_0 mit leerer Spule. Die Proportionalität lässt sich allgemein schreiben als

$$\boxed{B = \mu_r B_0} \quad (6.2)$$

wobei der Proportionalitätsfaktor μ_r

**relative magnetische
Permeabilitätszahl, relative
Permeabilitätszahl oder einfach nur
relative Permeabilität**

$$\mu_r := \frac{B}{B_0}$$

(6.3)

genannt wird. Die relative magnetische Permeabilitätszahl μ_r ist eine dimensionslose Materialkonstante. Nach der Größe der relativen Permeabilität μ_r unterscheidet man drei Klassen von Materialien:

- a) $\mu_r < 1$ **diamagnetische** Materialien $B < B_0$
- b) $\mu_r > 1$ **paramagnetische** Materialien $B > B_0$
- c) $\mu_r \gg 1$ **ferromagnetische** Materialien $B \gg B_0$

Man nennt solche Materialien auch kurz Diamagneten, Paramagneten bzw. Ferromagneten. In Versuch 6.1 haben wir gesehen, dass Eisen das Magnetfeld um ganze Größenordnungen verstärken kann, womit wir Eisen den ferromagnetischen Stoffen zuordnen können. Die ferromagnetischen Eigenschaften von Eisen waren sogar schon im Altertum bekannt, weshalb man den Effekt des Ferromagnetismus nach Eisen (= Ferrum) benannte. Wie präzise Messungen gezeigt haben, liegen die relativen Permeabilitätszahlen der verschiedenen Eisensorten zwischen $\mu_r \approx 600$ für Gusseisen und $\mu_r \approx 5500$ für gehärtetes Eisen. Die relativen Permeabilitätszahlen von Eisen und anderen ferromagnetischen Materialien sind stark temperaturabhängig und hängen außerdem von der Vorgeschichte des Materials ab, weshalb sie keine festen Materialkonstanten sind. Wir werden darauf im Abschnitt 6.3 noch näher eingehen.

6.2 Diamagnetismus und Paramagnetismus

Dia- und paramagnetische Stoffe verursachen nur kleine Abweichungen des Magnetfeldes. Die relativen Permeabilitätszahlen dia- und paramagnetischer Stoffe unterscheiden sich daher in der Regel nur geringfügig von der relativen Permeabilitätszahl $\mu_{r_{\text{Vakuum}}} = 1$ des Vakuums. Man definiert in Analogie zur dielektrischen Suszeptibilität $\chi_e = \epsilon_r - 1$ die **magnetische Suszeptibilität** χ_m durch

$$\boxed{\chi_m = \mu_r - 1.} \tag{6.4}$$

Hier einige Werte für die magnetischen Suszeptibilitäten χ_m dia- und paramagnetischer Stoffe:

Platin	paramagnetisch	$36 \cdot 10^{-5}$
Wolfram	paramagnetisch	$6,8 \cdot 10^{-5}$
Aluminium	paramagnetisch	$2,3 \cdot 10^{-5}$
Hartgummi	paramagnetisch	$1,4 \cdot 10^{-5}$
Luft	paramagnetisch	$0,04 \cdot 10^{-5}$
Kupfer	diamagnetisch	$-0,9 \cdot 10^{-5}$
Glas	diamagnetisch	$-1,3 \cdot 10^{-5}$
Silber	diamagnetisch	$-2,6 \cdot 10^{-5}$
Gold	diamagnetisch	$-3,6 \cdot 10^{-5}$
Wismut	diamagnetisch	$-17,6 \cdot 10^{-5}$

Da die relativen Permeabilitäten diamagnetischer Materialien kleiner als 1 sind, schwächen diese das Magnetfeld ab, paramagnetische Stoffe verstärken das Magnetfeld. Der Diamagnetismus wurde zuerst von M. FARADAY im Jahre 1846 an Wismut (Bi) entdeckt. Er stellte fest, dass Wismut aus inhomogenen Magnetfeldern herausgedrückt wird. Das unterschiedliche Verhalten dia- und paramagnetischer Substanzen wollen wir in folgendem Versuch qualitativ untersuchen:

Versuch 6.2

Der Versuchsaufbau besteht aus einem Elektromagneten, der ein stark inhomogenes Magnetfeld \vec{B}_0 erzeugt. In dieses inhomogene Magnetfeld können wir an einem langen Faden Proben verschiedener Materialien hängen, so dass sie frei beweglich in dem Bereich der stärksten Inhomogenität schweben. Führen wir den Versuch mit einer diamagnetischen Wismutprobe durch, können wir beobachten, dass die Probe aus dem Bereich des stärkeren Magnetfeldes herausgedrückt wird (siehe Abb. 6.2 a). Eine paramagnetische Aluminiumprobe hingegen erfährt eine Kraft in Richtung des zunehmenden Magnetfeldes (siehe Abb. 6.2 b). Führen wir den gleichen Versuch im homogenen Magnetfeld durch, können wir keine Kraftwirkung auf die Proben beobachten.

Deutung:

Auf Dia- und Paramagneten wirken offenbar nur Kräfte, solange sie inhomogenen Magnetfeldern ausgesetzt werden. In Abschnitt 5.7.2 (Seite 211) haben wir festgestellt, dass der magnetische Dipol (mit dem magnetischen Moment $\vec{\mu}$) ein ähnliches Verhalten in inhomogenen Feldern zeigt. An dem Beispiel mit den Stabmagneten (Seite 211) konnten wir sehen, dass bei gleicher Ausrichtung von magnetischem Moment $\vec{\mu}$ und Magnetfeldlinien eine Kraft wirkt, die den Dipol in den Bereich des stärkeren Magnetfeldes hinein zieht (ungleichnamige Pole aneinander halten). Stehen dagegen $\vec{\mu}$ und \vec{B}_0 antiparallel zu einander, wird der Dipol aus dem Bereich des stärkeren Feldes heraus gedrückt.

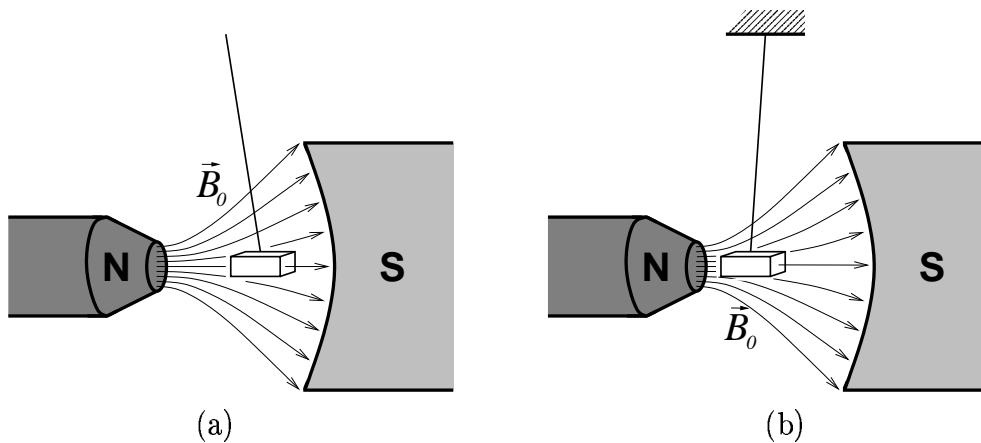


Abbildung 6.2: Im inhomogenen Magnetfeld werden (a) Diamagneten aus dem Bereich des stärkeren Feldes herausgedrückt, (b) Paramagneten hingegen werden hineingezogen.

Es liegt nun nahe, die Kräfte auf Dia- und Paramagneten dadurch zu erklären, dass sowohl Diamagneten als auch Paramagneten im Magnetfeld \vec{B}_0 ein magnetisches Dipolmoment $\vec{\mu}$ haben. Dabei muss das Dipolmoment $\vec{\mu}$ paramagnetischer Stoffe parallel, und das diamagnetischer Stoffe antiparallel zum magnetischen Feld \vec{B}_0 sein. Wäre das Dipolmoment außerdem noch um einen Winkel $\vartheta \neq 0, \pi$ bezüglich \vec{B}_0 verdreht, würde zusätzlich zur Kraft ein Drehmoment $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}_0$ auf den Dipol wirken. Ein solches Drehmoment können wir aber nicht beobachten, weshalb das magnetische Dipolmoment keine feste Richtung bezogen auf die Probe haben kann. Drehen wir nämlich die Probe im inhomogenen Feld von Versuch 6.2, wirkt kein Drehmoment auf die Probe. Mit anderen Worten: wir verdrehen zwar die Probe, das magnetische Dipolmoment $\vec{\mu}$ behält aber seine Richtung bezogen auf das Magnetfeld \vec{B}_0 bei. Wir stellen folgende Vermutung auf:

- In diamagnetischen Stoffen werden mikroskopische Kreisströme I erzeugt, die nach der LENZschen Regel der Ursache entgegen wirken, d.h. das Magnetfeld \vec{B}_0 abschwächen. Ein solcher Kreistrom erzeugt nicht nur ein magnetisches Feld \vec{B}_{Materie} , es hat auch ein magnetisches Moment $\vec{\mu}$. Damit der Kreistrom I das magnetische Feld \vec{B}_0 schwächt, muss das von ihm erzeugte Magnetfeld \vec{B}_{Materie} dem äußeren Magnetfeld \vec{B}_0 entgegengerichtet sein. Das ist genau dann der Fall, wenn das magnetische Moment $\vec{\mu}$ des induzierten Kreisstromes antiparallel zum Magnetfeld \vec{B}_0 steht (wie man sich leicht mit der „Rechten-Hand-Regel“ klarmachen kann).
- In Paramagneten existieren bereits mikroskopische magnetische Dipole, die allerdings nicht ausgerichtet sind. Paramagneten, die keinem Magnetfeld ausgesetzt sind, haben deshalb kein resultierendes magnetisches Moment $\vec{\mu}_{\text{ges}}$. Im Magnetfeld richten sich diese Dipole allerdings aufgrund des Drehmoments $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}_0$ so aus, dass sie ein resultierendes magnetisches Moment $\vec{\mu}_{\text{ges}} \neq 0$ haben.

Wie aber können wir uns diese mikroskopischen magnetischen Dipolmomente in Paramagneten, und die mikroskopischen Kreisströme in Diamagneten vorstellen? Es bedarf eines Einblickes in den Atomaufbau, um eine geeignete Erklärung dieser Phänomene zu finden.

6.2.1 Mikroskopische Erklärung

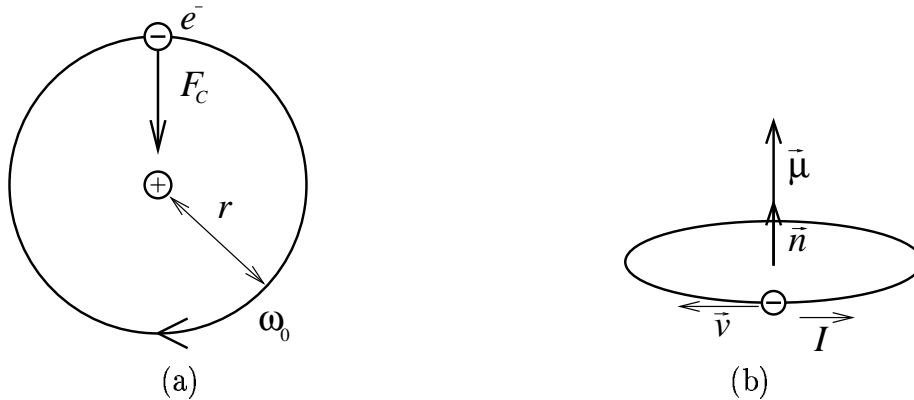


Abbildung 6.3: (a) Ein Elektron wird durch die COULOMB-Kraft auf einer stabilen Bahn um den positiv geladenen Atomkern gehalten. (b) Das kreisende Elektron stellt einen Kreisstrom dar, der ein magnetisches Moment $\vec{\mu}$ bildet.

Eigentlich können wir den Aufbau der Atome erst mit Hilfe der Quantenmechanik richtig erklären, jedoch reicht für die folgenden Betrachtungen das klassische Atommodell aus: Bekanntlich besteht ein Atom aus einem positiv geladenen Atomkern, der von negativ geladenen Elektronen mit der Kreisfrequenz $\vec{\omega}_0$ im Abstand r umkreist wird. Das Elektron wird dabei durch die anziehende COULOMB-Kraft

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \quad (6.5)$$

auf einer festen Bahn gehalten, da Elektron und Proton entgegengesetzte Ladungen haben ($Q_p = -Q_e = e$). Die COULOMB-Kraft ist also die Zentripetalkraft der Kreisbewegung

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m_e \omega_0^2 r \quad (6.6)$$

Die Kreisbewegung des Elektrons bildet einen Kreisstrom I mit

$$I = -e\nu, \quad (6.7)$$

wobei ν die Umlauffrequenz des Elektrons ist. Das magnetische Moment dieses Kreisstromes ist daher

$$\vec{\mu} = I\vec{A} = IA\vec{n}, \quad (6.8)$$

wobei

$$\vec{A} = \pi r^2 \vec{n} \quad (6.9)$$

die von der Elektronenbahn eingeschlossene Fläche und $\vec{n} = \frac{\vec{A}}{A}$ der Einheitsvektor von \vec{A} ist. \vec{A} bzw. \vec{n} müssen dabei so orientiert sein, dass sie im Sinne der Rechten-Hand-Regel vom Kreisstrom I umflossen werden. Mit (6.9) und (6.7) geht (6.8) über in

$$\vec{\mu} = I\vec{A} = IA\vec{n} = -e\nu\pi r^2 \vec{n} \quad (6.10)$$

Die Kreisfrequenz $\vec{\omega}_0$ des Elektrons ist mit der Umlauffrequenz ν durch

$$\vec{\omega}_0 = 2\pi\nu\vec{n} \quad (6.11)$$

verknüpft. Das magnetische Moment lässt sich daher genauso in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz $\vec{\omega}_0$ darstellen:

$$\vec{\mu} = -\frac{1}{2}er^2\vec{\omega}_0. \quad (6.12)$$

Wir können das magnetische Moment $\vec{\mu}$ aber auch durch den Drehimpuls $\vec{L} = m_e r^2 \vec{\omega}_0$ ausdrücken:

$$\vec{\mu} = -\frac{1}{2}er^2\vec{\omega}_0 = -\frac{e}{2m_e}m_e r^2 \vec{\omega}_0 \quad (6.13)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{\mu} = -\frac{e}{2m_e}\vec{L}} \quad (6.14)$$

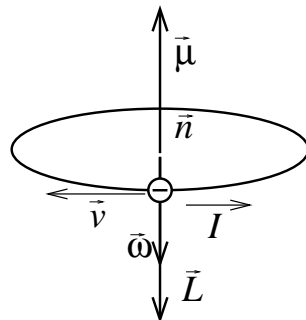


Abbildung 6.4: Das magnetische Moment $\vec{\mu}$ eines Elektrons ist durch $\vec{\mu} = -\frac{e}{2m_e}\vec{L}$ mit dem Drehmoment verbunden.

Tatsächlich ist die Berechnung des magnetischen Moments eines Atomes komplizierter: Das Elektron hat einen Eigendrehimpuls \vec{S} , der **Spin** genannt wird, und ein dazugehöriges magnetisches Moment $\vec{\mu}_S$. Außerdem hat ein Atom mehrere Elektronen, deren Bahn- und

Eigendrehimpulse (Spin) bzw. deren magnetische Momente sich in komplizierter Weise zum Gesamtdrehimpuls bzw. zum magnetischen Gesamtmoment superpositionieren. Unsere klassische Betrachtungsweise ist zwar an dieser Stelle nicht exakt, letztlich kommt es aber nicht auf den genauen Wert des magnetischen Momentes $\vec{\mu}$ an, wichtig ist uns nur, dass bereits ohne ein äußeres Magnetfeld innerhalb der Atome magnetische Dipole existieren.

Bringt man nun einen paramagnetischen Stoff in ein Magnetfeld \vec{B}_0 , so ist jedes magnetische Moment $\vec{\mu}$ bestrebt, ihre Richtung den Magnetfeldlinien anzugleichen, da ein Magnetfeld \vec{B}_0 auf ein magnetisches Moment $\vec{\mu}$ ein Drehmoment

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}_0 \quad (6.15)$$

ausübt. Die magnetischen Momente $\vec{\mu}$ lassen sich allerdings nicht exakt entlang der Feldlinien ausrichten, da aufgrund der thermischen Energie die Ausrichtung der magnetischen Momente statistisch verteilt ist. Diese Tatsache müssen wir zunächst so hinnehmen. Im 6. Semester wird die statistische Verteilung der magnetischen Momente in der Theorie-Vorlesung „Thermodynamik und statistische Physik“ hergeleitet. Dennoch erfolgt schon bei einem schwachen äußeren Magnetfeld \vec{B}_0 eine teilweise Ausrichtung der Dipole, so dass ein magnetisches Gesamtmoment $\vec{\mu}_{\text{ges}}$ durch Superposition aller magnetischer Einzelmomente $\vec{\mu}_i$ (kreisende Elektronen) entsteht:

$$\vec{\mu}_{\text{ges}} = \sum_i \vec{\mu}_i. \quad (6.16)$$

Das resultierende magnetische Moment hängt dabei proportional vom äußeren Magnetfeld \vec{B}_0 ab. Nachdem das äußere Magnetfeld \vec{B}_0 wieder abgestellt wird, verschwindet das magnetische Gesamtmoment $\vec{\mu}_{\text{ges}}$ wieder, da die Ausrichtung der magnetischen Dipole der kreisenden Elektronen von der Wärmebewegung statistisch gleichverteilt wird. In Abschnitt 6.4 (Seite 237) werden wir uns mit der Temperaturabhängigkeit des Paramagnetismus eingehender beschäftigen.

Wie bereits erwähnt, bilden Ringströme nicht nur magnetische Momente $\vec{\mu}_i$, sie erzeugen auch ein magnetisches Feld \vec{B}_i . Das magnetische Gesamtfeld \vec{B}_{Materie} , das durch Superposition aller \vec{B}_i entsteht, ist umso größer, je mehr Dipole sich in einer Volumeneinheit befinden. Man definiert daher die Volumen bezogene Größe der

Magnetisierung

$$\vec{M} := \frac{\sum_i \vec{\mu}_i}{V} = \sum \frac{\text{magn. Momente}}{\text{Volumen}} \quad (6.17)$$

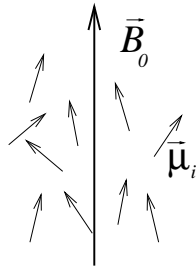


Abbildung 6.5: Trotz eines äußeren Magnetfeldes \vec{B}_0 ist die Ausrichtung der magnetischen Momente $\vec{\mu}_i$ der Atome eines Paramagneten aufgrund der thermischen Bewegung statistisch verteilt. Das resultierende magnetische Gesamtmoment ist dagegen parallel zu \vec{B}_0 ausgerichtet.

Die Magnetisierung \vec{M} ist makroskopisch zu beobachten. In Paramagneten werden die magnetischen Dipole in Richtung der Feldlinien des äußeren Feldes ausgerichtet. Die Magnetisierung \vec{M} hat daher die gleiche Richtung wie das äußere Magnetfeld \vec{B}_0 , so dass das äußere Magnetfeld \vec{B}_0 verstärkt wird ($B > B_0$). Nun verstehen wir auch, warum auf die Probe im inhomogenen Magnetfeld kein Drehmoment wirkt: Weil sich die magnetischen Momente der einzelnen Atome im Mittel von alleine entlang der Magnetfeldlinien ausrichten, hat das magnetische Moment der ganzen Probe genau die Richtung der minimalen potenziellen Energie (vgl. Abschnitt 5.7.1, Seite 211), so dass kein Drehmoment wirkt.

Wie wir wissen, haben alle Atome eine Elektronenhülle, womit wir das Phänomen des Paramagnetismus sehr gut erklären können; warum aber gibt es eine Vielzahl an Stoffen (Diamagneten), die offenbar keine magnetischen Dipole haben, die ausgerichtet werden können? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir uns noch einen weiteren Schritt in die Atomphysik begeben. Das klassische Atommodell reicht an dieser Stelle nicht mehr aus, wir müssen deshalb einige Erkenntnisse der Quantenmechanik vorwegnehmen, die erst im 4. Semester in der Vorlesung „experimentelle Quantenmechanik“ näher erklärt werden: Jede Elektronenbahn ist durch quantenmechanische Zustände eindeutig festgelegt. Ein quantenmechanischer Zustand kann nur einmal eingenommen werden. Zu jedem quantenmechanischen Zustand eines Elektrons gibt es genau einen entgegengesetzten Zustand, für den Bahndrehimpuls und Spin eines zweiten Elektrons genau entgegengesetzt orientiert und betraglich gleich groß sind. Wegen des entgegengesetzten Drehimpulses ist nach (6.14) auch das dazugehörige magnetische Moment antiparallel. Sind beide entgegengesetzten Zustände besetzt, heben sich die magnetischen Momente beider Elektronen auf. Eine notwendige aber nicht hinreichende Bedingung dafür, dass das magnetische Moment eines Atoms verschwindet, ist, dass das Atom eine gerade Anzahl von Elektronen hat. Wir haben bereits davon gesprochen, dass im Magnetfeld in Diamagneten Kreisströme induziert werden, die ein magnetisches Moment $\vec{\mu}_i$ und ein Magnetfeld \vec{B}_i erzeugen, das

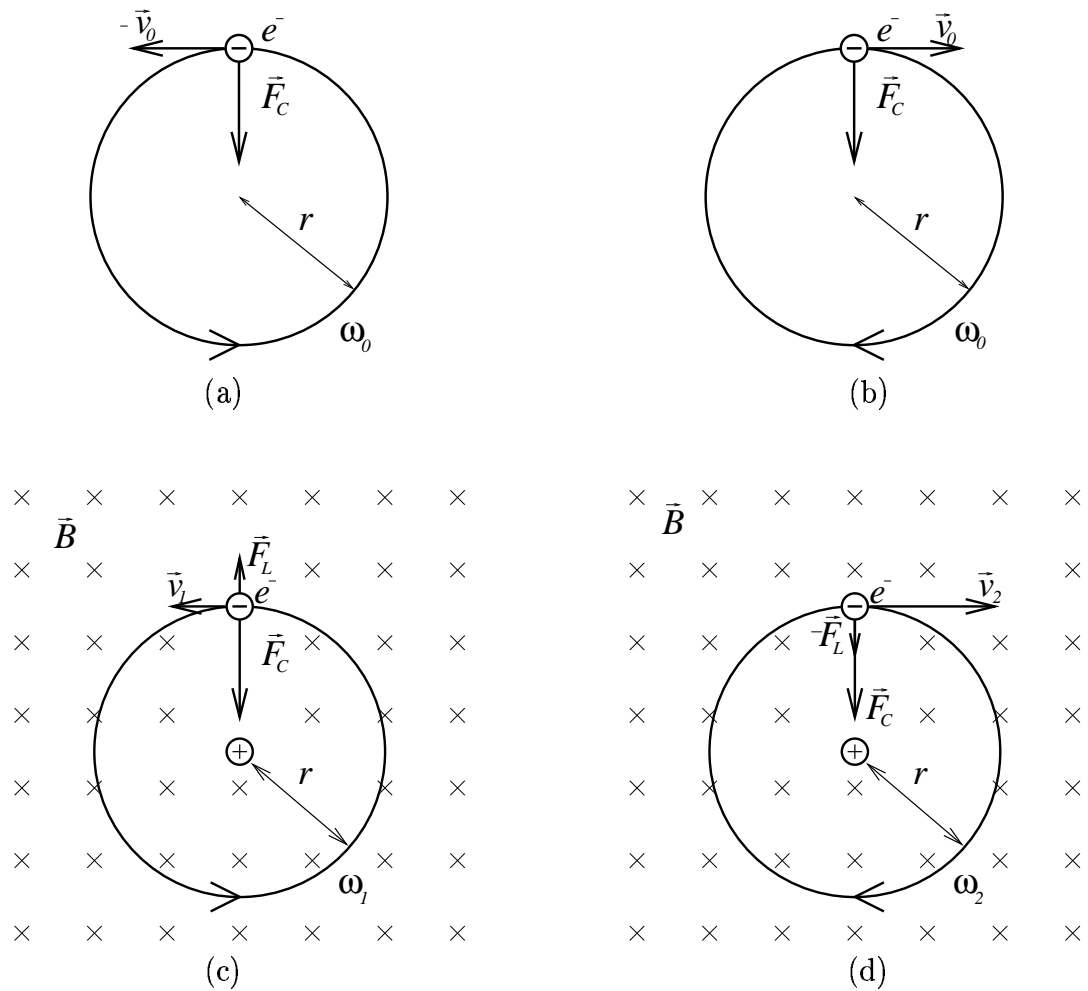


Abbildung 6.6: (a) und (b): Ohne ein äußeres Feld gibt es zu jedem Elektron in diamagnetischen Stoffen ein Elektron mit entgegengesetzter Winkelgeschwindigkeit. Da die Elektronen entgegengesetzt kreisen, ist der resultierende Kreisstrom und damit auch das resultierende magnetische Moment beider Elektronen gleich null. (c) und (d): Legt man ein äußeres Magnetfeld \vec{B}_0 an, so werden resultierende Kreisströme induziert, da die Winkelgeschwindigkeiten beider Elektronen nicht mehr gleich sind. Es entsteht ein resultierendes magnetisches Moment.

dem äußeren Feld \vec{B}_0 entgegen gerichtet ist. Auf diesen Induktionsprozess wollen wir nun näher eingehen. Dazu verwenden wir ein stark vereinfachtes Modell, das die Tatsachen dennoch in guter Näherung erklären kann: Wir betrachten nur das magnetische Moment, das vom Bahndrehimpuls \vec{L} gebildet wird, und lassen dabei den Spin außer Acht. Da es zu jedem Elektron im Diamagneten ein weiteres Elektron mit entgegengesetzten Drehimpulsen gibt, können wir uns vorstellen, dass beide Elektronen mit betraglich gleich großer Bahngeschwindigkeit um eine gemeinsame Achse auf einer Kreisbahn um den Kern rotieren, dabei aber einen entgegengesetzten Bahndrehimpuls bzw. Umlaufsinn haben (Siehe Abb. 6.6 a und b). Legen wir nun ein Magnetfeld \vec{B}_0 an: Sei der Einfachheit halber der Drehimpulsvektor \vec{L} der Elektronen entlang der Magnetfeldlinien ausgerichtet. Es wirkt auf das eine Elektron eine radial nach außen wirkende LORENTZ-Kraft \vec{F}_L (Siehe Abb. 6.6 (c)), auf das andere wirkt dagegen eine dem Betrage nach gleich große aber nach innen gerichtete LORENTZ-Kraft $-\vec{F}_L$ (Siehe Abb. 6.6 (d)). Für die LORENTZ-Kraft $\pm\vec{F}_L$ gilt

$$\pm\vec{F}_L = \mp e\vec{v}_0 \times \vec{B}_0 \quad (6.18)$$

$$\Rightarrow F_L = e\omega r B_0 \quad (6.19)$$

Die Zentripetalkraft F_Z wird jetzt durch die Summe von COULOMB-Kraft und LORENTZ-Kraft gebildet, die im dynamischen Kräftegleichgewicht betraglich gleich der Zentrifugalkraft $m_e\omega^2 r$ sein muss:

$$F_C \pm F_L = m_e\omega^2 r \quad (6.20)$$

Setzen wir (6.6) für die COULOMB-Kraft und (6.19) für die LORENTZ-Kraft ein, erhalten wir:

$$m_e\omega_0^2 r \pm e\omega r B_0 = m_e\omega^2 r \quad (6.21)$$

$$\Rightarrow \omega^2 \mp \frac{eB_0}{m_e}\omega - \omega_0^2 = 0 \quad (6.22)$$

$$\Rightarrow \omega \approx \omega_0 \pm \frac{eB_0}{2m_e} \quad (6.23)$$

Wie wir sehen, ändern beide Elektronen ihre Kreisfrequenz um $\Delta\omega := \mp \frac{eB_0}{2m_e}$. Diese Differenz wird als **LARMOR-Frequenz** bezeichnet.

LARMOR-Frequenz:

$$\Delta\vec{\omega} := \mp \frac{e}{2m_e} \vec{B}_0 \quad (6.24)$$

Dadurch, dass sich die Kreisfrequenz $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_0 - \Delta\vec{\omega}$ des einen Elektrons um $\Delta\vec{\omega}$ verkleinert, und die Kreisfrequenz $\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_0 + \Delta\vec{\omega}$ des anderen um $\Delta\vec{\omega}$ vergrößert wird, sind die

Drehimpulse

$$\vec{L}_i = m_e r^2 \vec{\omega}_i, \quad i = 1, 2 \quad (6.25)$$

und damit auch die magnetischen Momente

$$\vec{\mu}_i = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}_i \quad (6.26)$$

nicht mehr entgegengesetzt gleich. Das magnetische Moment $\vec{\mu}_i$ beider Elektronen ändert sich deshalb um

$$\Delta \vec{\mu} = -\frac{e}{2m_e} \Delta \vec{L} \quad (6.27)$$

Wegen $\Delta \vec{L} = m_e \Delta \vec{\omega} r^2$ und $\Delta \vec{\omega} = \frac{e}{2m_e} \vec{B}_0$ gilt

$$\boxed{\Delta \vec{\mu} = -\frac{e^2 r^2}{4m_e} \vec{B}_0} \quad (6.28)$$

Das äußere Magnetfeld \vec{B}_0 induziert also pro Elektron ein zusätzliches magnetisches Moment $\Delta \vec{\mu}$, das das erzeugende äußere Magnetfeld \vec{B}_0 schwächt. Dieser Effekt tritt in allen Substanzen auf, er wird in para- und ferromagnetischen Stoffen allerdings durch die stärkeren Effekte des Para- bzw. Ferromagnetismus überlagert, sodass das Magnetfeld verstärkt wird.

Zusammenfassung:

- In paramagnetischen Substanzen werden die magnetischen Momente atomarer Kreisströme so ausgerichtet, dass sie das Magnetfeld verstärken.
- In allen Substanzen werden nach der LENZschen Regel zusätzliche atomare Kreisströme induziert, die das Magnetfeld schwächen. Dieser Effekt dominiert in diamagnetischen Stoffen.

Im vorigen Abschnitt hatten wir die Größe der **Magnetisierung** \vec{M} definiert, sind aber auf ihre Bedeutung nicht weiter eingegangen. Das soll nun an dieser Stelle nachgeholt werden. Wir hatten erwähnt, dass eine Magnetisierung, die die gleiche Richtung wie das äußere Magnetfeld \vec{B}_0 hat, dieses verstärkt (Paramagnetismus). Eine antiparallele Magnetisierung schwächt \vec{B}_0 entsprechend (Diamagnetismus). Wie hängt aber die Magnetisierung \vec{M} mit der Magnetfeldänderung $\vec{B} - \vec{B}_0$ zusammen? Um diese Frage zu beantworten, zerlegen wir das magnetisierte Material, das allgemein dia- oder paramagnetisch sein kann, in lauter Teilvolumina

$$dV = dA dz. \quad (6.29)$$

dA sei dabei das Flächenelement, das senkrecht zu \vec{M} (bzw. \vec{B}) steht, und dz sei ein Streckenelement parallel zu \vec{M} . Gehen wir der Einfachheit halber von einer homogenen

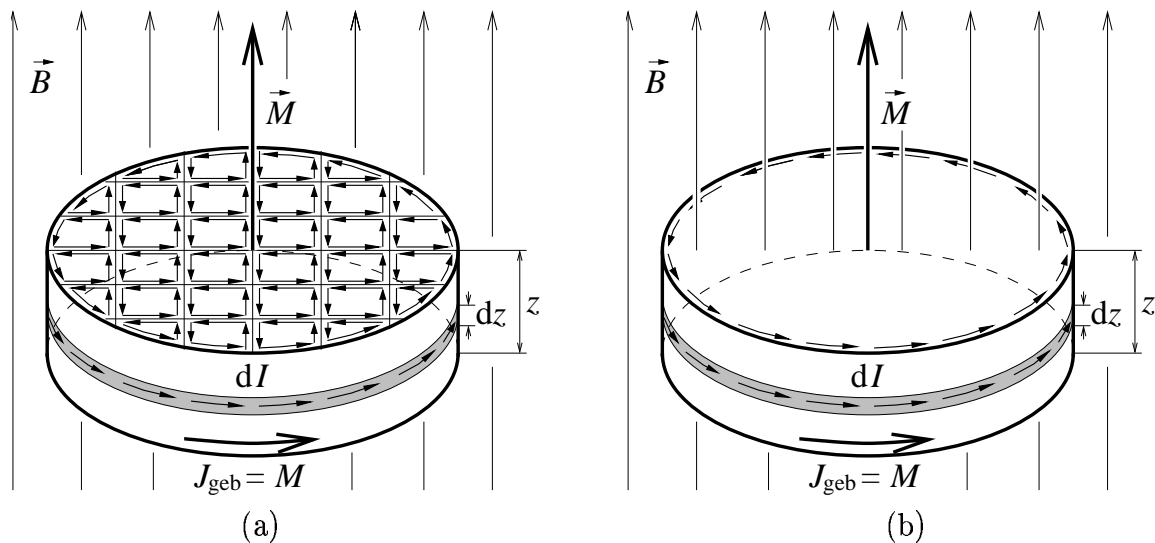


Abbildung 6.7: Die durch die Ausrichtung der magnetischen Momente entstandenen Ringströme kompensieren sich im Innern des Volumens. Nur auf der Mantelfläche des Volumens bilden sie einen Flächenstrom J_{geb} . Magnetisierung \vec{M} und Flächenstrom J_{geb} sind deshalb zwei äquivalente Größen.

Magnetisierung aus. Außerdem sei das magnetisierte Volumen zylinderförmig, wobei die Symmetrieachse parallel zum Magnetfeld \vec{B}_0 ausgerichtet sei (siehe Abb. 6.7). Nach (6.17) ist dann das magnetische Moment $d\vec{\mu}$ des Volumenelements dV gleich

$$d\vec{\mu} = \vec{M} dV = \vec{M} dz dA \quad (6.30)$$

$$\Rightarrow d\mu = M dz dA \quad (6.31)$$

Das magnetische Moment $d\mu$ ist aber per Definition auch mit einem Ringstrom dI über

$$d\vec{\mu} = dI d\vec{A} \quad (6.32)$$

$$\Rightarrow d\mu = dI dA \quad (6.33)$$

verbunden. Setzen wir diesen Ausdruck mit (6.31) gleich, folgt

$$dI dA = M dz dA \quad (6.34)$$

$$\Leftrightarrow \iint_A dI dA = \iint_A M dz dA \quad (6.35)$$

$$\Rightarrow dI A = M A dz \quad (6.36)$$

$$\Rightarrow dI = M dz \quad (6.37)$$

Dieser Ausdruck lässt sich wie folgt interpretieren: Zerlegen wir das magnetisierte Volumen in lauter Scheiben der Dicke dz , so ist das magnetische Moment $d\mu_{\text{Scheibe}}$ dieser

Scheibe nach (6.36) gleich $d\mu_{\text{Scheibe}} = dI A = M A dz$. Dieses magnetische Moment lässt sich so interpretieren, dass nur auf dem Rand der Scheibe ein Strom dI fließt, und dass das Innere frei von Strömen ist. Das widerspricht zwar unserer Deutung des Dia- und Paramagnetismus, da wir hier von lauter kleinen atomaren Ringströmen ausgegangen waren; dies ist allerdings nur scheinbar ein Widerspruch, da, wie wir in Abb. 6.7 sehen können, die Ringströme sich mit den benachbarten Ringströmen aufheben. Nur die Atome, die sich direkt am Rand der Fläche A befinden, liefern einen Beitrag zum resultierenden Gesamtstrom. Unsere Interpretation ist also im Einklang mit unserer Deutung des Dia- und Paramagnetismus. Summieren (d.h. integrieren) wir die magnetischen Momente $d\mu_{\text{Scheibe}}$ aller Scheiben auf, erhalten wir das magnetische Gesamtmoment

$$\mu_{\text{ges}} = \int d\mu_{\text{Scheibe}} = \int M A dz = \int dI A \quad (6.38)$$

$$= M A z = I A \quad (6.39)$$

$$\stackrel{(V=Az)}{\Leftrightarrow} M V = I A \quad (6.40)$$

Es gilt also

$$I = M z \quad (6.41)$$

Dieser resultierende Strom I fließt ringförmig entlang der Zylindermantelfläche des magnetisierten Körpers. Da I durch Überlagerung vieler an Atome gebundener Ringströme entsteht, ist I ein gebundener und kein freier Strom, so wie wir es von elektrischen Leitern her kennen. Nach (6.41) ist die Magnetisierung M eines homogen magnetisierten Materials äquivalent zu einem **Flächenstrom**

$$\boxed{J_{\text{geb}} = \frac{dI}{dz} = \frac{I}{z} = M} \quad (6.42)$$

Für inhomogen magnetisierte Volumina gilt diese Beziehung nicht, da sich die Ringströme im Innern des Stoffes nicht komplett aufheben. Die allgemeine Beziehung zwischen Strom und Magnetisierung lautet (ohne Beweis)

$$\vec{j}_{\text{geb}} = \text{rot} \vec{M}, \quad (6.43)$$

wobei \vec{j}_{geb} die in (3.11) definierte Stromdichte ist, die hier allerdings nur durch gebundene Ströme gebildet wird.

6.2.2 Gesamtfeld einer Spule mit Kern

Bisher konnten wir erklären, warum Materie im Magnetfeld magnetische Momente bildet und dass die daraus resultierende Magnetisierung einen Flächenstrom darstellt, der auf

der Außenfläche die Magnetfeldlinien im mathematisch positiven Sinne (d.h. im Sinne der Rechten-Hand-Regel) umfließt. Das magnetische Feld \vec{B}_M , das von diesem gebundenen Flächenstrom J_{geb} erzeugt wird, wollen wir nun herleiten: Dazu betrachten wir eine lange Zylinderspule, durch die ein Strom I_{Spule} fließt. Ohne Kern gilt für das resultierende Magnetfeld \vec{B}_0 nach dem AMPÈRESchen Durchflutungsgesetz (4.55)

$$\oint \vec{B}_0(\vec{r}) d\vec{r} = \mu_0 I_{\text{frei}}, \quad (6.44)$$

wobei I_{frei} der gesamte Strom ist, der durch den gewählten Integrationsweg fließt. Wählen wir z.B. als Integrationsweg einen Weg wie in Abb. 4.12 (Seite 165), so fließt der Spulenstrom I_{Spule} nicht nur einmal, sondern N mal durch den Integrationsweg. Es gilt daher

$$I_{\text{frei}} = N I_{\text{Spule}} \quad (6.45)$$

Für eine Spule mit Kern gilt entsprechend

$$\oint \vec{B}(\vec{r}) d\vec{r} = \mu_0 (I_{\text{frei}} + I_{\text{geb}}) \quad (6.46)$$

Wir definieren analog zur dielektrischen Verschiebung \vec{D} (2.64) eine Größe, die nur von freien Strömen abhängt, die

**magnetische Feldstärke oder
 \vec{H} -Feldstärke**

$$\vec{H} := \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$$

(6.47)

Nach dem AMPÈRESchen Durchflutungsgesetz (4.55) gilt für die magnetische Feldstärke \vec{H}

$$\oint \vec{H}(\vec{r}) d\vec{r} = I_{\text{frei}} \quad (6.48)$$

Die magnetische Feldstärke \vec{H} lässt die im magnetisierten Material gebundenen Ringströme I_{geb} außer Acht. Die gebundenen Ströme I_{geb} lassen sich wegen (6.46) berechnen durch

$$\oint \frac{\vec{B}}{\mu_0} d\vec{r} - \oint \vec{H} d\vec{r} = I_{\text{geb}} \quad (6.49)$$

Wie wir in (6.42) gesehen haben, ist der resultierende Strom im Kern (bei einer homogenen Magnetisierung) ein Flächenstrom $I_{\text{geb}} = J_{\text{geb}} z$, der entlang der Mantelfläche des

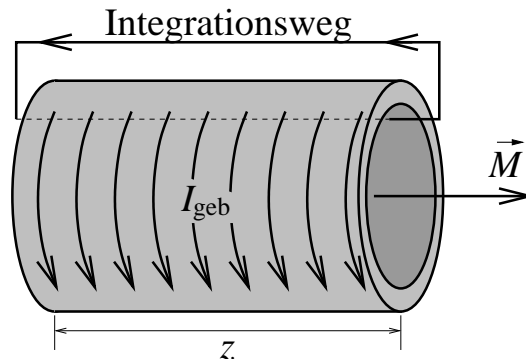


Abbildung 6.8: Integrationsweg schließt den Flächenstrom $I_{\text{geb}} = M z$ auf der Außenfläche des magnetisierten Körpers ein.

magnetisierten Körpers fließt. Wir wählen deshalb einen Integrationsweg, der den kompletten Strom I_{geb} einschließt (siehe Abb. 6.8). Wir können annehmen, dass nur der Teil des Integrationsweges zum Integral beiträgt, der im Innern der Spule liegt, und dass das Feld innerhalb der Spule homogen ist. Deshalb gilt

$$\oint \vec{M} \, d\vec{r} = M z = J_{\text{geb}} z = I_{\text{geb}} \quad (6.50)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (6.49) ein, folgt

$$\oint \frac{\vec{B}}{\mu_0} \, d\vec{r} - \oint \vec{H} \, d\vec{r} = \oint \vec{M} \, d\vec{r} \quad (6.51)$$

$$\Leftrightarrow \oint \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} \right) \, d\vec{r} = \oint \vec{M} \, d\vec{r} \quad (6.52)$$

Diese Relation gilt für beliebige Integrationswege. Deshalb müssen die Integranden beider Seiten gleich sein. Es gilt

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \vec{B}_0 + \vec{B}_M} \quad (6.53)$$

Das magnetisierte Material verstärkt also das äußere Magnetfeld \vec{B}_0 um

$$\vec{B}_M = \mu_0 \vec{M} \quad (6.54)$$

Andererseits hatten wir die relative magnetische Permeabilität μ_r definiert durch (6.3)

$$\vec{B} = \mu_r \vec{B}_0 \quad (6.55)$$

Daraus folgt wegen $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$

$$\boxed{\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}} \quad (6.56)$$

und

$$\boxed{\vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{H} = \chi_m \vec{H}} \quad (6.57)$$

Magnetisierung \vec{M} und magnetische Feldstärke \vec{H} müssen also die gleiche Dimension haben. Für die Einheiten gilt:

$$[B] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}, \quad [H] = [M] = \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (6.58)$$

6.2.3 \vec{B} - und \vec{H} -Feld eines Permanentmagneten

Als Beispiel untersuchen wir jetzt die Unterschiede zwischen \vec{B} - und \vec{H} -Feld an einem Permanentmagneten. Das \vec{B} -Feld ergibt sich aus der „Abwesenheit magnetischer Monopole“ (vgl. Ausdruck (4.2))

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \oint \vec{B} \, d\vec{A} = 0 \quad (6.59)$$

und dem AMPÈRESchen Durchflutungsgesetz (4.55)

$$\oint \vec{B} \, d\vec{r} = \mu_0 I = \mu_0 (I_{\text{frei}} + I_{\text{geb}}) \quad (6.60)$$

Wegen $I_{\text{frei}} = 0$ geht dieser Ausdruck über in

$$\oint \vec{B} \, d\vec{r} = \mu_0 I_{\text{geb}} \quad (6.61)$$

Für das \vec{H} -Feld gilt im Außenraum des Permanentmagneten

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (6.62)$$

da dort $\mu_r = 1$ ist. Ferner gilt nach (6.48)

$$\int_{\text{ausen}} \vec{H} \, d\vec{r} + \int_{\text{innen}} \vec{H} \, d\vec{r} = \oint \vec{H} \, d\vec{r} = I_{\text{frei}} = 0 \quad (6.63)$$

Es muss daher gelten:

$$\int_{\text{ausen}} \vec{H} \, d\vec{r} = \int_{\text{ausen}} \frac{\vec{B}}{\mu_0} \, d\vec{r} = - \int_{\text{innen}} \vec{H} \, d\vec{r} \quad (6.64)$$

Die \vec{H} -Feldlinien im Innern des Permanentmagneten sind also zu den \vec{H} -Feldlinien im Außenraum entgegengesetzt orientiert (bezüglich des Umlaufsinnns des Integrationsweges). Der Feldverlauf von \vec{H} - und \vec{B} -Feld ist in Abb. 6.9 abgebildet.

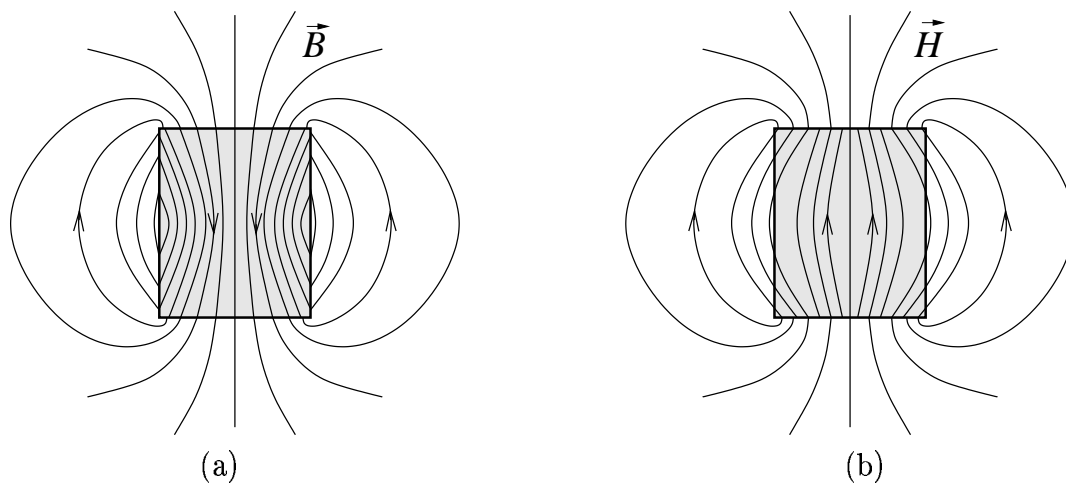


Abbildung 6.9: (a) \vec{B} -Feld und (b) \vec{H} -Feld eines Permanentmagneten

6.2.4 Vergleich zwischen Magnetismus und Elektrizität in Materie

Vergleichen wir die Erkenntnisse aus diesem Kapitel, fällt uns auf, dass wir die drei Größen \vec{B} , \vec{H} und \vec{M} , die den Magnetismus in Materie beschreiben, in Analogie zu den drei Größen \vec{E} , \vec{D} und \vec{P} definiert haben, mit denen wir das Verhalten elektrischer Felder in Gegenwart von Dielektrika berechnen konnten. Magnetfeld \vec{B} und elektrisches Feld \vec{E} sind die beiden Felder, die für die Kräfte auf Ladungen verantwortlich sind. Die magnetische Feldstärke \vec{H} und die dielektrische Verschiebung \vec{D} sind Hilfsgrößen, die von event. vorhandener Materie unabhängig sind. Die Magnetisierung \vec{M} und die Polarisation \vec{P} sagen aus, wieviel (magnetische bzw. elektrische) Dipolmomente pro Volumen ausgerichtet sind.

Zusammenfassung:

	Magnetismus	Elektrizität
Bestimmen die Kraft auf eine Ladung q	Magnetfeld \vec{B} $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$	Elektrisches Feld \vec{E} $\vec{F} = q\vec{E}$
Materieunabhängige Größen	Magnetfeldstärke \vec{H} $\oint \vec{H} d\vec{r} = I_{\text{frei}}$ $\Leftrightarrow \text{rot}\vec{H} = j_{\text{frei}}$	Dielektrische Verschiebung \vec{D} $\oint \vec{D} d\vec{A} = Q_{\text{frei}}$ $\Leftrightarrow \text{div}\vec{D} = \rho_{\text{frei}}$
Dipolmomente pro Volumen	Magnetisierung \vec{M} $\vec{M} = \frac{\sum \vec{\mu}_i}{V}$	Polarisation \vec{P} $\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{V}$

6.3 Ferromagnetismus

Im Gegensatz zu paramagnetischen Stoffen gibt es viele Substanzen, wie z.B. Eisen, Cobalt, Nickel sowie viele Legierungen, die das Magnetfeld \vec{B}_0 nicht nur geringfügig, sondern um das hundert- bis tausendfache verstärken. Die relativen Permeabilitäten dieser Stoffe liegen demnach in der Größenordnung

$$\mu_r \approx 10^2 - 10^5 \quad (6.65)$$

$$\Rightarrow B = \mu_r \mu_0 H \quad \Rightarrow \quad B \gg B_0 = \mu_0 H. \quad (6.66)$$

Es macht wegen $\mu_r \approx \chi_m = \mu_r - 1$ bei ferromagnetischen Materialien keinen Sinn, zusätzlich zur relativen Permeabilität μ_r über die magnetische Suszeptibilität χ_m zu sprechen. Ähnlich wie Paramagneten bestehen ferromagnetische Substanzen aus Atomen, die schon vor dem Magnetisieren permanente magnetische Momente enthalten. Paramagneten können unter Einfluss eines äußeren Magnetfeldes ihre Dipole allerdings nur teilweise ausrichten, da die Wärmebewegung der Ausrichtung entgegenwirkt. In Ferromagneten treten dagegen kollektive Eigenschaften auf: Es überwiegt hier die Wechselwirkung der atomaren magnetischen Momente $\vec{\mu}$ untereinander dem Einfluss der Wärmebewegung. Schon ohne ein äußeres Magnetfeld \vec{B}_0 richtet ein Atom sein magnetisches Moment $\vec{\mu}_i$ bevorzugt so aus, dass es parallel zum magnetischen Moment $\vec{\mu}_{i-1}$ bzw. zu dem davon

ausgehenden Magnetfeld \vec{B}_{i-1} des Nachbaratoms steht. Dieser Effekt führt dazu, dass sich die magnetischen Dipole über Bereiche der Größenordnung $1\ \mu\text{m}$ hinweg entlang einer Richtung ausrichten können. Diese Bereiche nennt man **WEISSsche Bezirke**. Die

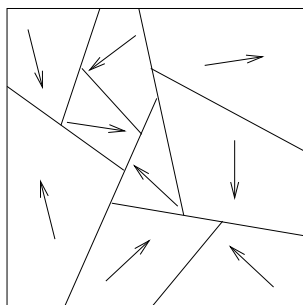


Abbildung 6.10: WEISSsche Bezirke

magnetischen Felder \vec{B}_i der einzelnen Dipole überlagern sich zu einem, je nach Größe des WEISSschen Bezirks, starken Magnetfeld \vec{B}_W . Ein Ferromagnet enthält i.d.R. eine Vielzahl solcher WEISSscher Bezirke, die statistisch gleichverteilt ausgerichtet sind, so dass das resultierende Magnetfeld, das von ihm ausgeht, verschwindet. Legt man ein äußeres Magnetfeld \vec{B}_0 an einen ferromagnetischen Körper, richten sich die magnetischen Dipole nicht unbedingt sofort entlang der Feldlinien von \vec{B}_0 aus; ein magnetischer Dipol klappt erst dann um, wenn das äußere Feld \vec{B}_0 stärker ist als das von dem WEISSschen Bezirk ausgehende Magnetfeld \vec{B}_W . Dadurch, dass der abtrünnige Dipol nicht mehr zum Feld \vec{B}_W beiträgt, wird \vec{B}_W kleiner, so dass noch mehr Dipole umklappen. Es entsteht eine Kettenreaktion. In Ferromagneten richten nicht nur einzelne Atome, sondern ganze WEISSsche Bezirke ihre Dipole entlang des äußeren Magnetfeldes aus. Diesen Effekt bezeichnet man als **BARCKHAUSEN-Effekt**. Das Umklappen eines WEISSschen Bezirks wird BARCKHAUSEN-Sprung genannt. Dazu folgender Versuch:

Versuch 6.3

An eine Spule, die mit einem Weicheisenkern gefüllt ist, wird ein Lautsprecher angeschlossen (siehe Abb. 6.11). Bringen wir langsam einen Permanentmagneten in die Nähe des Weicheisenkerns, richten sich nach und nach die WEISSschen Bezirke aus. Dadurch werden impulsartige Ströme induziert, so dass ein Rauschen im Lautsprecher zu hören ist.

Man kann sich das Prinzip der WEISSschen Bezirke recht gut an folgendem Modellversuch veranschaulichen:

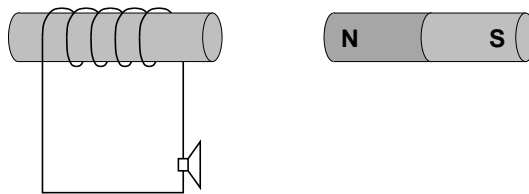


Abbildung 6.11: Versuch zum BARKHAUSEN-Effekt

Versuch 6.4

Auf einer Platte sind lauter kleine, frei drehbar gelagerte Kompassnadeln regelmäßig angeordnet. Wir können beobachten, dass die Kompassnadeln in gewissen Bereichen die gleiche Richtung annehmen. Diese Bereiche sind makroskopische WEISSschen Bezirke (siehe Abb. 6.12). Bringen wir einen Permanentmagneten in die Nähe des Versuchsaufbaus, können wir beobachten, wie die WEISSschen Bezirke BARKHAUSEN-Sprünge durchführen. Ist das äußere Magnetfeld sehr stark, richten sich alle Kompassnadeln entlang der Magnetfeldlinien aus.

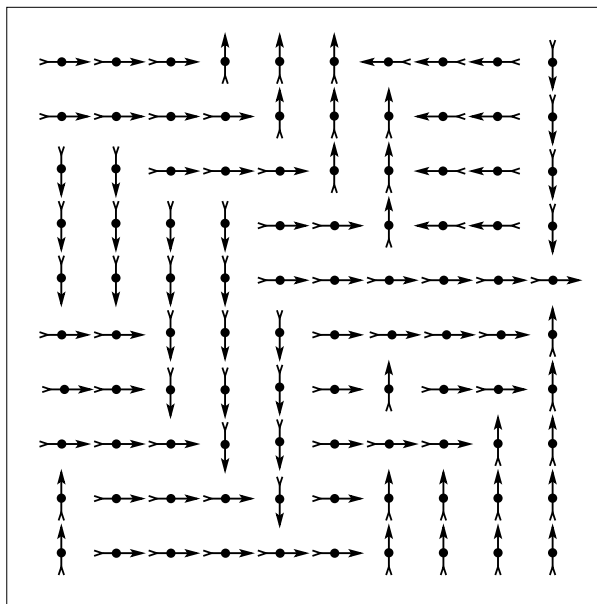


Abbildung 6.12: Versuchsaufbau zur Veranschaulichung der WEISSschen Bezirke: Auf einer Platte sind lauter Kompassnadeln angebracht, die aufgrund der gegenseitigen Wechselwirkung innerhalb von WEISSschen Bezirken ihre Richtungen aneinander angleichen.

6.3.1 Magnetisierungskurve (Hysteresis)

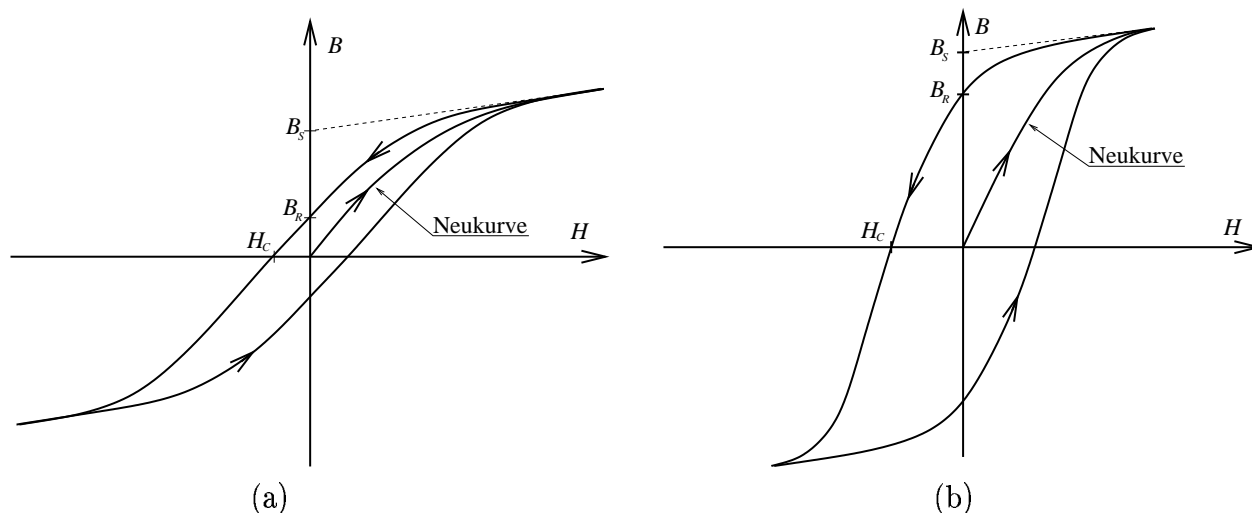


Abbildung 6.13: Hysteresisschleife von (a) magnetisch weichem und (b) magnetisch hartem Material

Versuch 6.5

Wir lassen durch eine mit einem Eisenkern gefüllte Spule der Länge l einen Strom I_{frei} fließen und messen mit einer HALL-Sonde das Magnetfeld (B -Feld) an den Enden der Spule. Das gemessene B -Feld können wir nun in Abhängigkeit vom H -Feld in einem kartesischen Koordinatenkreuz auftragen, da das H -Feld wegen

$$\oint \vec{H} \, d\vec{r} = H l = I_{\text{frei}} \quad (6.67)$$

über den Strom bekannt ist. Wir steigern den Strom I_{frei} langsam bis zu einem Maximalwert I_{max} . Dannach lassen wir den Strom linear bis zum Wert $-I_{\text{max}}$ abfallen, steigern dann den Strom wieder bis zum Maximalwert I_{max} usw. Das Ergebnis ist die in Abb. 6.13 abgebildete Magnetisierungskurve, eine schleifenförmige Kurve, die **Magnetisierungskurve**, **Hysteresis** oder **Hysteresisschleife** $B(H)$ genannt wird.

Wie wir sehen, ist das Magnetfeld B nicht wie bei dia- und paramagnetischen Stoffen proportional zur Feldstärke H . Wegen

$$B = \mu_r \mu_0 H \quad (6.68)$$

kann μ_r für ferromagnetische Stoffe keine Konstante sein.

Diskussion der Hysterese

Es gilt bekanntlich

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \quad (6.69)$$

Ist der Eisenkern vor dem ersten Anlegen eines H -Feldes nicht magnetisiert worden (d.h. $M = 0$), sind sowohl B - als auch H -Feld zu Beginn gleich null. Unmagnetisierte Ferromagneten werden oft auch als „jungfräulich“ bezeichnet. Mit steigendem H -Feld nimmt auch die Magnetisierung M und damit auch das Magnetfeld B zu, da die WEISSschen Bezirke nach und nach ausgerichtet werden. Sind schließlich alle WEISSschen Bezirke ausgerichtet, ist eine Sättigungsmagnetisierung M_S erreicht. Danach steigt das Magnetfeld B linear zur H -Feldstärke an mit

$$B(H) = \mu_0 H + \mu_0 M_S \quad (6.70)$$

Dieser Teil der Hysterese, der das erste Magnetisieren des vorher jungfräulichen Materials darstellt, wird **Neukurve** genannt. Reduziert man H wieder, so erreicht das Magnetfeld B bei $H = 0$ einen Wert $B(0) = B_R \neq 0$, der Remanenz genannt wird. Das Material hat also eine Restmagnetisierung, die erst verschwindet, wenn die **Koerzitivfeldstärke** $H_C < 0$ angelegt wird. Legen wir jetzt ein negatives H -Feld an, wird wieder eine Sättigungsmagnetisierung $-M_S$ erreicht. Das von dem Ferromagneten ausgehende Magnetfeld ist jetzt das Sättigungsmagnetfeld $-B_S$. Von nun an verläuft die Magnetisierungskurve in umgekehrter Richtung bis zur positiven Sättigungsmagnetisierung usw...

Der Effekt der Remanenz kommt dadurch zustande, dass die WEISSschen Bezirke, einmal ausgerichtet, bevorzugt ihre gemeinsame Richtung beibehalten, ihre Magnetisierung also bei fehlendem H -Feld nicht komplett aufgeben. Für verschiedene ferromagnetische Materialien werden wir auch verschiedene Magnetisierungskurven ausmessen. Ferromagnetische Materialien, die eine schmale Hysteresisschleife haben, nennt man **magnetisch weiche Materialien**, Ferromagneten mit breiter Hysteresisschleife bezeichnet man als **magnetisch hart**. Magnetisch weiche Materialien (Weicheisen, μ -Metall ...) werden z.B. als Kerne in Transformatoren eingebaut, da in ihnen weniger Verlustleistung beim Ummagnetisieren anfällt (der Flächeninhalt der Hysterese ist gleich der Verlustenergie). Magnetisch harte Materialien (Harteisen, Kobaltstahl...) werden wegen ihrer hohen Remanenz als Permanentmagneten eingesetzt.

6.4 Temperaturabhängigkeit

Die Effekte, die bei der Magnetisierung von para- und ferromagnetischen Stoffen auftreten, sind stark temperaturabhängig. Im folgenden wollen wir dieser Temperaturabhängigkeit auf den Grund gehen:

Temperaturabhängigkeit des Paramagnetismus:

In Abschnitt 6.2 haben wir bereits besprochen, dass die Atome paramagnetischer Stoffe ihre magnetischen Momente unter dem Einfluss eines äußeren Feldes nur teilweise ausrichten, da die thermische Energie $W_K = \frac{1}{2}k_B T$ (kinetische Energie der Gitteratome) wesentlich größer als die potenzielle magnetische Energie $W_p = 2\mu B$ ist. In der statistischen Physik (6. Semester) wird die daraus resultierende Magnetisierung M genau berechnet. Dieses Gesetz ist das

$$\begin{array}{c} \text{CURIE-Gesetz} \\ M = \frac{N\mu^2 B}{k_B T} \quad \Rightarrow \quad \chi_m \sim \frac{1}{T} \end{array} \quad (6.71)$$

Versuch 6.6

Wir geben flüssige Luft in ein sehr starkes Magnetfeld. Die Luft wird in dem Magnetfeld gehalten, und fließt nicht aus ihm heraus. Der Grund für diesen Sachverhalt ist, dass die Magnetisierung wegen der niedrigen Temperatur sehr hoch ist. Flüssige Luft ist deshalb stark paramagnetisch, was nach dem CURIE-Gesetz nicht anders zu erwarten ist.

Temperaturabhängigkeit des Ferromagnetismus:

Die Magnetisierung M ist in Ferromagneten unterhalb einer materialspezifischen Temperatur T_C , der sog. **CURIE-Temperatur**, nicht von der Temperatur abhängig. Oberhalb der CURIE-Temperatur ist die thermische Energie allerdings so groß, dass sie der potenziellen magnetischen Energie überwiegt; es brechen die WEISSschen Bezirke auf, und das Material wird paramagnetisch. Die Magnetisierung folgt für $T > T_C$ dem

$$\text{CURIE-WEISS-Gesetz} \quad \boxed{M \sim \frac{H}{T-T_C}, \quad T > T_C} \quad (6.72)$$

Je nach Sorte liegen die CURIE-Temperaturen von Eisen zwischen $T_C(\text{Fe}) \approx 650\text{K}$ bis 1100K .

Versuch 6.7

Ein Nagel wird von einem Permanentmagneten angezogen. Erhitzen wir den Permanentmagneten mit einem Bunsenbrenner bis zur Rotglut, fällt der Nagel herunter, da das Eisen paramagnetisch wird. Als Paramagnet kann das Eisen seine Remanenzmagnetisierung, die es zum Permanentmagneten macht, nicht mehr halten.

6.5 Induktivität einer Spule mit Kern

In Abschnitt 5.4.2 haben wir die Induktivität L von Zylinderspulen ohne Kern hergeleitet und sind auf den Ausdruck (5.66) gekommen:

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{l} \quad (6.73)$$

Hier sind N die Windungszahl, A die Querschnittsfläche und l die Länge der Spule. Für Spulen mit Kern, gilt diese Beziehung allerdings nicht. Die Herleitung der Induktivität L einer Spule, die komplett von einem z.B. ferromagnetischen Kern mit Querschnittsfläche A und Länge l ausgefüllt ist, verläuft analog zu der einer Spule ohne Kern (vgl. Abschnitt 5.4.2). Wir müssen hier jedoch berücksichtigen, dass das Magnetfeld im Spuleninneren um die relative Permeabilität μ_r größer ist. Es gilt also anstelle von (5.63) die Beziehung:

$$B(t) = \mu_r \mu_0 I(t) \frac{N}{l} \quad (6.74)$$

Der magnetische Fluss durch die Spule ist deshalb

$$\Phi_M(t) = N \iint_A \vec{B}(t) d\vec{A} = NB(t) A = -\mu_r \mu_0 A I(t) \frac{N^2}{l}. \quad (6.75)$$

Da für die Induktionsspannung

$$U_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (6.76)$$

gilt, folgt

$$U_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\mu_r \mu_0 A \frac{N^2}{l} \frac{dI(t)}{dt}. \quad (6.77)$$

Für die Induktivität einer Spule mit Kern folgt daraus

$$\Rightarrow \boxed{L = \mu_r \mu_0 \frac{N^2 A}{l}} \quad (6.78)$$

6.6 Energie des magnetischen Feldes

Um die Energie des magnetischen Feldes zu berechnen, betrachten wir noch einmal den Abschaltvorgang des RL -Gliedes aus Abschnitt 5.5. Vor dem Abschalten ist die Gleichspannungsquelle U_0 eingeschaltet, so dass ein Strom $I_0 = U_0/R$ durch die Spule fließt. In der Spule wird ein Magnetfeld B erzeugt, für das

$$B = \mu_r \mu_0 \frac{NI_0}{l} \quad (6.79)$$

gilt. Es muss in diesem Magnetfeld B eine Energie W_{mag} gespeichert sein, denn nach dem Abschalten der Spannungsquelle kann diese keine Energie mehr liefern. Nach (5.105) fließt aber trotzdem noch ein exponentiell abklingender Strom $I(t)$, der im OHMSchen Widerstand eine JOULEsche Wärme erzeugt. Wegen der Energieerhaltung muss die im Magnetfeld $B = \mu_r \mu_0 \frac{NI_0}{l}$ gespeicherte Energie W_{mag} gleich der JOULEschen Wärme W_{Joule} sein, die im OHMSchen Widerstand umgesetzt wird, bis der Strom $I(t)$ und damit auch das Magnetfeld B der Spule verschwinden.

$$W_{\text{mag}} \stackrel{!}{=} W_{\text{Joule}} \quad (6.80)$$

Der Strom $I(t)$ geht für $t \rightarrow \infty$ gegen null. Für die im OHMSchen Widerstand umgesetzte JOULEsche Wärme W_{Joule} gilt wegen $P_{el} = U_R(t) I(t) = I^2(t) R$ und (5.105)

$$W_{\text{Joule}} = \int_0^\infty P_{el} dt = \int_0^\infty I^2(t) R dt = \int_0^\infty I_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} R dt \quad (6.81)$$

$$= \int_0^\infty I_0^2 e^{-\frac{2t}{L}} R dt = RI_0^2 \frac{L}{2R} = \frac{1}{2} I_0^2 L \quad (6.82)$$

Setzen wir für die Induktivität L der Spule den Ausdruck (6.78) ein, folgt

$$W_{\text{Joule}} = \frac{1}{2} I_0^2 \mu_r \mu_0 \frac{N^2}{l} A = \frac{1}{2} I_0^2 \mu_r \mu_0 \frac{N^2}{l^2} Al \quad (6.83)$$

$$= \frac{1}{2} \mu_r \mu_0 \frac{NI_0}{l} \frac{NI_0}{l} Al \quad (6.84)$$

Wegen $B = \mu_r \mu_0 \frac{NI_0}{l}$, $H = \frac{NI_0}{l}$ und $V = Al$ folgt

$$W_{\text{Joule}} = \frac{V}{2} BH \quad (6.85)$$

und wegen (6.80) gilt für die anfangs im Magnetfeld der Spule gespeicherte Energie

$$W_{\text{mag}} = \frac{V}{2} BH \quad (6.86)$$

Diese Beziehung gilt allgemein für die Energie im Magnetfeld. Dividiert man E_{mag} durch das Volumen $V = Al$, so erhält man die Energiedichte des Magnetfeldes w_{mag} :

$$w_{\text{mag}} = \frac{W_{\text{mag}}}{V} = \frac{1}{2} BH \quad (6.87)$$

Die Ausdrücke für Energie und Energiedichte im Magnetfeld gelten darüber hinaus sogar vektoriell (ohne Beweis)

$$\text{Energie des Magnetfeldes} \quad \boxed{W_{\text{mag}} = \frac{V}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}} \quad (6.88)$$

und

$$\text{Energiedichte des Magnetfeldes} \quad \boxed{w_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}} \quad (6.89)$$

Kapitel 7

Die MAXWELLSchen Gleichungen

Dem Schotten JAMES CLERK MAXWELL (1831-1879) gelang es im Jahre 1860, alle elektromagnetischen Vorgänge in vier Grundgleichungen, den sogenannten MAXWELL-Gleichungen, zu beschreiben. Er fasste damit alle aus Experimenten hervorgegangenen Erkenntnisse über den Elektromagnetismus zusammen. Drei der vier MAXWELL-Gleichungen haben wir bereits kennengelernt:

$$(1) \quad \operatorname{div} \vec{D} = \varrho_{\text{frei}} \quad (\text{vgl. Abschnitt 2.8.1, Seite 85}) \quad (7.1)$$

$$(2) \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{vgl. (4.3), Seite 149}) \quad (7.2)$$

$$(3) \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{vgl. (5.44), Seite 193}) \quad (7.3)$$

Die vierte MAXWELL-Gleichung ist eine Verallgemeinerung des AMPÈRESchen Gesetzes (4.55). Sie lässt sich aus dem AMPÈRESchen Gesetz herleiten:

$$\oint_{\partial A} \vec{B} \, d\vec{r} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_A \vec{j} \, d\vec{A} \quad (7.4)$$

Hier ist $j = \frac{dI}{dA}$ die **Stromdichte** und \vec{j} ist der Vektor der Stromdichte, der in die Richtung des resultierenden Stromflusses zeigt. Mit Hilfe des STOKESSchen Satzes geht (7.4) über in

$$\oint_{\partial A} \vec{B} \, d\vec{r} = \iint_A (\operatorname{rot} \vec{B}) \, d\vec{A} = \mu_0 \iint_A \vec{j} \, d\vec{A} \quad (7.5)$$

Da die Integrale in der letzten Beziehung für beliebige Flächen A gleich sind, müssen die Integranden gleich sein. Es gilt also

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (7.6)$$

wobei sich $\vec{j} = \vec{j}_{\text{frei}} + \vec{j}_{\text{geb}}$ aus der Stromdichte \vec{j}_{frei} der freien und der Stromdichte \vec{j}_{geb} der gebundenen Ströme zusammensetzt. Ebenso gilt

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{frei}} \quad (7.7)$$

MAXWELL erkannte als erster, dass die Gleichungen (7.4), (7.6) und (7.7) unvollständig sind. Als wir in Abschnitt 4.4.2 auf Seite 162 das AMPÈRESche Durchflutungsgesetz aufgestellt haben, haben wir darauf hingewiesen, dass das AMPÈRESche Durchflutungsgesetz (4.55) nur für einen stetigen Strom I gilt, d.h. der Strom I darf weder aus dem Nichts entstehen noch darf er plötzlich verschwinden. Es gibt allerdings Fälle, die mit dieser Einschränkung nicht auskommen. Betrachten wir z.B. den Ladevorgang eines Kondensators: Auf die eine Kondensatorplatte mit der Fläche A trägt der Strom

$$I = jA' \quad (7.8)$$

durch einen elektrischen Leiter mit Querschnittsfläche A' eine Ladung

$$Q(t) = \int_{t_0}^t I dt \quad (7.9)$$

auf. Von der anderen Platte gleicher Größe wird durch den Strom

$$I = jA' \quad (7.10)$$

entsprechend eine Ladung

$$Q(t) = \int_{t_0}^t I dt \quad (7.11)$$

abgeführt. Zwischen den Platten ist der Stromfluss allerdings unterbrochen. Denken wir uns einen geschlossenen Weg $\gamma := \partial F$, der eine Fläche F umrandet. Der Weg $\gamma = \partial F$ soll so gewählt werden, dass er den Strom I einschließt. Es gilt nach dem AMPÈRESchen Durchflutungsgesetz (4.55)

$$\oint_{\gamma=\partial F} \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 I \quad (7.12)$$

$$\oint_{\gamma=\partial F} \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 \iint_F \vec{j} d\vec{A} \quad (7.13)$$

$$\stackrel{\text{Stokes}}{\iff} \iint_F \text{rot } \vec{B} d\vec{A} = \mu_0 \iint_F \vec{j} d\vec{A} \quad (7.14)$$

Die Fläche F kann dabei bis auf ihren Rand $\gamma = \partial F$ beliebig gewählt werden. Insbesondere kann F gekrümmt sein. Wir wählen die durch γ begrenzte Fläche F so, wie es in Abb. 7.1 (a) zu sehen ist, und zwar so, dass durch die Fläche F ein Strom

$$I = \iint_F \vec{j} d\vec{A} \quad (7.15)$$

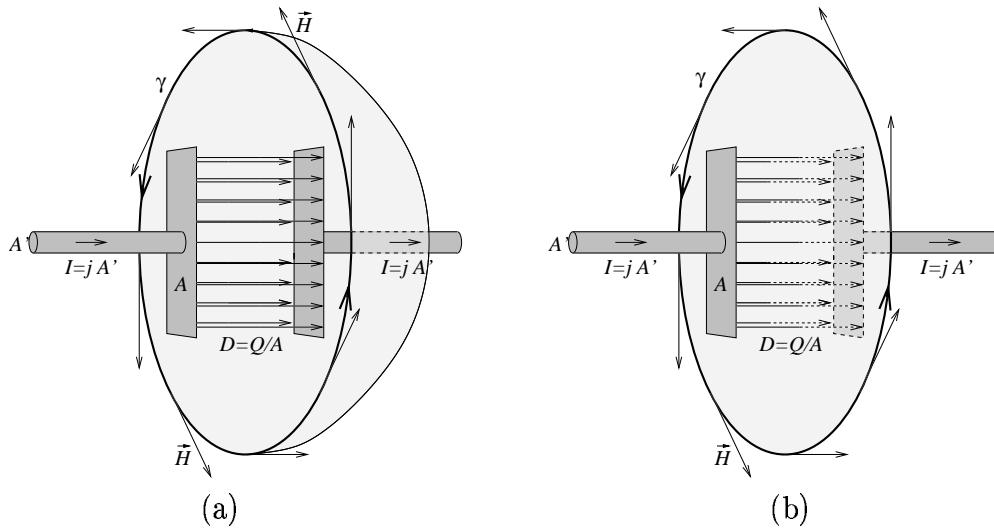


Abbildung 7.1: (a) Beim Ladevorgang eines Kondensators fließt durch eine Fläche F mit dem Rand $\gamma = \partial F$ ein Strom I . Durch eine andere Fläche F' mit gleichem Rand $\gamma = \partial F'$ fließt kein Strom. Dennoch wird ein Magnetfeld \vec{B} erzeugt. Das AMPÈRESche Gesetz (4.55) kann nicht mehr uneingeschränkt gelten, da es für beliebige Flächen mit gleichem Rand gelten muss.

fließt. Dieser erzeugt ein magnetisches Feld, dass dem AMPÈRESchen Gesetz genügt. Da das Flussintegral (Oberflächenintegral)

$$\mu_0 \iint_F \vec{j} \, d\vec{A} \quad (7.16)$$

über F wegen des Stromes $I = \iint_F \vec{j} \, d\vec{A}$ nicht null sein kann, muss nach dem AMPÈRESchen Gesetz auch das Ringintegral entlang des Weges γ von null verschieden sein.

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \, d\vec{r} = \mu_0 I \neq 0 \quad (7.17)$$

Wählen wir nun eine andere Fläche F' , die ebenfalls von γ begrenzt wird, die allerdings den Leiter nicht schneidet, sondern stattdessen zwischen den Kondensatorplatten verläuft (siehe Abb. 7.1 (b)), verschwindet das Flussintegral

$$\mu_0 \iint_{F'} \vec{j} \, d\vec{A} = \mu_0 I = 0. \quad (7.18)$$

Nach dem AMPÈRESchen Gesetz muss daher auch das Ringintegral

$$\oint_{\gamma=\partial F'} \vec{B} \, d\vec{r} = \mu_0 I = 0 \quad (7.19)$$

verschwinden. Dies ist aber ein Widerspruch zu (7.17). Wir haben also die globale Gültigkeit des AMPÈRESchen Gesetzes widerlegt. Wir müssen das AMPÈRESche Gesetz daher modifizieren, damit auch obiger Fall richtig beschrieben wird. Betrachten wir noch einmal die oben beschriebene Fläche F' durch das Innere des Kondensators: Das Flussintegral der Stromdichte über die Fläche F' verschwindet zwar, dafür schneidet die Fläche F' im Gegensatz zur Fläche F Feldlinien eines sich ändernden \vec{D} -Feldes, so dass das Oberflächenintegral

$$\iint_F \vec{D} \, d\vec{A} \neq 0 \quad (7.20)$$

ist. Wir können uns den elektrischen Strom $I = \frac{dQ_{\text{frei}}}{dt}$ durch den Kondensator fortgesetzt denken. Der elektrische Strom $I = \frac{dQ_{\text{frei}}}{dt}$ ändert die Ladungsmenge Q auf den Kondensatorplatten. Gleichzeitig ändert er damit auch die Flächenladungsdichte

$$\sigma = \frac{Q_{\text{frei}}}{A}. \quad (7.21)$$

Für das \vec{D} -Feld im Innern des Kondensators gilt nach (2.64) $\sigma = D$. Damit resultiert aus dem elektrischen Strom I im Leiterdraht ein sich änderndes D -Feld im Kondensatorinnern:

$$I = \frac{dQ_{\text{frei}}}{dt} = \frac{\partial(\sigma A)}{\partial t} = \frac{\partial(DA)}{\partial t} \quad (7.22)$$

$$= \frac{\partial D}{\partial t} A = \iint_{F'} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \, d\vec{A} \quad (7.23)$$

$$\Leftrightarrow \iint_F \vec{j} \, d\vec{A} = \iint_{F'} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \, d\vec{A} \quad (7.24)$$

Wir können uns den elektrischen Strom $I = \frac{dQ_{\text{frei}}}{dt}$ also durch den Kondensator fortgesetzt denken. Der „Strom“ im Kondensator wird

MAXWELLScher Verschiebungsstrom

$$I_v = \iint_A \vec{j} \, d\vec{A} \quad (7.25)$$

genannt. Analog zur elektrischen Stromdichte \vec{j} können wir dann die

**MAXWELLSche
Verschiebungsstromdichte**

$$\vec{j}_v = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

(7.26)

definieren. Wir können mit diesen Größen das AMPÈRESche Gesetz verallgemeinern:

$$\oint_{\partial F} \vec{H} \, d\vec{r} = I_{\text{frei}} + \iint_F \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \, d\vec{A}$$

(7.27)

Dies ist die Integralform der gesuchten vierten MAXWELL-Gleichung. Mit dem STOKESschen Satz können wir daraus die differenzielle Form der vierten MAXWELL-Gleichung gewinnen:

$$\oint_{\partial F} \vec{H} \, d\vec{r} = I_{\text{frei}} + \iint_F \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \, d\vec{A} \quad (7.28)$$

$$\stackrel{\text{Stokes}}{\Leftrightarrow} \iint_F (\text{rot } \vec{H}) \, d\vec{A} = I_{\text{frei}} + \iint_F \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \, d\vec{A} \quad (7.29)$$

$$\Leftrightarrow \iint_F (\text{rot } \vec{H}) \, d\vec{A} = \iint_F \vec{j}_{\text{frei}} \, d\vec{A} + \iint_F \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \, d\vec{A} \quad (7.30)$$

$$\Leftrightarrow \iint_F (\text{rot } \vec{H}) \, d\vec{A} = \iint_F \left(\vec{j}_{\text{frei}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \, d\vec{A} \quad (7.31)$$

Da die letzte Relation für beliebige Flächen gilt, müssen die Integranden übereinstimmen:

$$\Rightarrow \boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{\text{frei}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \quad (7.32)$$

Dies ist die differenzielle Form der vierten MAXWELL-Gleichung. Mit dieser Gleichung kennen wir nun alle vier MAXWELLSchen Gleichungen, die im Folgenden zusammengetragen sind:

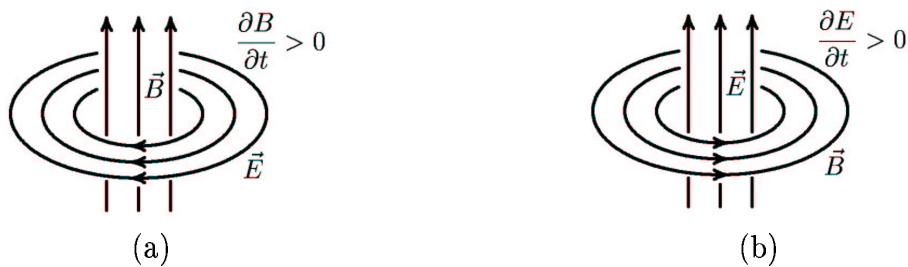


Abbildung 7.2: (a) Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld \vec{B} erzeugt (induziert) ein elektrisches Wirbelfeld \vec{E} , und ein sich zeitlich änderndes elektrisches Feld \vec{E} erzeugt ein magnetisches Wirbelfeld \vec{B} (b)

MAXWELLSche Gleichungen:

	differenziell	integral	
(1)	$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{frei}}$	$\oiint_{\partial V} \vec{D} \, d\vec{A} = Q_{\text{frei}}$	COULOMBSches Gesetz
(2)	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\oiint_{\partial V} \vec{B} \, d\vec{A} = 0$	Abwesenheit magn. Monopole
(3)	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_{\partial A} \vec{E} \, d\vec{r} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \, d\vec{A}$	FARADAYSches Induktionsgesetz
(4)	$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{frei}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_{\partial A} \vec{H} \, d\vec{r} = I_{\text{frei}} + \iint_A \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \, d\vec{A}$	AMPÈRESches Gesetz

Hierbei sind die materieunabhängigen Hilfsgrößen \vec{D} und \vec{H} definiert durch

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \quad (7.33)$$

und

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_r \mu_0 \vec{H}. \quad (7.34)$$

Wir können die vier MAXWELLSchen Gleichungen stattdessen nur mit den Kräfte bestimmenden Feldgrößen \vec{E} und \vec{B} aufschreiben. Allerdings werden \vec{E} - und \vec{B} -Feld nicht nur von freien Ladungen bzw. Strömen erzeugt, sondern von allen (d.h. von freien und gebundenen) Ladungen bzw. Strömen. Damit sind die MAXWELLSchen Gleichungen

MAXWELLSche Gleichungen:

	differenziell	integral
(1)	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint_{\partial V} \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$
(2)	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\oint_{\partial V} \vec{B} \, d\vec{A} = 0$
(3)	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_{\partial A} \vec{E} \, d\vec{r} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \, d\vec{A}$
(4)	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\oint_{\partial A} \vec{B} \, d\vec{r} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \iint_A \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \, d\vec{A}$

Interessant ist der Fall, dass keine Ladungen oder Ströme auftreten ($\rho = \vec{j} = 0$). Die einzigen nicht verschwindenden Terme der MAXWELLSchen Gleichungen sind dann

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (7.35)$$

und

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (7.36)$$

Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld \vec{B} erzeugt (induziert) ein elektrisches Wirbelfeld \vec{E} , und ein sich zeitlich änderndes elektrisches Feld \vec{E} erzeugt ein magnetisches Wirbelfeld \vec{B} (siehe Abb. 7.2).

MAXWELL zeigte, dass aus den MAXWELLSchen Gleichungen die Existenz **elektromagnetischer Wellen** folgt, indem er die vier Gleichungen so umformte, dass sie eine Wellengleichung bilden. Aus dieser Wellengleichung geht insbesondere hervor, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit c elektromagnetischer Wellen mit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (7.37)$$

gleich der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes im Vakuum ist. MAXWELL schloss daraus, dass Licht eine elektromagnetische Welle ist. Die ersten elektromagnetischen Wellen wurden allerdings erst im Jahre 1887 von HEINRICH HERTZ nachgewiesen.

Literaturverzeichnis

- [1] Bergmann, Ludwig und Schaefer, Clemens. *Lehrbuch der Experimentalphysik Bd. II Elektrizität und Magnetismus*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1987
- [2] Gerlach, Eckard und Grosse, Peter. *Physik Eine Einführung für Ingenieure*. B.G.Teubner, Stuttgart, 1991
- [3] Hering, Ekbert; Martin, Rolf; Stohrer, Martin. *Physik für Ingenieure*. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1992
- [4] Lüscher, Edgar. *Experimentalphysik I 1. Teil, Mechanik, Optik, Wärme*. BI Hochschultaschenbücher, Mannheim, 1967
- [5] Lüscher, Edgar. *Experimentalphysik II Elektromagnetische Vorgänge*. BI Hochschultaschenbücher, Mannheim, 1966
- [6] Bormann, Manfred. *Experimentalphysik Bd. 2 Elektrizitätslehre, Elektromagnetische Schwingungen und Wellen*. Studienverlag Dr. N.Brockmeyer, Bochum, 1977
- [7] Atkins, Kenneth R. *Physik: Die Grundlagen des physikalischen Weltbildes*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1986
- [8] Höfling, Oskar *Physik: Lehrbuch für Unterricht und Selbststudium*. Dümmler, Bonn, 1990
- [9] Gerthser, Christian; Kneser, Hans O.; Vogel, Helmut *Physik: ein Lehrbuch zum Gebrauch neben Vorlesungen*. Springer-Verlag, Berlin, 1989
- [10] Bader, Franz und Dorn, Friedrich. *Physik-Oberstufe Gesamtband 12/13*. Schroedel Schulbuchverlag, Hannover, 1986
- [11] Pohl, Robert W. *Einführung in die Physik Bd. 2, Elektrizitätslehre*. Springer-Verlag, Berlin, 1975
- [12] Orear, Jay. *Physik*. Carl Hanser Verlag, München, 1989

- [13] Kittel, Charles. *Einführung in die Festkörperphysik*. R. Oldenbourg Verlag, München, 1993
- [14] Buckel, Werner. *Supraleitung: Grundlagen und Anwendungen*. VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim, 1990
- [15] Flügge, Günter. *Manuskript zur Vorlesung Physik II RWTH Aachen*. Aachen
- [16] Bethke, Siegfried. *Manuskript zur Vorlesung Physik II RWTH Aachen*. Aachen
- [17] Ameling, Walter. *Grundlagen der Elektrotechnik I*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1988
- [18] Böhm, Albrecht. *Manuskript zur Vorlesung Physik II RWTH Aachen*. Aachen
- [19] Bertelsmann Lexikon *Das neue Taschenlexikon* Bertelsmann Lexikon Verlag, Gütersloh, 1992
- [20] Vogel, Helmut. *Gerthsen Physik* Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1995
- [21] Tipler, Paul A. *Physik* Spektrum Verlag, Berlin Heidelberg, 1994
- [22] Grehn, Joachim. *Metzler Physik* Metzler Schulbuchverlag, Hannover, 1992

Alle Bilder ohne Quellenangabe wurden von Sebastian Meßlinger mit \LaTeX oder xfig erstellt.

Index

- Abschaltvorgang, *RL*-Kreis, 201
Äquipotenzialflächen, 36
Äquipotenziallinien, 36
Akkumulator, 122
Akzeptoren, 127
AMPÈRE, ANDRÉ-MARIE, 91, 145, 149
Ampère, Definition, 157
AMPÈREmeter, 109
AMPÈRESches Gesetz, 162, 241
Anion, 116
Anode, 116
anodisches Glimmlicht, 143
ASTONScher Dunkelraum, 142
Atomkern, 168
- Bändermodell, 123
Bahndrehimpuls, 221
Bandgenerator, 13, **13**
BARDEEN, J., 101
BARKHAUSEN-Effekt, 234
BARKHAUSEN-Sprung, 234
Basis, 131
Basisschaltung, 131
BCS- Theorie, 101
BEDNARZ, J., 102
Beweglichkeit, 93, 118
BIOT-SAVARTSches Gesetz, 164
 allgemeine Form, 168
 für unendlich dünnen Leiter, 165
Blättchen-Elektroskop, 5, **5**
Blasenkammer-Aufnahme, 11, **11**
Bleiakku, 122
Bleibaum, 116
Bogenentladung, 140
- BOHNENBERG'sches Elektroskop, **5**, 6
BOHR, NIELS, 168
BOHR'sches Atommodell, 168
Brückenschaltung, 112
BRAUN, F., 6, 50
BRAUN'sche Röhre, **50**, 50
BRAUN'sches Elektrometer, **5**, 6
Brookhaven National Laboratory, 11
- cgs-System, 18, 158
COOPER, L., 101
COOPER-Paare, 101
COULOMB, C. A. DE, 16
COULOMB-Gesetz (1. Maxwell-Gl.) , 85
COULOMB-Kraft, 19
COULOMBSche Drehwaage, **17**
COULOMBSches Gesetz, 14 ff., 19
CURIE-Gesetz, 238
CURIE-Temperatur, 238
CURIE-WEISS-Gesetz, 238
- DANIELL-Element, 121
DE MARICOURT, PIERRE, 145
Defektelektron, 125
Diamagnet, 217
diamagnetische Materialien, 217
Dielektrikum, 80
Dielektrische Polarisierung, 85 ff., **86**
dielektrische Suszeptibilität, 84, 217
Dielektrizitätskonstante, 18
Dielektrizitätszahl, relative, 82
Differenzialgeometrie, 191
Diode
 Halbleiterdiode, 129

Vakuumdiode, 135
 Dipol
 elektrisch, 40
 magnetisch, 210
 Dipolfeld, 147
 Dipolmoment
 elektrisch, 41, **46**, 85
 magnetisch, 210
 Dissoziation, 116
 Divergenz, 57
 Dom, 13
 Domänenbildung, 90
 Donatoren, 127
 dotierte Halbleiter, 126
 Dotierung, 127
 Drehpulinstrumente, 213
 Driftgeschwindigkeit, 93, 118, 156, 176
 DU FAY, 3
 Durchflutungsgesetz, 162
 Durchgriff, 136
 Durchlassrichtung, 130

 Eigendrehimpuls (Spin), 222
 Einschaltvorgang, *RL*-Kreis, 201
 EINSTEIN, ALBERT, 146
 elektrische Feldkonstante, 18
 elektrische Feldlinien, 24
 elektrische Feldstärke, 23
 Dimension, 24
 elektrische Leitfähigkeit, 97
 elektrische Stromstärke, 91 ff.
 elektrischer Dipol, 40
 elektrischer Kraftfluss, 52
 elektrischer Löffel, 7
 elektrischer Leitwert, 96
 elektrischer Widerstand, 95 ff.
 elektrisches Dipolmoment, 41
 elektrisches Elementarquantum, 11
 elektrisches Feld, 22 ff.
 Energie, 78
 Energiedichte, 79 f.
 Superpositionsprinzip, 30
 elektrisches Potenzial, 34
 Elektrizität, 1
 elektrochemische Spannungsreihe, 121
 Elektrode, 115
 Elektrolyt, 115, 176
 Elektrolytische Leitfähigkeit, 115
 Elektromagnet, 163, 183
 elektromagnetische Wellen, 247
 elektromagnetisches Feld, 146
 Elektromagnetismus, 1
 Elektrometer, 5
 BRAUNsches, **5**, 6
 elektromotorische Kraft, 108
 Elektron, 1
 Paarerzeugung, 10
 Elektronenbeschleuniger, 151
 Elektronenbeweglichkeit, 92
 Elektronendrift, 156
 Elektronengas, 123
 Elektronenröhre, **50**, 135
 Elektronenstrahlröhre, 149
 Elektroskop, **5**, **5**
 BOHNENBERG'sches, **5**, 6
 electrostatic unit, 18
 elektrostatische Ladungseinheit esu, 18
 elektrostatisches Feld, 22 ff., 26, 162
 elektrostatisches Potenzial, 31
 Elektrostriktion, 87
 Elementarladung, 11, **12**
 MILLIKAN-Versuch, 48
 Elementarquantum, elektrisches, 11
 Emitter, 131
 Emitterschaltung, 132
 Energie
 des magnetischen Feldes, 239
 elektrischer Strom, 95
 elektrisches Feld, 78
 Energiedichte
 elektrisches Feld, 79 f.
 im Dielektrikum, 89

Energieniveaus, 123
 Entladestrom, 113
 Entstaubungsanlage, 46, **47**
 Erdmagnetfeld, 150
 Erdung, 7, 37
 Ersatzschaltbild, 197
 esu, 18

 Fadenstrahlrohr, 151, **51**
 FARADAY, MICHAEL, 60, 146, 218
 FARADAY-Becher, 7, **7**
 FARADAY-Käfig, 60, **61**
 FARADAYScher Dunkelraum, 142
 FARADAYSches Induktionsgesetz, 190
 Feldlinien
 elektrische, 24
 Feldstärke
 elektrisch, 31
 Gravitation, 31
 magnetisch, 229
 Ferroelektrika, 88
 Ferromagnet, 217
 ferromagnetische Materialien, 217
 Ferromagnetismus, 216, 233
 Flächenladungsdichte, 42, 66
 Flammsonde, 37
 FRANKLIN, B., 3, 10
 freie Ströme, 228
 Funkenentladung, 140

 GALVANI, L., 120
 GALVANISCHE Elemente, 120
 Gasentladung, 138
 selbstständig, 140
 unselbstständig, 138
 GAUSS, Satz von GAUSS, 66
 GAUSSScher Satz der Elektrostatik, 55
 Gauß
 Einheit, 150
 GAUSS, CARL FRIEDRICH, 14, 150
 gebundene Ströme, 228
 Gegeninduktion, 194

 Gegeninduktivität, 194
 GELL-MANN, M., 12
 GILBERT, WILLIAM, 145
 Glühemission, 135
 Gleichung von POISSON, 70
 Glimmentladung, 141
 Gradient, 44, **44**
 Gradientenfeld, 32
 Gravitation, 31
 Gravitationskraft, 21, 31
 Grenzschicht, 128

 Halbleiter, 125, 176
 dotiert, 126
 p,n- Halbleiter, 125
 Halbleiterdiode, 129
 HALL, EDWIN H., 175
 HALL-Effekt, 175
 HALL-Koeffizient, 177
 HALL-Sonde, 178
 HALL-Spannung, 177
 HALL-Widerstand
 klassischer HALL-Effekt, 177
 Quanten-HALL-Effekt, 178
 Heißleiter, 103
 HERTZ, HEINRICH, 247
 HITTORFScher Dunkelraum, 142
 homogenes Magnetfeld, 150
 homogenes Vektorfeld, 29
 Hysterese, 88, 89
 Hysteresis, 236, **236**
 Hysteresisschleife, 236

 Induktionsgesetz, 187, 190
 Induktionsspannung, 183
 induktiver Widerstand, 207
 Induktivität, 196
 Spule ohne Kern, 196
 Spule mit Kern, 239
 Influenz, **8**, 65
 Influenzkonstante, 18
 inhomogenes Magnetfeld, 218

Innenwiderstand, 108
 Ion, 116
 Ionisationskammer, 139
 Isolator, 4, 125

 JOULEsche Wärme, 95

 Kaltleiter, 103
 KAMERLINGH- ONNES, H., 100
 Kapazität, 71
 Kathode, 116
 Kation, 116
 KELVIN, 13
 Kennlinie
 Halbleiterdiode, 130
 Transistor, 132
 Vakuumdiode, 136
 Kennlinienfeld (Transistor), 132
 KIRCHHOFFsche Gesetze, 103 ff.
 1. Knotenregel, 104
 2. Maschenregel, 104
 Klemmenspannung, 108
 KLITZING, KLAUS VON, 178
 Knotenregel, 104
 Kollektor, 131
 Kompass, 145
 Kondensator
 Parallelschaltung, 76
 Schaltsymbol, **76**
 Konduktorkugel, 9
 konservative Kräfte, 31
 konservatives Kraftfeld, 192
 kontinuierlichen Ladungsverteilung, 30
 Koronaentladung, 140
 Kosmotron, 14
 Kraftfluss
 elektrisch, 52
 magnetisch, 183
 Kreisspule, 164
 kritische Temperatur, 100
 Kugelkondensator, 74, **75**

 Lösungstension, 120
 Ladestrom, 113
 Ladevorgang
 RC-Glied, 113
 Ladung, 1
 Dimension, 17
 Ladungserhaltung, 9
 Ladungsmenge, 11
 Ladungsmessung, 5
 Ladungsträgerdichte, 176
 Ladungstrennung, 3
 LAPLACE-Operator, 69
 LARMOR-Frequenz, 225
 Leistung
 elektrischer Strom, 95
 Leiter, 4
 Leiterschleife, 182
 Leitfähigkeit, 97
 Leitung
 in Flüssigkeiten, 115
 in Gasen, 138
 in Halbleitern, 125
 in Metallen, 123 ff.
 Leitungsband, 124
 Leitungselektron, 123
 Leitwert, elektrisch, 96
 LENZsche Regel, 187, 196, 219
 Loch (Halbleiter), 125
 LORD KELVIN, 13
 LORENTZ, HENDRIK A., 149
 LORENTZ-Kraft, 149, 149, 159, 171, 225
 LOSCHMIDTsche Zahl, 19

 MÜLLER, A., 102
 Magnetfeld, 147
 Dimension, 150
 einer Spule, 163
 eines stromdurchflossenen Leiters,
 158
 eines unendlich langen, geraden Lei-
 ters, 160

magnetisch harte Materialien, 237
 magnetisch weiche Materialien, 237
 magnetische Feldkonstante, 157
 magnetische Feldstärke, 149 , 229
 magnetische Flasche, 154, **154**
 magnetische Induktion, 147, 183
 Dimension, 150
 magnetische Kraftflussdichte, 147, 183
 magnetische Monopole, 146
 magnetische Permeabilitätszahl
 relativ, 216
 magnetische Suszeptibilität, 217
 magnetischer Fluss, 183
 magnetisches Feld, 147
 Dimension, 150
 magnetisches Moment, 210
 Magnetisierung, 222, 226
 Magnetisierungskurve, 236
 Magnetismus, 145
 Magnetit, 145
 Magnetostatik, 145, 146, 181
 DE MARICOURT, PIERRE, 145
 Maschenregel, 104
 MAXWELL, JAMES CLERK, 146, 170, 241
 MAXWELL-Gleichungen, 170
 1. COULOMB-Gesetz, 85
 2. Abwesenheit magnetischer Mono-
 pole, 148
 Geschichte des Magnetismus, 146
 Maßsystem, 158
 GAUSSsches, 158
 SI-Maßsystem, 158
 MEISSNER-OCHSENFELD-Effekt, 102
 MILLIKAN, R. A., 11, 48
 MILLIKAN-Versuch, 48
 MITCHELL, JOHN, 145
 mittlere Stoßzeit, 93
 Moment
 magnetisch, 210
 Multiplier, 137
 Multipolfeld, 147

 n-Halbleiter, 128
 Nabla-Operator, 57
 Neukurve (Hysteresis), 237
 NEWTONsches Axiom
 actio = reactio, 20
 Nichtleiter, 4

 OERSTED, HANS CHRISTIAN, 145, 149
 OHMScher Widerstand, 197
 OHMSches Gesetz, 97, 177
 Oxidation, 117

 p,n- Halbleiter, 125
 p- Halbleiter, 127
 Paarbildung, 10, **10**
 Paarerzeugung, 10
 Papierfolienkondensatoren, 82
 paraelektrische Polarisierung, 86
 Parallelschaltung
 Kondensatoren, 76
 Widerstände, 106
 Paramagnet, 217
 paramagnetische Materialien, 217
 partielle Ableitung, 44
 PAULI-Prinzip, 123
 Pentode, 136
 Perpetuum Mobile, 187
 Permanentmagnet, 149, 168
 Permeabilitätszahl
 relativ, 216
 Permeabilität des Vakuums, 157
 Permittivitätszahl, 82
 Photodiode, 137
 Photoemission, 137
 Photostrom, 137
 Photozelle, 137
 Piezoelektrizität, 86, **87**
 PLANCKsches Wirkungsquantum, 178
 Plasma, 143
 Plasmaströme, 143
 Plattenkondensator, 28, 72
 pn- Übergang, 128

POISSON, Gleichung von POISSON, 70
 Polarisation
 dielektrisch, 85 ff.
 Polarlicht, 155
 Positron
 Paarerzeugung, 10
 Potenzial
 beliebige Ladungsverteilung, 40
 elektrisch, 34
 elektrostatisch, 31
 Potenzialdifferenz, 34
 potenzielle Energie, 31, 34
 Potenziometer, 103, 111
 PRIESTLY, J., 14
 Primärspule, 198
 Primärstromkreis, 199
 Probeladung, 23

 Quanten-HALL-Effekt, 178
 Quantenelektrodynamik, 146
 Quantenmechanik, 223
 quantenmechanische Zustände, 223
 Quarks, 12
 Quelle
 eines Vektorfeldes, 59, 62

RC-Kreis, 113
RC-Glied, 113
 Rechte-Hand-Regel, 191, 210, 229
 Reduktion, 117
 Reibungselektrizität, 3
 Reihenschaltung
 Kondensatoren, 77
 Widerstände, 105
 Rekombinationsbereich, 138
 relative Dielektrizitätszahl, 82
 relative magnetische Permeabilitätszahl,
 216
 Relativität
 elektrischer und magnetischer Kräfte,
 170
 Relativitätstheorie, 146

 Relaxationszeit, 93
 Reziprozitätsgesetz, 194
 RICHARDSON, O., 135
 RICHARDSON-Gleichung, 135
 Ringintegral, 162
 Ringströme, 168
RL-Kreis, 201
 Rotation, 32, 191

 Satz von GAUSS (Mathematik), 57
 Schiebewiderstand, 197
 SCHRIEFFER, J. R., 101
 SEIGNETTE, P., 88
 SEIGNETTESALZ, 86, 88
 Sekundärelektronenemission, 137
 Sekundärspule, 199
 Sekundärstromkreis, 199
 Selbstinduktivität, 196
 Senke
 eines Vektorfeldes, 59, 62
 Serienschaltung
 Kondensatoren, 77
 Widerstände, 105
 Sonnenwind, 155
 Spannung, 34
 Dimension, 34
 Spannungsteiler, 103, 111
 Sperrichtung, 129
 Sperrschicht, 129
 Sperrstrom, 129
 spezifischer Widerstand, 96
 Spiegelladungen, 69
 Spin, 221
 Spitzenentladung, 140
 Sprungtemperatur, 100
 Spule
 Definition, 163
 Störstellenleitung, 127
 statcoulomb, 18
 stationäre Felder, 146
 stationäre Ströme, 146

STOKESSches Gesetz, 118
 Stoßionisation, 139
 Ströme
 stationär, 146
 Strömungsfeld, 191
 Strom, elektrisch, 91 ff.
 Stromdichte, 94, 241
 Stromkreis, 103 ff.
 Superposition
 COULOMB-Kraft, 19
 Superpositionsgesetz
 Potenzial, 40
 Superpositionsprinzip, 55, 150
 elektrisches Feld , 30
 Potenzial, 40
 Supraleitung, 100
 Suszeptibilität
 dielektrisch, 84, 217
 magnetisch, 217

 Temperaturabhängigkeit
 Ferromagnetismus, 238
 Paramagnetismus, 238
 Temperaturkoeffizient des Widerstandes,
 98
 TESLA, NICOLA, 150
 Tetrode, 136
 THALES VON MILET, 1
 totales Differenzial, 44
 Transformator, 198
 Transformator-Gleichung, 200
 Transistor, 130, **131**
 Trimmer, 103
 Triode, 136

 Umwegrohr nach HITTORF, 143, **143**

 Vakuum-Diode, 135
 Valenzband, 124
 Valenzelektron, 123
 VAN-ALLEN-Gürtel, **155**
 VAN-DE-GRAAFF, 13

 VAN-DE-GRAAFF-Generator, 13, **13**
 Variatoren, 103
 VDR-Widerstand, 103
 Vektorfeld
 homogen, 29
 Magnetismus, 147
 verbotene Zone, 123
 Versuch von MILLIKAN, 48
 VOLTmeter, 110, 181
 VON-KLITZING-Konstante, 178
 Vorwiderstand, 111

 Wärmeleitfähigkeit, 99
 WATSON, J. D., 10
 Weber (Einheit), 183
 Wechselspannung, 198, 204
 Wechselstrom, 204
 Wegintegral, 162
 WEISSsche Bezirke, 234, **234**
 Widerstand
 OHMSch, 95 ff.
 induktiv, 207
 kapazitiv, 208
 Widerstandmessung, 112
 WIEDEMANN-FRANZsches Gesetz, 99
 Windungszahldichte, 164
 Wismut, 218
 WULFsches Zweifadenelektrometer, **5**, 6

 Zeitkonstante, 202
 ZENER-Bereich, 130
 Zustand
 quantenmechanisch, 223
 Zweifadenelektrometer
 WULFsches, **5**, 6
 Zyklotronfrequenz, 152
 Zylinderkondensator, 75
 Zylinderspule, 163, 181