Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Allgemeine Wellenlehre/ mechanische Wellen

1.1 Einleitung

In den vorangehenden Semestern wurden bereits Schwingungen eingeführt.

Mechanische Schwingungen	**Elektromagnetische Schwingungen**
Federschwingungen	Elektrischer Schwingkreis
Mathematisches Pendel	Oszillierendes Elektron
Physikalisches Pendel	...
Torsionspendel	
...	

Unsere bisherigen Kenntnisse lassen sich in folgenden Punkten grob zusammenfassen:

- Voraussetzung für die Schwingung ist das Vorliegen eines schwingungsfähigen Systems, eines Oszillators.
- Bei den mechanischen Schwingungen findet ein periodischer Austausch zwischen kinetischer und potentieller Energie statt, bei den elektromagnetischen Schwingungsvorgängen werden periodisch elektrische und magnetische Energie ineinander umgewandelt.
- Jede Schwingung läßt sich formal durch eine Differentialgleichung beschreiben.
- Man unterscheidet harmonische und anharmonische, freie und erzwungene sowie gedämpfte und ungedämpfte Schwingungen.

Wir werden uns nun mit Wellen beschäftigen.

1.1.1 Wellen

Von besonderer Bedeutung in allen Bereichen der Physik sind die Wellen.

In der Mechanik und Akustik spielen die **mechanischen Wellen** eine wesentliche Rolle. Dazu zählen die in Festkörpern auftretenden elastischen Wellen (Bsp.: Stabwelle, Seilwelle), die Druck- bzw. Dichtewellen in Flüssigkeiten und Gasen (Bsp.: Schallwellen), sowie die Oberflächenwellen von Flüssigkeiten (Bsp.: Wasserwellen).

Die **elektromagnetischen Wellen** kommen unter anderem in der Optik und Atomphysik wesentlich zum Tragen. Ihr Frequenzspektrum reicht von etwa 10 Hz (technische Wechselströme) bis zu 10^{20} Hz (γ - Strahlung) und mehr. Als bekannteste Beispiele sind hier die Radiowellen und Lichtwellen zu nennen.

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den mechanischen Wellen. Anhand mechanischer Modelle werden Eigenschaften und Erscheinungen aufgeführt, welche für alle Wellenbewegungen charakteristisch sind und allgemeine Gültigkeit besitzen.

1.2 Allgemeine Wellenlehre

Wie entsteht eine Welle ?

Zur Untersuchung der Entstehung einer Welle dient die Pendelkette als Modell (Abb. 1.1).

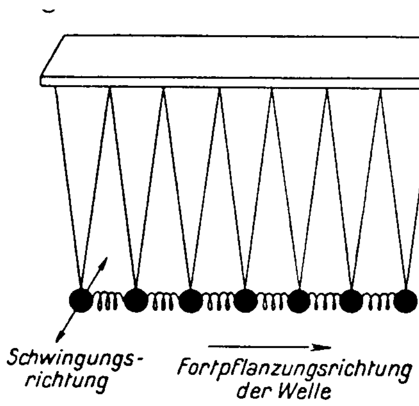


Abbildung 1.1: *Pendelkette (aus [2])*

Dabei handelt es sich um eine Reihe gleichartiger Fadenpendel, welche über Schraubenfedern miteinander verbunden sind. Die Pendel seien so aufgehängt, daß sie senkrecht zu ihrer Verbindungslinie schwingen können.

Wird das erste Pendel in Schwingungen versetzt, so wird infolge der Pendelbewegung die erste Schraubenfeder periodisch gedehnt und gestaucht, so daß diese das zweite Pendel ebenfalls zu Schwingungen senkrecht zur Verbindungslinie anregt. Dessen Schwingung überträgt sich über die Kopplung auf das dritte Pendel und so fort. Man beobachtet also, daß nacheinander alle Pendel dieselbe Schwingung ausführen, zu der das erste Pendel angeregt wurde.

Was breitet sich bei der Wellenbewegung aus?

Da sich jedes Pendel nur um seine Ruhelage bewegt, d.h. ortsfest schwingt, pflanzen sich lediglich der Schwingungszustand sowie die zur Anregung der Oszillatoren nötige Energie fort. Dabei beginnt jedes Pendel etwas später als das vor ihm befindliche mit dieser Schwingung. Der Schwingungszustand breitet sich also nicht sofort über die ganze Kette aus, sondern wird mit einer endlichen, von der Kopplung abhängigen Fortpflanzungsgeschwindigkeit v weitergetragen.

Periodizität in Raum und Zeit

Verbindet man bei einer Momentaufnahme der Pendelkette die Auslenkungen sämtlicher Pendel mit einem Linienzug, so erhält man eine räumlich periodische Schwingung, deren Lage sich mit jedem Zeitmoment in Fortpflanzungsrichtung der Welle verschiebt (siehe Abb. 1.2).

Die Beobachtung eines einzelnen Pendels der Kette liefert eine zeitlich periodische Schwingung.

Insgesamt ist der an allen Pendeln zu allen Zeiten zu beobachtende Vorgang räumlich *und* zeitlich periodisch.

Zusammenfassung:

Die Betrachtung der Pendelkette als Modell einer Welle führt zu folgender Verallgemeinerung:

Voraussetzung für die Erzeugung einer mechanischen Welle ist das Vorhandensein vieler schwingungsfähiger Systeme, welche räumlich miteinander gekoppelt sind. Durch die Kopplung kann sich die Schwingung eines Oszillators auf die benachbarten Oszillatoren übertragen. Infolgedessen pflanzen sich der Schwingungszustand und die erforderliche Energie mit der charakteristischen Geschwindigkeit v im betreffenden Medium fort.

Beispiele:

Wellenart	Oszillator	Kopplung
Wasserwellen	Wassermolekül	Oberflächenspannung
Schallwelle	Gasmolekül	Druckausgleich
Seilwelle	Gitteratome	Elastizität

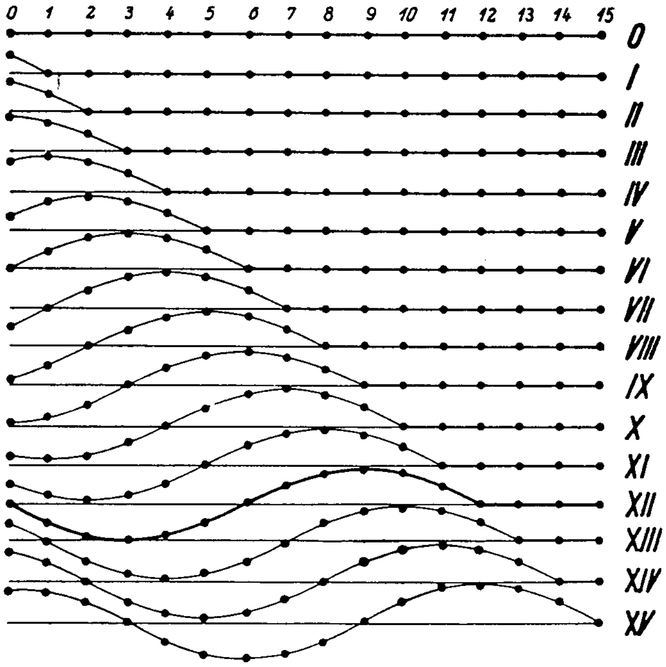


Abbildung 1.2: *Ausbildung einer fortschreitenden Transversalwelle an der Pendelkette (aus [2])*

Transversale Wellen - Longitudinale Wellen

Bisher wurde an der Pendelkette der Fall betrachtet, daß alle Oszillatoren senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle schwingen. Man spricht in diesem Fall von einer **Transversalwelle** (Bsp.: Seilwelle, Torsionswelle).

Bei einer **Longitudinalwelle** sind Schwingungsrichtung und Ausbreitungsrichtung der Welle parallel.

Sie läßt sich an der Pendelkette erzeugen, indem man das erste Pendel in Richtung der Verbindungslinie auslenkt. Die Schwingung überträgt sich auch hier durch die Kopplung auf die anderen Pendel, wodurch es zu einer Folge von Verdichtungen und Verdünnungen kommt, welche sich in voneinander gleichbleibenden Abständen über die Pendelkette ausbreiten (Abb. 1.3 und Abb. 1.5).

Harmonische Wellen

Man spricht von harmonischen Wellen, wenn die einzelnen Oszillatoren harmonische Schwingungen ausführen.

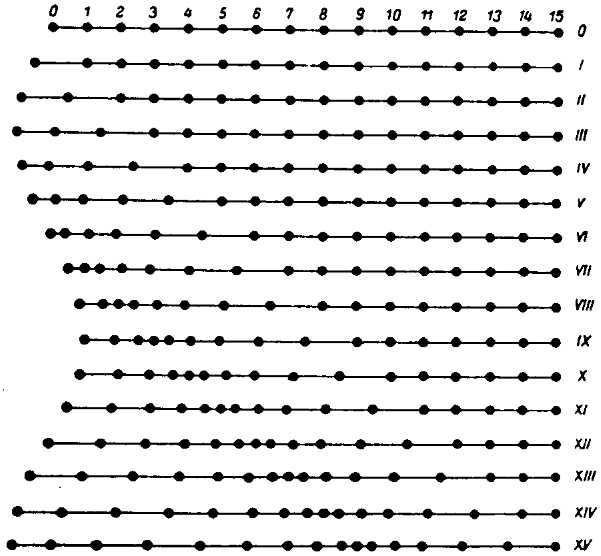


Abbildung 1.3: *Ausbildung einer Longitudinalwelle an der Pendelkette (aus [2])*

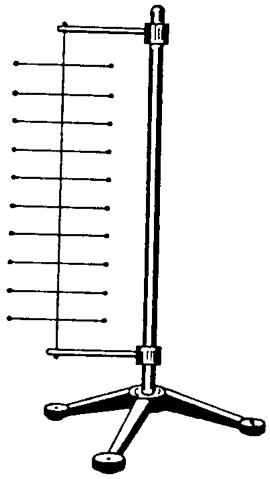


Abbildung 1.4: *Erzeugung einer Torsionswelle (aus [2])*

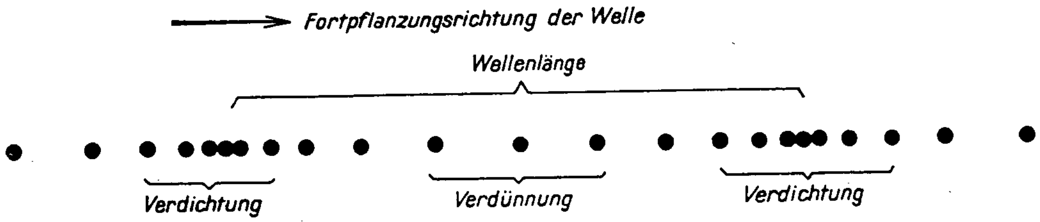


Abbildung 1.5: *Momentbild einer fortschreitenden Longitudinalwelle (aus [2])*

1.3 Mathematische Darstellung eindimensionaler Wellen

Wir leiten nun den mathematischen Zusammenhang zwischen Elongation u, Ort x und Zeit t für harmonische sowie allgemeine Wellen her. Dabei betrachten wir **eindimensionale Wellen**, bei denen die von der Störung erfaßten Raumpunkte auf einer *Gerade* liegen.

a.) Harmonische Wellen

Wir betrachten zunächst Abb. 1.6 die Schwingung des harmonischen Oszillators an der Stelle $x_0 = 0$.

Die Auslenkung des Oszillators wird beschrieben durch die Funktion

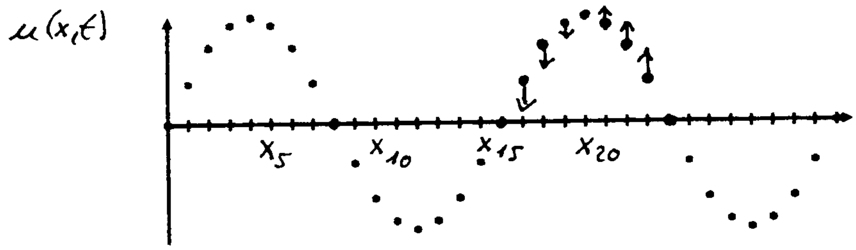


Abbildung 1.6: *Eindimensionale harmonische Welle erfaßt eine Reihe gekoppelter Oszillatoren*

$$u(x_0, t) = u(0, t) = u_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Wir setzen $\varphi = 0$ und erhalten

$$u(x_0, t) = u(0, t) = u_0 \cos \omega t$$

Der Schwingungszustand, den der betrachtete Oszillator zur Zeit t_0 besitzt

$$u(0, t_0) = u_0 \cos \omega t_0$$

pflanzt sich — wie in den vorangehenden Abschnitten erläutert — mit der Geschwindigkeit v fort und erreicht den Oszillator an der Stelle x_n zur Zeit t_n, wobei

$$t_n = t_0 + \frac{x_n}{v}$$

gilt.

Man erhält also

$$u(x_n, t_n) = u(0, t_0) = u_0 \cos \omega t_0 = u_0 \cos \omega (t_n - \frac{x_n}{v})$$

Dies ist gültig in einem Medium mit diskreten Oszillatoren.
In einem Kontinuum lautet die Abhängigkeit der Auslenkungen von Ort und Zeit

$$u(x, t) = u_0 \cos \omega (t - \frac{x}{v}) = u_0 \cos(\omega t - \omega \frac{x}{v})$$

Siehe dazu Abbildung 1.7! Mit $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ läßt sich die Wellenfunktion umformulieren zu

$$u(x, t) = u_0 \cos 2\pi(\nu t - \frac{x}{Tv})$$

Def. : Die **Wellenlänge** $\lambda = Tv$ stellt die räumliche Periode der harmonischen Welle dar. Sie ist definiert über die Strecke, welche ein bestimmter Schwingungszustand während einer Schwingungsdauer T zurücklegt.

Mit $\nu = 1/T = v/\lambda$ läßt sich $u(x,t)$ weiter umschreiben zu

$$u(x,t) = u_0 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

oder, falls die Welle in *negative* x - Richtung läuft, zu

$$u(x,t) = u_0 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

Def. : Die Größe $k = 2\pi/\lambda$ wird als **Wellenzahl** bezeichnet.

Damit erhält man eine weitere Formulierung der Wellenfunktion:

$$\boxed{u(x,t) = u_0 \cos(\omega t \mp kx)}$$

Die harmonische Welle wird also durch folgende charakteristische Größen beschrieben:

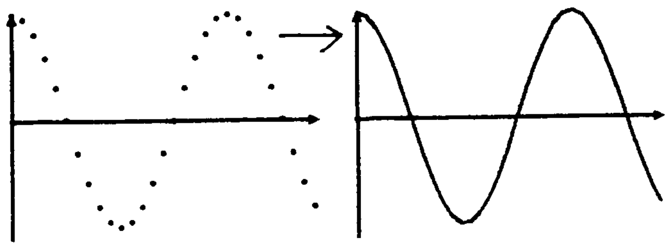


Abbildung 1.7: *Übergang von diskreten Oszillatoren zum Kontinuum*

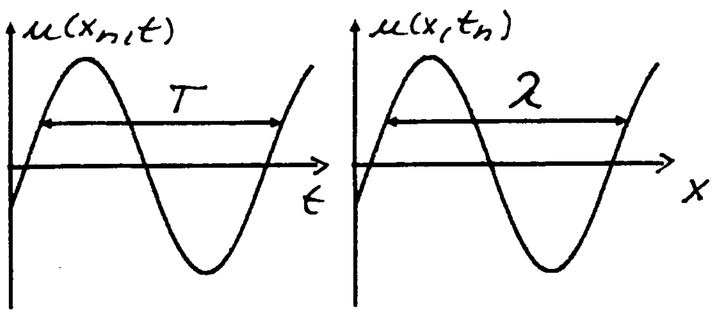


Abbildung 1.8: *Örtliche und zeitliche Periode*

Amplitude	u_0
Kreisfrequenz	$\omega = \frac{2\pi}{T}$
Wellenzahl	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$
zeitliche Periode	T
örtliche Periode	λ
Ausbeitungs - bzw. Phasengeschwindigkeit	$\boxed{v = \lambda\nu}$

Weitere Möglichkeit der formalen Darstellung harmonischer Wellen

Das Rechnen mit sin – und cos – Funktionen ist häufig umständlich (Additionstheoreme), wodurch die Erkenntnis physikalischer Zusammenhänge erschwert wird.
Daher geht man zu einer Darstellung im Komplexen über, welche im folgenden erläutert wird:

Eine komplexe Zahl $z \in \mathbf{C}$ läßt sich darstellen als

$$z = x + i\,y \quad \text{mit} \quad \boxed{i^2 = -1}$$

i: imaginäre Einheit
$x\,,\,y \in \mathbf{R}$

Für Addition und Multiplikation komplexer Zahlen ergeben sich folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= x_1 + x_2 + i\,(y_1 + y_2) \\ z_1\,z_2 &= x_1\,x_2 - y_1\,y_2 + i\,(x_1\,y_2 + x_2\,y_1) \end{aligned}$$

Welche Bedeutung hat dies bei der mathematischen Beschreibung von Schwingungen und Wellen?

Um diese Frage beantworten zu können, betrachte man zunächst die Reihenentwicklung der trigonometrischen Funktionen sowie der e – Funktion:

$$\begin{aligned} \cos\Theta &= 1 - \frac{\Theta^2}{2!} + \frac{\Theta^4}{4!} - \cdots \\ \sin\Theta &= \Theta - \frac{\Theta^3}{3!} + \frac{\Theta^5}{5!} - \cdots \\ e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

Verwendet man diese Reihenentwicklungen zur Darstellung der Funktion $e^{i\,\Theta}$,

$$e^{i\,\Theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\,\Theta)^n}{n!} = 1 + i\,\Theta - \frac{\Theta^2}{2!} - i\,\frac{\Theta^3}{3!} + \frac{\Theta^4}{4!} + i\,\frac{\Theta^5}{5!} + \cdots = \left\langle \begin{array}{l} 1 - \dfrac{\Theta^2}{2!} + \dfrac{\Theta^4}{4!} - \cdots \\ i\left(\Theta - \dfrac{\Theta^3}{3!} + \dfrac{\Theta^5}{5!} - \cdots\right) \end{array}\right.$$

so führt dies zu der EULERschen Relation

$$\boxed{e^{i\,\Theta} = \cos\Theta + i\,\sin\Theta}$$

Zeigerdarstellung im AGAND – Diagramm:

$$A\,e^{i\,\Theta} = A\,\cos\Theta + i\,A\,\sin\Theta$$

Der Zeiger $A\,e^{i\,\Theta}$ rotiert auf einem Kreis mit dem Radius A. Dabei ist Θ der Phasenwinkel

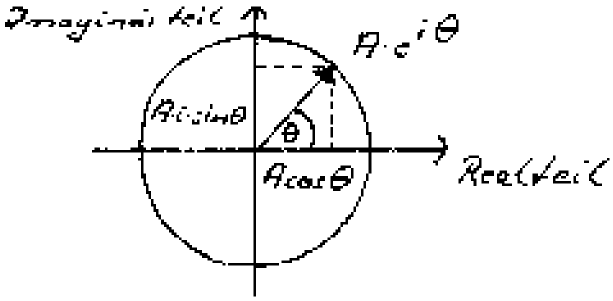


Abbildung 1.9: *Darstellung im Zeigerdiagramm*

und A der Betrag des komplexen Ausdruckes.
Über die EULERsche Relation läßt sich die mathematische Beschreibung einer harmonischen Welle ins Komplexe fortsetzen:

$$u(x,t) = u_0\,\cos(\omega t \mp kx) \quad\longrightarrow\quad u(x,t) = A\,e^{i\,(\omega t \mp kx)}$$

Die Darstellung $u(x,t) = A\,e^{i\,(\omega t \mp kx)}$ löst die Wellengleichung mit $v = \omega/k$ (s.S.11):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mp\, i\,k\,A\,e^{i\,(\omega t \mp kx)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = i\,\omega\,A\,e^{i\,(\omega t \mp kx)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\,k^2\,A\,e^{i\,(\omega t \mp kx)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\,\omega^2\,A\,e^{i\,(\omega t \mp kx)}$$

Einsetzen in die Wellengleichung ergibt:

$$\begin{aligned} -\,k^2\,A\,e^{i\,(\omega t \mp kx)} &= v^{-2}\left(-\,\omega^2\,A\,e^{i\,(\omega t \mp kx)}\right) \\ v^2 &= \frac{\omega^2}{k^2} \\ v &= \frac{\omega}{k} \end{aligned}$$

Die analytische Fortsetzung der physikalischen Lösung ins Komplexe hat rechnerische Vorteile. Es kommt jedoch nur dem Realteil der komplexen Lösung physikalische Bedeutung zu.

b.) Allgemeine Wellen

Zur Herleitung der mathematischen Darstellung einer allgemeinen Welle betrachten wir als anschauliches Beispiel die transversale Seilwelle.

<u>*Versuch:*</u> Zwischen zwei festen Punkten sei ein Seil gespannt. In der Nähe eines der beiden Aufhängepunkte wird ein "Buckel" in das Seil geschlagen. Dieser pflanzt sich in Richtung der zweiten Aufhängung fort, wird dort reflektiert und läuft solange auf dem Seil hin und her, bis die mechanische Energie durch Reibungsverluste etc. aufgebraucht ist (Abb. 1.10).

Zur Zeit $t_0 = 0$ werde der "Berg" dargestellt durch $u(x_0, t_0 = 0) = u(x_0)$. Er pflanze sich mit der Geschwindigkeit v in x – Richtung fort, dann befindet er sich zur Zeit t am Ort $x = x_0 + vt$, und seine Darstellung lautet

$$u(x,t) = u(x_0) = u'(x - vt)$$

Läuft der Wellenberg in negative x – Richtung, dann wird mit $x = x_0 - vt$ die Auslenkung

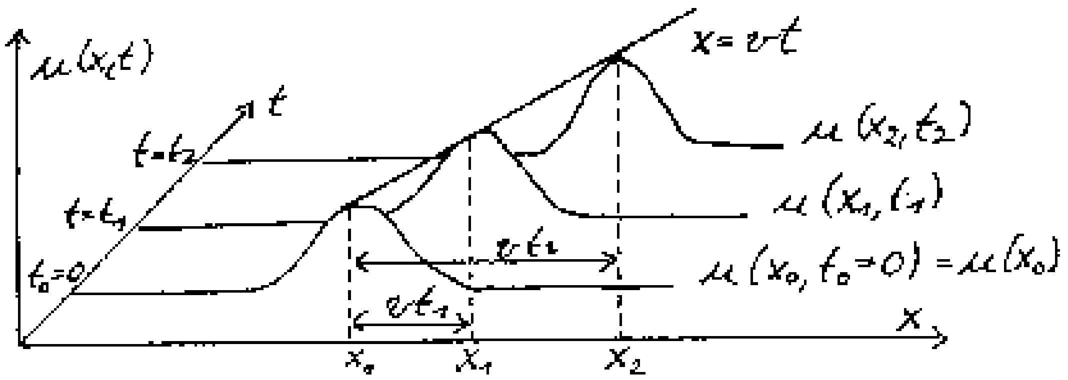


Abbildung 1.10: *Fortpflanzung eines Wellenberges entlang eines Seiles*

zur Zeit t beschrieben durch

$$u(x,t) = u(x_0) = u'(x + vt)$$

Es ist also

$$\boxed{u(x,t) = u'(x \mp vt)}$$

die **allgemeinste Form einer Welle**, welche sich mit der Geschwindigkeit v in $\pm x$ – Richtung ausbreitet.

1.3.1 Eindimensionale Wellengleichung

Um überprüfen zu können, ob es sich bei einem gegebenen Phänomen um die Fortpflanzung einer Welle handelt, suchen wir eine Differentialgleichung, welche auf alle Arten der Wellenausbreitung anwendbar ist.

Dazu betrachten wir die allgemeine Form einer Welle $u(x,t) = u(x \mp vt)$. Wir setzen $y = x \mp vt$. Dann folgt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \mp v$$

und weiter

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}1 \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial y}(\mp v)}_{\displaystyle \frac{\partial u}{\partial t} = \mp v\,\frac{\partial u}{\partial x}}$$

Partielles Ableiten nach x und t ergibt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} = \mp v\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mp v\,\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x} \quad (2)$$

Nach dem Satz von SCHWARTZ gilt für eine Funktion $u(x,t)$, welche stetig in x und t ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}$$

Damit folgt aus (1) und (2)

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$ Eindimensionale Wellengleichung

Nach D'ALEMBERT lautet die allgemeine Lösung dieser Gleichung

$$u(x,t) = u_1(x - vt) + u_2(x + vt)$$

Die Wellengleichung wird also allgemein gelöst durch die Überlagerung zweier Wellenbewegungen, die sich in entgegengesetzte Richtungen ausbreiten.

1.3.2 Die Bedeutung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit v

Unter der Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Welle versteht man im engeren Sinne die sogenannte **Phasengeschwindigkeit** v_{ph}, welche von der später zu definierenden **Gruppengeschwindigkeit** v_{gr} zu unterscheiden ist.

Ein bestimmter Schwingungszustand einer allgemeinen Welle ist durch konstante Phase gekennzeichnet:

$$x - vt = \text{constant} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x}{\partial t} - v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{\partial x}{\partial t}$$

Die Phasengeschwindigkeit v gibt an, wie schnell sich ein bestimmter Schwingungszustand in x – Richtung ausbreitet.

Bei einer harmonischen Welle $u(x,t) = u_0 \cos(\omega t \mp kx)$ wird ein Zustand konstanter Phase festgelegt durch $\omega t \mp kx = \text{constant}$. Orte konstanter Phase sind

$$x = \frac{\pm\omega t - \text{constant}}{k}$$

Der Betrag der Phasengeschwindigkeit einer harmonischen Welle lautet daher mit $v = \frac{dx}{dt}$

$$\boxed{v = \frac{\omega}{k}}$$

Zu diesem Ergebnis gelangt man auch durch Einsetzen von $u(x,t) = u_0 \cos(\omega t \mp kx)$ in die Wellengleichung.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \pm u_0\, k\, \sin(\omega t \mp kx) \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u_0\, \omega\, \sin(\omega t \mp kx)$$
$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -u_0\, k^2\, \cos(\omega t \mp kx) \quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -u_0\, \omega^2\, \cos(\omega t \mp kx)$$

Einsetzen in $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ergibt

$$\begin{aligned} -u_0\, \omega^2\, \cos(\omega t \mp kx) &= v^2\, (-u_0\, k^2\, \cos(\omega t \mp kx)) \\ \omega^2 &= v^2\, k^2 \\ v^2 &= \frac{\omega^2}{k^2} \\ v &= \frac{\omega}{k} \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis stimmt überein mit der auf S.8 definierten Fortpflanzungsgeschwindigkeit $v = \lambda\, \nu = \lambda/T$.

1.4 Elastische Wellen in Festkörpern

1.4.1 Die Seilwelle als Beispiel für eine mechanische Transversalwelle

Das Demonstrationsexperiment zur Entstehung einer Seilwelle wurde im Abschnitt 1.3 b.) bereits beschrieben. Nun soll eine mathematische Analyse der Seilwelle durchgeführt werden.
Dazu werden einige vereinfachende Annahmen gemacht:

a.) Das Seil soll ideal flexibel sein, d.h. es soll einer Biegung keinen Widerstand entgegensetzen.

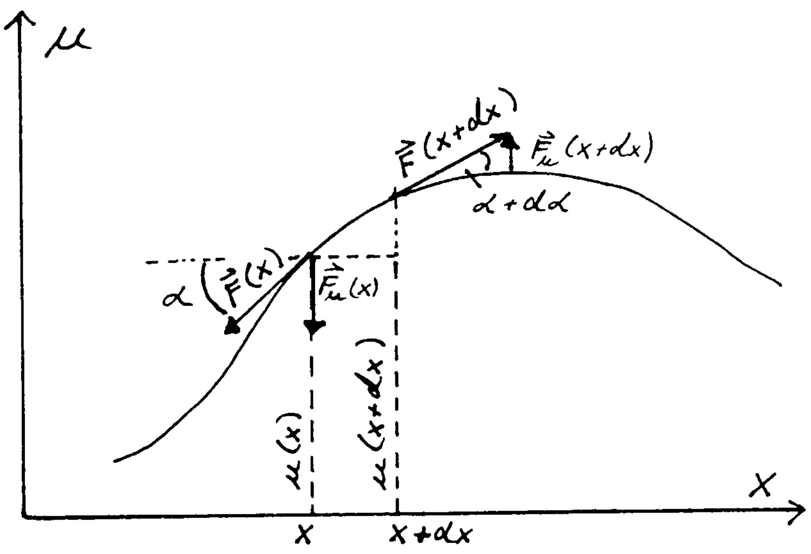


Abbildung 1.11: *Zur mathematischen Diskussion der Seilwelle (aus [15])*

b.) Der Berg soll sehr flach sein.

c.) Die Gravitationskräfte sollen vernachlässigt werden.

Wir betrachten die Abbildung 1.11: Die das Seil spannende Kraft sei $F_0 = \sigma \cdot A$. Dabei bezeichnet σ die Seilspannung, A den Querschnitt des Seils.

Vernachlässigt man aufgrund der Annahme b.) die Bewegungskomponente der Massenelemente in x - Richtung sowie die entsprechende Beschleunigungskomponente, so kann man setzen

$$F(x) = F(x + dx) = F_0,$$

d. h. die das Seil spannende Kraft ändert sich entlang des Seilstückes dx nicht wesentlich. Die an beiden Seiten des Seilstückes dx angreifenden Kraftkomponenten in Richtung der Auslenkung $u(x,t)$ bilden eine rücktreibende Kraft F_u. Diese bewirkt eine Bewegung des Volumenelementes $A\,dx$ des Seils in die Ruhelage $u = 0$.

F_u berechnet sich zu

$$\begin{aligned} F_u &= -\left(F_u(x) - F_u(x + dx)\right) \\ &= F_u(x + dx) - F_u(x) \\ &= F(x + dx)\,\sin(\alpha + d\alpha) - F(x)\,\sin\alpha \\ &= F_0\,\sin(\alpha + d\alpha) - F_0\,\sin\alpha \end{aligned}$$

Bei nur geringen Auslenkungen lassen sich folgende Näherungen vornehmen:

$$\cos\alpha = 1 \implies \sin\alpha \approx \alpha \approx \tan\alpha = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x}\,dx = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx$$

Damit beträgt die rücktreibende Kraft

$$\begin{aligned} F_u &= F_0 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx \right) - F_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= F_0 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx \\ &= \sigma \cdot A \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx \end{aligned}$$

F_u führt zu einer Beschleunigung des Seilstückes dx mit der Masse $\varrho \cdot A\, dx$. Nach dem NEWTONschen Grundgesetz gilt:

$$F_u = dm \cdot a = dm \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varrho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\, dx$$

Die Bewegungsgleichung für das Massenelement dm des Seils lautet also

$$\varrho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\, dx = \sigma \cdot A \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx$$

Damit erhält man die Beziehung

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \qquad \underline{\text{Wellengleichung der Seilwelle}}$$

Daraus läßt sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit v ablesen:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}}}$$

<u>*Versuch:*</u> Die Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit v von der Seilspannung σ bei annähernd konstanter Dichte ϱ wird experimentell nachgewiesen:

Ein Gummiseil wird an einem Ende mit einem Wellenerreger, an dem anderen Ende über eine Umlenkrolle mit einem Kraftmesser verbunden. Wegen $\sigma = F/A$ läßt sich innerhalb eines kleinen Bereiches, in dem die Querschnittsfläche A als konstant angenommen werden darf, die Seilspannung über die Zugkraft variieren und messen. Für verschiedene Beträge der Zugkraft F wird die halbe Wellenlänge der auf dem Seil erzeugten Wellen ermittelt.

Aus den Meßwerten $\sigma \sim F$ und $v \sim \lambda/2$ erhält man durch Quotientenbildung

$$\frac{v}{\sqrt{\sigma}} \sim \frac{\lambda/2}{\sqrt{F}} = \text{konstant}$$

1.4.2 Die Stabwelle als Beispiel für Longitudinalwellen in festen Körpern

Eine elastische Longitudinalwelle läßt sich annähernd erzeugen, indem man mit einem Hammer auf die Stirnfläche eines langen, geraden, elastischen Stabes schlägt.
Dabei entsteht nur *annähernd* eine Longitudinalwelle, da sich lediglich für diejenigen Teilchen eine rein longitudinale Auslenkung ergibt, welche auf der Stabachse liegen. Alle Punkte außerhalb der Achse erfahren zusätzlich eine transversale Bewegung, d.h. es tritt Querkontraktion bzw. Querdilatation auf.
Im folgenden wird ein Stab betrachtet, dessen Durchmesser klein gegenüber der Wellenlänge ist, so daß transversale Effekte vernachlässigt werden können.

Um zu einem besseren Verständnis der Vorgänge im Stab zu gelangen, sei zunächst ein Modellversuch (Abb. 1.12) betrachtet:
Staucht man eine Seite einer Pendelkette, bei der die Pendelkörper in Reihe über Schraubenfedern verbunden sind, so pflanzt sich die Stauchung über die gesamte Kette fort. Die Übertragung der Störung erfolgt über die Kopplungskräfte zwischen den einzelnen Pendelkörpern, in diesem Fall über die Rückstellkräfte der Schraubenfedern.

Abbildung 1.12: *Modellversuch zur Stabwelle*

Man stelle sich nun den Stab aus Molekülen bestehend vor, welche in Analogie zu Schraubenfedern über elastische Kräfte verbunden sind. Ein Schlag auf die Stirnseite des Stabes bewirkt eine Deformation des angrenzenden Volumenelementes, welche sich infolge der Kopplung, hier der Elastizität, über den gesamten Stab fortsetzt. Entspannt sich das durch den Schlag komprimierte Stirnseitenelement, so wird das sich anschließende Volumenelement zusammengedrückt. Die Rückbildung dieser Verformung bewirkt die Deformation des nächsten Volumenelementes und sofort. Auf diese Weise läuft die Verdichtungswelle durch den Stab.
Dabei ist vorausgesetzt, daß die Verformungen nach dem Hookeschen Gesetz erfolgen, d.h. nicht über den linearen elastischen Bereich hinausgehen. Die an einem Volumenelement des Stabes angreifende Schubspannung läßt sich also beschreiben durch

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \qquad \text{mit} \qquad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad : \quad \text{relative Längenänderung}$$
$$E \quad : \quad \text{Elastizitätsmodul}$$

Um einen Eindruck davon zu vermitteln, in welcher Größenordnung die Verformung eines Stabes bei dem vorangehend diskutierten Experiment liegt, sei hier ein quantitatives Beispiel angeführt:

Auf einen Stahlstab der Querschnittsfläche $A = 1\,\mathrm{cm}^2 = 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$ werde ein Schlag mit der Kraft $F = 100\,\mathrm{N}$ ausgeübt, wodurch eine Spannung $\sigma = 10^6\,\mathrm{N/m}^2$ erzeugt wird. Nach dem HOOKEschen Gesetz ergibt sich mit $E_{Stahl} = 2 \cdot 10^{11}\,\mathrm{N/m}^2$ eine relative Längenänderung von $\varepsilon = 10^6 / 2 \cdot 10^{11} = 5 \cdot 10^{-6}$. Bei einem Stab der Länge $l = 1\,\mathrm{m}$ beträgt dann die durch den Schlag hervorgerufene absolute Längenänderung $\Delta l = 5\,\mu\mathrm{m}$.

Herleitung der Wellengleichung für die longitudinale Stabwelle Gegeben sei ein Stab mit der Querschnittsfläche A, der Dichte ϱ und dem Elastizitätsmodul E.
Betrachte das Volumenelement $A\,dx$ (Abb. 1.13) zunächst (a) im undeformierten Stab, dann (b) zum Zeitpunkt t unter dem Einfluß einer elastischen Longitudinalwelle (Verdichtungswelle). Die das betrachtete Volumenelement seitlich begrenzenden Ebenen werden

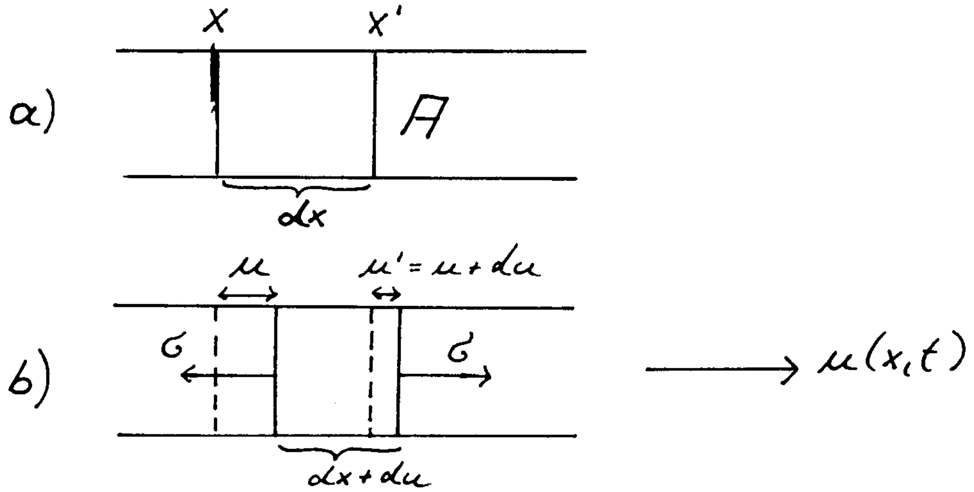


Abbildung 1.13: *Zur mathematischen Diskussion der Stabwelle (aus [15])*

durch die Verdichtungswelle verschoben, die erste Ebene um u, die zweite um den Betrag u'. Dabei ist die Längenänderung $du = u - u'$ des Volumenelementes negativ, das Volumenelement wird gestaucht.

Die auf den Stab ausgeübte Kraft berechnet sich zu

$$F_u = A \cdot \sigma = A \cdot E \cdot \varepsilon$$

Mit $\varepsilon = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ folgt $F_u = A \cdot E \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x}$

Durch partielle Differentiation erhält man die auf das Volumenelement wirkende Kraft

$$dF_u = A \cdot E \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx$$

Das Massenelement $dm = \varrho \cdot A\,dx$ erfährt die beschleunigende Kraft

$$dF_a = dm \cdot a = \varrho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dx$$

Aufstellen der Bewegungsgleichung

$$\varrho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dx = A \cdot E \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx$$

liefert die Wellengleichung für die longitudinale Stabwelle

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

Wellengleichung
für die
longitudinale Stabwelle

Daraus ergibt sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit (elastischer Longitudinalwellen) zu

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}}$$

"Schallgeschwindigkeit" im Festkörper

Über eine analoge Herleitung läßt sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Longitudinalwellen in Flüssigkeiten ermitteln

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{K}{\varrho}}}$$

"Schallgeschwindigkeit" in Flüssigkeiten

mit K : Kompressionsmodul

1.4.3 Druck- bzw. Dichtewellen in Gasen

Bei den elastischen Wellen in Gasen handelt es sich um *reine* Longitudinalwellen. Sie tragen die Bezeichnung Druckwellen oder Dichtewellen, da sie auf Druck- und damit verbundenen Dichteschwankungen der Gasmoleküle beruhen.
Die bekannteste Art von Druckwellen sind die Schallwellen, welche in der Akustik von großer Bedeutung sind.

Im folgenden sei eine Druckwelle betrachtet, welche sich in einem gasgefüllten Raum in x - Richtung ausbreite. In Analogie zur Diskussion der Stabwelle sehen wir uns den Zustand eines Massenelementes des Gases vor und während der Wirkung der Welle an und leiten daraus die Wellengleichung her.
Dabei ist die Abgrenzung eines Volumenelementes im Gas berechtigt, wenn wir das Gas als elastisches Kontinuum approximieren. D.h. die linearen Ausmaße des Volumenelementes sollen groß sein im Vergleich zur mittleren, freien Weglänge der Gasmoleküle.
Im Unterschied zur Betrachtung von Wellen in Festkörpern, kann bei der Diskussion einer Druckwelle in einem Gas aufgrund der guten Komprimierbarkeit (hohen Kompressibilität)

des Gases die Dichte nicht mehr als konstant angenommen werden.
Wir betrachten im Gleichgewichtszustand das Volumen $A\,dx$ (siehe Abb. 1.14). Im ungestörten Gas herrsche der Druck p_0 und die Dichte sei ϱ_0. Die Druckwelle bewirkt eine Verschiebung sowie Längenänderung des Elementes längs der x - Richtung. Dichte und Druck verändern sich zu ϱ und p. Beide Volumina $A\,dx$ und $A\,(dx + du)$ enthalten die

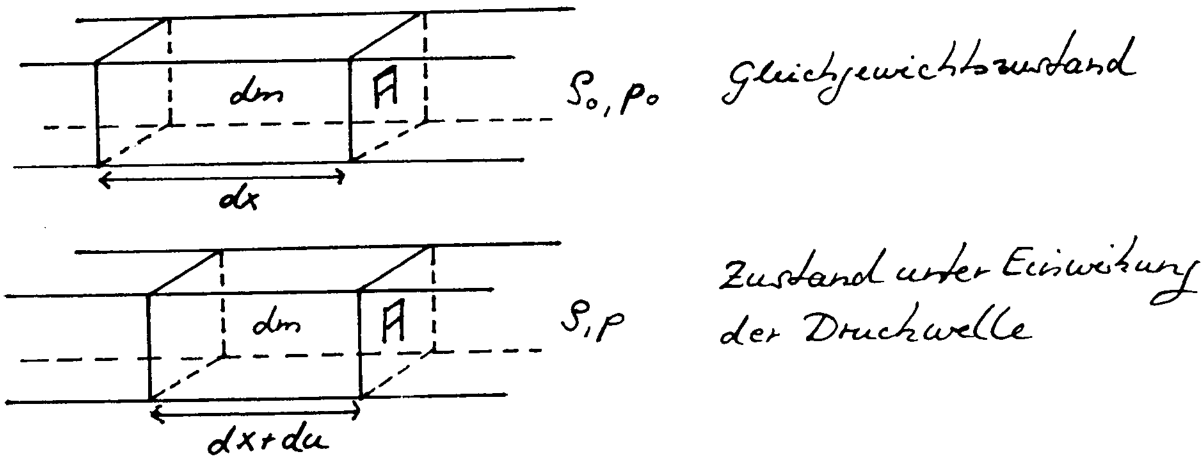


Abbildung 1.14: *Zur mathematischen Diskussion von Druck– bzw. Dichtewellen in Gasen (aus [15])*

gleiche Masse dm. Es gilt also:

$$dm = \varrho_0 \cdot A\,dx = \varrho \cdot A\,(dx + du) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{dx}{dx + du} \quad \stackrel{dx \to 0}{\longrightarrow} \quad \frac{\varrho}{\varrho_0} = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-1}$$

An die Stelle der Spannung σ im Festkörper tritt hier der Druck $p(x,t) = F/A$.

Kompression bzw. Dilatation eines thermisch isolierten Gases führt zu Erwärmung bzw. Abkühlung. Bei der Druckwelle erfolgen die Druckänderungen $dp = (\partial p(x,t)/\partial x)\,dx$ so schnell, daß kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet. Es handelt sich also um einen adiabatischen Prozeß.
Für adiabatische Zustandsänderungen gilt die POISSONsche Gleichung

$$p \cdot V^\kappa = p_0 \cdot V_0^\kappa = constant \qquad \kappa : \text{Adiabatenkoeffizient}$$

Damit folgt nun

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^\kappa = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^\kappa \quad \stackrel{dx \to 0}{\longrightarrow} \quad \frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-\kappa}$$

Für kleine $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ gilt die Näherung

$$\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-\kappa} = 1 - \kappa \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

Damit erhält man

$$p = p_0 \cdot \left(1 - \kappa \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

Partielles Differenzieren nach x ergibt

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\kappa \cdot p_0 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Damit wird die Druckänderung beschrieben durch

$$dp = -\kappa \cdot p_0 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx$$

Auf das Volumenelement $A\, dx$ wirkt die Kraft $d\vec{F} = \vec{F} - \vec{F}'$. Für $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ ist $F' > F$ und

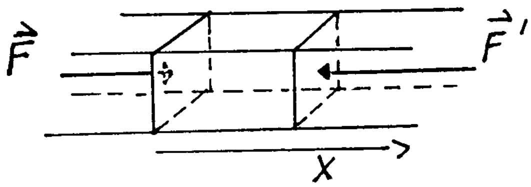


Abbildung 1.15: *Am Volumenelement angreifende Kräfte*

der Betrag der Druckkraft lautet

$$dF = -A\, dp = -A \cdot \frac{\partial p}{\partial x}\, dx = +A \cdot \kappa \cdot p_0 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx \tag{1}$$

Diese Druckkraft erzeugt eine Beschleunigung $a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ des zugehörigen Massenelementes.

$$dF_a = dm \cdot a = A \cdot \varrho_0 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\, dx \tag{2}$$

Durch Gleichsetzen von (1) und (2) erhält man

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{p_0 \cdot \kappa}{\varrho_0} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$ Wellengleichung für Druckwellen

Daraus liest man $v^2 = \frac{p_0 \cdot \kappa}{\varrho_0}$ ab. Allgemein gilt (mit p, ϱ beliebig):

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{p \cdot \kappa}{\varrho}}}$$ Schallgeschwindigkeit in Gasen

Dabei ist zu beachten, daß die Schallgeschwindigkeit v bei annähernd *idealen Gasen* nicht von der Dichte ϱ, sondern von der *Temperatur* T abhängt!

Dies wird deutlich, wenn man die Formel $v = \sqrt{\frac{p \cdot \kappa}{\varrho}}$ mit Hilfe der Idealgasgleichung umschreibt:

$$\begin{aligned} p \cdot V_m &= R \cdot T \\ p \cdot \frac{V_m}{M_m} &= \frac{R \cdot T}{M_m} \\ \frac{p}{\varrho} &= \frac{R \cdot T}{M_m} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{\kappa \cdot R \cdot T}{M_m}}} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{ll} T & : \text{absolute Temperatur } [T] = 1\,\mathrm{K} \\ R & : \text{allg. Gaskonstante } R = 8.31\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol \cdot K}} \\ M_m & : \text{Molmasse } [M_m] = 1\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} \\ V_m & : \text{Molvolumen} \end{array}$$

Beispielsweise kann Luft näherungsweise als ideales Gasgemisch angesehen werden. Für die Temperaturabhängigkeit von v_{Luft} gilt: $\Delta v_{Luft}/\Delta T \approx 0.6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}/\mathrm{K}$.

Die aus der Wellengleichung erhaltenen Formeln

$$v = \sqrt{\frac{p \cdot \kappa}{\varrho}} \quad \text{und} \quad v = \sqrt{\frac{\kappa \cdot R \cdot T}{M_m}}$$

dienen zur rechnerischen Bestimmung der Schallgeschwindigkeit.

Beispiel: – **Berechnung der Schallgeschwindigkeit in Luft** :

$$\left.\begin{aligned} \kappa &= 1.4 \\ \varrho_0 &= 1.293\mathrm{kg/m^3} \\ p_0 &= 10^5\mathrm{Pa}\ (0°\mathrm{C}) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad v_{Luft} = 331\mathrm{m/s} \quad (\text{bei } 0°\mathrm{C} \text{ bzw. } T = 273,15\,K\,)$$

$$\Longrightarrow \quad v_{Luft} = 331\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 0,6 \cdot \Delta T \quad (\text{bei beliebiger Temperatur T})$$

Die theoretisch hergeleiteten Ausdrücke sollen nun experimentell überprüft werden:

Versuch: Mit einer Schreckschußpistole wird auf zwei im Abstand Δs befindliche Mikrofone ein Schuß abgegeben. Beide Mikrofone sind mit einer Stoppuhr verbunden. Die Zeitzählung wird aktiviert, sobald die Schallwelle das erste Mikrofon erreicht. Das zweite Mikrofon sendet entsprechend den Stoppimpuls aus.

Das Versuchsergebnis $v_{Luft} = \Delta s/\Delta t$ wird mit dem rechnerisch gefundenen Wert $v = 331\,\mathrm{m/s} + 0,6\,\mathrm{m/s} \cdot \Delta T$ verglichen.

Zusätzlich liefert die Formel $v = \sqrt{p \cdot \kappa/\varrho}$ eine wichtige Methode zur Messung des Adiabatenkoeffizienten κ, der in der Wärmelehre von Bedeutung ist.

1.5 Wasserwellen als Beispiel für Oberflächenwellen von Flüssigkeiten

Die Entstehung von Wasserwellen ist auf ein kompliziertes Wechselspiel verschiedener Kräfte zurückzuführen. Dabei sind als Antriebskraft die Schwerkraft und als Kopplungskraft die Oberflächenspannung zu nennen. Oberflächenwellen sind transversal *und* longitudinal, da sich die einzelnen Flüssigkeitsteilchen sowohl parallel als auch senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Wellen bewegen. Bei nicht zu großen Wellenamplituden führen sie annähernd Kreisbewegungen mit vertikaler Bahnebene aus (Abb. 1.16).

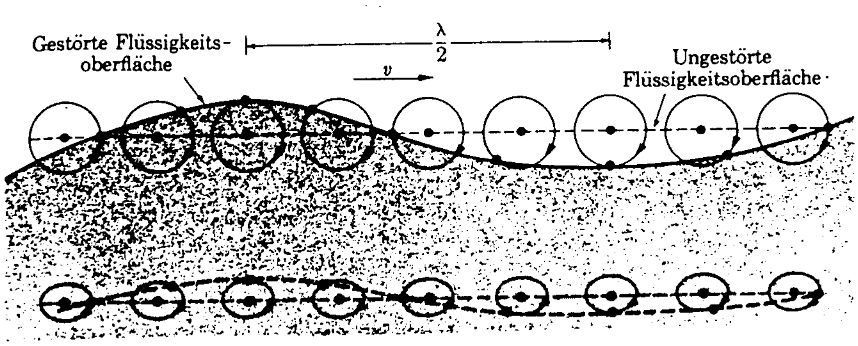


Abbildung 1.16: *Oberflächenwelle auf einer Flüssigkeit (aus [1])*

<u>*Versuch:*</u> In einem Wasserbecken wird eine an der Oberfläche schwimmende Holzkugel beobachtet, welche kreisförmige Bewegungen um ihre Ruhelage ausführt.

Die Holzkugel stellt dabei ein stark vergrößertes Oberflächenmolekül dar.

Da die mathematische Behandlung der Oberflächenwellen in Flüssigkeiten sehr kompliziert ist, wird hier auf die Herleitung der Wellengleichung verzichtet. Stattdessen erfolgt eine Diskussion des Ergebnisses

$$v^2 = \left(\frac{g \cdot \lambda}{2\pi} + \frac{2\pi \cdot \sigma}{\varrho \cdot \lambda}\right) \cdot \tanh\left(\frac{2\pi \cdot h}{\lambda}\right)$$

wobei
- g : Erdbeschleunigung $g = 9,81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
- λ : Wellenlänge
- σ : Oberflächenspannung $[\sigma] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$
- ϱ : Dichte
- h : Wassertiefe

Im folgenden werden die beiden wichtigen Grenzfälle hoher und geringer Wassertiefe betrachtet:

1.5.1 Tiefes Wasser

Es gilt $h \gg \lambda$ und damit $\tanh\left(2\pi \cdot \frac{h}{\lambda}\right) \rightarrow 1$.
In diesem Fall lautet also die Wellengleichung

$$v^2 = \frac{g \cdot \lambda}{2\pi} + \frac{2\pi \cdot \sigma}{\varrho \cdot \lambda}$$

Hier wird nun eine Fallunterscheidung bezüglich der Wellenlänge vorgenommen:

a.) λ **sei so groß**, daß der zweite Term vernachlässigt werden kann. Dann gilt

$$v^2 = \frac{g \cdot \lambda}{2\pi}$$

Man bezeichnet die Wellen in diesem Fall als **Schwerewellen**. Sie treten unabhängig von der Natur der Flüssigkeit durch den Einfluß der Schwerkraft auf. Sie werden angeregt durch starke, stetige Winde.

b.) λ **sei so klein**, daß der erste Term vernachlässigt werden kann. Dann gilt

$$v^2 = \frac{2\pi \cdot \sigma}{\varrho \cdot \lambda}$$

Bei den sogenannten **Rippelwellen** überwiegt die Wirkung der Oberflächenspannung. Sie treten bei kleinen Windstärken auf.

In den beiden genannten Fällen ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit v nicht mehr konstant, sondern hängt von der Wellenlänge ab: $v = v(\lambda)$. Ein solches Verhalten wird als **Dispersion** bezeichnet.
Die Dispersion macht unter anderem die bereits erwähnte Unterscheidung zwischen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit notwendig. Tritt nur eine Wellenlänge auf, so ist die Betrachtung der Phasengeschwindigkeit sinnvoll. Liegt jedoch eine Wellengruppe (verschiedene Wellenlängen) vor, so ist die Gruppengeschwindigkeit maßgebend. Wir werden später genauer auf die Dispersion eingehen.

1.5.2 Seichtes Wasser

Hier gilt $h \ll \lambda$ und damit die Näherung $\tanh\left(\frac{2\pi \cdot h}{\lambda}\right) \approx \frac{2\pi \cdot h}{\lambda}$. Daraus folgt für die Wellengleichung

$$v^2 = \left(\frac{g \cdot \lambda}{2\pi} + \frac{2\pi \cdot \sigma}{\varrho \cdot \lambda}\right) \cdot \frac{2\pi \cdot h}{\lambda} = g \cdot h + \frac{(2\pi)^2 \cdot \sigma \cdot h}{\varrho \cdot \lambda^2}$$

Vernachlässigt man den zweiten Ausdruck in der Summe, so ergibt sich

$$v = \sqrt{g \cdot h}$$

Hier tritt keine Dispersion auf, die Ausbreitungsgeschwindigkeit v ist unabhängig von der Wellenlänge λ. Aufgrund dieser Tatsache verwendet man solche Wellen bei Wellenversuchen.

Eine Bestätigung des theoretisch gefundenen Zusammenhangs zwischen Wassertiefe h und Phasengeschwindigkeit v in seichtem Wasser liefert der folgende Versuch:

Versuch: In der Wellenwanne werden ebene Wellenfronten erzeugt, welche im hinteren Viertel der Wellenwanne auf einen Keil auflaufen. Die Projektion ergibt folgendes Bild: Auf dem Keil wird die Wassertiefe ständig gerin-

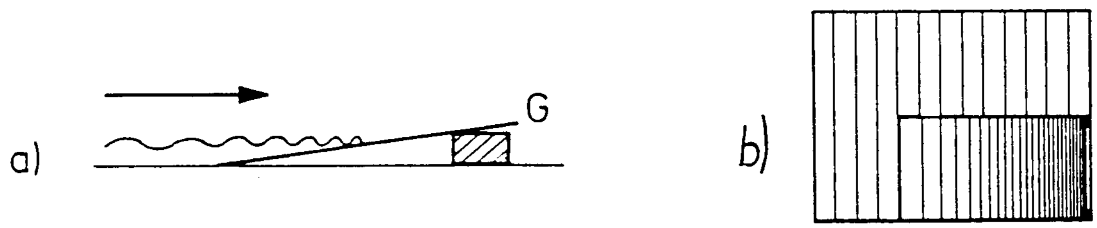


Abbildung 1.17: *Wellenübergang in ein Medium mit kleinerer Phasengeschwindigkeit: (a) Seitenansicht (aus [10]), (b) Projektion (aus [9])*

ger, die Wellenfronten rücken näher aneinander, d.h. die Wellenlänge wird kleiner. Dies entspricht bei gleichbleibender Frequenz einer Verringerung der Geschwindigkeit.

1.6 Was breitet sich bei der Bewegung einer elastischen Welle aus?

Zur Lösung dieser Fragestellung betrachte man noch einmal die in den vorangehenden Abschnitten behandelten Wellenarten. Mit Ausnahme der Oberflächenwellen handelt es sich dabei um elastische Wellen. Diese sind dadurch gekennnzeichnet, daß sich eine Störung — sei es eine Belastung, ein Druck oder eine makroskopische Verschiebung einer Vielzahl von Atomen — mit einer Geschwindigkeit ausbreitet, welche von den elastischen Eigenschaften des Mediums abhängt.
Allen gemeinsam ist die Tatsache, daß sich die Atome oder Moleküle des Mediums, durch das sich die Welle fortpflanzt, in bestimmter Weise bewegen (Schwingung um Geichgewichtslage, Kreisbewegung), aber im Mittel in ihrer Gleichgewichtslage verweilen. Es pflanzt sich also nicht die Materie, sondern der Bewegungszustand der Materie fort. Dieser wird beschrieben durch Energie und Impuls. Wir können daher festhalten:
Bei der Wellenbewegung werden Energie und Impuls transportiert.

Folgende Experimente bestätigen dieses Ergebnis:

<u>Versuch:</u> Ein fest eingespannter Holzstab wird an seinem freien Ende mit einem Hammer angeschlagen. $\Rightarrow$ Ein am anderen Ende aufgehängter Tischtennisball schwingt aus.

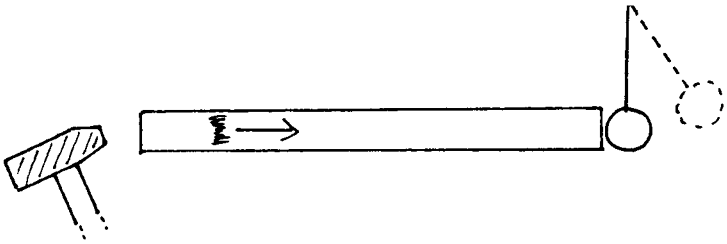


Abbildung 1.18: *Druckwelle durchläuft Holzstab und regt Schwingung des Balles an. (aus [7])*

<u>Versuch:</u> Am freien Ende eines beidseitig offenen Rohres (Gasvolumen) wird ein Schuß abgegeben. $\Rightarrow$ Dadurch wird eine am anderen Ende an das Rohr angrenzende Membran in Schwingungen versetzt. Ein dicht daneben aufgehängter Tischtennisball springt kurz von der Membran weg.

Quantitative Analyse am Beispiel einer elastischen Welle in einem Stab:

Wir betrachten eine rein longitudinale, elastische Welle in einem Stab mit dem Elastizitätsmodul E, der Dichte ϱ und der Querschnittsfläche A. Durch den Stab pflanzt sich eine Störung mit der Phasengeschwindigkeit v fort. Wir berechnen nun die Energie, welche

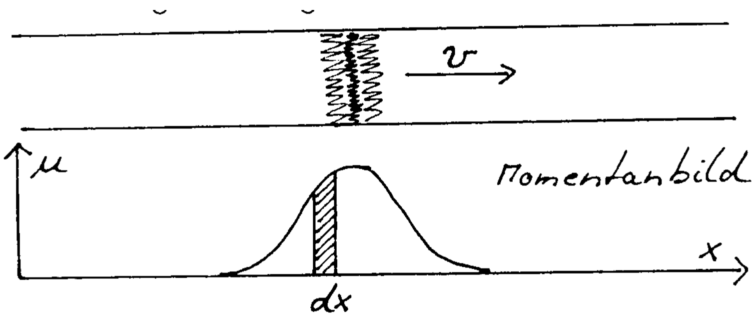


Abbildung 1.19:

Abbildung 1.19:

in einem infinitesimal kleinen Stück dx enthalten ist. Infolge der Wellenbewegung besitzt jedes Stück dx eine bestimmte kinetische sowie potentielle Energie.

Kinetische Energie: Das Massenelement $\varrho \cdot A\,dx$ an der Stelle x bewegt sich zur Zeit t mit der Geschwindigkeit $v = \partial u(x,t)/\partial t$. Es besitzt damit die kinetische Energie

$$W_{kin}(x,t) = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot v^2(x,t) = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2$$

Die Dichte der kinetischen Energie, die kinetische Energie pro Volumen, ergibt sich zu

$$w_{kin}(x,t) = \frac{W_{kin}(x,t)}{dV} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dm}{dV} \cdot \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2$$

Potentielle Energie: Beim Durchgang der Welle werden die Volumenelemente gedehnt oder gestaucht. Wir berechnen die entsprechende Deformationsenergie mit Hilfe einer statischen Betrachtung:
Um ein Volumenelement, welches im undeformierten Zustand die Länge l besitzt, um die kleine Strecke s elastisch zu dehnen, muß die Kraft

$$F = \sigma \cdot A$$

aufgewendet werden. Mit dem HOOKEschen Gesetz

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{s}{l}$$

folgt für die Kraft

$$F(s) = E \cdot A \cdot \frac{s}{l}$$

Die Verlängerungsarbeit leistet einen Beitrag zur potentiellen Energie.

$$W_{pot} = \int_0^s F(s)\,ds = \int_0^s E \cdot A \cdot \frac{s}{l}\,ds = \frac{1}{2} \cdot E \cdot A \cdot \frac{s^2}{l} = \frac{1}{2} \cdot E \cdot A \cdot l \cdot \varepsilon^2$$

Die potentielle Energiedichte beträgt damit

$$w_{pot} = \frac{W_{pot}}{V} = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \varepsilon^2$$

Wendet man dieses Ergebnis nun an auf die elastische Dehnung des Stabstückes $A\,dx$ um die Länge du, so erhält man mit $s = du(x,t)$ und $l = dx$ (mit ∂ für partielle Ableitung)

$$w_{pot} = \frac{1}{2} \cdot E \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2$$

Gesamtenergie: Die gesamte Energiedichte ergibt sich dann zu

$$w = w_{kin} + w_{pot} = \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot E \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

Dies läßt sich mit $v^2 = \frac{E}{\varrho}$ umschreiben zu

$$\boxed{w(x,t) = \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + v^2 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]}$$ Energiedichte einer elastischen Welle

Dies am Beispiel der Stabwelle hergeleitete Ergebnis gilt allgemein für elastische Wellen! Bei der elastischen Wellenbewegung pflanzt sich $w(x,t)$ mit der Geschwindigkeit v fort.

Die Bedeutung des Ausdruckes erkennt man am einfachsten am Beispiel einer harmonischen Welle. Setzt man die Gleichung einer harmonischen Welle $u(x,t) = u_0 cos(\omega t - kx)$ in die Ausdrücke für die kinetische und potentielle Energiedichte ein, so erhält man

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t - kx) \qquad w_{kin}(x,t) = \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot u_0^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2(\omega t - kx)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_0 \cdot k \cdot \sin(\omega t - kx) \qquad w_{pot}(x,t) = \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot u_0^2 \cdot \underbrace{k^2 \cdot v^2}_{\omega^2} \cdot \sin^2(\omega t - kx)$$

Weiter gilt

$$w_(x,t) = w_{kin}(x,t) + w_{pot}(x,t) = \varrho \cdot u_0^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2(\omega t - kx)$$

Es ergibt sich also

$$\boxed{w_{kin} = w_{pot} = \frac{1}{2} \cdot w}$$

Kinetische und potentielle Energiedichte stimmen überein und sind gleich der Hälfte der Gesamtenergiedichte an jedem Ort und zu jeder Zeit. Dies ist in Abbildung 1.20 graphisch veranschaulicht.

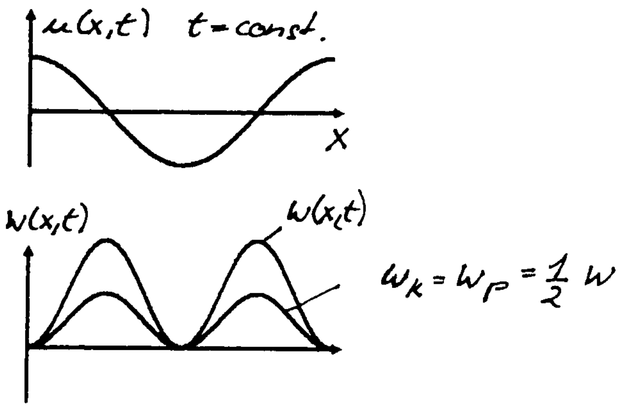


Abbildung 1.20: *Energiedichte einer elastischen Welle*

Zusammenfassung der Ergebnisse: Bei einer elastischen Welle sind die kinetische, die potentielle und die gesamte Energiedichte in Phase und pflanzen sich mit v fort. Die kinetische Energiedichte w_{kin} besitzt bei einer Welle die gleiche Phase wie bei einer Schwingung. Im Gegensatz zur Schwingung, bei welcher w_{kin} und w_{pot} um 90° phasenverschoben sind, besitzen w_{kin} und w_{pot} jedoch bei einer Wellenbewegung gleiche Phase. Anschaulich bedeutet dies, daß das elastische Medium am Nulldurchgang die stärkste Deformation aufweist.

1.7 Die Intensität einer Welle

Wir stellen uns eine Fläche vor, durch die senkrecht zur Ausbreitungsrichtung eine harmonische Welle hindurchläuft. Aus dem vorangehenden Abschnitt wissen wir, daß mit der Wellenbewegung ein Energiefluß durch die Fläche verbunden ist.
Durch die Fläche A wird während der Zeit $dt = \frac{dx}{v}$ die Energie dW transportiert. Dies führt zu der Leistung

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{w\,dV}{dt} = \frac{w \cdot A\,dx}{dt} = w \cdot A \cdot v$$

Die Leistung pro Fläche, d. h. diejenige Energie, welche im Zeitmittel senkrecht durch die Einheitsfläche hindurchtritt, nennt man die **Intensität I** der Welle.

$$\boxed{I = \frac{P}{A} = w \cdot v} \qquad [I] = \frac{[P]}{[A]} = \frac{W}{m^2}$$

$$\mathrm{I} = \frac{\text{Energie}}{\text{Fläche und Zeit}} = \text{Energiedichte} \times \text{Geschwindigkeit}$$

Die mittlere Intensität berechnet sich zu $\overline{I} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} I\,dt$

Für die harmonische Welle $u(x,t) = u_o \cos(\omega t - kx)$ erhält man die Intensität

$$I = \omega \cdot v = \varrho \cdot v \cdot u_0^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2(\omega t - kx)$$

Die Berechnung der mittleren Intensität ergibt

$$\begin{aligned} \overline{I} &= \varrho \cdot v \cdot u_0^2 \cdot \omega^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2(\omega t - kx)}_{1/2}\,dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot v \cdot u_0^2 \cdot \omega^2 \end{aligned}$$

Mit $\omega = 2\pi\nu$ folgt $\overline{I} = 1/2 \cdot \varrho \cdot v \cdot (2\pi)^2 \cdot u_0^2 \cdot \nu^2$. Es gilt also $\overline{I} \sim u_0^2 \cdot \nu^2$.
Die mittlere Intensität einer harmonischen Welle ist proportional zu dem Quadrat von Frequenz und Amplitude.

1.8 Intensität des Schalls

Wir wollen nun die in den vorangehenden Abschnitten hergeleiteten Beziehungen für Energiedichte und Intensität auf die Schallwellen in Gasen anwenden:

Es gilt

$$I(x,t) = v \cdot w(x,t) \quad \text{und} \quad w(x,t) = \frac{\varrho_0}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + v^2 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$\text{mit der Schallgeschwindigkeit} \quad v = \sqrt{\frac{\kappa \cdot p_0}{\varrho_0}}$$

Für harmonische Wellen $u(x,t) = u_0 \cos(\omega t - kx)$ ergibt sich

$$I(x,t) = \varrho_0 \cdot v \cdot \omega^2 \cdot u_0^2 \cdot \sin^2(\omega t - kx)$$

Wir wollen nun versuchen, diese Beziehung unter Verwendung des Druckes umzuformulieren, d.h. eine Beschreibung der Intensität mittels des Druckes abzuleiten. Es war

$$\begin{aligned} p &= p_0 \cdot \left(1 - \kappa \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ p - p_0 &= \Delta p = -p_0 \cdot \kappa \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

Mit $\partial u / \partial x = k \cdot u_0 \cdot \sin(\omega t - kx)$ wird der Druckunterschied beschrieben durch die Funktion

$$\Delta p = -p_0 \cdot \kappa \cdot k \cdot u_0 \cdot \sin(\omega t - kx)$$

Der maximale Druckunterschied beträgt

$$\Delta p_{max} = p_0 \cdot \kappa \cdot k \cdot u_0$$

Mit $v^2 = \kappa \cdot p_0 / \varrho_0 \Leftrightarrow \kappa \cdot p_0 = v^2 \cdot \varrho_0$ und $k = \omega / v$ läßt sich dies weiter umformen zu

$$\Delta p_{max} = v \cdot \varrho_0 \cdot \omega \cdot u_0 \quad \sim \quad u_0$$

Bei der Schallwelle sind also Druckamplitude und Wellenamplitude proportional.

Die Intensität läßt sich nun folgendermaßen beschreiben

$$I(x,t) = \frac{1}{\varrho_0 \cdot v} \cdot (\Delta p_{max})^2 \cdot \sin^2(\omega t - kx)$$

Für die mittlere Intensität gilt dann

$$\boxed{\overline{I} \equiv I = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\varrho_0 \cdot v} \cdot (\Delta p_{max})^2}$$

Wir werden im folgenden häufig die mittlere Intensität kurz als Intensität bezeichnen.

$$\overline{I} \equiv I \quad \sim \quad (\Delta p_{max})^2$$

Die Intensität einer Schallwelle ist proportional zum Quadrat der Druckamplitude.

Schallpegel Die auftretenden Schallintensitäten liegen zwischen $10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$, der sogenannten Hörschwelle, und der Schmerzgrenze $10\,\mathrm{W/m^2}$.

Beispiele für Leistungen von Schallquellen:

Unterhaltungssprache	10^{-5}W
Geige	10^{-3}W
Lautes Schreien	10^{-3}W
Lautsprecher	10^{2} W

Beispiele für Schallintensitäten:

Unterhaltung	$10^{-7}\mathrm{W/m^2}$
Motorrad	$10^{-2}\mathrm{W/m^2}$

Zum Vergleich von Leistungen und Intensitäten gebraucht man in der Meßtechnik häufig den Begriff **Pegel**.

$$\text{Pegel} = \lg\frac{I}{I_0} \qquad [\text{Pegel}] = 1\,\text{Bel} = 1\,\text{B}$$

Im Fall der Schallintensitäten führt man als *objektives* Vergleichsmaß den **Schallpegel** ein

$$\text{Schallpegel } L = 10\cdot\lg\frac{I}{I_0} \qquad [L] = 1\,\text{dB (“dezibel”)}$$

$I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$ wird als Bezugsschallintensität bezeichnet. Der Faktor 10 dehnt die Skala des Schallpegels so, daß man zu seiner Beschreibung nur ganze Zahlen benötigt.

Lautstärke

Versuch: Mit einem Generator wird die Tonfrequenz von 20 Hz bis ca. 20 kHz hochgefahren, dann wird die Lautstärke nachgeregelt. Es wird deutlich, daß die Empfindlichkeit des menschlichen Gehörs stark frequenzabhängig ist. Die obere Hörgrenze ist individuell verschieden und liegt meist zwischen 12 kHz und 20 kHz.

Wie der Versuch zeigt, gibt der Schallpegel nicht die vom Menschen *subjektiv* empfundene Lautstärke wieder. Diese richtet sich nämlich nicht allein nach der physikalischen Schallintensität, sondern auch nach dem Frequenzspektrum des Schalls.
Bei gleichem Frequenzspektrum gilt in grober Näherung für den Zusammenhang zwischen der subjektiv empfundenen Lautstärke und der physikalisch gemessenen Schallintensität das WEBER – FECHNERsche Gesetz:

> *Die Stärke der Empfindung wächst proportional zu dem Logarithmus des physikalischen Reizes.*

Das menschliche Gehör besitzt also ein logarithmisches Schallempfinden.

Man setzt den Schallpegel L und den **Lautstärkepegel Λ** definitionsgemäß bei der Frequenz $f = 1\,\text{kHz}$ gleich.

$$\Lambda(1\,\text{kHz}) = L(1\,\text{kHz})$$

Da die beiden Größen für andere Frequenzen verschiedene Werte annehmen, führt man für den Lautstärkepegel Λ eine neue Dimension ein.

$$[\Lambda] = 1\,\text{phon} \quad \text{mit} \quad 1\,\text{phon} = 1\,\text{dB} \;\; \text{für} \;\; f = 1\,\text{kHz}$$

Einige Lautstärkewerte:		
	0 phon	Hörschwelle
	20 phon	Blätterrauschen, Flüstern
	40 – 50 phon	Unterhaltungssprache
	100 phon	Motorrad
	130 phon	Schmerzgrenze

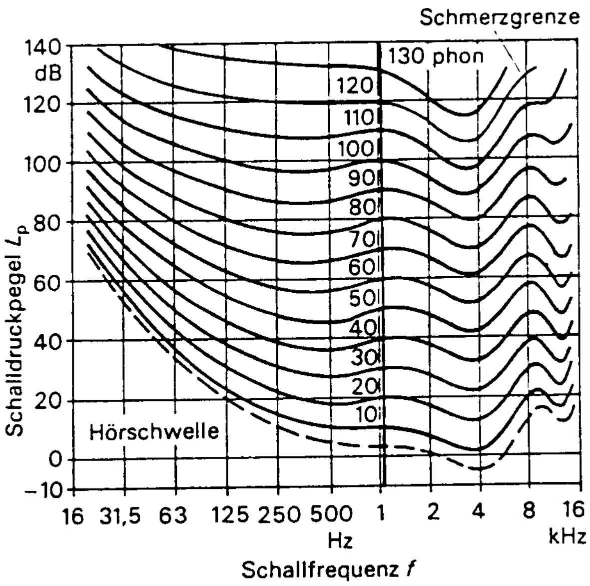


Abbildung 1.21: *Kurven gleicher Lautstärke Λ (aus [14])*

Kapitel 2

Überlagerung von Schwingungen und Wellen

Laufen mehrere Wellen durch ein gemeinsames Übertragungszentrum, so kann es an bestimmten Stellen des Raumes zu Superposition der Wellen kommen. Überschreitet die Deformation des Mediums den linearen elastischen Bereich nicht, so gilt das **Prinzip der ungestörten Überlagerung**:

> *Jedes Wellensystem breitet sich so aus, als ob die anderen Wellensysteme nicht vorhanden wären. Die Auslenkungen der Wellenzüge addieren sich vektoriell.*

Die durch die Überlagerung von Wellen hervorgerufenen Erscheinungen werden als **Interferenz** bezeichnet und spielen in der Physik eine sehr wichtige Rolle. So beruht der Nachweis von Wellenphänomenen auf der Interferenz, dem entscheidenden Merkmal von Wellen. Die Interferenz ist letztlich verantwortlich für die Reichhaltigkeit der Phänomene in sehr vielen Bereichen der Physik wie Akustik, Optik, Elektrodynamik und Quantenphysik.

2.1 Überlagerung von Wellen gleicher Frequenz und Amplitude

Wir betrachten zwei in dieselbe Richtung laufende Wellen, welche in Frequenz und Amplitude übereinstimmen, jedoch relativ zueinander die Phasenverschiebung φ bzw. den Gangunterschied $\Delta = \varphi \cdot \lambda/2\pi$ aufweisen.

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 \cos(\omega t - kx) \\ u_2 &= u_0 \cos(\omega t - kx - \varphi) \quad \text{bzw.} \quad u_2 = u_0 \cos\left(\omega t - kx - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta\right) \end{aligned}$$

Superposition ergibt

$$u = u_1 + u_2 = u_0 \left[\cos\left(\omega t - kx\right) + \cos\left(\omega t - kx - \varphi\right)\right]$$

Setzen wir $\omega t - kx = \delta$ und wenden das Additionstheorem $\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\left((\alpha+\beta)/2\right) \cdot \cos\left((\alpha-\beta)/2\right)$ an, so erhalten wir

$$u = u_0 \cdot 2 \cdot \cos\frac{2\delta - \varphi}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2} = 2 \cdot u_o \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\left(\delta - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Also

$$\boxed{u(x,t) = 2 \cdot u_o \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\left(\omega t - kx - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

bzw.

$$\boxed{u(x,t) = 2 \cdot u_o \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot \Delta\right) \cdot \cos\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{\lambda} \cdot \Delta\right)}$$

Die resultierende Welle besitzt die gleiche Frequenz und Wellenlänge wie die überlagerten Wellen, aber eine andere Amplitude und Phasenlage bzw. einen anderen Gangunterschied.

2.1.1 Sonderfälle:

1. $\underline{\varphi = 0 \text{ oder allgemein } \varphi = 2n\pi \ (n = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)}$

   In diesem Fall beträgt die Phase $\varphi/2 = n\pi$ und mit $\cos n\pi = \pm 1$ ergibt sich die resultierende Welle
   $$u(x,t) = 2 \cdot u_0 \cdot \cos\left(\omega t - kx\right)$$
   Die resultierende Amplitude ist doppelt so groß wie die der Ausgangswellen, die Nulldurchgänge bleiben unverändert. Die Überlagerung ist in Abbildung 2.1 dargestellt.

   Man nennt die vorliegende Verstärkung der Wellen **konstruktive Interferenz**. Sie tritt auf bei einer Phasenverschiebung $\varphi = 2n\pi$ bzw. einem Gangunterschied $\Delta = n \cdot \lambda$. Bezüglich der Zeit t bedeutet dies eine Verschiebung um $\Delta t = n \cdot T$, denn
   $$\omega \cdot (t + n \cdot T) = \omega \cdot t + n \cdot \omega \cdot T = \omega \cdot t + 2n\pi$$

2. $\underline{\varphi = 180^\circ \text{ oder allgemein } \varphi = (2n+1) \cdot \pi \ (n = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)}$

   Bei $\varphi = (2n+1) \cdot \pi$ und $\cos(\varphi/2) = \cos(2n+1) \cdot \pi/2 = 0$ ist das Ergebnis der Überlagerung die Auslöschung beider Wellen
   $$u\left(x,t\right) = 0 \ ,$$
   wie Abbildung 2.2 zeigt.

   Man spricht von **destruktiver Interferenz**. Bezüglich der Zeit t bzw. dem Ort x lauten die Bedingungen für Auslöschung
   $$\Delta t = \frac{1}{2} \cdot (2n+1) \cdot T \quad \text{bzw.} \quad \Delta = \frac{1}{2} \cdot (2n+1) \cdot \lambda.$$

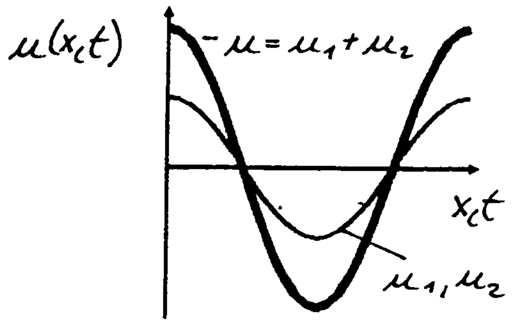


Abbildung 2.1: *Konstruktive Interferenz*

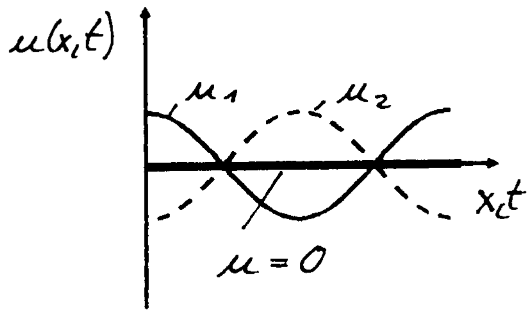


Abbildung 2.2: *Destruktive Interferenz*

Bemerkung:
Wie in diesem Abschnitt geschehen, kann man die Überlagerung von Wellen sowohl bezüglich der Ortskoordinate x, als auch bezüglich der Zeit t diskutieren. Dies ist möglich, da eine Welle mathematisch durch einen Ausdruck, z.B. $cos(\omega t - kx)$, beschrieben wird, in dem x und t gleichberechtigt nebeneinander vorkommen. Jede Welle verhält sich also — abgesehen vom Vorzeichen — zu einer festen Zeit als Funktion von x genauso wie an einem festen Ort als Funktion von t.

Die Superposition zweier Wellen läßt sich einfacher in der komplexen Schreibweise berechnen und als Vektoraddition im Zeigerdiagramm veranschaulichen (Abb. 2.3):

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 \cdot e^{i \cdot \delta} \\ u_2 &= u_0 \cdot e^{i \cdot (\delta - \varphi)} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u &= u_0 \cdot \left[e^{i \cdot \delta} + e^{i \cdot (\delta - \varphi)} \right] \\ &= u_0 \cdot e^{i \cdot \left(\delta - \frac{\varphi}{2}\right)} \cdot \underbrace{\left[e^{i \cdot \frac{\varphi}{2}} + e^{-i \cdot \frac{\varphi}{2}} \right]}_{2 \cdot \cos \frac{\varphi}{2}} \end{aligned}$$

Der physikalische Anteil des resultierenden Ausdruckes lautet

$$u = 2 \cdot u_0 \cdot \cos\left(\delta - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\frac{\varphi}{2}$$

Solche Interferenzen treten in der Natur sehr häufig auf. Außerdem sind ihre Anwendungen in der praktischen Physik von großer Bedeutung, wie das folgende Beispiel verdeutlichen soll:

Die Interferenz von Schallwellen im sogenannten QUINKschen Rohr liefert eine Möglichkeit, die Schallgeschwindigkeit zu bestimmen.

Versuch: Wie bei der Posaune durchläuft der Schall im QUINKschen Rohr zwei gebogene Röhren und interferiert an ihrem Ende (siehe Abb. 2.4). Wird nun einer der beiden Laufwege verlängert, so entstehen bei E abwechselnd Interferenzmaxima und – minima. Man mißt die Strecke s, um die das Rohr

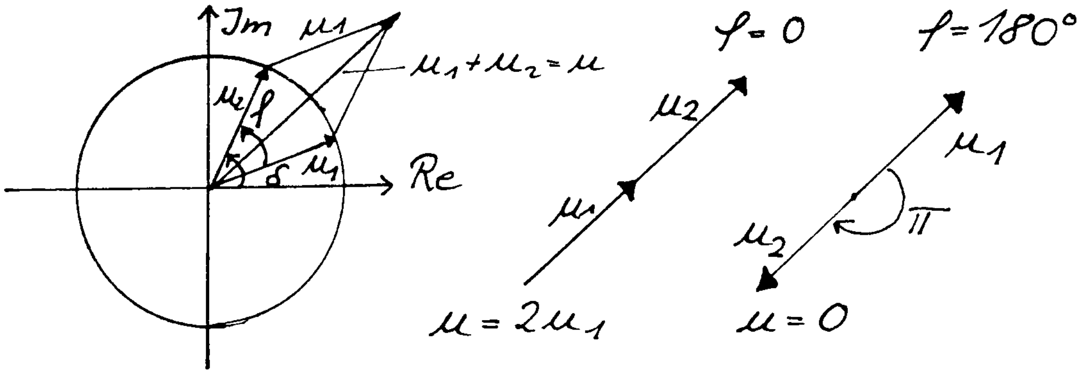


Abbildung 2.3: *Veranschaulichung als Vektoraddition*

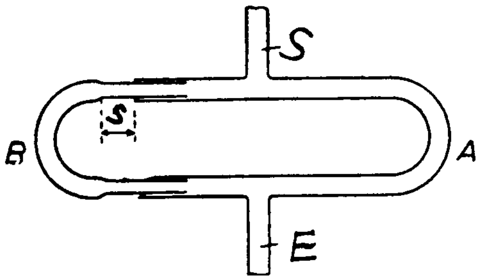


Abbildung 2.4: Quink*sches Rohr*

zwischen dem Auftreten zweier Minima verschoben wird. Dabei entspricht eine Wellenlänge λ einem Laufwegunterschied von $2s$. Die Schallgeschwindigkeit ergibt sich als Produkt aus Wellenlänge und gewählter Frequenz.

Meßbeispiel:

$$\begin{aligned} \nu &= 1600\,\text{Hz} \\ s &= 10\,\text{cm} \Rightarrow \lambda = 20\,\text{cm} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad v = \lambda \cdot \nu = 0,2\,m \cdot 1600\,\frac{1}{\text{s}} = 320\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2.2 Überlagerung von Wellen verschiedener Frequenz

Gegeben seien zwei Wellen mit gleicher Amplitude und Phasenlage, welche sich aber in der Frequenz unterscheiden. Wir untersuchen deren Überlagerung am festen Ort x.

$$u_1(t) = u_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) \qquad \delta_1 = \omega_1 t - k_1 x$$

$$u_2(t) \;=\; u_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x) \qquad \delta_2 \;=\; \omega_2 t - k_2 x$$

Überlagerung ergibt

$$\begin{aligned} u(t) \;=\; u_1(t) + u_2(t) \;&=\; u_0 \cdot [\cos\delta_1 + \cos\delta_2] \\ &=\; 2 \cdot u_0 \cdot \cos\frac{\delta_1 - \delta_2}{2} \cdot \cos\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \end{aligned}$$

Um den für die resultierende Welle erhaltenen Ausdruck interpretieren zu können, diskutieren wir zunächst den einfacheren Fall der Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen verschiedener Frequenz. Gegeben seien also zwei ortsfeste Schwingungen, z.B. am Ort $x = 0$, welche in die gleiche Raumrichtung erfolgen. Dann gilt für die resultierende Schwingung:

$$u\,(t) = u_1\,(t) + u_2\,(t)$$

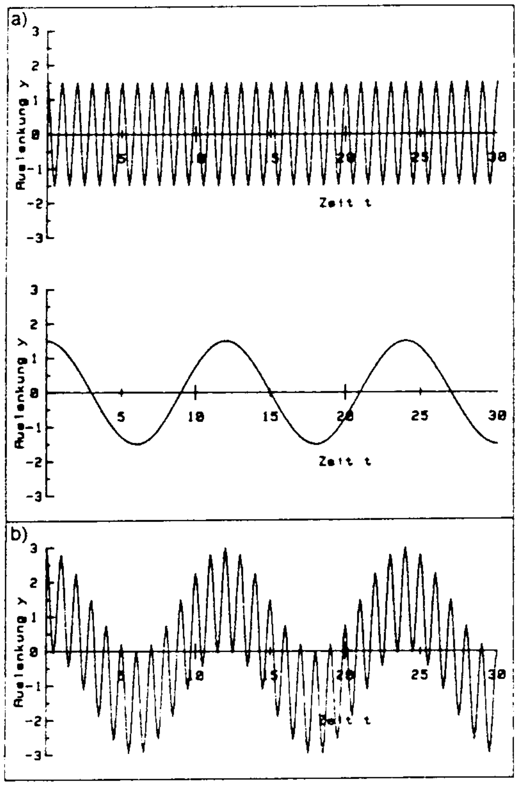


Abbildung 2.5: *Große Frequenzunterschiede (aus [14])*

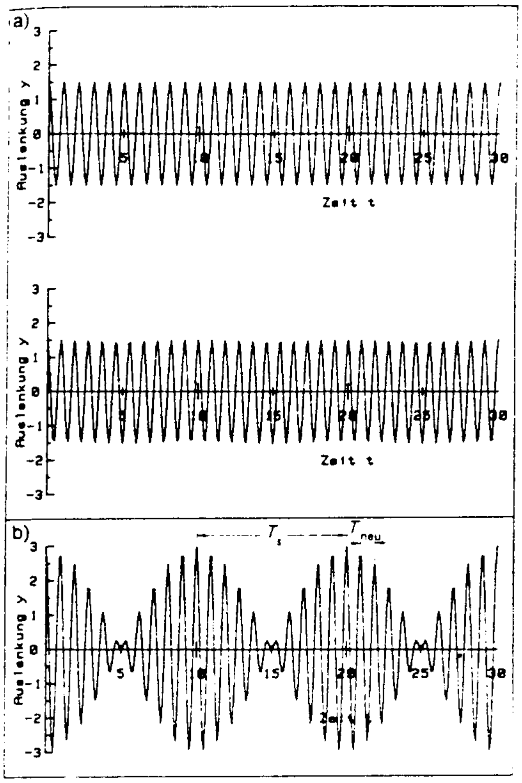


Abbildung 2.6: *Schwebungsfall (aus [14])*

(a) **1. Fall: Große Frequenzunterschiede** $\omega_1 > \omega_2$

Die Überlagerung ergibt eine Schwingung, die nicht mehr harmonisch ist (Abb. 2.5): Die schnellere Ausgangsschwingung (höhere Frequenz) schwingt um eine periodische Achse, welche durch die langsamere Ausgangsschwingung gegeben ist.

(b) **2. Fall: Nahe beieinander liegende Frequenzen $\omega_1 \approx \omega_2$ (Schwebungsfall)**

Der Ausdruck der Überlagerung der harmonischen Schwingungen

$$u(t) = 2 \cdot u_0 \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t\right)$$

läßt sich in diesem Sonderfall vereinfachen durch folgende Nährungen:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega \\ \omega_2 &= \omega + \Delta\omega \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega \\ &\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{2 \cdot \omega + \Delta\omega}{2} = \omega + \frac{\Delta\omega}{2} \approx \omega \end{aligned}$$

Der resultierende Ausdruck

$$u\,(t) = 2 \cdot u_o \cdot \cos\frac{\Delta\omega}{2} t \cdot \cos\omega t$$

beschreibt eine Schwingung mit periodisch schwankender Amplitude (siehe Abb. 2.6). Die Überlagerung ergibt also eine Gesamtschwingung, welche sich darstellen läßt als eine Grundschwingung der Frequenz $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ mit einer Amplitudenmodulation, die mit der sogenannten **Schwebungsfrequenz** $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ erfolgt. Man nennt diese Erscheinung **Schwebung**.

Versuch: Gezeigt wird die Schwebung, die bei Überlagerung der Schwingungen zweier Fadenpendel unterschiedlicher Länge entsteht. Zunächst wird der Verlauf der beiden Einzelschwingungen, dann deren Superposition mit Hilfe eines Kathodenstrahloszillographen gezeigt.

Ein weiteres Beispiel für das Auftreten von Schwebungen bilden

Gekoppelte Schwingungssysteme

Wir betrachten zwei Fadenpendel gleicher Länge und Masse, welche wegen $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ die gleiche Schwingungsfrequenz besitzen. Sie seien über eine Feder gekoppelt. Die Pendel stellen zwei gleich große Energiespeicher dar, zwischen denen periodisch Energie ausgetauscht werden kann. Wird z.B. eines der beiden Pendel ausgelenkt, dann gibt es seine Energie allmählich an das andere Pendel ab, bis dieses die gesamte Energie besitzt und der Vorgang in umgekehrter Richtung abläuft.

Es gibt lediglich zwei Schwingungszustände, bei denen keine Energieübertragung stattfindet. Sie werden **Fundamentalschwingungen** genannt.

A. **Symmetrische Fundamentalschwingung**
Beide Pendel werden gleichmäßig zur selben Seite hin ausgelenkt und schwingen daher gleichphasig (Abb. 2.7). Die Kopplungsfeder ist immer entspannt,

die Kopplung daher unwirksam. Das gesamte System schwingt, wie auch die einzelnen Pendel, mit der Frequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

B. **Antisymmetrische Fundamentalschwingung**
Die Pendel werden in entgegengesetzte Richtungen ausgelenkt, sie schwingen gegenphasig (Abb. 2.8). Die Kopplungsfeder wird abwechselnd gedehnt und gestaucht, wobei jedoch ihre Mitte in Ruhe bleibt. Daher wird für die Schwingungsfrequenz der einzelnen Pendel die Federkonstante der halben Kopplungsfeder wirksam. Die Frequenz dieser Fundamentalschwingung ist also ungleich ω_0. Sie beträgt

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$$

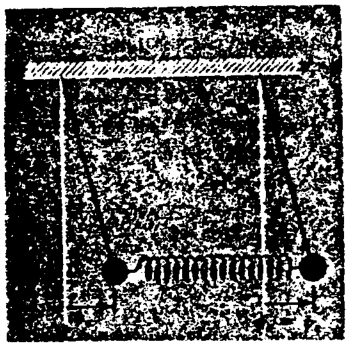


Abbildung 2.7: *Symmetrische Fundamentalschwingung (aus [6])*

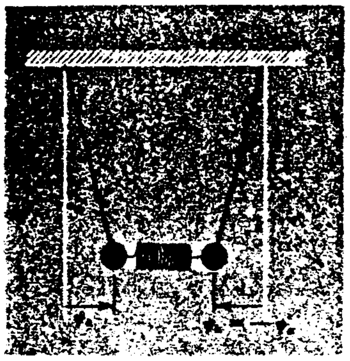


Abbildung 2.8: *Antisymmetrische Fundamentalschwingung (aus [6])*

Versuch: Vorführung der beiden Fundamentalschwingungen gekoppelter Pendel unter Herausstellung des Frequenzunterschiedes.

Im Allgemeinen schwingen gekoppelte Oszillatoren nicht genau in einem der beiden Fundamentalmoden. So verursachen schon kleine Abweichungen bei der gleichmäßigen bzw. entgegengesetzten Auslenkung eine Überlagerung der Moden. Dann entsteht eine Schwebung mit der Schwebungsfrequenz

$$\omega_s = \omega_1 - \omega_0$$

Zur mathematischen Analyse solcher gekoppelter Schwingungssysteme wählen wir ein äquivalentes, aber einfacheres Modell: elastisch gekoppelte Feder – Masse – Schwinger.

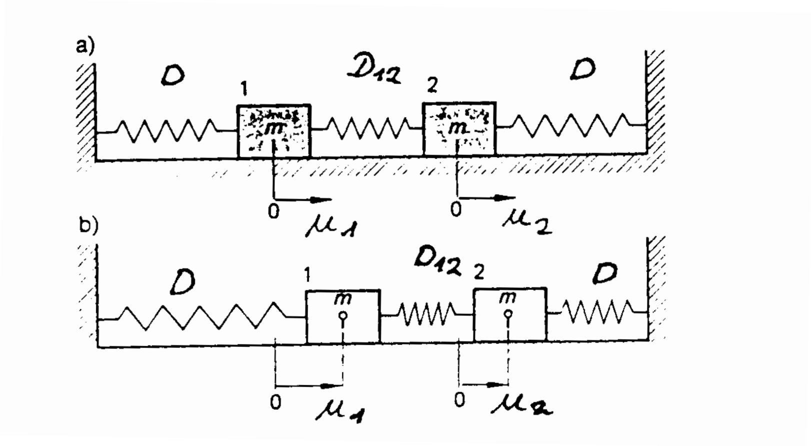


Abbildung 2.9: *Elastisch gekoppelte Feder–Masse–Schwinger (aus [14])*

Dabei handelt es sich um zwei gleiche Massen m, welche an Federn mit der Federkonstante D schwingen. Ihre Schwingungen $u_1(t)$, $u_2(t)$ sind über eine Kopplungsfeder verbunden, welche die wesentlich kleinere Federkonstante D_{12} besitzt. Um zu einer mathematischen Beschreibung des Systems zu gelangen, stellen wir die Bewegungsgleichungen auf:

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{u}_1 + D \cdot u_1 + D_{12} \cdot (u_1 - u_2) &= 0 \\ m \cdot \ddot{u}_2 + D \cdot u_2 + D_{12} \cdot (u_2 - u_1) &= 0 \end{aligned}$$

Das vorliegende System gekoppelter Differentialgleichungen wird durch Addition und Subtraktion der Gleichungen entkoppelt. Es entsteht jeweils eine Differentialgleichung für $u_+ = u_1 + u_2$ und $u_- = u_1 - u_2$.

$$m \cdot (\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2) + D \cdot (u_1 + u_2) = 0$$

$$m \cdot (\ddot{u}_1 - \ddot{u}_2) + D \cdot (u_1 - u_2) + 2D_{12} \cdot (u_1 - u_2) = 0$$

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dt^2}(u_1 + u_2) + \frac{D}{m} \cdot (u_1 + u_2) = 0 \\ &\frac{d^2}{dt^2}(u_1 - u_2) + \frac{D + 2D_{12}}{m} \cdot (u_1 - u_2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_+}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot u_+ &= 0 \qquad \text{mit} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \\ \frac{d^2 u_-}{dt^2} + \omega_1^2 \cdot u_- &= 0 \qquad\qquad\qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{D + 2D_{12}}{m}} \end{aligned}$$

Die Gleichungen werden gelöst durch

$$\begin{aligned} u_+(t) = u_1(t) + u_2(t) = u_{0_+} \cos(\omega_0 t + \varphi_+) \\ u_-(t) = u_1(t) - u_2(t) = u_{0_-} \cos(\omega_1 t + \varphi_-) \end{aligned}$$

Für die gleichphasige Schwingung ($u_1(t) = u_2(t)$) entfällt die zweite Gleichung und es gilt

$$u_1(t) = u_2(t) = \frac{u_{0+}}{2}\cos(\omega_0 t + \varphi_+)$$

Es findet eine Schwingung mit der ersten Fundamentalfrequenz $\omega_0 = \sqrt{D/m}$ statt.

Für die gegenphasige Schwingung ($u_1(t) = -u_2(t)$) verschwindet die erste Gleichung. Die Schwingungen

$$u_1(t) = \frac{u_{0-}}{2}\cos(\omega_1 t + \varphi_-) \qquad u_2(t) = -\frac{u_{0-}}{2}\cos(\omega_1 t + \varphi_-)$$

erfolgen mit der zweiten Fundamentalfrequenz $\omega_1 = \sqrt{(D + 2D_{12})/m}$.

Die Lösungen sind also genau die Fundamentalschwingungen. Man bezeichnet u_+ und u_- auch als **Normalkoordinaten**.

Im folgenden wollen wir den allgemeinen Schwingungsfall, bei dem Schwebungen auftreten, genauer untersuchen.

Wir setzen hier folgende Anfangsbedingungen: Zu Beginn der Schwingung ($t = 0$) ist der erste Schwinger maximal ausgelenkt, der zweite befindet sich in der Nullage. Beide sind in Ruhe.

$$\begin{array}{rclcrcl} u_1(0) & = & u_o & & \dot u_1(0) & = & 0 \\ u_2(0) & = & 0 & & \dot u_2(0) & = & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcccl} u_+(0) & = & u_-(0) & = & u_0 \\ \dot u_+(0) & = & \dot u_-(0) & = & 0 \end{array}$$

Die Lösungen des Differentialgleichungssystems für diese speziellen Anfangsbedingungen lauten:

$$\begin{aligned} u_+(t) &= u_0 \cos\omega_0 t \\ u_-(t) &= u_0 \cos\omega_1 t \end{aligned}$$

Für die Elongation der beiden Massen erhält man daraus:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{u_+(t) + u_-(t)}{2} = \frac{u_0}{2}\cdot[\cos\omega_0 t + \cos\omega_1 t] \\ u_2(t) &= \frac{u_+(t) - u_-(t)}{2} = \frac{u_0}{2}\cdot[\cos\omega_0 t - \cos\omega_1 t] \end{aligned}$$

Unter Anwendung der Additionstheoreme läßt sich dies umformen zu

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u_0\cdot\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\cdot\cos\omega t \\ u_2(t) &= u_0\cdot\sin\frac{\Delta\omega}{2}t\cdot\sin\omega t \end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} \Delta\omega &= \omega_1 - \omega_2 \\ \omega &= \frac{\omega_1+\omega_2}{2} \end{aligned}$$

Die beiden Schwinger führen also Schwebungen aus. Die Schwebungen sind phasenverschoben

- um $\pi/2$ bezüglich der Frequenz ω der Grundschwingung
- um π in der Schwebungsfrequenz $\Delta\omega$.

Beachte: Mit der Definition der Schwebungsfrequenz $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0$ beträgt die Schwebungsdauer $T_s = 2\pi/\Delta\omega$ nur die halbe Schwingungsdauer von $\cos(\Delta\omega/2)t$ und $\sin(\Delta\omega/2)t$.

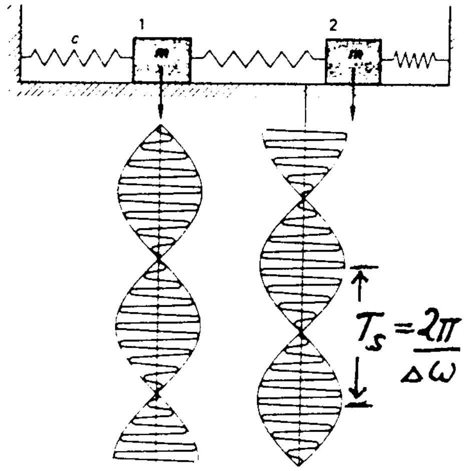


Abbildung 2.10: *Schwebungen zweier gekoppelter Feder–Masse–Schwinger (aus [14])*

Versuch: Gezeigt wird die Schwebung gekoppelter Pendel unter den im vorangehenden Abschnitt genannten Anfangsbedingungen.

Im allgemeinen Fall sind in einem gekoppelten Schwingungssystem nicht nur zwei, sondern N Oszillatoren miteinander gekoppelt. Dieses System besitzt dann N Fundamentalschwingungen $\omega_1, \ldots, \omega_N$. Solche Systeme sind in der Molekül – und Festkörperphysik von Bedeutung.

Zurück zu Wellen: Mit den über die Superposition von Schwingungen erworbenen Kenntnissen sind wir nun in der Lage, die Überlagerung von Wellen verschiedener Frequenzen zu diskutieren:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = 2 \cdot u_0 \cdot \cos\frac{\delta_1 - \delta_2}{2} \cdot \cos\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$$

Dabei war $\delta_1 = \omega_1 t - k_1 x$ und $\delta_2 = \omega_2 t - k_2 x$. Die resultierende Welle wird also beschrieben durch

$$u(t) = 2 \cdot u_0 \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x\right) \cdot \cos(\omega t - kx)$$

mit
$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \qquad \Delta k = k_1 - k_2$$
$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \qquad k = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Analog zur Überlagerung von Schwingungen entsteht auch hier bei geringen Frequenzunterschieden ($\omega_1 \approx \omega_2$, bzw. $\Delta\omega \ll \omega$) eine Schwebung.
Da bei einer Welle Orts – und Zeitkoordinate bis auf konstante Phasen symmetrisch sind, tritt hier die Schwebung sowohl bezüglich x, als auch bezüglich t auf.

Versuch: Mit Hilfe zweier leicht gegeneinander verstimmter Stimmgabeln wird eine Schwebung erzeugt.

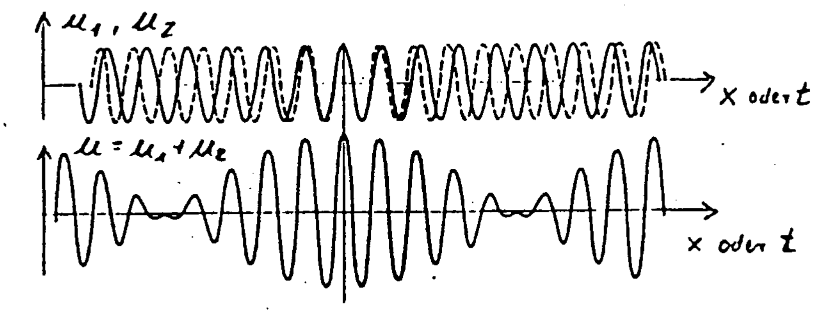


Abbildung 2.11: *Schwebung bezüglich x und t bei Überlagerung zweier Wellen geringfügig verschiedener Frequenzen*

2.3 Die Gruppengeschwindigkeit

Die aus der Überlagerung entstandene Welle

$$u\,(t) = 2 \cdot u_0 \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \cdot \cos\,(\omega t - kx)$$

kann als Cosinuswelle mit der variablen Amplitude $2 \cdot u_0 \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)$ angesehen werden.

Die Cosinuswelle $\cos\,(\omega t - kx)$ pflanzt sich mit der Geschwindigkeit $v_{ph} = \omega/k$ fort, welche im Abschnitt 1.3.2 als Phasengeschwindigkeit bezeichnet und von der noch zu definierenden Gruppengeschwindigkeit streng unterschieden wurde. In der Abbildung 2.12 bewegt sich der kleine Kreis mit v_{ph} .

Was ist die Gruppengeschwindigkeit ?

Zur Beantwortung dieser Frage untersuchen wir die Amplitudenmodulation der Cosinuswelle. Die Modulation, auch **Schwebungsgruppe** genannt, kann ebenfalls als harmonische Welle aufgefaßt werden, welche sich mit der Geschwindigkeit

$$v_{gr} = \frac{\frac{\Delta\omega}{2}}{\frac{\Delta k}{2}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

ausbreitet.

Die Momentaufnahmen der Auslenkung u zu zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten t_1 und t_2 verdeutlichen dies: Die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Umhüllende der schnell oszillierenden Cosinuswelle bewegt, bezeichnet man als **Gruppengeschwindigkeit**. In Abbildung 2.12 ist dies die Geschwindigkeit, mit welcher der Pfeil seine Position ändert.

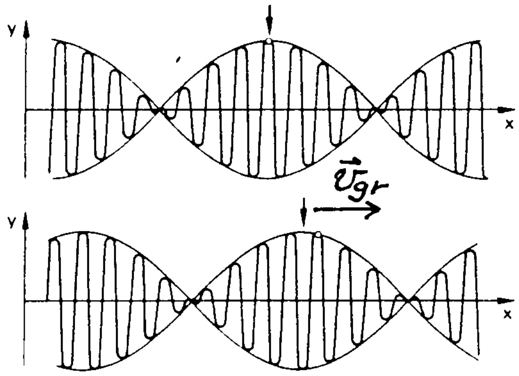


Abbildung 2.12: *Zustände einer Schwebungsgruppe. Der Pfeil kennzeichnet das Maximum der Gruppe, der kleine Kreis einen Zustand konstanter Phase. (aus [14])*

Diese beträgt bei Vorliegen diskreter Frequenzen $\boxed{v_{gr} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta k}}$ oder

im allgemeinen Fall einer kontinuierlichen Frequenzverteilung $\boxed{v_{gr} = \dfrac{d\omega}{dk}}$

Die Schwebungsgruppe stellt eine periodische Zu – und Abnahme von Schwingungsenergie dar, daher gilt:

> Bei der Superposition von Wellen erfolgt der <u>Energietransport</u> mit der Geschwindigkeit der Schwebungsgruppe, d.h. mit der <u>Gruppengeschwindigkeit</u> v_{gr} der resultierenden Welle.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen Phasen – und Gruppengeschwindigkeit?

Mit $v_{ph} = \dfrac{\omega}{k} \Leftrightarrow \omega = k \cdot v_{ph}$ erhält man

$$\begin{aligned} v_{gr} &= \frac{d\omega}{dk} = v_{ph} + k \cdot \frac{dv_{ph}}{dk} \\ &= v_{ph} + k \cdot \frac{dv_{ph}}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{k} \end{aligned}$$

Aus $\lambda = 2\pi/k$ folgt $d\lambda/dk = -2\pi/k^2$ und damit ergibt sich

$$v_{gr} = v_{ph} + k \cdot \frac{dv_{ph}}{d\lambda} \cdot \left(-\frac{2\pi}{k^2}\right) = v_{ph} - \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{dv_{ph}}{d\lambda}$$

Also

$$\boxed{v_{gr} = v_{ph} - \lambda \cdot \frac{dv_{ph}}{d\lambda}}$$

Zusammenhang zwischen
Phasengeschwindigkeit v_{ph}
und
Gruppengeschwindigkeit v_{gr}

Nach dieser Gleichung stimmen Gruppen – und Phasengeschwindigkeit nur dann überein, wenn die Phasengeschwindigkeit v_{ph} nicht von der Wellenlänge λ abhängt, d.h. wenn $dv_{ph}/d\lambda = 0$ ist.
Sowohl in der Natur, als auch bei vielen praktischen Anwendungen der Physik tritt jedoch häufig eine Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von der Wellenlänge auf. Es findet **Dispersion** statt.

Zu unterscheiden sind also die drei folgenden Fälle:

(i) v_{ph} ist unabhängig von λ

$$\frac{dv_{ph}}{d\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{gr} = v_{ph} \qquad \text{keine Dispersion}$$

(ii) $v_{ph} = v_{ph}(\lambda)$

$$\frac{dv_{ph}}{d\lambda} > 0 \quad \Rightarrow \quad v_{gr} < v_{ph} \qquad \underline{\text{normale}}\ \text{Dispersion}$$

(iii) $v_{ph} = v_{ph}(\lambda)$

$$\frac{dv_{ph}}{d\lambda} < 0 \quad \Rightarrow \quad v_{gr} > v_{ph} \qquad \underline{\text{anomale}}\ \text{Dispersion}$$

2.4 Reflexion und stehende Wellen

Bisher bezogen sich unsere Betrachtungen auf das Verhalten von Wellen in ein und demselben Medium. Wir können nun weiter fragen:

Wie verhält sich eine elastische Welle an der Grenzfläche zwischen zwei Medien?

Trifft eine Welle auf die Grenze eines zweiten Mediums, so wird sie dort ganz oder teilweise reflektiert. Je nach dem Dichteverhältnis der beiden Medien unterscheidet man die Reflexion am festen und am losen Ende. Bei der Reflexion am festen Ende, d.h. wenn das zweite Medium dichter ist, erfährt die Welle einen Phasensprung um π. Bei der Reflexion am losen Ende, d.h. am dünneren Medium, tritt kein Phasensprung auf.

Versuch: Die Reflexion am festen und am losen Ende wird am Beispiel der Seilwelle demonstriert.

Qualitativ läßt sich das Verhalten folgendermaßen erklären:

Die Seilwelle trägt als elastische Welle die Energiedichte

$$w = \underbrace{\frac{\varrho}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2}_{w_k} + \underbrace{\frac{\sigma}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}_{w_p} \qquad \text{mit} \quad w_k = w_p = \frac{1}{2} \cdot w$$

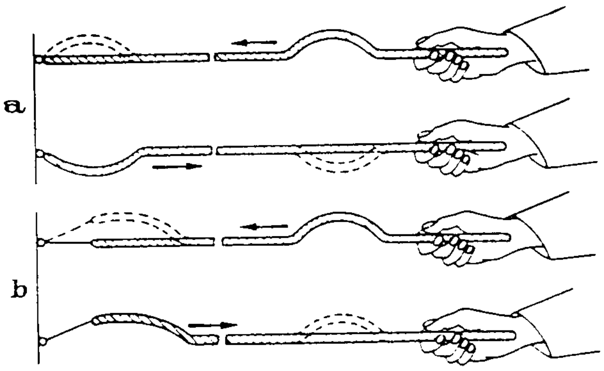


Abbildung 2.13: *Reflexion am festen und am losen Ende (aus [2])*

Reflexion am **festen** Ende
Aufgrund der Befestigung kann das Seilende keine Schwingung senkrecht zur Seilrichtung ausführen und besitzt daher keine kinetische Energie. Aus der Gleichverteilung der Gesamtenergie folgt, daß am Seilende die zweifache potentielle Energie gespeichert wird. Diese bewirkt die Auslenkung der vorletzten Seilstücke in entgegengesetzte Richtung. Die Welle läuft gegenphasig zurück.

$$w_k = 0 \quad \Rightarrow \quad w = 2 \cdot w_p$$

Reflexion am **losen** Ende
Das frei bewegliche Seilende besitzt keine potentielle Energie. Da keine Kopplung vorhanden ist, erhält das Seilende die zweifache kinetische Energie und schwingt mit doppelter Amplitude aus. Die Welle läuft in gleicher Phase zurück.

$$w_p = 0 \quad \Rightarrow \quad w = 2 \cdot w_k$$

Das Verhalten einer elastischen Welle an der Grenzfläche zweier verschiedener Medien soll nun quantitativ diskutiert werden.

Wir betrachten zwei isotrope, elastische Medien, die durch ihre Dichte (ϱ_1 , ϱ_2) und durch ihren Elastizitätsmodul (E_1 , E_2) charakterisiert seien. Sie treffen an der ebenen Grenzfläche $x = 0$ zusammen.
Vom Medium 1 kommend falle eine harmonische Welle der Frequenz ω senkrecht auf die Grenzfläche. Ein Teil dieser Welle wird dort in das Medium 1 zurückreflektiert, ein anderer Teil tritt durch die Grenzfläche hindurch in das Medium 2.
Die reflektierte wie auch die transmittierte Welle besitzen — falls der lineare elastische Bereich nicht überschritten wird — die Frequenz ω der einfallenden Welle. Mit $v = \sqrt{E/\varrho}$ unterscheiden sich jedoch die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in den verschiedenen Medien und damit auch die Wellenzahlen $k = \omega/v$.
Bei der Aufstellung der Wellenausdrücke müssen ferner Unterschiede in den Amplituden und Phasen berücksichtigt werden. Die Phase der einfallenden Welle δ_A kann willkürlich festgelegt und somit $\delta_A = 0$ gesetzt werden.

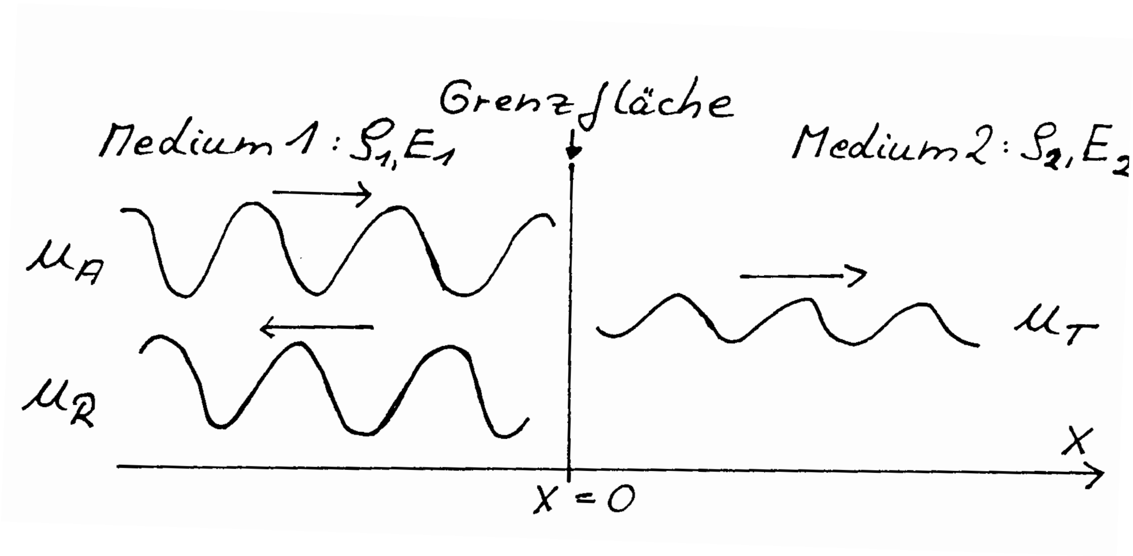


Abbildung 2.14: *Verhalten einer elastischen Welle an der Grenzfläche zweier verschiedener Medien*

Einfallende Welle

$$u_A = A \cdot \cos(\omega t - k_1 x) \quad \text{bzw.} \quad u_A = A \cdot e^{i\,(\omega t - k_1 x)}$$

Reflektierte Welle

$$u_R = R \cdot \cos(\omega t + k_1 x + \delta_R) \quad \text{bzw.} \quad u_R = R \cdot e^{i\,(\omega t + k_1 x + \delta_R)}$$

Transmittierte Welle

$$u_T = T \cdot \cos(\omega t - k_2 x + \delta_T) \quad \text{bzw.} \quad u_T = T \cdot e^{i\,(\omega t - k_2 x + \delta_T)}$$

Die Grenzbedingungen bei $x = 0$:

1. Die Auslenkung an der Grenzfläche ist stetig. Zu jeder Zeit gilt bei $x = 0$

$$\boxed{u_A + u_R = u_T}$$

2. Die Normalspannung σ_{12}, die an der Grenzfläche vom Medium 1 auf das Medium 2 ausgeübt wird, ist gleich der in die umgekehrte Richtung wirkenden Normalspannung σ_{21}. Es gilt also zu jeder Zeit bei $x = 0$

$$\boxed{\sigma_A + \sigma_R = \sigma_T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial u_A}{\partial x} \cdot E_1 + \frac{\partial u_R}{\partial x} \cdot E_1 = \frac{\partial u_T}{\partial x} \cdot E_2}$$

Aus Bedingung 1 folgt durch Einsetzen der Wellenausdrücke

$$\begin{aligned}
A \cdot e^{i\,\omega t} + R \cdot e^{i\,(\omega t + \delta_R)} &= T \cdot e^{i\,(\omega t + \delta_T)} \\
A \cdot e^{i\,\omega t} &= -R \cdot e^{i\,(\omega t + \delta_R)} + T \cdot e^{i\,(\omega t + \delta_T)} \\
A &= -R \cdot e^{i\,\delta_R} + T \cdot e^{i\,\delta_T} \\
A &= -R \cdot \cos\delta_R + T \cdot \cos\delta_T + i \cdot (-R \cdot \sin\delta_R + T \cdot \sin\delta_T)
\end{aligned}$$

Aus Bedingung 2 folgt

$$E_1 \cdot k_1 \cdot A = E_1 \cdot k_1 \cdot R \cdot \cos\delta_R + E_2 \cdot k_2 \cdot T \cdot \cos\delta_T + i \cdot (E_1 \cdot k_1 \cdot R \cdot \sin\delta_R + E_2 \cdot k_2 \cdot T \cdot \sin\delta_T)$$

Da die Amplituden A, R und T sowie die Phasen δ_R und δ_T reell sind, müssen die Imaginärteile verschwinden.

Es ist also folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & -\,R \cdot \sin\delta_R + T \cdot \sin\delta_T = 0 \\ \mathrm{II} & E_1 \cdot k_1 \cdot R \cdot \sin\delta_R + E_2 \cdot k_2 \cdot T \cdot \sin\delta_T = 0 \end{array}$$

Multiplikation von I mit $E_1 \cdot k_1$ und Addition der beiden Gleichungen ergibt für II:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & -\,R \cdot \sin\delta_R + T \cdot \sin\delta_T = 0 \\ \mathrm{II} & (E_1 \cdot k_1 + E_2 \cdot k_2) \cdot T \cdot \sin\delta_T = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; \text{(a)}\; E_1 \cdot k_1 = -E_2 \cdot k_2 \;\;\vee\;\; \text{(b)}\; T \cdot \sin\delta_T = 0 \end{array}$$

Da E_1, E_2 fest vorgegeben und mit der Wahl der Frequenz ω auch die Wellenzahlen k_1 und k_2 festgelegt sind, liefert (a) keine Lösung.
Das Gleichungssystem ist also nur trivial lösbar durch

$$\sin\delta_R = \sin\delta_T = 0$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta_R &= 0,\, \pi \\ \text{und}\;\; \delta_T &= 0,\, \pi \end{aligned}$$

Die Lösung $\delta_T = \pi$ muß aus Gründen der Kontinuität ausgeschlossen werden. Betrachtet man nämlich den Grenzfall $R \to 0$, in dem sich die beiden Medien wenig unterscheiden, so wird die Welle fast ungestört durch die Grenzfläche hindurchtreten und damit $\delta_T = 0$ sein. Also

$$\boxed{\begin{array}{lll} \delta_R = 0\,,\,\pi & \text{Phase der reflektierten Welle} \\ \delta_T = 0 & \text{Phase der transmittierten Welle} \end{array}}$$

2.5 Stehende Wellen

Wir untersuchen nun die Überlagerung der einfallenden und der reflektierten Welle im Medium 1 für den Fall gleicher Amplituden $A = R$.

Addition der Auslenkungen ergibt

$$u = u_A + u_R = A \cdot [\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx + \delta_R)]$$

Als resultierende Welle erhält man

- bei Reflexion am losen Ende ($\delta_R = 0$)

$$u = A \cdot [\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)]$$
$$\boxed{u = 2A \cdot \cos kx \cdot \cos \omega t}$$

- bei Reflexion am festen Ende ($\delta_R = \pi$)

$$u = A \cdot [\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx + \pi)]$$
$$= A \cdot [\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)]$$
$$\boxed{u = 2A \cdot \sin kx \cdot \sin \omega t}$$

Das Ergebnis der Überlagerung ist eine **stehende Welle**, bei der örtliche und zeitliche Änderung der Elongation entkoppelt sind:

$$u(x,t) = u_1(x) \cdot u_2(t)$$

Der Wellenvorgang stellt eine ortsfeste harmonische Schwingung ($\sim \cos \omega t [\sin \omega t]$) dar, deren Amplitude sich im Raum von Punkt zu Punkt ($\sim \cos kx [\sin kx]$) ändert. Das Schwingungsbild steht fest, es findet keine Wellenausbreitung statt.

Man bezeichnet die Raumpunkte, an denen die ortsfesten Schwingungen mit maximaler Amplitude vorliegen, als **Bäuche**. Die Orte, an denen die Amplitude Null ist, heißen **Knoten**.

Stehende Wellen treten in der Praxis bei der Reflexion von Wellen auf. Theoretisch bilden sie die Interferenzerscheinungen zweier Wellen gleicher Frequenz und Amplitude, welche entgegengesetzte Laufrichtung besitzen.

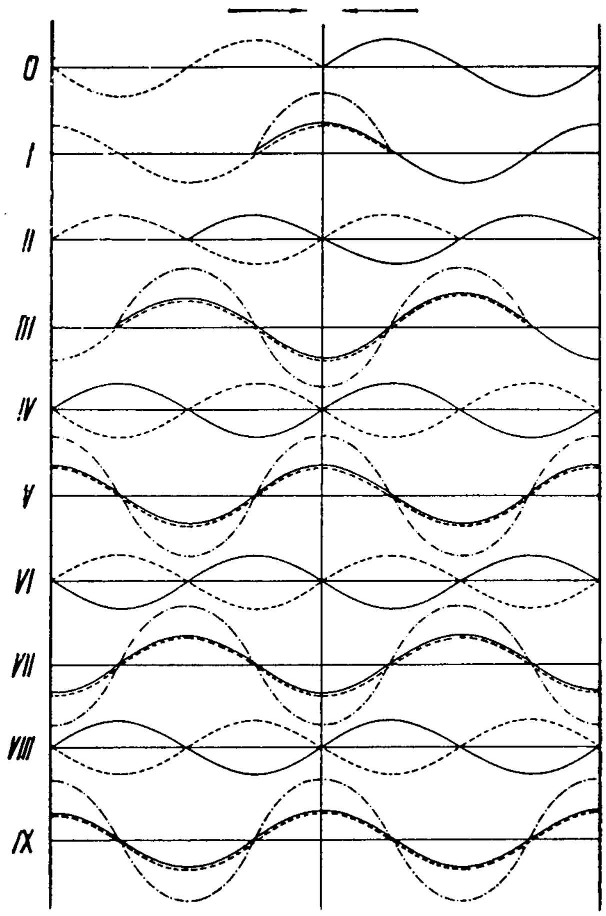


Abbildung 2.15: *Ausbildung einer stehenden Welle*

Die Verteilung der Energie in einer stehenden Welle

Wie auf S.23ff. hergeleitet wurde, gilt für die kinetische und potentielle Energiedichte einer elastischen Welle

$$w_k = \frac{\varrho}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \qquad w_p = \frac{E}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

Für die stehende Welle $u = 2A \cdot \sin kx \cdot \sin \omega t$ erhält man

$$\boxed{\begin{aligned} w_k &= 2 \cdot \varrho \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2 kx \cdot \cos^2 \omega t \\ w_p &= 2 \cdot \varrho \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2 kx \cdot \sin^2 \omega t \end{aligned}}$$

Das Ergebnis für w_p ergibt sich aus $w_p = 2 \cdot E \cdot A^2 \cdot k^2 \cdot \cos^2 kx \cdot \sin^2 \omega t$ mit $k^2 = \omega^2/v^2$ und $v^2 = E/\varrho$.

Interpretation der erhaltenen Ausdrücke: Bei der stehenden Welle findet im Gegensatz zur laufenden Welle *kein Energietransport* statt! Ähnlich wie bei einer harmoni-

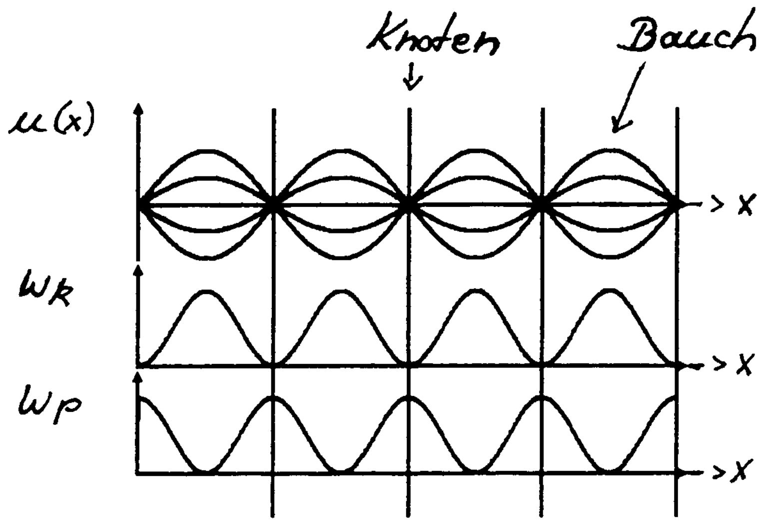


Abbildung 2.16: *Verteilung der Energie bei der stehenden Welle (aus [15])*

schen Schwingung erfolgt ein periodischer Austausch zwischen kinetischer und potentieller Energie (siehe Abb. 2.16). Die Verteilung der Energiedichten ist periodisch in der Ortskoordinate x. Die kinetische Energiedichte $w_k(x)$ ist an den Schwingungsbäuchen konzentriert, da sich dort die Oszillatoren des Mediums mit der größten Geschwindigkeit bewegen. Die maximale potentielle bzw. elastische Energiedichte $w_p(x)$ liegt an den Schwingungsknoten vor. Dort ist die Deformation des Mediums am größten. Die Energiedichten sind also nicht wie bei der laufenden Welle zu jedem Ort und zu jeder Zeit gleich.

Merke: $\boxed{\text{Stehende Wellen haben die chakteristischen Eigenschaften von Schwingungen}}$

In vielen Bereichen der Physik treten stehende Wellen auf. Einige Beispiele werden im folgenden beschrieben.

Eigenschwingungen

1.Beispiel: Transversale stehende Wellen einer Saite

Eine Saite wird an beiden Enden eingespannt und zu transversalen Schwingungen angeregt. Aufgrund der beidseitigen Reflexion am festen Ende bilden sich je nach der Erregerfrequenz verschiedene stehende Wellen aus. Die Randbedingungen, hier Knoten an beiden Einspannstellen, erlauben nur bestimmte harmonische Wellen, welche man als **Eigenschwingungen der Saite** bezeichnet.

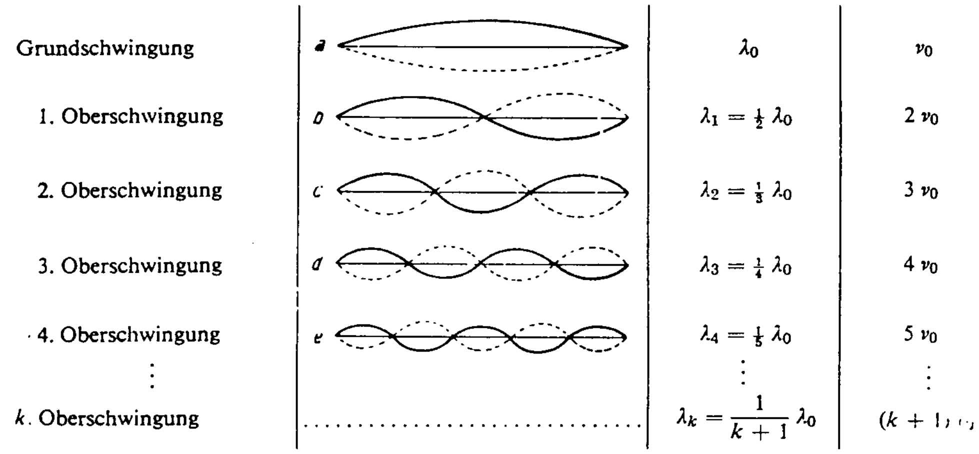


Abbildung 2.17: *Eigenschwingung einer Saite (aus [2])*

Aus Abbildung 2.17 geht hervor, daß für die n – te Oberschwingung allgemein $l = (n+1) \cdot \lambda/2 \quad (n = 0, 1, 2\ldots)$ gilt.

Daraus folgt für die **Eigenschwingungen der Saite**

$$\boxed{\lambda = \frac{2 \cdot l}{n+1} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots}$$ Wellenlängen der möglichen stehenden Wellen

2.Beispiel: Longitudinale stehende Wellen in Orgelpfeifen

Die Klangerzeugung bei Blasinstrumenten beruht auf longitudinalen stehenden Wellen. Wir wollen exemplarisch die Eigenschwingungen der offenen und der gedackten Pfeife behandeln.
In eine Orgelpfeife wird am vorderen Ende über eine Schneide Luft eingeblasen und aufgewirbelt, so daß die innen befindliche Luftsäule zu Schwingungen angeregt wird.

(a) Bei der gedackten Pfeife — gezeigt in Abbildung 2.18 — ist das hintere Ende geschlossen. Dementsprechend verschwindet dort die longitudinale Auslenkung der Gasmoleküle (Schwingungsknoten), während sie am offenen vorderen Ende maximal ist (Schwingungsbauch). Es findet also Reflexion am festen und am losen Ende statt.

Für die n – te Oberschwingung gilt $l = (2n+1) \cdot \lambda/4 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$. Es sind also

$$\boxed{\lambda = \frac{4 \cdot l}{2n+1} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

die Wellenlängen der **Eigenschwingungen der gedackten Pfeife**.

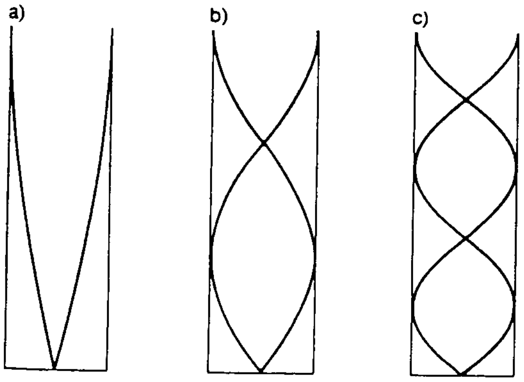


Abbildung 2.18: *Eigenschwingungen der gedackten Pfeife (aus [14])*

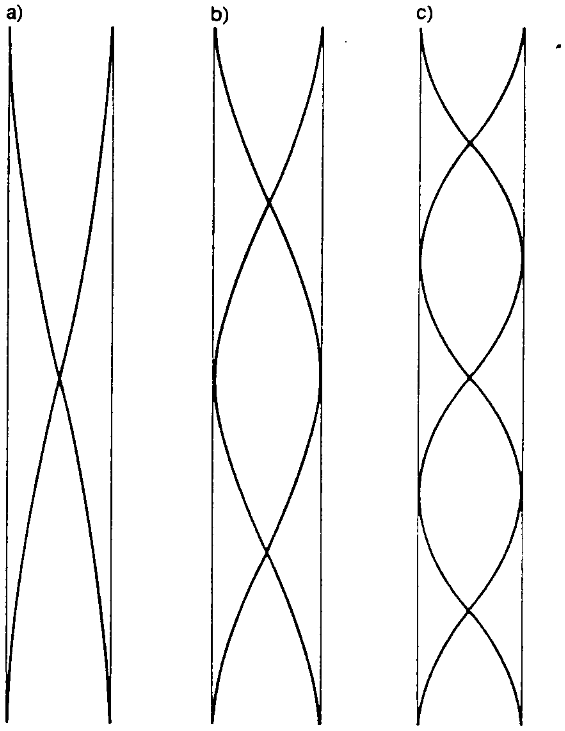


Abbildung 2.19: *Eigenschwingungen der offenen Pfeife (aus [14])*

(b) Bei der offenen Pfeife – gezeigt in Abbildung 2.19 — sind beide Enden offen, so daß sich an den Enden jeweils Schwingungsbäuche ausbilden. Die Bewegung der Luftmoleküle ist dort maximal. Es findet beidseitig Reflexion am losen Ende statt.

Hier gilt allgemein für die n – te Oberschwingung $l = (n+1) \cdot \lambda/2 \quad (n = 1, 2, \ldots)$. Es sind also

$$\boxed{\lambda = \frac{2 \cdot l}{n+1} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

die Wellenlängen der **Eigenschwingungen der offenen Pfeife**.

Bemerkung zu den Abbildungen: Bei den Eigenschwingungen einer Pfeife erfolgt die Auslenkung der Gasmoleküle $u(x,t)$ longitudinal, sie wird lediglich der Anschaulichkeit halber als Transversalwelle dargestellt.

Versuch: 1.Teil: Die Eigenschwingungen zweier offener Holzlippenpfeifen unterschiedlicher Länge werden demonstriert.

2.Teil: Gezeigt wird die Abhängigkeit der Eigenschwingungsfrequenz vom verwendeten Gas. Dazu wird eine der Pfeifen zunächst mit Preßluft, dann mit Helium angeblasen. Da die Schallgeschwindigkeit v in den beiden Gasen unterschiedlich ist, ändert sich mit $\nu = v/\lambda$ auch die Frequenz der

Eigenschwingung, was einer Änderung der *Tonhöhe* entspricht. Im vorgeführten Fall verdreifacht sich die Tonhöhe annähernd, da die Phasengeschwindigkeit des Schalls in Helium $v_{He} = 965\,\mathrm{m/s}$ etwa das Dreifache des Wertes in Luft beträgt.

Einen anschaulichen Nachweis longitudinaler stehender Wellen in einer Luftsäule liefern die KUNDTschen Staubfiguren.

Versuch: Mit Hilfe einer Galton – Pfeife wird im sogenannten KUNDTschen Rohr (siehe Abb. 2.20), welches eine dünne Schicht Bärlappstaub enthält, eine stehende Welle erzeugt. An den Bäuchen der Welle wird der Staub aufgewirbelt, während er sich an deren Schwingungsknoten ansammelt. Dieser

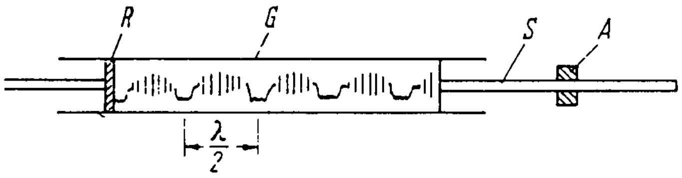


Abbildung 2.20: *Kundtsches Staubrohr(aus [2])*

Versuch kann zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit verwendet werden.
Meßbeispiel: Aus dem Abstand zweier Knoten $\lambda/2 = 1,35\,\mathrm{cm}$ und der Erregerfrequenz $\nu = 12,6$ kHz erhält man mit $v = \lambda \cdot \nu$ für die Schallgeschwindigkeit den Wert $v = 340\,\mathrm{m/s}$.

Wir haben bisher die stehende Schallwelle durch die räumlich veränderliche Amplitude der Bewegung der Gasmoleküle beschrieben. Es besteht zusätzlich die Möglichkeit, die Welle durch die auftretenden Druckdifferenzen $\Delta p = -p_0 \cdot \kappa \cdot \partial u/\partial x$ zu beschreiben. Für den ortsabhängigen Term $u(x)$ der stehenden Schallwelle, welcher die Amplitude der Molekülbewegung angibt, gilt

$$u(x) \sim \cos kx \;\; [\sin kx]$$

Daraus folgt für die Druckdifferenz

$$\Delta p(x) \sim \frac{\partial u(x)}{\partial x} \sim \sin kx \;\; [\cos kx]$$

Druck und longitudinale Auslenkung sind also um $\pi/2$ phasenverschoben, wie in Abbildung 2.21 graphisch veranschaulicht ist.

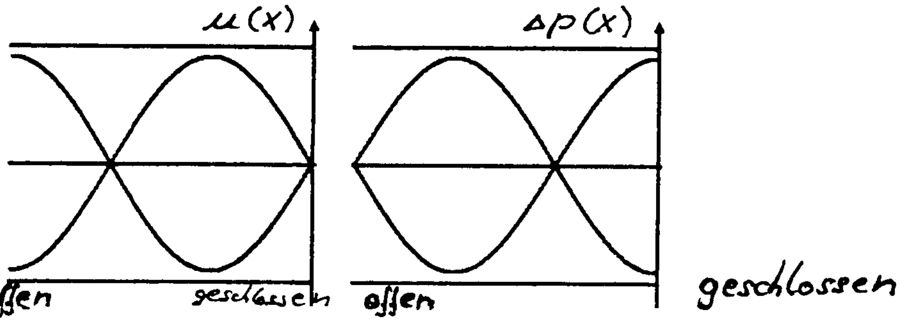


Abbildung 2.21: *Phasenverschiebung von $\pi/2$ zwischen Druck und longitudinaler Auslenkung bei einer Schallwelle*

2.6 Fourieranalyse

Wie wir in den vorangehenden Abschnitten gesehen haben, liefert die Überlagerung harmonischer Wellen neue, meist kompliziertere Wellen: Schwebung, Amplitudenmodulation, stehende Wellen. Hier stellt sich die Frage, ob auf diese Weise beliebige, auch *nicht harmonische* Wellen erzeugt werden können.

Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir den umgekehrten Vorgang, d.h. die Zerlegung einer beliebigen Welle in die zur Überlagerung beitragenden Teilwellen. Man bezeichnet die mathematische Formulierung eines solchen Vorganges als **Fourieranalyse**.

Wegen der besseren Übersichtlichkeit der Formeln und der leichteren Verständlichkeit befassen wir uns zunächst mit der Fourieranalyse von Schwingungen.

Fourieranalyse von Schwingungen

Fourieranalyse periodischer Schwingungen

Eine beliebige, periodische Schwingung werde beschrieben durch die stückweise stetige, periodische Funktion $u(t)$ der reellen Variable t mit der zeitlichen Periode T. D.h. für alle t gilt

$$u(t+T) = u(t)$$

FOURIER zeigte 1822, daß sich $u(t)$ darstellen läßt als

$$\boxed{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \quad \text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Dabei gilt für die **Fourierkoeffizienten**

$$a_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t)\, dt$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot \cos n\omega t \, dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot \sin n\omega t \, dt \end{aligned}$$

Die Kombination aus Sinus – und Kosinusschwingungen gleicher Frequenz ergibt dabei jeweils eine Kosinusschwingung mit bestimmter Phase φ_n:

$$a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t = u_n \cos(nwt - \varphi_n)$$

Damit erhält man die **Fourierreihe**

$$\boxed{u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cos(nwt - \varphi_n) \;\;, \; \omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Amplitude u_n und Phase φ_n werden durch die Fourierkoeffizienten festgelegt. Aus dem Additionstheorem $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$ folgt

$$u_n \cos(nwt - \varphi_n) = \underbrace{u_n \cos\varphi_n}_{a_n} \cos n\omega t + \underbrace{u_n \sin\varphi_n}_{b_n} \sin n\omega t$$

Man erhält also folgenden Zusammenhang

$$\left.\begin{aligned} a_n &= u_n \cos\varphi_n \\ b_n &= u_n \sin\varphi_n \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \tan\varphi_n &= \frac{b_n}{a_n} \end{aligned}$$

Zusammenfassung: Jede beliebige periodische Schwingung läßt sich eindeutig zerlegen in eine Reihe von elementaren Cosinus – und Sinusschwingungen (<u>Fourieranalse</u>). Die dabei auftretenden Kreisfrequenzen sind Vielfache der Grundkreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$, durch welche die analysierte Schwingung beschrieben wird.
Umgekehrt ist es also möglich, jeden periodischen Vorgang, beschrieben durch eine Funktion $u(t) = u(t + T)$, aus einer Grundschwingung der Frequenz $\omega = 2\pi/T$ und ihren Oberschwingungen der Frequenzen $n\omega$ aufzubauen (<u>Fourierentwicklung</u>).

Aufschluß darüber, welche Grundschwingung und Oberschwingungen mit welchen Amplituden am Zustandekommen des resultierenden periodischen Vorganges beteiligt sind, gibt das sogenannte **Amplitudenspektrum**. Dabei handelt es sich um ein Diagramm, in dem die Amplituden gegen die Kreisfrequenzen aufgetragen sind. Diese spektrale Darstellung enthält jedoch keine Information über die Phasenlage der Ausgangsschwingungen.

Komplexe Darstellung der Fourierreihe

Es war

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cos(nwt - \varphi_n)$$

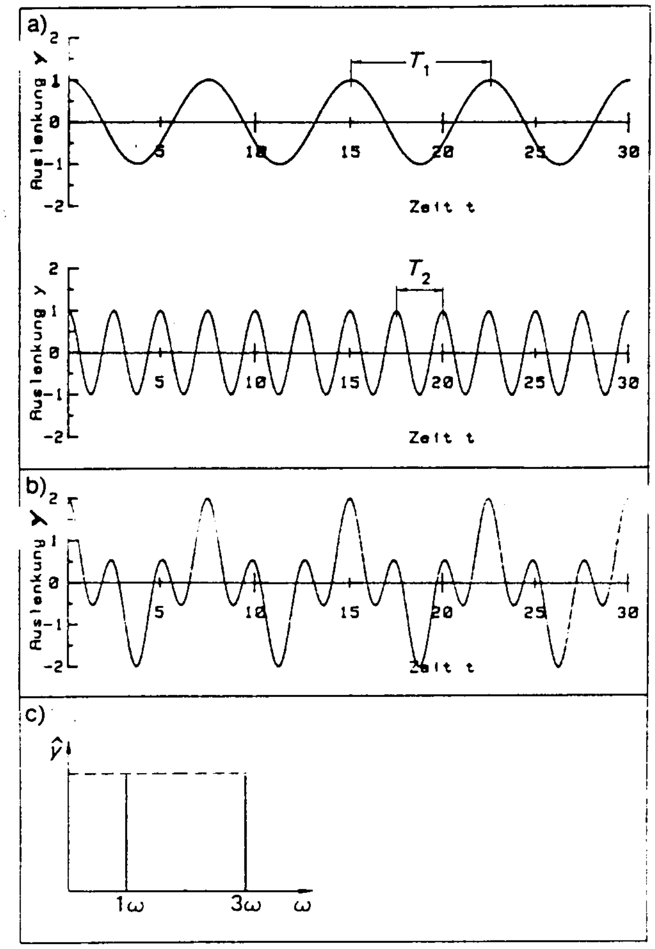


Abbildung 2.22: *Überlagerung harmonischer Schwingungen und Amplitudenspektrum (aus [14])*

Mit $\cos\alpha = 1/2 \cdot (e^{i\,\alpha} + e^{-i\,\alpha})$ ergibt sich für $u(t)$

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\, u_n \left(e^{i\,n\omega t - i\,\varphi_n} + e^{-i\,n\omega t + i\,\varphi_n} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\, u_n\, e^{i\,n\omega t - i\,\varphi_n} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\, u_n\, e^{-i\,n\omega t + i\,\varphi_n}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\, u_n\, e^{i\,n\omega t - i\,\varphi_n} + \sum_{n=0}^{-\infty} \frac{1}{2}\, u_{-n}\, e^{i\,n\omega t + i\,\varphi_{-n}}
\end{aligned}
$$

Mit $u_n = u_{-n}$ und $\varphi_{-n} = -\varphi_n$ läßt sich dies zusammenfassen zu

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{2}\, u_n\, e^{-i\,\varphi_n}}_{A_n}\, e^{i\,nwt}$$

Man erhält

$$\boxed{u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n\, e^{i\,nwt}} \quad \begin{array}{l}\text{Fourierreihe}\\ A_n \text{ komplex}\end{array}$$

Welcher Zusammenhang besteht nun zwischen den Fourierkoeffizienten a_n, b_n und A_n der reellen und der komplexen Darstellung der Fourierreihe ?

Für $\underline{n = 0}$ erhält man durch Vergleich der beiden Darstellungen

$$n = 0 : \quad a_0 = A_0$$

Im Fall $\underline{n \neq 0}$ gilt für jede harmonische Welle mit $\alpha = n\omega t$

$$\begin{aligned} A_n\, e^{i\,\alpha} + A_{-n}\, e^{-i\,\alpha} &= A_n\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha) + A_{-n}\,(\cos\alpha - i\,\sin\alpha) \\ &= (A_n + A_{-n})\,\cos\alpha + i\,(A_n - A_{-n})\,\sin\alpha \end{aligned}$$

Damit läßt sich die komplexe Darstellung umformen zu

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n\, e^{i\,nwt} &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, e^{i\,nwt} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{-n}\, e^{-i\,nwt} \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + A_{-n})\,\cos\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} i\,(A_n - A_{-n})\,\sin\alpha \end{aligned}$$

Vergleich mit der reellen Fourierreihe ergibt

$$\begin{aligned} a_n &= A_n + A_{-n} \\ i\,b_n &= -A_n + A_{-n} \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich folgende Beziehungen zwischen den reellen und komplexen Fourierkoeffizienten

$$\boxed{\begin{aligned} A_0 &= a_0 \\ A_n &= \tfrac{1}{2}\,(a_n - i\,b_n) \\ A_{-n} &= \tfrac{1}{2}\,(a_n + i\,b_n) \end{aligned}}$$

Für A_n folgt also

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{T}\int_0^T u(t)\,\cos n\omega t\,dt - i\,\frac{2}{T}\int_0^T u(t)\,\sin n\omega t\,dt\right) \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,(\cos n\omega t - i\,\sin n\omega t)\,dt \end{aligned}$$

$$\boxed{A_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)\, e^{-i n \omega t}\, dt}$$ Komplexer Fourierkoeffizient

Beispiele für die Anwendung der Fourieranalyse

Beispiel 1: Das menschliche Gehör führt auf mechanischem Wege eine Fourierzerlegung der wahrgenommenen Laute durch. Während ein **Ton** eine rein sinusförmige Schwingung der Luftteilchen darstellt, handelt es sich bei einem **Klang** meist um eine komplizierte periodische Schwingung. Das Ohr registriert beim Empfinden eines Klanges die Grundschwingung, welche die Tonhöhe bestimmt, sowie die zugehörigen Oberschwingungen, welche die Klangfarbe ausmachen.

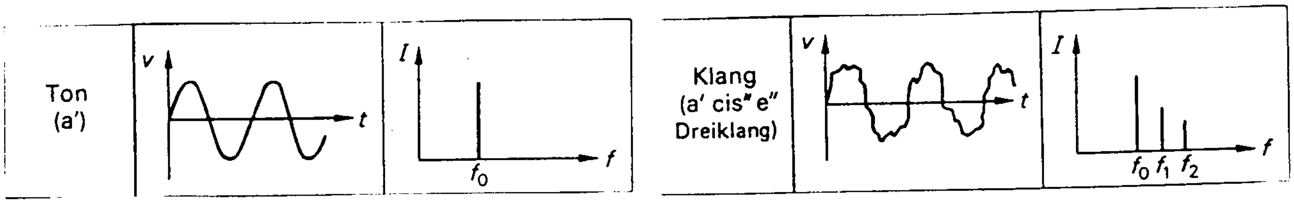


Abbildung 2.23: *Fourierzerlegung von Lauten durch das menschliche Gehör (aus [14])*

Beispiel 2: Bei einem Verstärker werden je nach Bandbreite die Oberschwingungen beschnitten. Umgekehrt führen Verzerrungen (Nichtlinearitäten) zu zusätzlichen Oberschwingungen. In beiden Fällen kommt es zu einer Änderung der Klangfarbe.

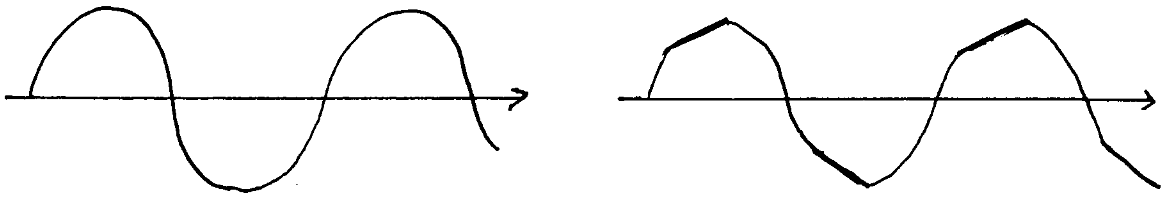


Abbildung 2.24: *Beschneidung der Oberschwingungen*

Versuch: Mit Hilfe des sogenannten Fouriergerätes wird eine periodische Schwingung in ihre Grund – und Oberschwingungen zerlegt.

Danach erfolgt die Demonstration des umgekehrten Vorganges: Durch Überlagerung der ermittelten Teilschwingungen wird die Ausgangsschwingung aufgebaut.
Als Ausgangsschwingungen werden die Rechteck –, die Dreieck – sowie die Sägezahnschwingung gewählt.

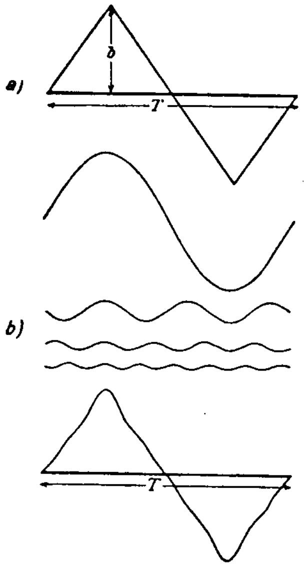


Abbildung 2.25: *Fourierzerlegung einer periodischen Dreieckskurve (aus [2])*

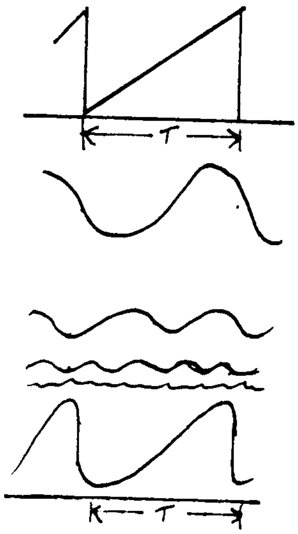


Abbildung 2.26: *Fourierzerlegung einer Sägezahnschwingung (aus)*

Mathemathische Fourieranalyse am Beispiel der Rechteckfunktion

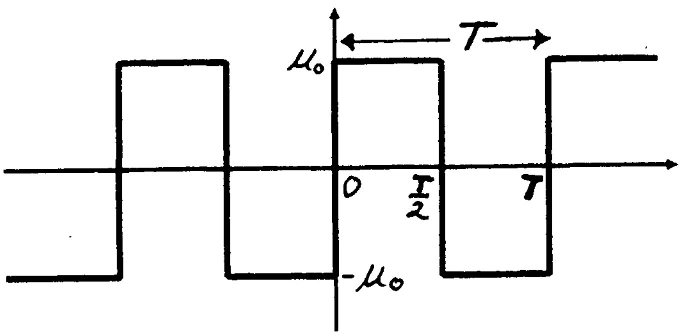


Abbildung 2.27: *Rechteckschwingung*

Eine zeitliche Periode der Rechteckfunktion läßt sich wie folgt beschreiben:

$$u(t) = \begin{cases} u_0 & \text{für } 0 < t \leq T/2 \\ -u_0 & \text{für } T/2 < t \leq T \end{cases}$$

Der komplexe Fourierkoeffizient A_n berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\, e^{-i\,n\omega t}\, dt \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} u_0\, e^{-i\,n\omega t}\, dt + \int_{T/2}^{T} (-u_0)\, e^{-i\,n\omega t}\, dt\right) \\
&= \frac{1}{T}\left(\left[\frac{-u_o}{i\,n\omega}\, e^{-i\,n\omega t}\right]_0^{T/2} + \left[\frac{+u_o}{i\,n\omega}\, e^{-i\,n\omega t}\right]_{T/2}^{T}\right) \\
&= \frac{1}{T}\left(-\frac{u_o}{i\,n\omega}\left(e^{-i\,n\pi} - 1\right) + \frac{u_o}{i\,n\omega}\left(e^{-i\,n2\pi} - e^{-i\,n\pi}\right)\right) \\
&= -\frac{u_o}{i\,n2\pi}\left(2\,e^{-i\,n\pi} - 2\right) \\
&= -\frac{u_o}{i\,n\pi}\left(e^{-i\,n\pi} - 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 2u_0/i\,n\pi & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

Die komplexe Fourierreihe berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
u(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -\frac{u_o}{i\,n\pi}\left(e^{-i\,n\pi} - 1\right) e^{i\,n\omega t} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ \text{n ungerade}}}^{+\infty} \frac{2u_o}{i\,n\pi}\, e^{i\,n\omega t} \\
&= \sum_{\substack{n=1 \\ \text{n ungerade}}}^{\infty} \frac{2u_o}{i\,n\pi}\left(e^{i\,n\omega t} - e^{-i\,n\omega t}\right) = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{n ungerade}}}^{\infty} \frac{4u_0}{n\pi}\,\frac{1}{2i}\left(e^{i\,n\omega t} - e^{-i\,n\omega t}\right) \\
&= \sum_{\substack{n=1 \\ \text{n ungerade}}}^{\infty} \frac{4u_0}{n\pi} \sin n\omega t \\
&= \frac{4u_0}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \cdots\right)
\end{aligned}$$

Die <u>Fourierreihe einer Rechteckkurve</u> lautet also:

$$\boxed{u(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{n ungerade}}}^{\infty} \frac{4u_0}{n\pi} \sin n\omega t = \frac{4u_0}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \cdots\right)}$$

Die Abbildung 2.28 zeigt den Verlauf der Grundschwingung (erste Harmonische) und der beiden ersten Oberschwingungen (zweite und dritte Harmonische) sowie deren Überlagerung. Zum Aufbau der Rechteckfunktion sind unendlich viele Oberschwingungen der

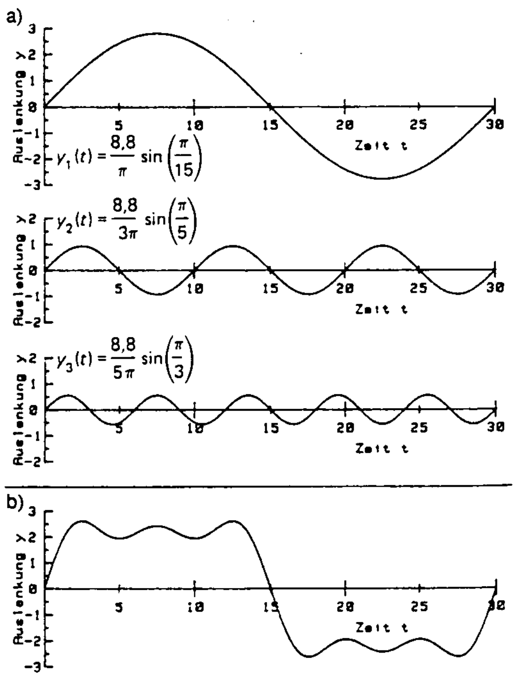


Abbildung 2.28: *Fourierentwicklung der Rechteckschwingung (aus [14])*

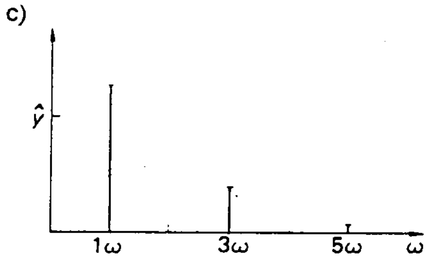


Abbildung 2.29: *Amplitudenspektrum der Überlagerung (aus [14])*

Form $4u_0/n\pi \sin n\omega t$ $(n = 1, 3, 5, \ldots)$ erforderlich, aber — wie die Abbildung zeigt — ergeben schon wenige eine gute Näherung. Das Amplitudenspektrum der dargestellten Überlagerung ist in der Abbildung 2.29 zu sehen.

Bei den vorangehenden Erläuterungen zur Fourieranalyse periodischer Schwingungen wurde nur auf zeitlich periodische Funktionen eingegangen. Örtlich periodische Funktionen $u(x) = u(x + \lambda)$ mit der Periode λ werden völlig analog behandelt. Im Amplitudenspektrum werden dann entsprechend die Amplituden gegen die Wellenzahlen $k = 2\pi/\lambda$ aufgetragen.

Merke: Zur Entwicklung periodischer Funktionen sind unendlich viele Oberschwingungen erforderlich, das Spektrum der Kreisfrequenzen $n\omega$ bzw. Wellenzahlen nk bleibt jedoch diskret.

Fourieranalyse nicht–periodischer Schwingungen

Eine nicht–periodische Funktion (siehe Abb. 2.30) kann aufgefaßt werden als periodische Funktion mit unendlich großer Periode. Für eine zeitabhängige Funktion würde dies bedeuten, daß sich die Periode T von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$ erstreckt. Der Übergang $T \to \infty$ wird zu einer unendlich kleinen Grundfrequenz $\omega = 2\pi/T$ führen, so daß die Spektrallinien $n\omega$ des Amplitudenspektrums immer dichter zusammenrücken werden. Schließlich wird das diskrete in ein kontinuierliches Spektrum übergehen, das alle Frequenzen enthält: $n\omega \to [0, \infty]$.

Analog wird bei einer ortsabhängigen, aperiodischen Funktion mit $\lambda \to \infty$ das Ampli-

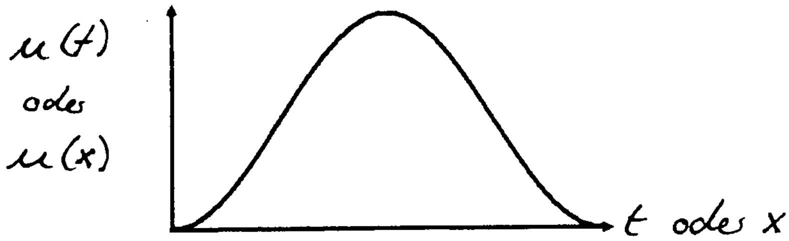


Abbildung 2.30: *Nicht–periodische Funktion*

tudenspektrum sämtliche Wellenzahlen umfassen: $nk \to [0, \infty]$.

Für die mathematische Formulierung der Fourieranalyse bedeutet dies, daß an die Stelle der Fourierreihe das **Fourierintegral** tritt. Weiter werden die Fourierkoeffizienten A_n durch stetige Amplitudenfunktionen $A(\omega)$ bzw. $A(k)$ ersetzt. Dabei gibt $A(\omega)$ das Frequenzspektrum und $A(k)$ das Wellenlängenspektrum an.

Für beliebige aperiodische Funktionen gelten die **Fouriertransformationen**:

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega)\, e^{i\,\omega t}\, d\omega \quad \text{mit} \quad A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, e^{-i\,\omega t}\, dt}$$

$$\boxed{u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\, e^{i\,kx}\, dk \quad \text{mit} \quad A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, e^{-i\,kx}\, dx}$$

Der Faktor $1/\sqrt{2\pi}$ ist reine Konvention und hebt die Symmetrie zwischen den Ausdrükken für u und A hervor.

Beispiel: Fourieranalyse eines Rechteckimpulses

Gegeben sei eine nicht–periodische Funktion u(x), welche beschrieben wird durch

$$u(x) = \begin{cases} u_0 & \text{für } |x| \leq L/2 \\ 0 & \text{für } |x| \geq L/2 \end{cases}$$

Wir berechnen zunächst das Wellenlängenspektrum $A(k)$

$$\begin{aligned} A(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, e^{-i\,kx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} u_0\, e^{-i\,kx}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{u_0}{i\,k}\, e^{-i\,kx} \right]_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{u_0}{i\,k}\, e^{-i\,k\frac{L}{2}} + \frac{u_0}{i\,k}\, e^{i\,k\frac{L}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2}u_0}{\sqrt{\pi}k}\,\frac{1}{2i}\left(e^{i\,k\frac{L}{2}} - e^{-i\,k\frac{L}{2}}\right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{u_0}{k}\,\sin k\frac{L}{2} = \frac{u_0 L}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\sin kL/2}{kL/2}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{A(k) = \frac{u_0 L}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\sin kL/2}{kL/2}}$$ Wellenlängenspektrum eines Rechteckimpulses

Die reelle Darstellung der Funktion $u(x)$ erhalten wir, indem wir im Fourierintegral für $u(x)$ die Glieder mit entgegengesetzt gleichen Wellenzahlen zusammenfassen.

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\,e^{i\,kx}\,dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}\left(A(-k)\,e^{-i\,kx} + A(k)\,e^{i\,kx}\right)dk
\end{aligned}
$$

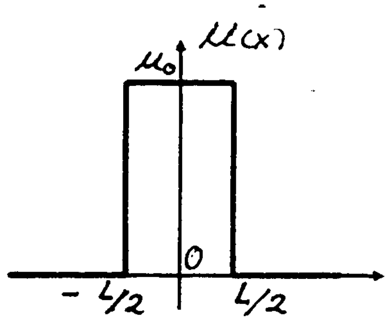


Abbildung 2.31: *Rechteckimpuls*

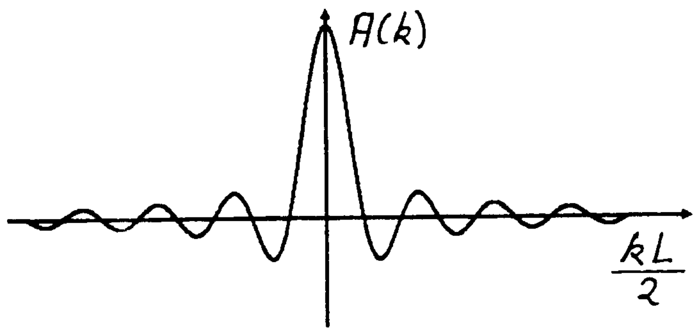


Abbildung 2.32: *Wellenlängenspektrum eines Rechteckimpulses*

Mit

$$A(k) = A(-k) = \frac{u_0 L}{\sqrt{2\pi}} \, \frac{\sin kL/2}{kL/2}$$

ergibt sich

$$u(x) = \frac{u_0 L}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin kL/2}{kL/2} \left(e^{-ikx} + e^{ikx} \right) dk$$

$$\boxed{u(x) = \frac{u_0 L}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin kL/2}{kL/2} \cos kx \, dk}$$

Mit den gewonnenen Kenntnissen läßt sich nun die Fourierzerlegung bzw. – entwicklung einer *Welle* ohne Schwierigkeiten bewältigen.

Fourieranalyse einer Welle

Da eine Welle $u(x,t)$ sowohl orts – als auch zeitabhängig ist, läßt sie sich entweder in der Orts – oder Zeitkoordinate nach Fourier entwickeln. Entsprechend erhält man ein Wellenlängen – $A(k)$ oder Frequenzspektrum $A(\omega)$.

Die <u>Entwicklung nach x</u> ergibt

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \, e^{i \, (kx - \omega(k)t)} \, dk$$

D.h. zu einem beliebigen Zeitpunkt t läßt sich die Welle als Überlagerung harmonischer Wellen mit der Phasengeschwindigkeit $v(\lambda) = \omega(k)/k$ darstellen.

2.7 Mehrdimensionale Wellen

Wir haben bisher zur Einführung und Beschreibung des Phänomens Welle eindimensionale Wellen angenommen, deren Ausbreitung mit der Phasengeschwindigkeit v im dreidimensionalen Raum auf die x – Richtung beschränkt war. Diese haben wir mathematisch beschrieben durch die Ausdrücke

- $u(x,t) = u(x \mp vt)$ im Fall der allgemeinen Welle
- $u(x,t) = u_o \cos(\omega t \mp kx)$ im Fall der harmonischen Welle

Dabei war eine eindimensionale Welle definiert als Übertragung eines Schwingungszustandes entlang einer *Gerade* im Raum.

Erweitern wir nun unser Blickfeld auf den gesamten dreidimensionalen Raum und betrachten alle Raumpunkte, welche bezüglich der obenstehenden Wellenausdrücke gleiche Phase besitzen, d.h. in denen zu einem gegebenen Zeitpunkt t die Auslenkungen $u(t)$ übereinstimmen, so sind dies Ebenen senkrecht zur x – Achse, welche voneinander den Abstand λ haben (siehe Abb. 2.33 und Abb. 2.34).

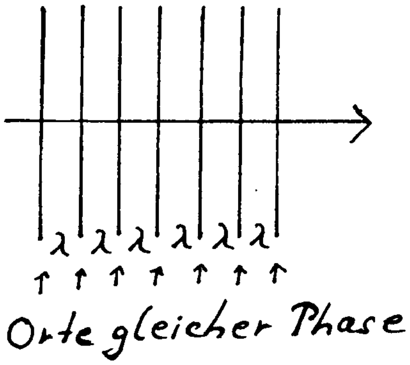


Abbildung 2.33: *Ebene Wellenfronten im Abstand* λ

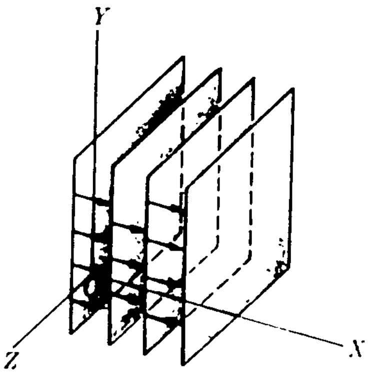


Abbildung 2.34: *Ebene Welle (aus [1])*

Def.: Man nennt die Flächen, welche von Raumpunkten gleicher Phase gebildet werden, **Wellenflächen (– fronten)**.

Mehrdimensionale Wellen werden nach der Form ihrer Wellenflächen bezeichnet.
Die obenstehenden Ausdrücke beschreiben also nicht nur — wie der Einfachheit halber angenommen wurde — eindimensionale Wellen, sondern auch **ebene Wellen**, welche sich in x – Richtung ausbreiten.

Erinnern wir uns an die im Unterkapitel 1.4 vorgestellten Wellenarten! Eine Seilwelle kann als eindimensional bezeichnet werden. Im Gegensatz dazu handelt es sich bei einer Druckwelle im gasgefüllten Rohr und einer Stabwelle um ebene Wellen, da hier die Wellenbewegung eine *Fläche* von Raumpunkten (Querschnittsfläche des Gasvolumens bzw. des Stabes) erfaßt.

Wir wollen nun eine ebene Welle mathematisch formulieren, welche sich in eine beliebige Raumrichtung fortpflanzt (siehe Abb. 2.36).

Ebene Welle mit beliebiger Fortplanzungsrichtung

Die Ausbreitungsrichtung der Welle sei durch den Einheitsvektor $\vec{e}$ mit den Richtungswinkeln α, β, γ festgelegt. Die Wellenflächen, d.h. die Ebenen gleicher Phase bzw. Auslenkung, stehen senkrecht auf der Fortpflanzungsrichtung. Sie haben die Gleichung $\vec{e}\,\vec{r} = s = const.$ (siehe Abb.). Dabei ist

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

der Ortsvektor eines beliebigen Punktes P der Wellenfläche.

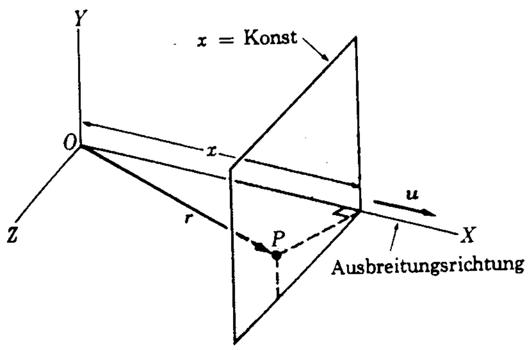


Abbildung 2.35: *Ebene Welle, die sich in x–Richtung ausbreitet. (aus [1])*

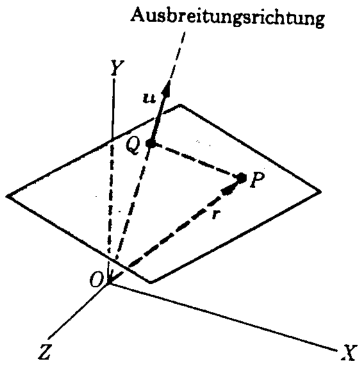


Abbildung 2.36: *Ebene Welle, die sich in eine beliebige Richtung ausbreitet. (aus [1])*

Wir betrachten eine harmonische Welle.
Es war $u(x,t) = u_0\,\cos(\omega t \mp kx)$ mit $k = 2\pi/\lambda$ der Wellenausdruck für die Ausbreitung in x – Richtung. Dann beschreibt $u(s,t) = u_0\,\cos(\omega t \mp ks)$ die Fortpflanzung längs einer beliebigen Achse s . Mit $s = \vec{e}\,\vec{r}$ läßt sich dies umformen zu

$$u(\vec{r},t) = u_0\,\cos(\omega t \mp k\,\vec{e}\,\vec{r})$$

Man definiert nun den **Wellenvektor**

$$\vec{k} = k\,\vec{e} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$$

Er zeigt in Ausbreitungsrichtung und seine Länge ist gleich der Wellenzahl $|\vec{k}| = k = 2\pi/\lambda$.

Damit erhält man die <u>mathematische Konstruktion einer ebenen, harmonischen Welle mit allgemeiner Fortpflanzungsrichtung</u>

$$\boxed{u(\vec{r},t) = u_0\,\cos(\omega t \mp \vec{k}\,\vec{r})} \text{ oder komplex } \boxed{u(\vec{r},t) = u_0\,e^{i\,(\omega t \mp \vec{k}\,\vec{r})}}$$

$u(\vec{r},t)$ ist periodisch in $\vec{r}$, wenn man in Richtung $\vec{k}$ um λ fortschreitet:

$$\cos\vec{k}\left(\vec{r} \mp \lambda\,\frac{\vec{k}}{k}\right) = \cos\left(\vec{k}\vec{r} \mp \frac{\vec{k}\vec{k}}{k}\lambda\right) = \cos(\vec{k}\vec{r} \mp k\lambda) = \cos(\vec{k}\vec{r} \mp 2\pi) = \cos(\vec{k}\vec{r})$$

Dabei ist $\vec{k}/k = \vec{e}$ der Einheitsvektor in Fortpflanzungsrichtung.

Allgemeine ebene Wellen werden beschrieben durch

$$u(\vec{r}, t) = u\left(\frac{\vec{k}}{k}\,\vec{r} \mp vt\right)$$

Ebene Wellen werden theoretisch erzeugt durch eine unendlich ausgedehnte Ebene, welche parallel zu sich selbst schwingt. Sie stellen daher eine mathematische Abstraktion dar. In der Praxis werden ebene Wellen annähernd durch flächenhafte Quellen erzeugt. Ein Beispiel für eine solche Quelle wäre beim Schall eine vibrierende ebene Metallplatte. Häufig bilden ebene Wellen aber auch eine gute Näherung für Wellen, welche von weit entfernten Quellen ausgehen. So sind z.B. Lichtwellen, welche von der Sonne oder von weit entfernten Lichtquellen ausgesandt werden, als ebene Wellen zu behandeln.

Kugelwellen

Neben den ebenen Wellen sind die Kugelwellen, welche von einer punktförmigen Quelle erzeugt werden, von großer Bedeutung. Die Wellenflächen sind hier Kugelschalen um die Punktquelle (siehe Abb. 2.37c).

Die Leistung P der Quelle wird isotrop auf die Kugeloberflächen $A = 4\pi r^2 \sim r^2$ verteilt. Die Intensität der Kugelwelle nimmt mit dem Quadrat des Abstandes von der Quelle ab: $I = P/A \sim 1/r^2$. Da die Intensität einer Welle proportional dem Amplitudenquadrat ist, $I \sim u_0^2$, folgt für die Amplitude einer Kugelwelle $u_0 \sim 1/r$, d.h. die Amplitude nimmt wie $1/r$ mit dem Abstand ab.

Diese Überlegungen führen zu

$$\boxed{u(r, t) = \frac{u_0}{r}\, f(r \mp vt)}$$ Allgemeine Form einer Kugelwelle

Die harmonische Kugelwelle hat folgende Form

$$\boxed{u(r, t) = \frac{u_0}{r}\cos(kr - \omega t)} \quad \text{oder komplex} \quad \boxed{u(r, t) = \frac{u_0}{r}\, e^{i\,(kr - \omega t)}}$$

Hier noch einige Bemerkungen:

- Bei Kugelwellen geht in den Wellenausdruck nur das Produkt der Beträge kr von $\vec{k}$ und $\vec{r}$ ein.

- Die allgemeine Form der Kugelwelle läßt sich rein mathematisch aus der auf den dreidimensionalen Raum erweiterten Wellengleichung herleiten.
  Genauere Angaben siehe E.Hecht

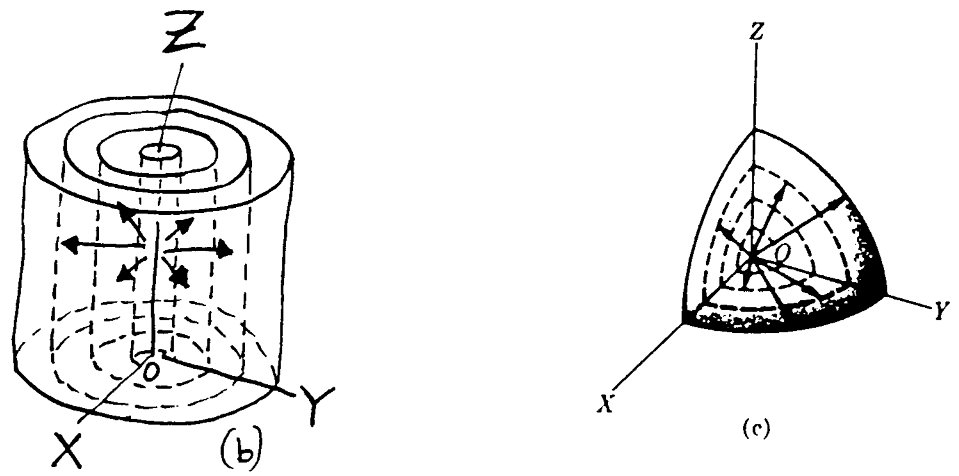


Abbildung 2.37: *(b) Zylinderwelle und (c) Kugelwelle (aus [1])*

Kreis – und Zylinderwellen

Versuch: In der Wellenwanne werden durch einen punktförmigen Erreger Kreiswellen an der Wasseroberfläche erzeugt.

Kreiswellen oder allgemein Zylinderwellen, bei welchen theoretisch eine unendlich lange Gerade das Erregungszentrum bildet (siehe Abb. 2.37b), haben kompliziertere mathematische Formulierungen.
Für große Abstände r von der linearen Quelle lautet die harmonische Zylinderwelle

$$\boxed{u(r,t) = \frac{u_0}{\sqrt{r}} \cos(kr - \omega t)} \quad \text{oder komplex} \quad \boxed{u(r,t) = \frac{u_0}{\sqrt{r}} e^{i\,(kr - \omega t)}}$$

Da die Wellenflächen hier Zylindermäntel darstellen, deren Fläche proportional zum Kreisumfang ist, gilt für die Intensität $I \sim 1/r$. Daraus ergibt sich für die Amplitude eine Abhängigkeit von $1/\sqrt{r}$.

Wir wollen nun noch die Interferenz von Kreiswellen untersuchen.

Versuch: Interferenz von Wasserwellen
Durch zwei nahe beieinanderliegende punktförmige Erreger wird in der Wellenwanne die Interferenzfigur zweier Kreiswellensysteme erzeugt. Die Erregung beider Systeme erfolgt in gleicher Phase und mit derselben Frequenz.
Anschließend wird der Abstand der beiden Punktquellen vergrößert.

Die Überlagerung der beiden Kreiswellen

$$u_1(r_1,t) = \frac{u_0}{\sqrt{r_1}} \cos(k_1 r_1 - \omega t) \quad u_1(r_2,t) = \frac{u_0}{\sqrt{r_2}} \cos(k_2 r_2 - \omega t)$$

ergibt die resultierende Welle

$$u = \frac{u_0}{\sqrt{r_1}} \cos\varphi_1 + \frac{u_0}{\sqrt{r_2}} \cos\varphi_2 \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} \varphi_1 &= k_1 r_1 - \omega t \\ \varphi_2 &= k_2 r_2 - \omega t \end{aligned}$$

Wir betrachten im Interferenzbild einen beliebigen Punkt P, welcher von Quelle Q_1 den Abstand r_1, von der Quelle Q_2 die Entfernung r_2 besitzt. Dann beträgt die Phasendifferenz der im Punkt P überlagerten Wellenzüge

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = k\,(r_2 - r_1)$$

Es kommt also in P zu

- maximaler Verstärkung für

$$\boxed{r_2 - r_1 = n\lambda \quad n \in \mathbf{Z}}$$

- Auslöschung für

$$\boxed{r_2 - r_1 = (2n+1)\,\frac{\lambda}{2} \quad n \in \mathbf{Z}}$$

Die Kurven, welche sich durch Verbindung der Ortspunkte maximaler Wellenerzeugung sowie vollständiger Auslöschung ergeben, sind konfokale Hyperbeln. Die beiden Wellenzentren bilden deren gemeinsame Brennpunkte. Die für die Interferenz von Kreiswellen in

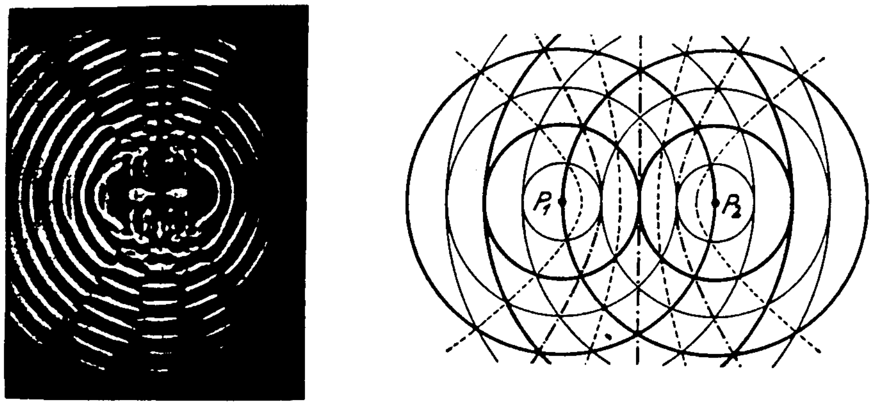


Abbildung 2.38: *Interferenz zweier kreisförmiger Wellensysteme (aus [2])*

der Ebene gefundenen Ergebnisse lassen sich auf die Ausbreitung zweier Kugelwellensysteme im Raum übertragen. Dazu denke man sich die obenstehende Zeichnung (Abb. 2.38) um die Verbindungslinie der beiden Punktquellen in Rotation versetzt. Dann gehen die Hyperbeln in Rotationshyperboloide über, welche wiederum die beiden Erregungszentren zu gemeinsamen Brennpunkten haben.

2.8 Die Wellengleichung im Dreidimensionalen

Wir haben gezeigt, daß eine eindimensionale Welle, welche mit der Geschwindigkeit v längs der x – Achse fortschreitet, als solche identifiziert werden kann, wenn sie der eindimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

genügt.

Die im letzten Abschnitt eingeführten mehrdimensionalen Wellen müssen also entsprechend eine auf mehrere Dimensionen erweiterte Wellengleichung erfüllen.
Die **dreidimensionale Erweiterung der Wellengleichung** lautet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \, \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Der Klammerausdruck läßt sich mit Hilfe des <u>LAPLACE – Operators</u>

$$\Delta = div\, grad = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

kürzer schreiben als

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \, \Delta u}$$ <u>dreidimensionale Wellengleichung</u>

2.9 Schwingungen und stehende Wellen in mehreren Dimensionen

Mehrdimensionale Schwingungen

Wir wollen uns in diesem Abschnitt mit zweidimensionalen Schwingungen beschäftigen.

Dazu sei als einfaches Beispiel ein Körper der Masse m betrachtet, der an Federn mit unterschiedlichen Federkonstanten D_x, D_y in der x, y – Ebene frei beweglich aufgehängt ist (siehe Abb. 2.39). Die Bewegung des Körpers in der Aufhängungsebene ergibt sich aus der Überlagerung der Schwingungen in x – und y – Richtung.

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos \omega_1 t \\ y(t) &= A \cos(\omega_2 t - \varphi) \end{aligned}$$

Die Bahnkurve, welche der Massenmittelpunkt des Körpers beschreibt, ist

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \;\; |\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

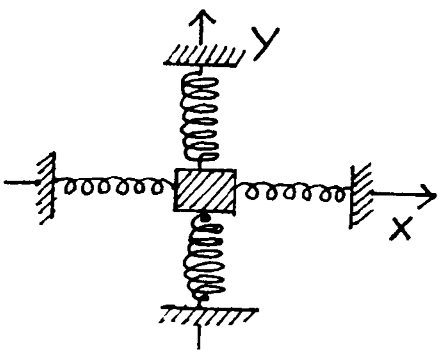


Abbildung 2.39: *Feder–Masse–Modell für eine zweidimensionale Schwingung*

Dabei ist $\vec{r} = \binom{x}{y}$ der Ortsvektor des Massenmittelpunktes.

Wählt man die Frequenzen ω_1 und ω_2 so, daß der Körper gleichzeitig n Schwingungen der Frequenz ω_1 in x – Richtung und m Schwingungen der Frequenz ω_2 in y – Richtung ausführt, wobei n und m ganze Zahlen sind, so kehrt das System jeweils nach Beendigung dieser Schwingungen in den Ausgangszustand zurück, und der Vorgang beginnt von neuem.
Bei einem ganzzahligen bzw. rationalen Frequenzverhältnis $\omega_1/\omega_2 = n/m \Leftrightarrow n\omega_1 = m\omega_2$ erhält man also ein stationäres Bild, d.h. die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ ändert sich nicht und wird periodisch durchlaufen.

Lissajous – Figuren

Die sich bei der Überlagerung zweier senkrecht zueinander verlaufender Schwingungen mit ganzzahligem Frequenzverhältnis ergebenden Bahnkurven heißen **Lissajous – Figuren**. Sie sind benannt nach dem franz. Physiker J.Lissajous, der als erster die zweidimensionale Schwingung eines Körpers untersuchte.

Versuch: Mechanische Erzeugung von Lissajous – Figuren mit Hilfe zweier Pendel
Die Überlagerung zweier Pendelschwingungen wird auf einem Oszilloskop dargestellt. Dabei verursacht die Schwingung jeweils eines Pendels die x – bzw. y – Ablenkung des Kathodenstrahls.

a) Für $\boxed{\omega_1 = \omega_2}$,
d.h. bei Verwendung gleich langer Pendel, entstehen elliptische Figuren:

Wir wollen hier je nach der Phase der Pendelanregung sowie nach dem Amplitudenverhältnis auf folgende Unterfälle näher eingehen:

$\underline{\underline{A = B}}$:

$\underline{\varphi = 0°}$:

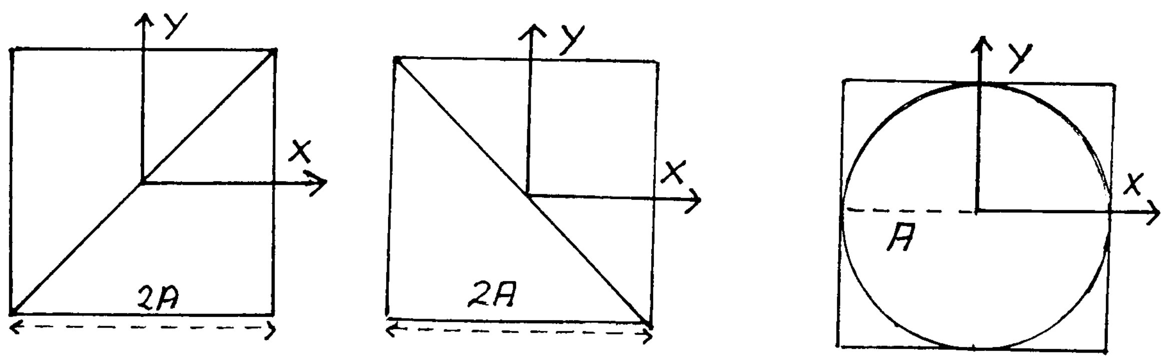
$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& A\cos\omega t \\ y &=& A\cos\omega t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\textbf{Gerade}\\ y = x\end{array}$$

$\underline{\varphi = 180°}$:

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& A\cos\omega t \\ y &=& A\cos(\omega t - \pi) \\ &=& -A\cos\omega t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\textbf{Gerade}\\ y = -x\end{array}$$

$\underline{\varphi = 90°}$:

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& A\cos\omega t \\ y &=& A\cos(\omega t - \pi/2) \\ &=& A\sin\omega t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\textbf{Kreis}\\ y^2 + x^2 = A^2\end{array}$$



$\underline{\underline{A \neq B}}$:

$\underline{\varphi = 0°}$:

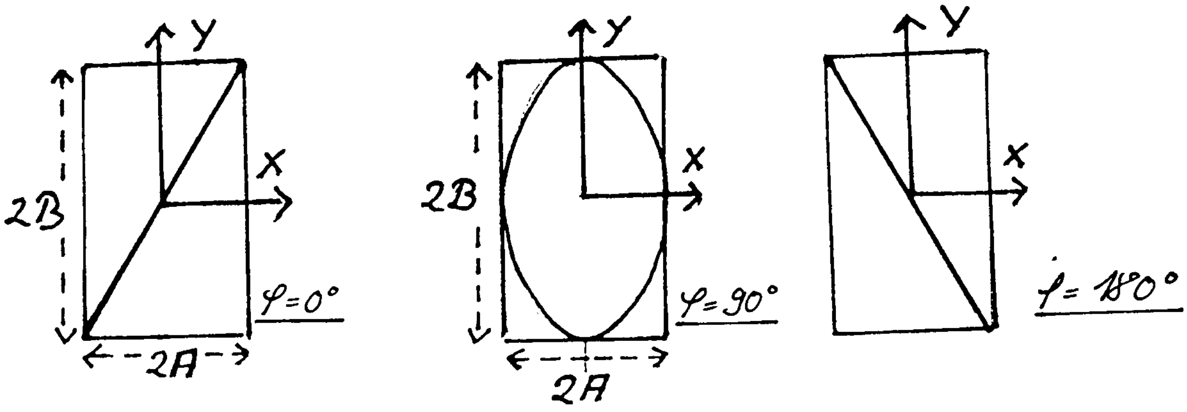
$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& A\cos\omega t \\ y &=& B\cos\omega t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\textbf{Gerade}\\ y = +\frac{B}{A}x\end{array}$$

$\underline{\varphi = 180°}$:

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& A\cos\omega t \\ y &=& -B\cos\omega t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\textbf{Gerade}\\ y = -\frac{B}{A}x\end{array}$$

$\underline{\varphi = 90°}$:

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& A\cos\omega t \Leftrightarrow \frac{x}{A} = \cos\omega t \\ y &=& B\sin\omega t \Leftrightarrow \frac{y}{B} = \sin\omega t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\textbf{Ellipse}\\ \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1\end{array}$$



Überlagert man also zueinander senkrecht verlaufende Schwingungen, deren Frequenzen übereinstimmen, so entstehen Ellipsen einschließlich deren Entartungen in Kreise und Geraden.

b) Im Fall $\boxed{\omega_1 \neq \omega_2}$,
hier bei Verwendung verschieden langer Pendel, tritt nur dann eine geschlossene Bahnkurve, d.h. ein stationäres Bild auf, wenn das Frequenzverhältnis ω_1/ω_2 rational ist. Die entstehenden Figuren sind von wesentlich komplizierterer Struktur als im obigen Fall.

Versuch: Elektrische Erzeugung von Lissajous – Figuren mit Hilfe zweier Frequenzgeneratoren
Je ein Frequenzgenerator wird mit der horizontalen bzw. vertikalen Ablenkung des Kathodenstrahloszillographen verbunden. Durch Einstellung ganzzahliger Frequenzverhältnisse sowie Regelung der Amplituden (Spannung) lassen sich Lissajous – Figuren herstellen.

Stehende Wellen in mehreren Dimensionen

Eindimensionale stehende Wellen

Als Beispiel für eindimensionale transversale stehende Wellen haben wir die Eigenschwingungen einer Saite besprochen.

Zweidimensionale stehende Wellen

Das zweidimensionale Analogon zur Saite ist die eingespannte Membran, welche zu Eigenschwingungen angeregt wird. Ein Anwendungsbeispiel ist die Trommel.
Die Eigenschwingungen sind auch hier Vorgänge mit Knoten und Bäuchen der Bewegung, wobei die Knoten sogenannte **Knotenlinien** bilden, welche die Zonen der Bewegung voneinander trennen.

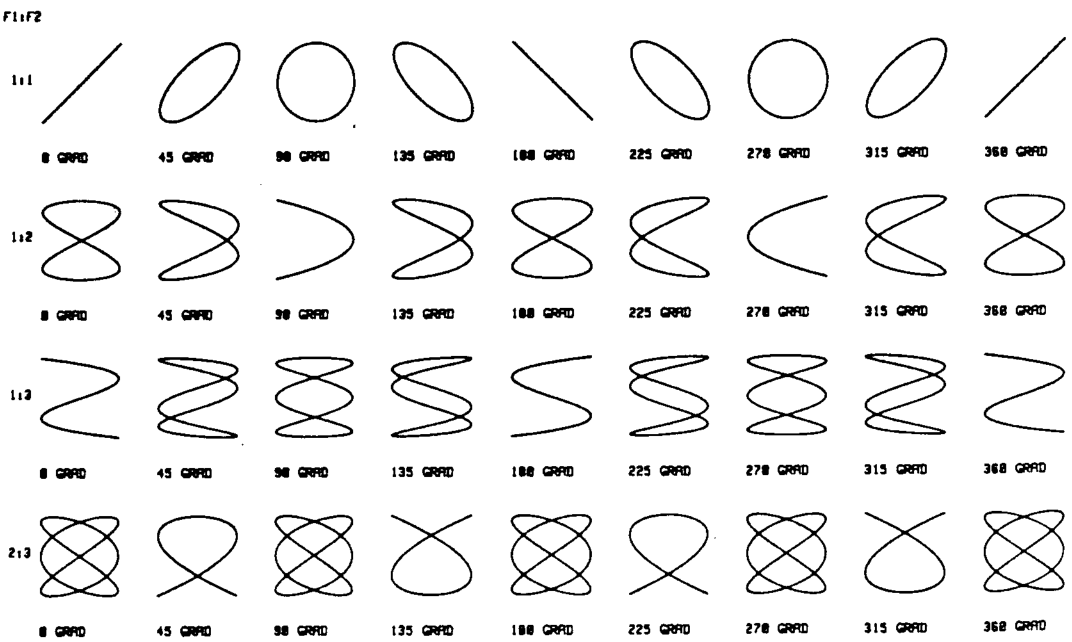


Abbildung 2.40: *Lissajous–Figuren unterschiedlicher Phasenlage für die Frequenzverhältnisse 1:1, 1:2, 1:3 und 2:3. (aus [14])*

Der Physiker E.F.F.Chladni (1756 – 1827) hat in dem im folgenden beschriebenen Versuch die Knotenlinien sichtbar gemacht. Die resultierenden Figuren werden nach ihm als **Chladnische Klangfiguren** bezeichnet.

Versuch: Chladnische Klangfiguren
Eine im Zentrum eingespannte Metallplatte mit aufgestreutem Schwefelstaub wird durch Anstreichen mit einem Cellobogen zu Eigenschwingungen angeregt. Durch die starke Vibration wird der Schwefelstaub von den Schwingungsbauchflächen weggetrieben und sammelt sich an den Knotenlinien an. Je nach Ordnung der Eigenschwingung und Geometrie der Platte entstehen verschiedene Staubkurven (siehe Abb. 2.41).

Stehende Wellen im Dreidimensionalen

Auch ein Raum besitzt Eigenfrequenzen. Beispielsweise versucht man in Konzertsälen das Auftreten von stehenden Wellen zu vermeiden, indem man die Reflexion an den Wänden möglichst gering hält. Dies wurde beim Bau des neuen Plenarsaales des Deutschen Bundestages in Bonn versäumt!

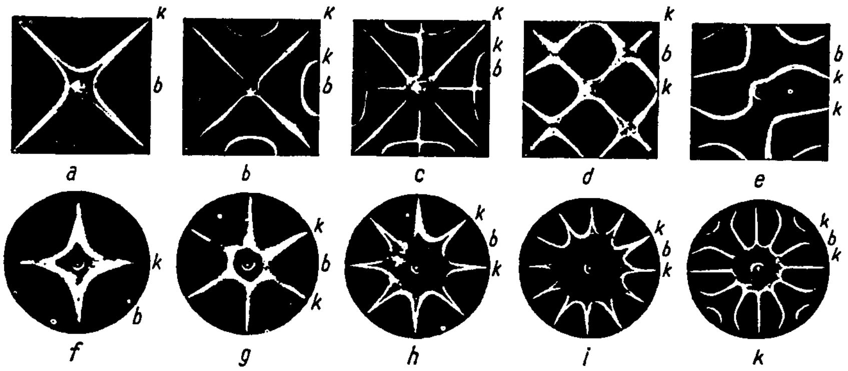


Abbildung 2.41: *Chladnische Klangfiguren (aus [2])*

2.10 Doppler – Effekt

Bewegen sich der Sender einer Welle sowie ein Beobachter relativ zueinander, so registriert der Beobachter eine Frequenz ν_{B}, welche sich von der Schwingungsfrequenz der Quelle ν_{Q} unterscheidet. Diese Frequenzverschiebung kann man z.B. im Straßenverkehr beobachten, wenn ein Wagen mit Alarmsignal vorbeifährt. Nähert sich der Wagen einem Beobachter, so nimmt dieser eine höhere Frequenz wahr, die Tonhöhe des Signals erniedrigt sich, sobald sich der Wagen vom Beobachter entfernt. Die Originalfrequenz wird nur in dem Moment wahrgenommen, in dem sich Beobachter und Sender auf gleicher Höhe befinden.

Versuch: Eine Schallquelle (Summer) wird an einem Faden befestigt und im Kreis herumgeschleudert. Der Beobachter hört einen auf – oder abschwellenden Ton, je nach dem, ob die Bewegung des Summers in Richtung auf ihn zu oder von ihm weg erfolgt.

Dieser Effekt wurde für Schallwellen erstmals im Jahre 1842 von Ch.Doppler beschrieben und heißt daher **Doppler – Effekt**.

Zur Erklärung betrachten wir eine punktförmige Schallquelle, welche Kugelwellen aussendet oder einen punktförmigen Erreger, welcher auf einer Wasseroberfläche Kreiswellen erzeugt. Schließen wir das Auftreten von Dispersion aus, so pflanzen sich die Wellen im jeweiligen Medium mit $v_{gr} = v_{ph} = v_{\mathrm{W}} = \lambda\,\nu$ fort (siehe Abb. 2.42). Wir unterscheiden nun drei Fälle der Bewegung von Quelle und Beobachter relativ zum Übertragungsmedium, in dem sich die Wellen ausbreiten:

(1) Die Quelle bewegt sich mit v_{Q}, der Beobachter ruht:

Die Quelle bewegt sich mit v_{Q}, d.h. während einer Periode $T = 1/\nu$ der Welle legt sie die Strecke $s = v_{\mathrm{Q}}\,T = v_{\mathrm{Q}}/\nu$ zurück. Die Wellenfronten bewegen sich in derselben Zeit um $\lambda = v_{\mathrm{W}}\,T = v_{\mathrm{W}}/\nu$.

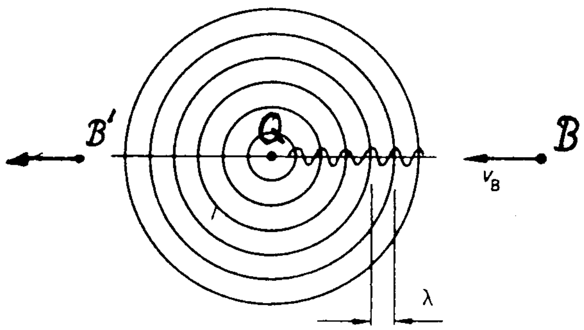


Abbildung 2.42: *Fall 2: Ruhende Schallquelle, bewegter Beobachter. (aus [14])*

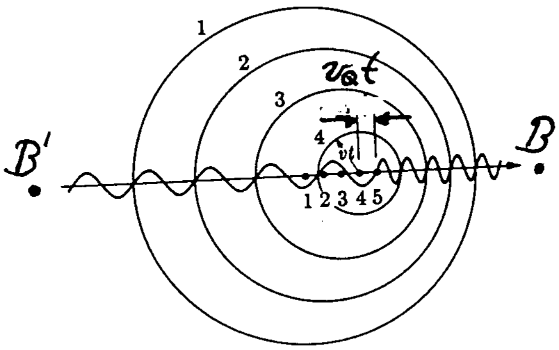


Abbildung 2.43: *Fall 1: Bewegte Schallquelle, ruhender Beobachter. (aus [14])*

Den Beobachter B, auf den sich der Sender zubewegt, erreichen die Wellenfronten im Abstand

$$\lambda_{\mathrm{B}} = \lambda - s = v_{\mathrm{W}} T - v_{\mathrm{Q}} T \;\Leftrightarrow\; \lambda_{\mathrm{B}} = (v_{\mathrm{W}} - v_{\mathrm{Q}})\, T$$

Beim Beobachter B′, von dem sich die Quelle entfernt, treffen die Wellenfronten im Abstand

$$\lambda_{\mathrm{B'}} = (v_{\mathrm{W}} + v_{\mathrm{Q}})\, T$$

ein.
Die Anzahl der Wellenfronten, die pro Sekunde auf ihn zulaufen, bestimmt die vom jeweiligen Beobachter wahrgenommene Frequenz.

$$\nu_{\mathrm{B}} = \frac{v_{\mathrm{W}}}{\lambda_{\mathrm{B}}} = \frac{v_{\mathrm{W}}}{v_{\mathrm{W}} - v_{\mathrm{Q}}}\,\frac{1}{T} \qquad \nu_{\mathrm{B'}} = \frac{v_{\mathrm{W}}}{\lambda_{\mathrm{B'}}} = \frac{v_{\mathrm{W}}}{v_{\mathrm{W}} + v_{\mathrm{Q}}}\,\frac{1}{T}$$

Bezeichnet ν die Qriginalfrequenz, so ergeben sich folgende

Doppler – Frequenzen für die Bewegung der Quelle mit v_{Q}

auf den Beobachter zu	vom Beobachter weg
$\boxed{\nu_{\mathrm{B}} = \frac{v_{\mathrm{W}}}{v_{\mathrm{W}} - v_{\mathrm{Q}}}\,\nu}$	$\boxed{\nu_{\mathrm{B'}} = \frac{v_{\mathrm{W}}}{v_{\mathrm{W}} + v_{\mathrm{Q}}}\,\nu}$

(2) Der Beobachter bewegt sich mit v_{B}, die Quelle ruht:

Bewegt sich der Beobachter mit v_{B} auf die Quelle zu (siehe Abb. 2.42), so registriert er die Wellenfronten in schnellerer Folge als beim Stillstand. Die Wellenflächen scheinen mit der Geschwindigkeit $v_{\mathrm{W}} + v_{\mathrm{B}}$ auf ihn zu zu kommen, d.h. er hört die Frequenz

$$\tilde{\nu}_{\mathrm{B}} = \frac{v_{\mathrm{W}} + v_{\mathrm{B}}}{\lambda}$$

Analog nimmt er bei Bewegung von der Quelle weg die Frequenz

$$\tilde{\nu}_{\mathrm{B}'} = \frac{v_{\mathrm{W}} - v_{\mathrm{B}}}{\lambda}$$

wahr. Mit $v_{\mathrm{W}} = \lambda\,\nu \Leftrightarrow 1/\lambda = \nu/v_{\mathrm{W}}$ erhält man die

Doppler – Frequenzen für die Bewegung des Beobachters mit v_{B}

auf die Quelle zu	von der Quelle weg
$\boxed{\tilde{\nu}_{\mathrm{B}} = \nu \left(\frac{v_{\mathrm{W}} + v_{\mathrm{B}}}{v_{\mathrm{W}}}\right)}$	$\boxed{\tilde{\nu}_{\mathrm{B}'} = \nu \left(\frac{v_{\mathrm{W}} - v_{\mathrm{B}}}{v_{\mathrm{W}}}\right)}$

(3) Beobachter und Quelle bewegen sich:

Falls sich sowohl der Beobachter als auch die Quelle relativ zum Übertragungsmedium bewegen, treten je nach Bewegungsrichtung unterschiedliche Frequenzverschiebungen auf. Die möglichen Fälle sind in der folgenden Tabelle schematisch dargestellt:

Bewegungsrichtungen	Doppler – Frequenz
Q• $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ •B	$\nu_{\mathrm{B}} = \frac{v_{\mathrm{W}} + v_{\mathrm{B}}}{v_{\mathrm{W}} - v_{\mathrm{Q}}}\,\nu$
$\longleftarrow$ •Q $\longleftarrow$ •B	$\nu_{\mathrm{B}} = \frac{v_{\mathrm{W}} + v_{\mathrm{B}}}{v_{\mathrm{W}} + v_{\mathrm{Q}}}\,\nu$
Q• $\longrightarrow$ B′• $\longrightarrow$	$\nu_{\mathrm{B}'} = \frac{v_{\mathrm{W}} - v_{\mathrm{B}}}{v_{\mathrm{W}} - v_{\mathrm{Q}}}\,\nu$
$\longleftarrow$ •Q B′• $\longrightarrow$	$\nu_{\mathrm{B}'} = \frac{v_{\mathrm{W}} - v_{\mathrm{B}}}{v_{\mathrm{W}} + v_{\mathrm{Q}}}\,\nu$

(4) Allgemeiner Fall: Bewegung von Quelle und Beobachter in beliebige Richtungen:

Bewegen sich Quelle und Beobachter mit $\vec{v}_{\mathrm{Q}}$ und $\vec{v}_{\mathrm{B}}$ relativ zueinander in beliebige Richtungen, so hängt die beobachtete Frequenz ν_{B} nur von den Geschwindigkeitskomponenten längs des Verbindungsvektors $\vec{r} = \vec{\mathrm{QB}}$ ab. Die **Doppler – Frequenz** ist hier gegeben durch (vergl. Abb. 2.44)

$$\boxed{\nu_{\mathrm{B}} = \nu\,\frac{v_{\mathrm{W}} - \vec{v}_{\mathrm{B}}\,\frac{\vec{r}}{r}}{v_{\mathrm{W}} - \vec{v}_{\mathrm{Q}}\,\frac{\vec{r}}{r}} = \nu\,\frac{v_{\mathrm{W}} - v_{\mathrm{B}}\,\cos\vartheta_{\mathrm{B}}}{v_{\mathrm{W}} - v_{\mathrm{Q}}\,\cos\vartheta_{\mathrm{Q}}}}$$

Der an Schallwellen beobachtete Effekt wird auch als **nicht–relativistischer Dopplereffekt** bezeichnet.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schallwellen ist auf das als ruhend definierte Übertragungsmedium bezogen. Es besteht daher die Möglichkeit, aus der bloßen Kenntnis der

Relativgeschwindigkeit von Sender und Empfänger über die Messung der Dopplerfrequenz ν_B zu entscheiden, ob sich die Quelle Q oder der Beobachter B bewegt.

Dies soll an einem Beispiel nachgewiesen werden:

Die Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger sei v_{rel}.
Bewegt sich die Quelle auf den ruhenden Beobachter zu, so beträgt die Frequenzverschiebung

$$\nu_B = \nu \frac{v_W}{v_W - v_{rel}} = \nu \left(\frac{1}{1 - v_{rel}/v_W} \right) = \nu \left(1 + \frac{v_{rel}}{v_W} + \left(\frac{v_{rel}}{v_W} \right)^2 + \cdots \right)$$

Nähert sich der Beobachter der ruhenden Quelle, dann mißt man die Dopplerfrequenz

$$\tilde{\nu}_B = \nu \left(1 + \frac{v_{rel}}{v_W} \right)$$

Die bei Bewegung der Quelle beobachtete Frequenz ν_B stimmt nur bis zur ersten Ordnung mit dem Ergebnis $\tilde{\nu}_B$ bei Bewegung des Beobachters überein. Daher kann man bei bekannter Relativgeschwindigkeit von der gemessenen Frequenzänderung auf die vorliegende Bewegung schließen.

Machscher Kegel (E.Mach 1838 – 1916)

Was passiert, wenn sich die Quelle mit Überschallgeschwindigkeit $v_Q > v_W$ bewegt?

Die folgende Abbildung zeigt das Wellenfeld, das um eine bewegte Quelle entsteht: Mit zunehmender Geschwindigkeit der Quelle rücken die Wellenflächen in Bewegungsrichtung der Quelle immer dichter zusammen, bis sie schließlich für $v_Q = v_W$ alle durch einen Punkt verlaufen und die Einhüllende wie eine ebene Wand aussieht (siehe [b]). Durchstößt der Sender diese "Schallmauer" und fliegt mit Überschallgeschwindigkeit, dann interferieren die Wellenflächen konstruktiv auf einem Kegelmantel. Es bildet sich eine Kopfwelle

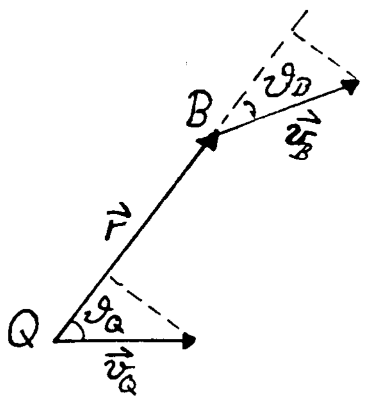


Abbildung 2.44: *Bewegung von Quelle und Beobachter in beliebige Richtungen*

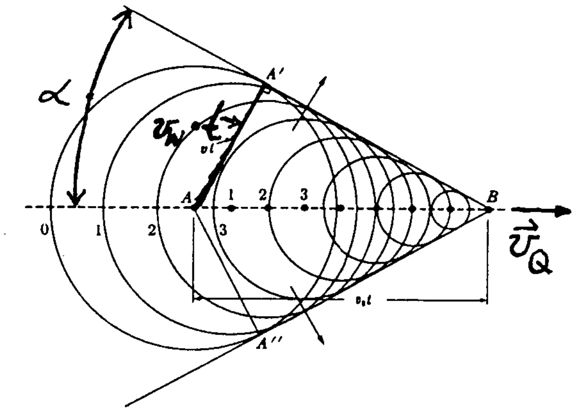


Abbildung 2.45: *Ausbildung eines Machschen Kegels (aus [1])*

mit kegelförmiger Wellenfront aus, welche als **Machsche Welle** oder **Machscher Kegel** bezeichnet wird.

Die Öffnung des Kegels ist dabei gegeben durch

$$\sin\alpha = \frac{v_W\, t}{v_Q\, t} \qquad \alpha\text{: halber Öffnungswinkel}$$

Dabei ist $v_Q\, t$ der Weg der Quelle und $v_W\, t$ die Strecke, die der Schall in der Zeit t zurücklegt.

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{v_W}{v_Q}} \qquad \text{Öffnungswinkel des MACHschen Kegels}$$

Man führt die **Machsche Zahl** als vergleichende Geschwindigkeitsangabe ein:

$$M = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{v_Q}{v_W} \qquad \text{Bsp.: Mach 2 = zweifache Schallgeschwindigkeit}$$

Da sich auf dem Kegelmantel die Druckerhöhungen der Luftmoleküle addieren, hört ein Beobachter, über den diese Druckfront hinwegzieht, einen explosionsartigen Knall. Dieser sogenannte Überschallknall tritt auf bei schnelleren Geschossen und Überschallflugzeugen.

Bei Wasserwellen läßt sich ebenfalls eine Kopfwelle erzeugen, indem das Erregungszentrum mit $v_Q > v_W$ bewegt wird. Man spricht hier von einer Bugwelle. Diese bildet sich auch dann aus, wenn sich ein Hindernis an der Wasseroberfläche bewegt (Bsp.: Entstehung einer Bugwelle an einem Schiff).

Versuch: Ein punktförmiger Erreger wird schnell durch die Wellenwanne gezogen. Der Vorgang wird gefilmt und anschließend der MACHsche Kegel im Standbild gezeigt.

Zusammenfassung: Die Störungsfronten bauen einen MACHschen Kegel auf, wenn ein Körper mit $v_Q > v_W$ durch ein beliebiges Medium fortschreitet. Diese Tatsache nutzt man u.a. bei der CERENKOV – Strahlung aus, wie wir später sehen werden.

2.11 Doppler – Effekt für Lichtwellen im Vakuum

Anders als bei den Schallwellen ist die Ausbreitung von Licht nicht an ein Übertragungsmedium (Äther) gebunden. Es ist hier kein ruhendes Bezugssystem ausgezeichnet, relativ zu dem die Lichtwellen eine bestimmte Geschwindigkeit besitzen. Die Doppler – Verschiebung der Frequenz hängt daher nur von der Relativgeschwindigkeit v von Sender und Empfänger zueinander ab.

Die Lichtquelle L ruhe im Ursprung des Systems S. Der Beobachter B ruhe im Ursprung des Systems S′, welches sich mit v relativ zu S längs der x – Richtung bewege. Zum Zeitpunkt $t = 0$ fallen beide Systeme zusammen. Wir betrachten nun zwei Lichtsignale,

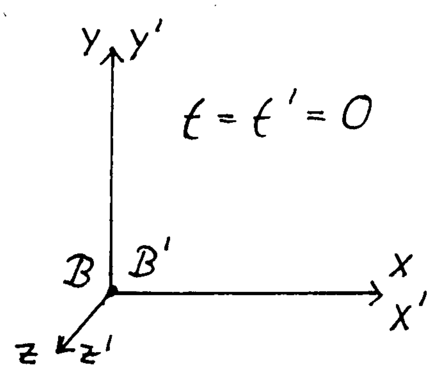


Abbildung 2.46: *Zur Zeit $t = 0$ fallen die Bezugssysteme zusammen. (aus [15])*

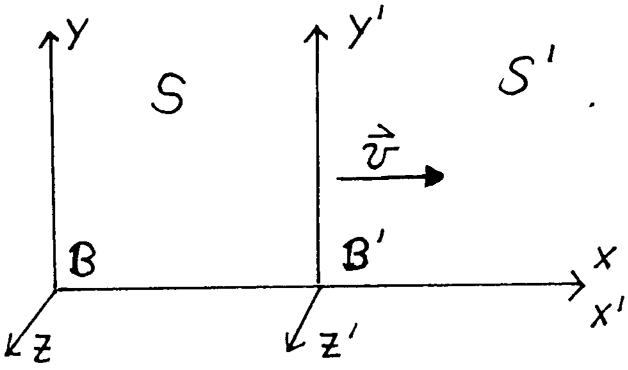


Abbildung 2.47: *Die Bezugssysteme bewegen sich längs der x–Achse relativ zueinander mit der Geschwindigkeit v. (aus [15])*

harmonische Schwingungen, welche im Abstand einer Schwingungsdauer T von L emittiert werden:

Zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ wird das erste Signal ausgesendet und gleichzeitig empfangen. Quelle und Beobachter befinden sich am selben Ort $x = x' = 0$.

Bei $t = T$ wird das zweite Signal emittiert, also im System S′ zur Zeit

$$t' = \frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{mit} \quad \beta = \frac{v}{c} \ .$$

Die Quelle L, die bezüglich des Systems S die Ortskoordinate $x = 0$ besitzt, hat im Augenblick der Aussendung des zweiten Signals vom Beobachter B bezüglich des Systems

S′ die Entfernung

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \overset{x = 0\,,\, t = T}{\Longrightarrow} \quad x' = -\frac{v\,T}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Die Laufzeit des Signals beträgt demnach $\Delta t' = -x'/c$, so daß es den Beobachter B in S′ zur Zeit

$$T' = t' + \Delta t' = t' - \frac{x'}{c}$$

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{v\,T}{c\,\sqrt{1-\beta^2}} = T\,\frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = T\,\frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1-\beta}}$$

erreicht. Der Empfänger nimmt also eine harmonische Schwingung der Schwingungsdauer T' wahr. Mit $\nu = 1/T$ erhält man die entsprechenden

Doppler – Frequenzen für die Bewegung von Lichtquelle L und Beobachter B mit der Relativgeschwindigkeit v

voneinander weg	aufeinander zu
$\boxed{\tilde{\nu} = \nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}}$	$\boxed{\tilde{\nu} = \nu\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}}$

Kapitel 3

Elektromagnetische Wellen

Die seit Ende des 19.Jahrhunderts entdeckten und weiterentwickelten Kenntnisse über elektromagnetische Wellen bilden u.a. die Grundlage für die Entstehung und den Fortschritt des Kommunikationswesens. Die Forschungen über die Erzeugung, Ausbreitung und Absorption elektromagnetischer Wellen sind daher von großer Wichtigkeit.

Der Formulierung der Wellengleichung für elektromagnetische Wellen sei zum besseren Verständnis eine kurze Wiederholung der Maxwell – Theorie vorangestellt, welche bereits im vorigen Semester behandelt wurde.

3.1 Die Maxwell – Gleichungen

Zu der Erschließung des sehr weitreichenden Gebietes der elektromagnetischen Erscheinungen hat J.C.Maxwell (1857 – 1894) in besonderem Maße beigetragen.
Lange Zeit wurde kein Zusammenhang zwischen den Gebieten Elektrizität, Magnetismus und der klassischen Optik gesehen. Erst 1819/20 entdeckte der dänische Physiker H.C.Oerstedt (1777 – 1851) die Beeinflussung eines Magneten durch elektrischen Strom und wurde damit zum Begründer des Elektromagnetismus. Weitergehende Erkenntnisse lieferten später A.M.Ampére (1775 – 1836) und M.Faraday (1791 – 1879) durch zahlreiche Experimente. Ampére stellte das Durchflutungsgesetz auf, welches besagt, daß alle magnetischen Kräfte ihren Ursprung in bewegten Ladungen haben. Umgekehrt formulierte Faraday in seinem Induktionsgesetz, daß die zeitliche Änderung eines magnetischen Feldes eine elektrische Spannung hervorruft. Faraday war es auch, der 1845 einen Zusammenhang zwischen Elektromagnetismus und Licht fand. Er beobachte in einem Experiment eine Drehung der Polaristionsrichtung von Licht, hervorgerufen durch ein starkes Magnetfeld. Maxwells großartige Leistung besteht darin, daß es ihm gelang, alle damaligen auf empirischer Basis gewonnenen Kenntnisse über den Elektromagnetismus in nur vier Gleichungen formal zusammenzufassen. Aus diesen Gleichungen folgerte er 1861/62 rein theoretisch die Existenz elektromagnetischer Wellen! Er zeigte die Transversalität dieser Wellen. Darüberhinaus zog er aus den empirischen Untersuchungen seiner Zeit und seinen eigenen theoretischen Berechnungen die Schlußfolgerung, daß "Licht" eine elektromagnetische Wellenerscheinung darstellt! Dies war zugleich die Erkenntnis, daß

die Elektrodynamik das Gebiet der klassischen Optik mit umfaßt. Maxwell wurde zum Begründer der elektromagnetischen Lichttheorie. Er starb acht Jahre bevor seine theoretischen Überlegungen experimentell bestätigt wurden.

Die **Maxwellschen Gleichungen**, welche das gesamte Gebiet der elektromagnetischen Vorgänge vollständig beschreiben, seien hier noch einmal in ihrer differentiellen und integralen Form aufgeführt:

Maxwellsche Gleichungen	
differentiell	*integral*
(1) $div\,\vec{D} = \varrho_{frei}$	$\oint \vec{D}\,d\vec{A} = Q_{frei}$
(2) $div\,\vec{B} = 0$	$\oint \vec{B}\,d\vec{A} = 0$
(3) $rot\,E = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint \vec{E}\,d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}\,d\vec{A}$
(4) $rot\,\vec{H} = j_{frei} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint \vec{H}\,d\vec{r} = I_{frei} + \frac{\partial}{\partial t}\int \vec{D}\,d\vec{A}$

mit den Materialgleichungen
$\vec{D} = \varepsilon_0\,\vec{E} + \vec{P}$
$\vec{B} = \mu_0\,\vec{H} + \mu_0\,\vec{M}$

Wir wollen nun die Gleichungen nur mit den Größen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ formulieren und jeweils die zugehörige Interpretation angeben:

Maxwellgleichung	Bedeutung
(1) $div\,\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$	*Alle* Ladungen, d.h. freie und gebundene Ladungen ($\varrho = \varrho_{frei} + \varrho_{geb.}$) sind Quellen des $\vec{E}$ – Feldes.
(2) $div\,\vec{B} = 0$	Das $\vec{B}$ – Feld ist quellenfrei. Es existieren keine magnetischen Monopole.
(3) $rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Verallgemeinerung des Faradayschen Induktionsgesetzes: Jedes zeitlich sich ändernde $\vec{B}$ – Feld erzeugt ein $\vec{E}$ – Wirbelfeld.
(4) $rot\,\vec{B} = \mu_0\,j + \mu_0\,\varepsilon_0\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	Allgemeine Formulierung des Ampéreschen Gesetzes: *Alle* Ströme und die zeitliche Änderung des elektrischen Feldes (Änderung des Verschiebungsstromes) erzeugen ein magnetisches Wirbelfeld.

Wie gelangte MAXWELL zu der Erkenntnis, daß sich $\vec{E}$ – und $\vec{B}$ – Felder in Form von Wellen im Raum ausbreiten können?

Wir betrachten den Fall, daß keine Ladungen oder Ströme auftreten: $\varrho = j = 0$. Dann gilt

$$\boxed{rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad rot\,\vec{B} = \mu_0\,\varepsilon_0\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

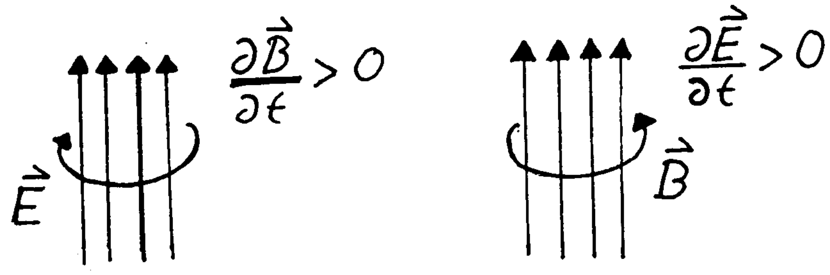


Abbildung 3.1: *Gegenseitige Erzeugung von elektrischen und magnetischen Wirbelfeldern*

Aufgrund der Existenz des Verschiebungsstromes bilden sich in diesem Fall elektromagnetische Wellen aus! Änderungen des Verschiebungsstromes $\partial\vec{E}/\partial t$ führen zur Entstehung eines magnetischen Wirbelfeldes. Das sich aufbauende Magnetfeld $\partial\vec{B}/\partial t$ erzeugt umgekehrt ein elektrisches Wirbelfeld und der Vorgang wiederholt sich (siehe Abb. 3.1). Die sich gegenseitig erzeugenden Felder breiten sich im Raum aus. Dabei wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit bestimmt durch die elektrischen und magnetischen Eigenschaften des Mediums:

$$\mu_0\,\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \qquad \text{(im Vakuum)}$$

3.2 Wellengleichung für elektromagnetische Wellen

Wir nehmen an, daß auf irgendeine Weise, z.B. durch Bewegung von Ladungen oder Änderung von Strömen schnell veränderliche $\vec{E}$ – oder $\vec{B}$ – Felder entstehen. Nach den MAXWELL – Gleichungen werden sich dann gegenseitig abwechselnd $\vec{E}$ – und $\vec{B}$ – Felder erzeugen. Wir wollen nun ein solches <u>elektromagnetisches Feld</u> weit entfernt von seiner Quelle im <u>Vakuum</u> untersuchen, d.h. in dem betrachteten Bereich soll gelten:

$$div\vec{E} = 0 \qquad div\vec{B} = 0$$

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad rot\vec{B} = \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Zur Vereinfachung führen wir den **Differentialoperator "Nabla"** ein.

$$\vec{\nabla} \equiv \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,,\, \frac{\partial}{\partial y}\,,\, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Der Nablaoperator ist ein Vektor; der Vektorpfeil wird jedoch oft, wie auch hier, zur Vereinfachung weggelassen.

Die Differentialoperatoren *div*, *rot* und *grad* lassen sich mit ∇ einfacher schreiben (zur Verdeutlichung wird das Skalarprodukt mit $*$ bezeichnet):

$\underline{\underline{grad\,\varphi}}$:

$$grad\,\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi\,,\, \frac{\partial}{\partial y}\varphi\,,\, \frac{\partial}{\partial z}\varphi\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,,\, \frac{\partial}{\partial y}\,,\, \frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi$$

$$\boxed{grad\,\varphi \equiv \nabla\varphi}$$

$\underline{\underline{div\vec{E}}}$:

$$div\vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}E_x + \frac{\partial}{\partial y}E_y + \frac{\partial}{\partial z}E_z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,,\, \frac{\partial}{\partial y}\,,\, \frac{\partial}{\partial z}\right) * \left(E_x\,,\, E_y\,,\, E_z\right)$$

$$\boxed{div\vec{E} \equiv \nabla * \vec{E}}$$

$\underline{\underline{rot\vec{E}}}$:

$$rot\vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial y}E_z - \frac{\partial}{\partial z}E_y\,,\, \frac{\partial}{\partial z}E_x - \frac{\partial}{\partial x}E_z\,,\, \frac{\partial}{\partial x}E_y - \frac{\partial}{\partial y}E_x\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,,\, \frac{\partial}{\partial y}\,,\, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(E_x\,,\, E_y\,,\, E_z\right)$$

$$\boxed{rot\vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E}}$$

LAPLACE – Operator:

Für ein skalares Feld φ gilt:

$$\Delta\varphi = div\,grad\,\varphi = \nabla * (\nabla\varphi)$$

Damit erhält man für den LAPLACE – Operator "Delta":

$$\Delta\varphi = \nabla * (\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi$$

$$\boxed{\Delta\varphi = \nabla * \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

Der LAPLACE – Operator kann auch auf ein Vektorfeld $\vec{A}$ (z.B. $\vec{E}$ –, $\vec{B}$ – Feld) angewendet werden. Dann gilt

$$\Delta\vec{A} = \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial z^2}$$

Mit den Methoden der Vektoranalysis läßt sich dies umschreiben zu

$$\Delta\vec{A} = grad\, div\vec{A} - rot\, rot\vec{A}$$
$$\boxed{\Delta\vec{A} = \nabla \left(\nabla * \vec{A}\right) - \nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right)} \qquad (*)$$

Mit diesen Operatoren lauten die MAXWELL – Gleichungen für das Vakuum

$$\boxed{\begin{array}{ll} \nabla * \vec{E} = 0 & \nabla * \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{array}}$$

Wir leiten nun aus den MAXWELL – Gleichungen die dreidimensionale Wellengleichung für den Vektor $\vec{E}$ her, indem wir $\vec{B}$ eliminieren:

$$\nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Partielles Differenzieren nach t ergibt

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{B}\right) = \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$
$$\nabla \times \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

In diese Gleichung setzen wir $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ ein und erhalten

$$-\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Mit Hilfe der für die Anwendung des LAPLACE – Operators auf ein Vektorfeld gefundenen Beziehung $(*)$ wird dies umgewandelt in

$$\Delta\vec{E} - \nabla\left(\nabla * \vec{E}\right) = \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Im Vakuum gilt $\nabla * \vec{E} = 0$. Damit ergibt sich

$$\boxed{\Delta\vec{E} = \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}}$$ <u>dreidimensionale Wellengleichung für das $\vec{E}$ – Feld</u>

Jede einzelne Komponente des $\vec{E}$ – Vektors erfüllt die Wellengleichung

$$\begin{aligned}\Delta E_x &= \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}\\ \Delta E_y &= \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}\\ \Delta E_z &= \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}\end{aligned}$$

Ebenso hätte man aus den MAXWELL – Gleichungen auch die Größe $\vec{E}$ eliminieren können. Insgesamt erhält man also

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\vec{B} &= \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\\ \Delta\vec{E} &= \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\end{aligned}\qquad \text{Wellengleichungen für die } \vec{E} \text{ – und } \vec{B} \text{ – Felder}}$$

Aus

$$\Delta\vec{E}\left[\vec{B}\right] = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2\vec{E}\left[\vec{B}\right]}{\partial t^2}$$

folgt für die Phasengeschwindigkeit, mit der sich elektromagnetische Wellen im Vakuum ausbreiten

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\,\mu_0}}}$$

Phasengeschwindigkeit
einer elektromagnetischen Welle
im Vakuum

Nun ist
$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= 8,8542\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}}\\ \mu_0 &= 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}}\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\quad v = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\,\mu_0}} = 299\,700\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \simeq 300\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \simeq c\,!$$

Die Phasengeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle im Vakuum stimmt überein mit der Geschwindigkeit c von Licht im Vakuum, die in zahlreichen Experimenten ermittelt wurde!

Bei der Erscheinung **"Licht"** handelt es sich also um **elektromagnetische Wellen** !

Der Zusammenhang

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\,\mu_0}}}$$

<u>Vakuumlichtgeschwindigkeit</u>

zwischen elektrischer und magnetischer Feldkonstante und der Vakuumlichtgeschwindigkeit wurde rein empirisch (als "Zahlenspiel") bereits im Jahre 1856 von W.Weber und R.Kohlrausch festgestellt. Später, im Jahre 1871, deutete J.C.Maxwell das Licht als elektromagnetische Wellenerscheinung!

3.3 Nachweis elektromagnetischer Wellen

1888, erst nach dem Tode Maxwells, wurden von H.Hertz (1857 – 1894) zum ersten Mal elektromagnetische Wellen experimentell nachgewiesen.

Dem von H.Hertz durchgeführten Experiment ähnlich ist folgender

Versuch: Elektromagnetische Wellen werden in einem Schwingkreis erzeugt und über eine Antenne (Hertzscher Dipol) abgestrahlt. Eine zweite Antenne gleicher Größe fängt die Wellen auf und bringt dadurch eine Glühlampe zum Leuchten.
Variiert man den Abstand des Empfangsdipols zum Sendedipol, so leuchtet die Lampe heller, je näher man kommt.
Dreht man den Empfänger langsam in eine zur Sendeantenne senkrechte Position, so erlischt die Lampe.
Sie bleibt auch dunkel, wenn der Empfangsdipol in der Verlängerung der Achse des Sendedipols steht.

3.4 Messung der Lichtgeschwindigkeit

Durch Vergleich des Ausdrucks für die Phasengeschwindigkeit in der elektromagnetischen Wellengleichung mit dem experimentell bestimmten Wert der Vakuumlichtgeschwindigkeit sind wir zu der wichtigen Erkenntnis gekommen, daß die Fortpflanzung des elektromagnetischen Feldes im Vakuum, d.h. die Übertragung elektromagnetischer Signale mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit erfolgt.

Interessant ist hier die Frage, mit welchen Methoden es gelungen ist, die Lichtgeschwindigkeit c experimentell zu bestimmen.

Noch bis ins 17.Jahrhundert wurde angenommen, daß sich das Licht instantan ausbreitet, d.h. $c = \infty$ ist (z.B. Descartes 1596 – 1650).

Daß die Ausbreitung des Lichtes mit einer endlichen Geschwindigkeit erfolgt, wurde erstmals von Olaf Römer (1644 – 1710) im Jahre 1673 bewiesen. Seine Forschungsergebnisse fanden jedoch keine allgemeine Anerkennung.
Römer beobachtete, wann die Jupitermonde, insbesondere der erste Mond Ganymed, in den Schatten des Jupiter eintraten, und bestimmte deren Umlaufzeiten als die Zeit zwischen zwei Verfinsterungen (siehe Abb. 3.2). Dabei fand er heraus, daß sich die Umlaufzeit des Ganymed mit dem Ort der Erde in ihrer Bahn zu ändern schien.

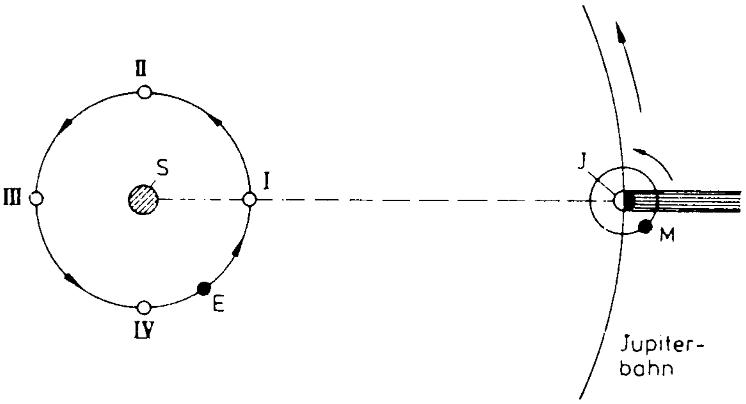


Abbildung 3.2: *Messung der Lichtgeschwindigkeit nach dem Verfahren von Römer durch Beobachtung der Verfinsterung der Jupitermonde (aus [4])*

In der Position I bei kleinster Entfernung Erde $\leftrightarrow$ Jupiter trat die Verfinsterung früher ein als an allen anderen Punkten der Erdbahn. Die gegenüber Position I gemessene Verzögerung war maximal in der ein halbes Jahr später vorhandenen Position III bei der größten Entfernung Erde $\leftrightarrow$ Jupiter.(Der Abstand Erde $\leftrightarrow$ Jupiter kann in den genannten Positionen während der Zeit zwischen zwei Verfinsterungen als konstant angenommen werden.) Olaf Römer erklärte die Verspätungen durch die längeren Laufzeiten des Lichtes, welche bei einer endlichen Lichtgeschwindigkeit zu berücksichtigen sind: Von Position III kommend muß das Licht gegenüber Position I zusätzlich den Durchmesser der Erdbahn durchlaufen. Die von Römer gemessene Verzögerung des Lichtes betrug etwa 1450 s, er nahm für den Erdbahndurchmesser $311 \cdot 10^6$ km an.

Römers Ergebnis im Jahr 1673:

$$c = \frac{311 \cdot 10^6\,\mathrm{km}}{1450\,\mathrm{s}} = 214000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \qquad \textbf{endliche}\ \text{Lichtgeschwindigkeit}$$

Der berechnete Wert besitzt die richtige Größenordnung, der auftretende Fehler beruht auf der damals ungenauen Kenntnis des Erdbahndurchmessers sowie der Ungenauigkeit der Messungen.

Ergebnis nach der Römer – Methode heute:

$$c = \frac{299 \cdot 10^6\,\mathrm{km}}{1000\,\mathrm{s}} = 299\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Die erste direkte Messung der Lichtgeschwindigkeit im Labor (terrestrische Methode) gelang 1849 dem französischen Physiker H.L.Fizeau (1819 – 1896).

Er benutzte dazu die in Abb. 3.3 gezeigte Versuchsanordnung:

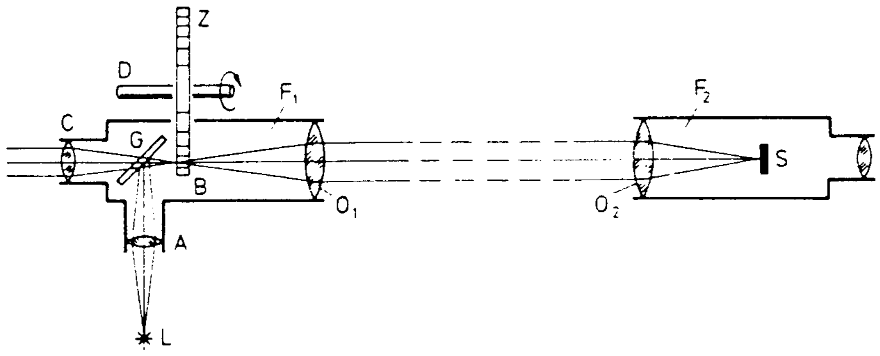


Abbildung 3.3: *Fizeausche Anordnung zur Messung der Lichtgeschwindigkeit (aus [4])*

Die Lichtquelle L wird über einen halbdurchlässigen Spiegel G in die gegenstandsseitige Brennebene des Fernrohrobjektivs O_1 und von diesem ins Unendliche abgebildet. Die Objektivlinse O_2 bildet die Lichtquelle in ihre bildseitige Brennebene ab, in der sich ein Planspiegel S befindet. Das an S reflektierte Licht läuft den gleichen Weg zurück, wobei ein Teil durch den halbdurchlässigen Spiegel G hindurchtritt und mittels der Okularlinse C beobachtet werden kann.

In die Brennebene der Linse O_1 setzte FIZEAU — wie es bei Meßmethoden von Teilchengeschwindigkeiten allgemein üblich ist — ein rotierendes Zahnrad, um den Strahlengang zu unterbrechen. Bei einer bestimmten Drehzahl trifft das durch eine Lücke des Zahnrades hindurchgegangene Licht nach seiner Reflexion gerade auf den folgenden Zahn und wird ausgeblendet. Helligkeit wird bei C beobachtet, falls während der Laufzeit des Lichtes $\Delta t = 2l/c$ das Rad gerade um einen Zahn weitergedreht wird. Dies ist der Fall für $\Delta t = T/N$.

Aus den Größen
l : Abstand Zahnrad $\leftrightarrow$ Planspiegel M_2
T : Umlaufzeit des Rades
N : Anzahl der Zähne

läßt sich die Lichtgeschwindigkeit ermitteln:

$$c = 2\,l\,N\,\frac{1}{T} = 2\,l\,N\,\nu$$

FIZEAU wählte $l = 8633\,\mathrm{km}$, $N = 720$ und beobachtete das erste Helligkeitsminimum bei einer Drehzahl $\nu = 12,6\,\mathrm{Hz}$.

<u>FIZEAUs Ergebnis:</u>

$$c = 4\,l\,N\,\nu \approx 313\,000\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Ein Jahr später, 1850, erzielte der französische Mediziner FOUCAULT genauere Meßergebnisse mittels der von ihm entwickelten Drehspiegelmethode.

Zur Erläuterung bauen wir den FOUCAULTschen Drehspiegelversuch in vereinfachter Form nach:

Versuch: Die Versuchsanordnung ist in Abbildung 3.4 skizziert. Das von der Quelle

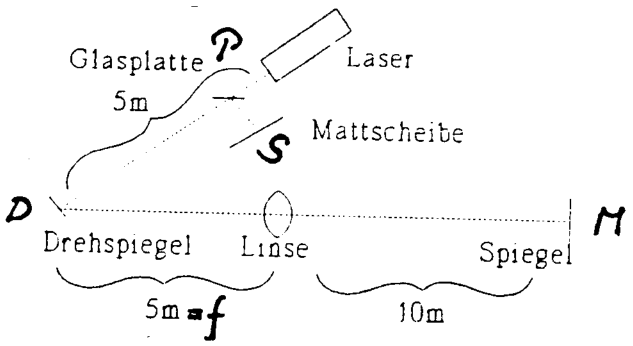


Abbildung 3.4: *Aufbau des Drehspiegelversuches (aus [9])*

ausgehende Licht trifft nach Durchgang durch eine um 45° geneigte halbdurchlässige Platte P auf den Drehspiegel D, von wo aus es über die Linse L zum Planspiegel M läuft. Dort wird das Licht in sich zurückgeworfen und durch Reflexion an D und P auf den Schirm S gelenkt.

Alle Hauptstrahlen verlaufen zwischen Linse und Planspiegel parallel und treffen sich nach Reflexion an M wieder auf dem Drehspiegel D. Dies ist durch die Position des Drehspiegels im Brennpunkt der Linse garantiert. Ebenso ist dadurch sichergestellt, daß bei einer Bewegung des Spiegels, welche langsam gegen die Laufzeit des Lichtes ist, das auf dem Schirm S erzeugte Bild der Lichtquelle fest steht. Bei schnellerer Rotation dagegen hat sich D um den Winkel ϑ gedreht, wenn das bei M reflektierte Licht erneut auftrifft. Daraus resultiert eine Verschiebung des Bildes auf dem Schirm um die Strecke Δs (siehe Abb. 3.5).

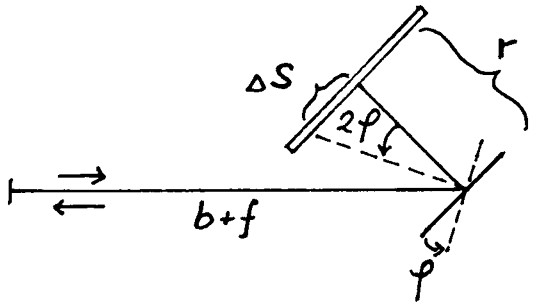


Abbildung 3.5: *Verschiebung des Bildes auf dem Schirm*

Mit zunehmender Rotationsfrequenz kann also eine Verschiebung des Bildes auf dem

Schirm gemessen werden. Sind Rotationsfrequenz und Lichtweg bekannt, dann läßt sich die Lichtgeschwindigkeit berechnen:

Laufzeit des Lichtes $\Delta t = \dfrac{2(b+f)}{c}$

Drehwinkel
$$\begin{aligned} \vartheta &= \omega\,\Delta t \\ &= \omega\,\frac{2(b+f)}{c} \end{aligned}$$

Ablenkung auf dem Schirm
$$\begin{aligned} \Delta s &= r\,\tan 2\varphi \approx 2\,r\,\varphi \\ \Delta s &= 2\,r\,\omega\,\frac{2(b+f)}{c} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{Lichtgeschwindigkeit } c = \frac{8\,\pi\,r\,(b+f)\,\nu}{\Delta s}$$

Wir wählen für die Demonstration im Hörsaal

$$\begin{aligned} b+f &= 15\,\mathrm{m} \\ r &= 5\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Mit $\nu = 470\,\mathrm{Hz}$ und $\Delta s = 3 \pm 0,3\,\mathrm{mm}$ erhalten wir als <u>Resultat des Demonstrationsversuches:</u>

$$c = (2,95 \pm 0,3)\,10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

<u>FOUCAULTs Messung im Jahr 1850 lieferte als Ergebnis:</u>

$$c = (298\,000 \pm 500)\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Mit Beginn des 20.Jahrhunderts wurden weitere zahlreiche Messungen durchgeführt. Durch Abwandlung der älteren Methoden erreichte man eine wesentlich höhere Zuverlässigkeit der Messungen. Zusätzlich wurden aber auch neue Verfahren entwickelt.
Das FOUCAULTsche Verfahren wurde 1927 von A.MICHELSON wesentlich verbessert. Er ersetzte den Drehspiegel durch ein rotierendes, achtflächiges, verspiegeltes Prisma. Es gelang ihm, Ruhe und Helligkeit des Bildes so zu steigern, daß ein Laufweg des Lichtes von etwa 70 km möglich wurde.
<u>MICHELSONs Messungen ergaben:</u>

$$c = (299\,796 \pm 4)\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

1928/29 haben A.KAROLUS und O.MITTELSTAEDT das Zahnrad der Anordnung von FIZEAU durch eine Kerrzelle (siehe unter Abschnitt 7. Doppelbrechung) ersetzt. Dadurch wurde eine exakte Steuerung der Lichtunterbrechung auf elektrischem Wege möglich.

Den **bisher genauesten Wert der Vakuumlichtgeschwindigkeit** erzielte man im Jahre 1972 durch Interferenzmessungen. Dabei handelt es sich um Präzisionsmessungen der Wellenlänge und Frequenz einer Lichtwelle mit Hilfe eines Interferometers und durch

Vergleich mit einer Standardfrequenz. Das Produkt von Wellenlänge und Frequenz der ^{86}Kr – Linie liefert

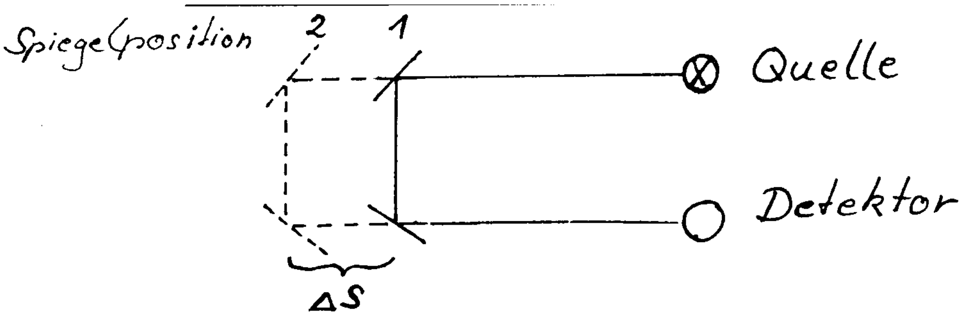
$$\boxed{c = (299\,792\,458 \pm 1,2)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

Auf der Festlegung dieses Wertes als Lichtgeschwindigkeit beruht die seit **1983** gültige **Definition der Basiseinheit "Meter"**:

> *1 Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während des Zeitintervalls* 1/299 792 458 *s zurücklegt.*

Der Vorteil dieser Definition liegt in der höheren Genauigkeit von Frequenzmessungen und Messungen kurzer Strecken gegenüber Messungen langer Strecken.

Auf die modernen Interferenzmessungen, die zur Festlegung der Größe der Lichtgeschwindigkeit führten, wird hier nicht genauer eingegangen. Stattdessen wird ein einfaches Beispiel einer Lichtgeschwindigkeitsmessung durch Interferenz vorgestellt:



Versuch:

Ein mit 50 MHz moduliertes Lichtsignal wird über zwei um 45° gegen den Strahlengang geneigte Spiegel zu einer Photodiode geleitet.
Ausgangs – und Endsignal werden auf einem Kathodenstrahloszillographen sichtbar gemacht. Die Ausgangsposition (Position 1) der Spiegel wird dadurch bestimmt, daß die beiden Signale deckungsgleich sind.

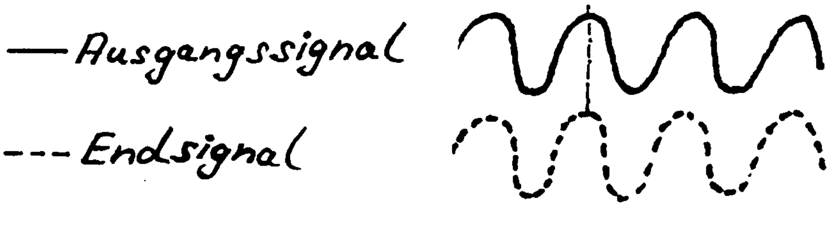


Abbildung 3.6: *Interferenzmessung der Lichtgeschwindigkeit: Spiegelposition 1*

Anschließend werden die Spiegel um die Strecke Δs verschoben, so daß zwischen den Signalen ein Phasenunterschied $\Delta\varphi = 90°$ vorliegt.

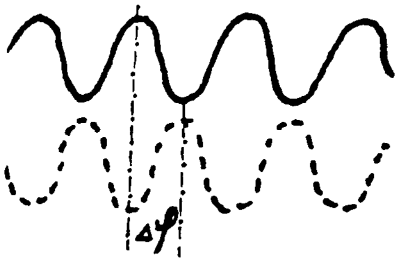


Abbildung 3.7: *Spiegelposition 2*

Für den Laufzeitunterschied gilt $\Delta t = 2\,\Delta s/c$. Die Phasenverschiebung beträgt 90°, dies ist gleichbedeutend mit $\Delta t = T/4$. Daraus folgt für die Lichtgeschwindigkeit

$$c = 8\,\Delta s/T = 8\,\nu\,\Delta s$$

Meßbeispiel: Die Versuchsdurchführung ergab eine Verschiebung der Spiegel um $\Delta s = 78\,\mathrm{cm}$

$$\Longrightarrow \qquad c = 8 \cdot 50\,\mathrm{MHz} \cdot 78\,\mathrm{cm} = 312\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

3.5 Transversalität freier elektromagnetischer Wellen

Wir befassen uns zunächst mit freien, ebenen elm. Wellen, die sich längs der x – Achse ausbreiten. Wie lassen sich solche Wellen durch $\vec{E}$ – und $\vec{B}$ – Felder beschreiben?

Betrachten wir das $\vec{E}$ – Feld

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}(x-ct) = \Big[E_x(x-ct)\,,\; E_y(x-ct)\,,\; E_z(x-ct)\Big]$$

Welche Funktionen sind für E_x, E_y und E_z erlaubt?

$\vec{E}(x-ct)$ muß die MAXWELL – Gleichungen erfüllen, insbesondere muß also gelten

$$div\,\vec{E} = \bigtriangledown * \vec{E} = 0$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

Da sich nach Voraussetzung die Komponenten des betrachteten $\vec{E}$ – Feldes nur mit der x – Koordinate ändern sollen, gilt $\partial E_y/\partial y = 0$ und $\partial E_z/\partial z = 0$ und es folgt

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_x = constant$$

Die x – Komponente des $\vec{E}$ – Feldes muß also konstant sein, sie liefert daher keinen Beitrag zur Welle $\vec{E}(x-ct)$. Es ergibt sich eine transversale Welle

$$\vec{E}(x-ct) = \Big[0\,,\, E_y(x-ct)\,,\, E_z(x-ct)\Big]$$

Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß $E_z = 0$ ist:

$$\vec{E}(x-ct) = \Big[0\,,\, E_y(x-ct)\,,\, 0\Big]$$

Wie verhält sich das zugehörige $\vec{B}$ – Feld?

Die Relation zwischen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ist gegeben durch die Maxwell – Gleichung $rot\,\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} & = & -\dfrac{\partial B_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} & = & -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} & = & -\dfrac{\partial B_z}{\partial t} \end{array} \right.$$

In diesem Gleichungssystem verschwinden alle partiellen Ableitungen von $E_i \;\; i = x\,,\, y\,,\, z$ mit Ausnahme von $\partial E_y/\partial x \neq 0$. Man erhält daher

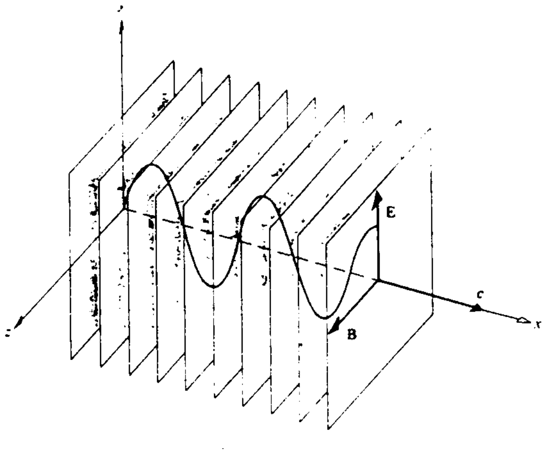
$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial B_x}{\partial t} & = & 0 \\ \Rightarrow \;\; B_x & = & const. \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial B_y}{\partial t} & = & 0 \\ \Rightarrow \;\; B_y & = & const. \end{array} \qquad \dfrac{\partial B_z}{\partial t} \;=\; -\dfrac{\partial E_y}{\partial x}$$

Die x – und y – Komponenten des $\vec{B}$ – Feldes tragen wie die x – Komponente des $\vec{E}$ – Feldes nicht zur Welle bei.

Die ebene, elektromagnetische Welle, die sich in x – Richtung fortpflanzt, wird also beschrieben durch

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \vec{E}(x-ct) & = & \Big[0\,,\, E_y(x-ct)\,,\, 0\Big] \\ \vec{B}(x-ct) & = & [0\,,\, 0\,,\, B_z(x-ct)] \end{array} \qquad \text{mit} \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}}$$

Allgemein läßt sich also festhalten: Ebene, elektromagnetische Wellen sind transversal, wobei $\vec{E}$ – und $\vec{B}$ – Feld senkrecht zueinander sowie senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen.



Um den Zusammenhang von $\vec{E}$ – und $\vec{B}$ – Feld genauer zu untersuchen, betrachten wir jetzt harmonische Wellen:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}(x-ct) = \Big[0\,,\; E_y\,,\; 0\Big]$$

mit

$$\begin{aligned} E_y(x-ct) &= E_0 \cos k(x-ct) = E_0 \cos(kx - kct) \\ &= E_0 \cos(kx - \omega t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \end{aligned}$$

Aus E_y berechnen wir B_z und erhalten damit $\vec{B}(x,t) = [0\,,\,0\,,\,B_z(x-ct)]$:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\Rightarrow\quad E_0\,k\,\sin(\omega t - kx) = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\Rightarrow\quad B_z = -\int E_0\,k\,\sin(\omega t - kx)\,dt$$

$$\Rightarrow\quad B_z = \frac{E_0\,k}{\omega}\,\cos(\omega t - kx) + const.$$

Mit dem schon bei $E_x = const.$ angeführten Argument können wir die Konstante gleich Null setzen.

$$B_z = \frac{E_0\,k}{\omega}\,\cos(\omega t - kx) = \frac{k}{\omega}\,E_y = \frac{1}{c}\,E_y$$

Zwischen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ besteht also die Beziehung

$$\boxed{E_y = c\,B_z}$$

E_y und B_z unterscheiden sich nur um den konstanten Faktor c. Sie sind in gleicher Phase, d.h. sie nehmen gleichzeitig ihre Null – und Maximalwerte an.

Zusammenfassung: Eine harmonische, elektromagnetische Welle läßt sich beschreiben als Kopplung zweier gleichphasiger, harmonischer Transversalwellen, einer elektrischen und einer magnetischen Welle. Dabei schwingen das $\vec{E}$ – und das $\vec{B}$ – Feld in zueinander senkrechten Ebenen, wie Abb. 3.8 zeigt.

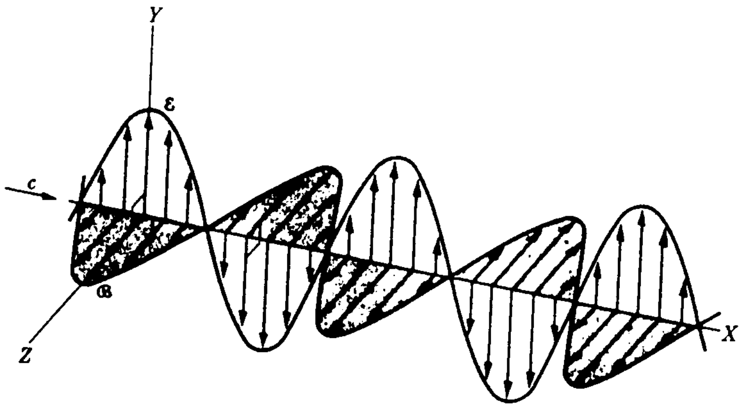


Abbildung 3.8: *Elektrisches und magnetisches Feld in einer harmonischen, ebenen Welle (aus [1])*

Die für die spezielle Ausbreitungsrichtung x ausgeführten Untersuchungen sollen nun auf eine beliebige Richtung $\vec{k}$ verallgemeinert werden.

Betrachten wir also eine ebene, harmonische Welle, welche sich in beliebige Richtung $\vec{k}$ fortpflanzt:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i\,(\omega t\, -\, \vec{k}\vec{r})}$$

Die Anwendung eines Differentialoperators führt bei diesem Wellenausdruck jeweils nur zu einem zusätzlichen Faktor vor dem Exponentialterm.

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, i\,\omega\, e^{i\,(\omega t\, -\, \vec{k}\vec{r})} = i\,\omega\,\vec{E}(\vec{r},t)$$
$$\bigtriangledown * \vec{E}(\vec{r},t) = -\,i\,\vec{k}\,\vec{E}(\vec{r},t)$$

Bei harmonischen Wellen lassen sich die Operatoren $\partial/\partial t$ und $\bigtriangledown$ also einfach durch bestimmte Faktoren ersetzen:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial}{\partial t} & \Longrightarrow & i\,\omega \\ \bigtriangledown & \Longrightarrow & -\,i\,\vec{k} \end{array}}$$

Damit lassen sich die MAXWELL – Gleichungen für harmonische Wellen folgendermaßen umformulieren:

$$\bigtriangledown * \vec{E} = 0 \;\Longrightarrow\; -\,i\,\vec{k}\,\vec{E} = 0$$

$$\begin{aligned}
\nabla * \vec{B} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad -i\,\vec{k}\,\vec{B} = 0 \\
\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad &\Longrightarrow \quad -i\,\vec{k} \times \vec{E} = -\,i\,\omega \vec{B} \\
\nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad &\Longrightarrow \quad -i\,\vec{k} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\,i\,\omega \vec{E}
\end{aligned}$$

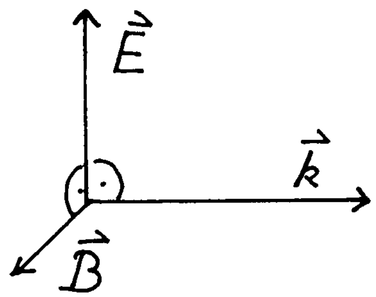
Man erhält

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{k}\,\vec{E} = 0 & \vec{k} \times \vec{E} = \omega\,\vec{B} \\ \vec{k}\,\vec{B} = 0 & \vec{k} \times \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2}\,\vec{E} \end{array}}$$

MAXWELL – Gleichungen für harmonische Wellen

Allgemein gilt:

$\vec{k}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$ bzw. $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{k}$ bilden ein rechthändiges, rechtwinkliges System. D.h. eine ebene, harmonische Welle breitet sich längs der Richtung $\vec{E} \times \vec{B}$ aus, wobei $\vec{E}$ und $\vec{B}$ stets senkrecht aufeinander stehen.



Insbesondere liefert

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} = \frac{1}{c}\,\frac{\vec{k} \times \vec{E}}{k} = \frac{1}{c}\left(\frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E}\right)$$

folgende Informationen:

- $\vec{B}$ und $\vec{E}$ sind in gleicher Phase.
- $|\vec{B}| = \frac{1}{c}\,|\vec{E}|$

3.6 Das elektromagnetische Spektrum

Ausgehend von den vier Grundgleichungen, die alle elektromagnetischen Vorgänge erfassen, stellte MAXWELL die Theorie auf, daß es sich bei der Erscheinung “Licht” um freie elektromagnetische Transversalwellen handelt. Damit brachte er physikalische Gebiete in Verbindung, die bis dahin als getrennt erschienen:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Elektrizität} & \longleftrightarrow & \text{Magnetismus} & \longleftrightarrow & \text{Licht} \\ \varepsilon_0 & \cdot & \mu_0 & = & \dfrac{1}{c^2} \end{array}$$

Heute wissen wir, daß ein weites Spektrum von Erscheinungen unter dem Begriff elektromagnetischer Wellen vereinigt ist. Das Licht, welches unser Auge als solches wahrnimmt, ist dabei nur ein sehr kleiner, durch die Empfindlichkeit des Auges begrenzter Ausschnitt aus dem gesamten elektromagnetischen Spektrum.

Man klassifiziert die elektromagnetischen Wellen nach ihrer Wellenlänge bzw. Frequenz (siehe Abb. 3.9).

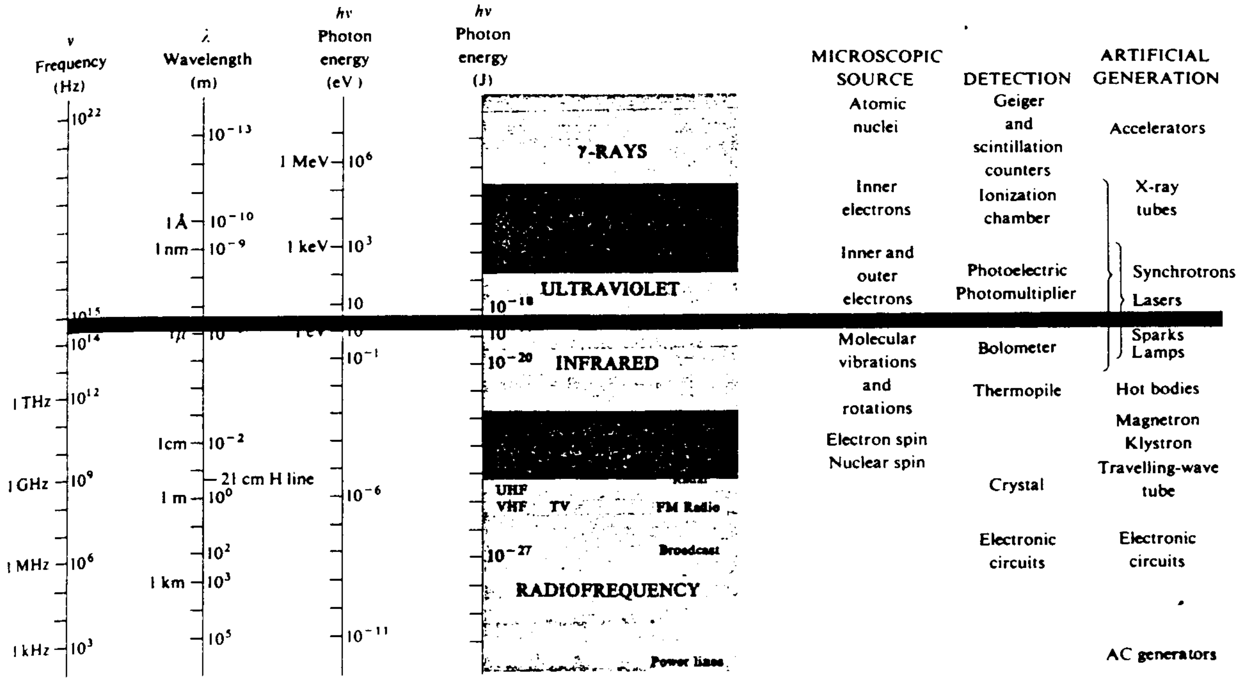


Abbildung 3.9: *Elektromagnetisches Spektrum (aus [13])*

3.7 Elektromagnetische Wellen in Materie

Nach den für das Vakuum durchgeführten Überlegungen wollen wir nun die Ausbreitung elm. Wellen in Materie studieren. Dazu seien noch einmal die MAXWELL – Gleichungen in ihrer allgemeinen Form aufgeführt:

$$\begin{array}{ll} div\,\vec{D} = \varrho_{frei} & rot\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ div\,\vec{B} = 0 & rot\,\vec{H} = j_{frei} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array}$$

Herleitung der Wellengleichung

Wir betrachten zunächst Materie ohne freie Ströme und Ladungen, d.h. es sollen nur gebundene Ströme und Ladungen, also Magnetisierung und Polarisation vorhanden sein. Mit

$$\varrho_{frei} = j_{frei} = 0 \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{rcl} \vec{D} & = & \varepsilon_r\,\varepsilon_0\,\vec{E} \\ \vec{B} & = & \mu_r\,\mu_0\,\vec{H} \end{array}$$

lauten dann die MAXWELL – Gleichungen

$$\begin{array}{ll} div\,\vec{D} = div\,\varepsilon_r\,\varepsilon_0\,\vec{E} = 0 & rot\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ div\,\vec{B} = 0 & rot\,\vec{H} = rot\,\dfrac{1}{\mu_r\,\mu_0}\,\vec{B} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_r\,\varepsilon_0\,\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array}$$

In Nabla – Operator – Schreibweise erhält man

$$\boxed{\begin{array}{ll} \varepsilon_r\,\varepsilon_0\,\bigtriangledown \star \vec{E} = 0 & \bigtriangledown \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \bigtriangledown \star \vec{B} = 0 & \bigtriangledown \times \vec{B} = \varepsilon_r\,\mu_r\,\varepsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array}}$$

Völlig analog zu der für das Vakuum durchgeführten Herleitung ergibt sich

$$\boxed{\Delta \vec{E}\,\left[\vec{B}\right] = \varepsilon_r\,\mu_r\,\varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2 \vec{E}\,\left[\vec{B}\right]}{\partial t^2}}$$

<u>Wellengleichung</u>
<u>für elektromagnetische Wellen</u>
<u>in Materie</u>

Daraus folgt für die **Lichtgeschwindigkeit in Materie**

$$c_M^2 = \frac{1}{\varepsilon_r\,\mu_r}\,\frac{1}{\varepsilon_0\,\mu_0} = \frac{1}{\varepsilon_r\,\mu_r}\,c^2$$

$$\boxed{c_M = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_r\,\mu_r}}\,c}$$

Lichtgeschwindigkeit
in Materie

Def.: Man definiert das Verhältnis des Wertes der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum zum Wert der Lichtgeschwindigkeit in Materie als den **Brechungsindex** des betreffenden Materials.

$$\boxed{n = \frac{c}{c_M} = \sqrt{\varepsilon_r\,\mu_r}}$$

Brechungsindex
einer Substanz

Dabei ist zu beachten, daß ε_r und μ_r **i.a. frequenzabhängig** sind! (Siehe dazu den nachfolgenden Demonstrationsversuch!)

Häufig tritt der Fall $\underline{\mu_r \approx 1\,,\, \varepsilon > 1}$ auf, z.B. bei Isolatoren (Glas, Wasser, Gase etc.). Speziell für $\mu_r = 1$ gilt

$$\boxed{n = \frac{c}{c_M} = \sqrt{\varepsilon_r}} \qquad \text{MAXWELLsche Beziehung}$$

Sehr häufig liegt daher der Fall $\boxed{n > 1\,,\, c_M < c}$ vor.

<u>*Versuch:*</u> Am Beispiel Wasser wird die Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätszahl ε_r demonstriert.

Dazu wird die Dielektrizitätszahl von Wasser für verschiedene Frequenzen gemessen:

a) **Kleine Frequenzen (Statischer Fall)**

Mit Hilfe eines Kapazitätsmessungsgerätes bestimmen wir die Kapazität eines Plattenkondensators. Der Abstand der Platten wird möglichst klein gewählt und zwischen den Platten eine Plastiktüte so angebracht, daß bei Auffüllen derselben mit Wasser der Plattenzwischenraum gefüllt ist.
Die Kapazitätsmessung wird zunächst mit leerer Tüte, dann mit Wasserfüllung vorgenommen.

Eine der Messungen ergab bei 4 mm Plattenabstand

$$c_0 \approx 100\,\text{pF} \qquad c_{\text{H}_2\text{O}} \approx 7,5\,\text{nF}$$

Damit lautet das <u>Versuchsresultat</u> für den statischen Fall:

$$\underline{\underline{\varepsilon_r(\text{H}_2\text{O})}} = \frac{C_{\text{H}_2\text{O}}}{C_0} = \frac{7,5\ 10^{-9}\,\text{F}}{100\ 10^{-12}\,\text{F}} = \underline{\underline{75}}$$
$$\underline{\underline{n(\text{H}_2\text{O})}} = \sqrt{\varepsilon_r(\text{H}_2\text{O})} = \underline{\underline{8,66}}$$

<u>Sollwert</u> für den statischen Fall: $\varepsilon_r(\text{H}_2\text{O}) = 81 \;\Rightarrow\; n(\text{H}_2\text{O}) = 9$.

b) **Dezimeterwellenbereich**

Über eine $\lambda/2$ – Antenne werden von einem Sender Dezimeterwellen der Frequenz $\nu = 433\,\text{MHz}$ bzw. der Wellenlänge $\lambda = 69\,\text{cm}$ abgestrahlt. Als Empfänger dienen zwei Dipole der Längen $l_1 = 31\,\text{cm} \approx \lambda/2$ und $l_2 = 6\,\text{cm}$, welche sich in einem Wassertank befinden.

Bei leerem Wassertank wird der $\lambda/2$ – Dipol angeregt. Die in seiner Mitte befindliche Glühlampe leuchtet auf. Füllt man destilliertes Wasser in den Tank, so erlischt diese Lampe. Jetzt wird die kurze Antenne angeregt, wie das Aufleuchten der zugehörigen Glühlampe anzeigt.

Für den Dezimeterwellenbereich ergibt sich also ein Brechungsindex der Größe

$$\underline{\underline{n(\mathrm{H_2O})}} = \frac{c_0}{C_{\mathrm{H_2O}}} = \frac{\nu\,\lambda_0}{\nu\,\lambda_{\mathrm{H_2O}}} = \frac{\lambda_0}{\lambda_{\mathrm{H_2O}}} = \frac{31}{6} \approx \underline{\underline{5}}$$

Für die Dielektrizitätskonstante erhalten wir den Wert

$$\underline{\underline{\varepsilon_r(\mathrm{H_2O})}} = n^2(\mathrm{H_2O}) = \underline{\underline{25}}$$

Im Bereich der Dezimeterwellen ist ε_r bereits erheblich kleiner als im statischen Fall.

c) **Optischer Bereich**

Der Versuchsaufbau zur Interferenzmessung der Lichtgeschwindigkeit (s.S. 87ff.) wird übernommen. Zusätzlich wird in den Strahlengang eine 1m lange, mit Wasser gefüllte Röhre eingebaut (siehe Abb. 3.10).

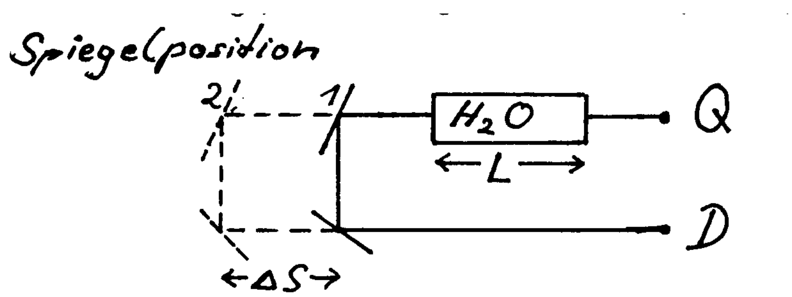


Abbildung 3.10: *Messung des Brechungsindexes von Wasser für Licht des optischen Bereiches*

Zunächst wird der Phasenunterschied zwischen Ausgangs – und Endsignal bei gefüllter Röhre bestimmt. Dann wird die Röhre aus dem Strahlengang entfernt und durch Verschiebung des Spiegelpaares die zuvor ermittelte Phasenlage wiederhergestellt.

Im Meßbeispiel ergibt sich beim Phasenabgleich ein Wegunterschied von $\Delta s = 17,5\,\mathrm{cm}$.

Der Laufzeitunterschied beim Durchgang des Lichtes durch die H_2O – Röhre der Länge L berechnet sich zu

$$\Delta t = \frac{L}{c_{\mathrm{H_2O}}} - \frac{L}{c}$$

Der durch Änderung des Wegunterschiedes hergestellte Laufzeitunterschied ergibt sich zu

$$\Delta t = \frac{2\,\Delta s}{c}$$

Phasenabgleich bedeutet

$$
\begin{aligned}
& \frac{L}{c_{H_2O}} - \frac{L}{c} = \frac{2\,\Delta s}{c} \quad \left| \cdot \frac{c}{L} \right. \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{c}{c_{H_2O}} - 1 = \frac{2\,\Delta s}{L} \\
\Rightarrow \quad & n = \frac{2\,\Delta s}{L} + 1
\end{aligned}
$$

Mit $\Delta s = 17,5\,\mathrm{cm}$ und $L = 1\,\mathrm{m}$ ist der gemessene Brechungsindex

$$\underline{\underline{n(H_2O)}} = \frac{2 \cdot 17,5\,\mathrm{cm}}{1\,\mathrm{m}} + 1 = \underline{\underline{1,35}}$$

Dies entspricht einer Dielektrizitätszahl von

$$\underline{\underline{\varepsilon_r(H_2O)}} = \underline{\underline{1,8}}$$

Tabellenwerte (optischer Bereich): $n(H_2O) \quad = \quad 1,33$
Für Frequenzen des sichtbaren Bereiches unterscheidet sich die Größe der Dielektrizitäts – sowie der Brechzahl noch stärker von dem für sehr kleine Frequenzen erhaltenen Wert.

Zusammenfassung: Der Brechungsindex $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ ist sehr stark frequenzabhängig. Der Brechungsindex von H_2O variiert von $n = 9$ im statischen Fall bis $n = 1,33$ bei Frequenzen des optischen Bereiches (siehe Abb. 3.11). Ähnlich gravierend ist die Änderung der Brechzahl bei Glas.

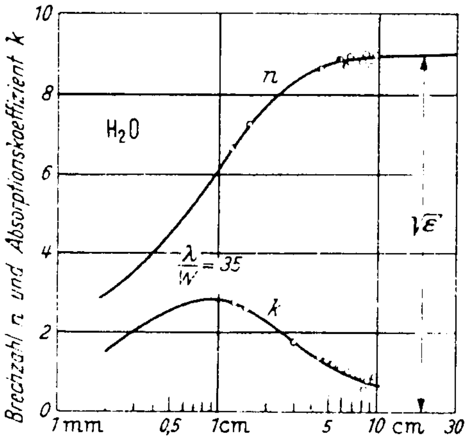


Abbildung 3.11: *Dispersion von Wasser für elektromagnetische Wellen (aus [17])*

Eine sehr geringe Frequenzabhängigkeit des Brechungsindexes weisen dagegen Gase auf. Hier ist die MAXWELLsche Relation sehr gut erfüllt. Eine Übersicht gibt die folgende Tabelle (aus [3]):

Stoff	n	$\sqrt{\varepsilon_r}$
Luft	1,000294	1,000295
Kohlendioxid	1,000449	1,000473
Kohlenmonoxid	1,000346	1,000345
Wasserstoff	1,000138	1,000132
Distickstoffoxid	1,000503	1,000497
Methan	1,000443	1,000472

Wir sehen also, daß sich eine elm. Welle, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Vakuum gleich der Lichtgeschwindigkeit c ist, in Materie mit veränderter Geschwindigkeit c_M ausbreitet. Dabei erweist sich die Änderung der Phasengeschwindigkeit als frequenz – bzw. wellenlängenabhängig. Beim Eintritt einer elm. Welle in Materie tritt also ein Phänomen auf, das bereits in Abschnitt 2.3 erwähnt wurde: die **Dispersion**.

Die Variation des Brechungsindexes $n(\nu) = c/c_M$ bzw. der Dielektrizitätszahl $\varepsilon_r(\nu) = n^2(\nu)$ mit dem Frequenzspektrum (Wellenlängenspektrum) beschreibt die Dispersion des betreffenden Materials.

Wie kommt die Dispersion elektromagnetischer Wellen in Materie zustande?

Faßt man Licht nach der MAXWELLschen Theorie als elektromagnetische Wellenerscheinung auf, so wird eine in einen Stoff eindringende Lichtwelle $\vec{E}(\vec{r},t)$ auf die elektrischen Ladungen der Moleküle Kräfte ausüben. Durch Verschiebung dieser Ladungen aus ihrer Ruhelage wird eine Polarisation $\vec{P}(\vec{r},t)$ erzeugt. Da aufgrund der Periodizität der Lichtwelle die Ladungen periodisch aus ihrer Ruhelage verschoben werden, handelt es sich bei der Polarisation um erzwungene Schwingungen der geladenen Teilchen.

Die von der einfallenden Welle, der Primärwelle, zu Schwingungen angeregten Ladungsteilchen strahlen ihrerseits Sekundärwellen ab, welche sich mit der Primärwelle überlagern. Die erzwungenen Sekundärwellen weisen i.allg. gegen die Primärwelle eine Phasenverschiebung auf.

Abhängig von der Frequenz ν der einfallenden Welle sind folgende Ergebnisse der Überlagerung möglich (siehe Abbildungen 3.13 und 3.14):

- Die resultierende Welle eilt der Primärwelle voraus. $\Rightarrow \quad c_M > c$
- Die resultierende Welle hinkt der Primärwelle nach. $\Rightarrow \quad c_M < c$

Dementsprechend variiert der Brechungsindex mit der Frequenz der eindringenden Welle:

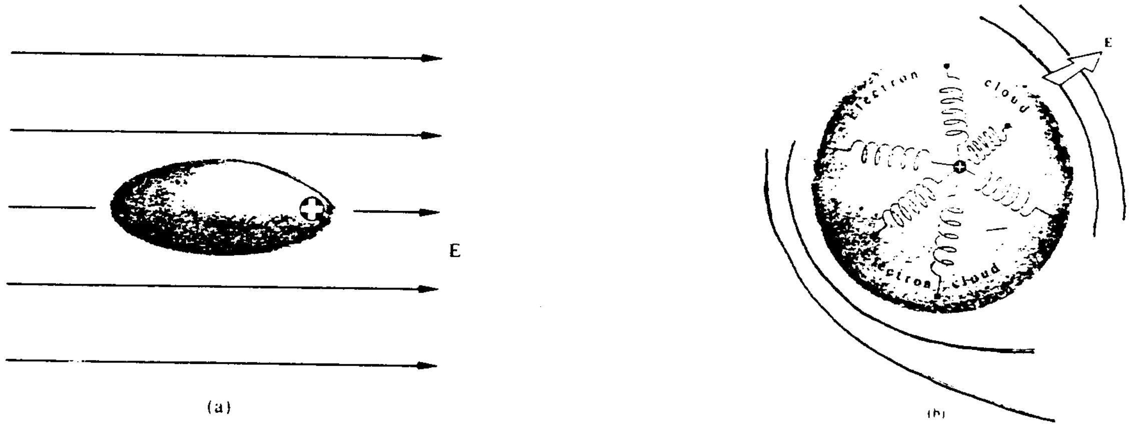


Abbildung 3.12: *(a) Formänderung einer Elektronenwolke unter dem Einfluß eines $\vec{E}$–Feldes, (b) mechanisches Oszillatormodell im isotropen Medium. (aus [13])*

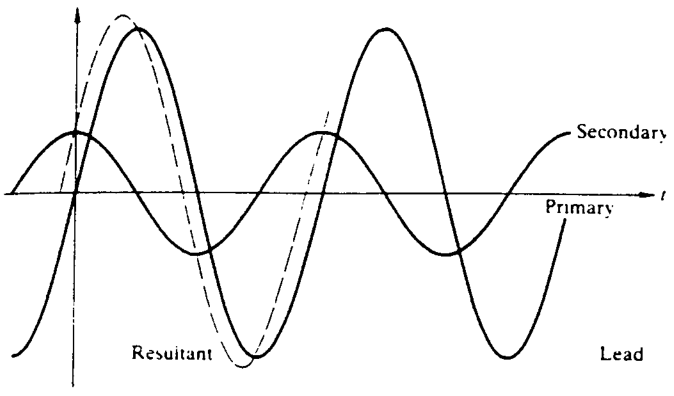


Abbildung 3.13: *Die Sekundärwelle besitzt eine positive Phasenverschiebung gegenüber der Primärwelle. (aus [13])*

- $n(\nu) > 1 \quad \Rightarrow \quad c_M < c$
- $n(\nu) < 1 \quad \Rightarrow \quad c_M > c$

Steht $c_M > c$ im Widerspruch zur Relativitätstheorie?

Nach der Relativitätstheorie existiert in der Natur keine größere Geschwindigkeit zur Übertragung von Signalen als die Vakuumlichtgeschwindigkeit c. Dieses Postulat bezieht sich auf die Gruppengeschwindigkeit; denn, wie bereits in Abschnitt 2.3 erläutert wurde,

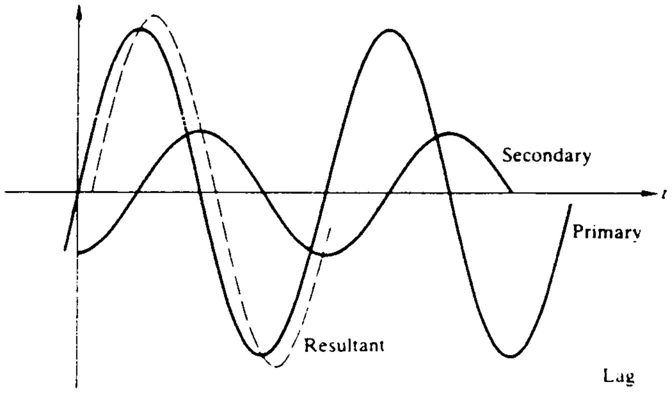


Abbildung 3.14: *Die Sekundärwelle besitzt eine negative Phasenverschiebung gegenüber der Primärwelle. (aus [13])*

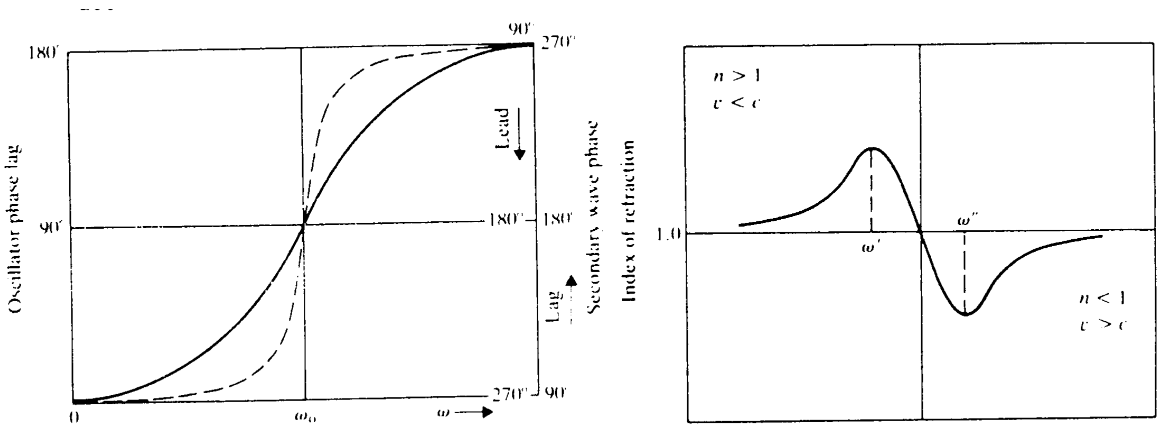


Abbildung 3.15: *Phasendifferenz ⇔ Frequenz der erzwungenen Oszillatorschwingung (aus [13])*

erfolgt der Energietransport einer Welle mit v_{gr}. Daher ist die Signalgeschwindigkeit mit der Gruppengeschwindigkeit gleichzusetzen.

Es war

$$v_{gr} = v_{ph} - \lambda \frac{dv_{ph}}{d\lambda}$$

der Zusammenhang zwischen Gruppen – und Phasengeschwindigkeit.

Der Brechungsindex nimmt in fast allen Medien für gewisse Frequenzen der einfallenden Wellen einen Wert $n(\lambda) < 1$ an. In diesen Fällen wird die Phasengeschwindigkeit der Welle größer als die Lichtgeschwindigkeit: $c_M = v_{ph} > c$.

Dies ist für normale Dispersion $\frac{dc_M}{d\lambda} = \frac{dv_{ph}}{d\lambda} > 0$ erlaubt, denn dann gilt

$$\boxed{c \geq v_{gr} = c_M - \lambda \, \frac{dc_M}{d\lambda}}$$

d.h. $v_{gr} \leq c$ kann auch für $c_M > c$ erfüllt werden.

Mathematische Diskussion der Dispersion

Wir wollen im folgenden die Änderung der Dielektrizitäts – und der Brechzahl mathematisch formulieren.

Der Eintritt einer elm. Welle in ein dielektrisches Medium bewirkt eine periodische Polarisation P, indem die elektrischen Ladungen des Mediums zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden. Wie läßt sich P mathematisch beschreiben?

Die verschiedenartigen Ladungsteilchen seien durch den Index n gekennzeichnet. Bezeichnen wir die Anzahl der jeweiligen geladenen Teilchen pro Volumeneinheit mit N_n, ihre Ladung mit q_n sowie ihre Verschiebung aus der Ruhelage mit x_n, so lautet die gesamte Polarisation

$$P = \sum_n P_n = \sum_n N_n \, q_n \, x_n \quad .$$

P ist das auf eine Volumeneinheit bezogene Dipolmoment, das von dem elektrischen Feld $\vec{E}$ der Primärwelle induziert wird.

Die auf eine Ladung wirkende anregende Kraft hat den Betrag

$$F_{Er} = q_n \, E$$

Die nahezu elastische Bindung des Ladungsteilchens an seine Ruhelage kann analog zur Mechanik durch die Hooksche Kraft

$$F_H = -\, k_n \, x_n \qquad\qquad k_n\text{: Federkonstante}$$

beschrieben werden.

Die Bewegung wird gehemmt durch die der Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft

$$F_R = -\, \beta_n \, \frac{dx_n}{dt}$$

Außerdem unterliegt das Teilchen mit der Masse m_n der Trägheitskraft

$$F_T = -\, m_n \, \frac{d^2 x_n}{dt^2}$$

Ganz analog zu den mechanischen Schwingungen können wir nun die Differentialgleichung aufstellen, welche die erzwungene Schwingung des Ladungsteilchens mathematisch erfaßt:

$$\underbrace{-\,m_n\,\frac{d^2x_n}{dt^2}}_{\text{Trägheitskraft}} + \underbrace{-\beta_n\,\frac{dx_n}{dt}}_{\text{Reibungskraft}} + \underbrace{-k_n\,x_n}_{\text{HOOKsche Kraft}} + \underbrace{q_n\,E}_{\substack{\text{Anregung}\\ \text{durch Licht}\\ \text{(treibende}\\ \text{Kraft)}}} = 0$$

Umstellen und Division durch m_n ergibt

$$\frac{d^2x_n}{dt^2} + \frac{\beta_n}{m_n}\,\frac{dx_n}{dt} + \frac{k_n}{m_n}\,x_n = \frac{q_n}{m_n}\,E$$

Wir setzen $\frac{\beta_n}{m_n} = 2\,\delta_n$ und $\frac{k_n}{m_n} = \omega_n^2$.

Dabei ist δ_n ein Maß für die Dämpfung der erzwungenen Schwingung. Die Größe $\omega_n = 2\,\pi\,\nu_n$ bezeichnet die Frequenz der Eigenschwingung eines Ladungsteilchens (BROWNsche Molekularbewegung).

Die anregende Welle sei von der Form

$$E = E_0\,e^{i\,\omega t} \quad ,$$

wobei ω die Kreisfrequenz der einfallenden Welle ist.

Damit lautet die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x_n}{dt^2} + 2\,\delta_n\,\frac{dx_n}{dt} + \omega_n^2\,x_n = \frac{q_n}{m_n}\,E_0\,e^{i\,\omega t}$$

Wir machen den komplexen Lösungsansatz

$$x_n(t) = x_{0_n}\,e^{i\,\omega t}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung führt unmittelbar zu

$$\left(-\,\omega^2 + 2\,i\,\omega\,\delta_n + \omega_n^2\right)\,x_{0_n} = \frac{q_n}{m_n}\,E_0$$

und damit zu der speziellen Lösung

$$x_n(t) = \frac{1}{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right) + 2\,i\,\omega\,\delta_n}\,\frac{q_n}{m_n}\,E$$

Diese komplexe Darstellung der erzwungenen Teilchenschwingung enthält deren Phasenverschiebung φ gegenüber dem anregenden $\vec{E}$ – Feld:

Aus der Zerlegung der komplexen Größe x_{0_n} in Betrag und Phase

$$x_{0_n} = |x_{0_n}|\,e^{i\,\varphi}$$

ergibt sich

$$|x_{0_n}| = \frac{1}{\left[\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)^2 + 4\,\delta_n^2\,\omega^2\right]^{1/2}}\,\frac{q_n}{m_n}\,E_0$$

als Amplitude der erzwungenen Schwingung sowie

$$\tan\varphi = -\frac{2\,\delta_n\,\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

als Phasendifferenz zwischen erzwungener Schwingung und anregender Welle. Hier ist ersichtlich, daß die Phasenverschiebung zwischen Primär – und Sekundärwelle von der Frequenz der Primärwelle abhängt.

Multiplizieren wir die Schwingungsgleichung

$$x_n(t) = \frac{1}{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right) + 2\,i\,\omega\,\delta_n}\,\frac{q_n}{m_n}\,E$$

auf beiden Seiten mit $N_n\,q_n$, so erhalten wir, da $N_n\,q_n\,x_n = P_n$ ist,

$$P_n = \frac{1}{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right) + 2\,i\,\omega\,\delta_n}\,\frac{N_n\,q_n^2}{m_n}\,E \quad .$$

Die gesamte Polarisation wird dann beschrieben durch

$$P = \sum_n P_n = \sum_n \frac{1}{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right) + 2\,i\,\omega\,\delta_n}\,\frac{N_n\,q_n^2}{m_n}\,E \quad .$$

Über die Beziehung

$$P = (\tilde{\varepsilon}_r - 1)\,\varepsilon_0\,E$$

gelangt man nun zu dem Ausdruck für die Dielektrizitätszahl, der die Reaktion des Mediums auf die externe elm. Welle angibt:

$$\boxed{\tilde{\varepsilon}_r = 1 + \sum_n \frac{1}{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right) + 2\,i\,\omega\,\delta_n}\,\frac{N_n\,q_n^2}{\varepsilon_0\,m_n}}$$

$\tilde{\varepsilon}_r$ ist hier eine komplexe Größe, da auch die Polarisation P komplex ist. Da für die reelle Dielektrizitätszahl $\varepsilon_r = n^2$ gilt, setzen wir

$$\tilde{\varepsilon}_r = n^2\,(1 - i\,\kappa)^2 \qquad\qquad (*)$$

Man nennt $\tilde{n} = n\,(1 - i\,\kappa)$ den **komplexen Brechungsindex**. Dabei bezeichnet n den reellen Brechungsindex des Mediums, die physikalische Bedeutung der Größe κ ist noch zu klären. Setzt man (∗) in den obigen Ausdruck für die komplexe Dielektrizitätszahl ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}_r = \tilde{n}^2 = n^2\,(1 - i\,\kappa)^2 &= 1 + \sum_n \frac{1}{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right) + 2\,i\,\omega\,\delta_n}\,\frac{N_n\,q_n^2}{\varepsilon_0\,m_n} \\
n^2\,\left(1 - 2\,i\,\kappa - \kappa^2\right) &= 1 + \sum_n \frac{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right) - 2\,i\,\omega\,\delta_n}{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)^2 + 4\,\omega^2\,\delta_n^2}\,\frac{N_n\,q_n^2}{\varepsilon_0\,m_n}
\end{aligned}$$

Wir spalten nun diesen Ausdruck in Real – und Imaginärteil auf.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,\tilde{\varepsilon}_r = n^2\,\left(1 - \kappa^2\right) &= 1 + \sum_n \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)^2 + 4\,\omega^2\,\delta_n^2}\,\frac{N_n\,q_n^2}{\varepsilon_0\,m_n} \\
\mathrm{Im}\,\tilde{\varepsilon}_r = -\,2\,n^2\,\kappa &= \sum_n \frac{-\,2\,\omega\,\delta_n}{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)^2 + 4\,\omega^2\,\delta_n^2}\,\frac{N_n\,q_n^2}{\varepsilon_0\,m_n}
\end{aligned}$$

Zur Verkürzung der Schreibweise sei an dieser Stelle eine weitere Bezeichnung eingeführt: Die Konstante

$$\omega_p = \left(\frac{N_n\,q_n^2}{\varepsilon_0\,m_n}\right)^{1/2}$$

gibt die sogenannte **Plasmafrequenz** an, mit der ein Gas freier Ladungsträger der Ladung q_n, der Masse m_n und der Teilchenzahldichte N_n gegen den Rest des Gases sowie gegen eine Hintergrundladungsverteilung entgegengesetzten Vorzeichens schwingt.

Damit lauten die Gleichungen

$$\begin{aligned}
n^2\,\left(1 - \kappa^2\right) &= 1 + \sum_n \frac{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)\,\omega_{pl}^2}{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)^2 + 4\,\omega^2\,\delta_n^2} \\
n^2\,\kappa &= \sum_n \frac{\omega\,\delta_n\,\omega_{pl}^2}{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)^2 + 4\,\omega^2\,\delta_n^2}
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich der reelle Brechungsindex und die Größe κ berechnen. Sind die Eigenfrequenzen ω_n und die Dämpfung δ_n bekannt, so erhält man $n = n(\omega)$ und $\kappa = \kappa(\omega)$. Man kann also den Verlauf der beiden Größen mit dem Frequenzspektrum der Primärwelle angeben.

Welche physikalische Bedeutung haben $\tilde{n}$ und κ ? Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ einer in Materie fortschreitenden, ebenen, elektromagnetischen Welle.

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= E_0\,e^{i\,(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = E_0\,e^{i\,(\omega t - k\,\frac{\vec{k}}{k}\,\vec{r})} \\
&= E_0\,e^{i\,(\omega t - k\,\vec{e}_k\,\vec{r})} = E_0\,e^{i\,\omega\,(t - \frac{k}{\omega}\,\vec{e}_k\,\vec{r})} \\
&= E_0\,e^{i\,\omega\,(t - \frac{1}{c_M}\,\vec{e}_k\,\vec{r})}
\end{aligned}$$

$\vec{e}_k = \frac{\vec{k}}{k}$: Einheitsvektor in Richtung $\vec{k}$

Wir beschreiben nun die Geschwindigkeitsänderung c/c_M formal durch den komplexen Brechungsindex.

$$\frac{c}{c_M} = \tilde{n} = n\,(1 - i\,\kappa)$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_0\, e^{i\,\omega\,\left(t - \frac{n}{c}\,(1 - i\,\kappa)\,\vec{e}_k\,\vec{r}\right)} \\ \vec{E} &= E_0\, e^{-\frac{\omega\,n\,\kappa}{c}\,\vec{e}_k\,\vec{r}}\, e^{i\,\omega\,\left(t - \frac{n}{c}\,\vec{e}_k\,\vec{r}\right)}\end{aligned}$$

Der komplexe Anteil $e^{i\,\omega\,\left(t - \frac{n}{c}\,\vec{e}_k\,\vec{r}\right)}$ des resultierenden Wellenausdruckes liefert die Information, daß sich die ebene Welle mit der Phasengeschwindigkeit $c_M = c/n$ in Richtung $\vec{k}$ fortpflanzt. Dabei beschreibt die reelle Brechzahl die Dispersion.

Zusätzlich zur Dispersion liegt hier ein weiteres Phänomen vor, welches durch den reellen Faktor $e^{-\frac{\omega\,n\,\kappa}{c}\,\vec{e}_k\,\vec{r}}$ ausgedrückt wird: Die Welle wird längs der Richtung $\vec{k}$ gedämpft, d.h. es findet Absorption statt.

Da die Intensität einer Welle proportional zum Quadrat der Amplitude ist, folgt für die Intensität einer elektromagnetischen Welle in Materie eine Gleichung der Form

$$I = I_0\, e^{-\,2\,\frac{\omega\,n\,\kappa}{c}\,\vec{e}_k\,\vec{r}}$$

D.h. die Absoption ist proportional zu $e^{-\,2\,\frac{\omega\,n\,\kappa}{c}}$. Die Größe $2\,\omega\,n\,\kappa/c$ wird als **Absorptionskoeffizient** bezeichnet, die Größe κ heißt **Absorptionsindex**.

Die Strecke $\alpha = c/\omega\,n\,\kappa$, nach der die Amplitude der Welle im Medium auf $1/e \approx 37\%$ abgesunken ist, nennt man **Absorptionslänge**.

$$\vec{E} = E_0\, e^{-\frac{\vec{e}_k\,\vec{r}}{\alpha}}\, e^{i\,\left(\omega t - \frac{\omega\,n}{c}\,\vec{e}_k\,\vec{r}\right)}$$

Damit lautet die Antwort auf die oben gestellte Frage: Der komplexe Brechungsindex $\tilde{n}$ sowie der Absorptionsindex κ beschreiben die selektive (frequenzabhängige) Absorption, welche eine elm. Welle in Materie erfährt.

Wir wollen nun den frequenzabhängigen Verlauf der Brechzahl $n = n(\omega)$ sowie des Absorptionsindexes $\kappa = \kappa(\omega)$ diskutieren:
Dabei beschränken wir uns zunächst auf den Spezialfall $n = 1$, d.h. in dem betrachteten Medium wird nur eine Art von Ladungsteilchen zu Schwingungen angeregt. Folglich tritt nur eine Resonanzfrequenz ω_1 auf.

Es ergeben sich die in Abbildung 3.16 dargestellten Kurven:

Man unterscheidet

$$\begin{aligned}\text{normale Dispersion:} \quad & \frac{dn}{d\omega} > 0 \text{ , d.h. } \frac{dn}{d\lambda} < 0 \\ \text{anomale Dispersion:} \quad & \frac{dn}{d\omega} < 0 \text{ , d.h. } \frac{dn}{d\lambda} > 0\end{aligned}$$

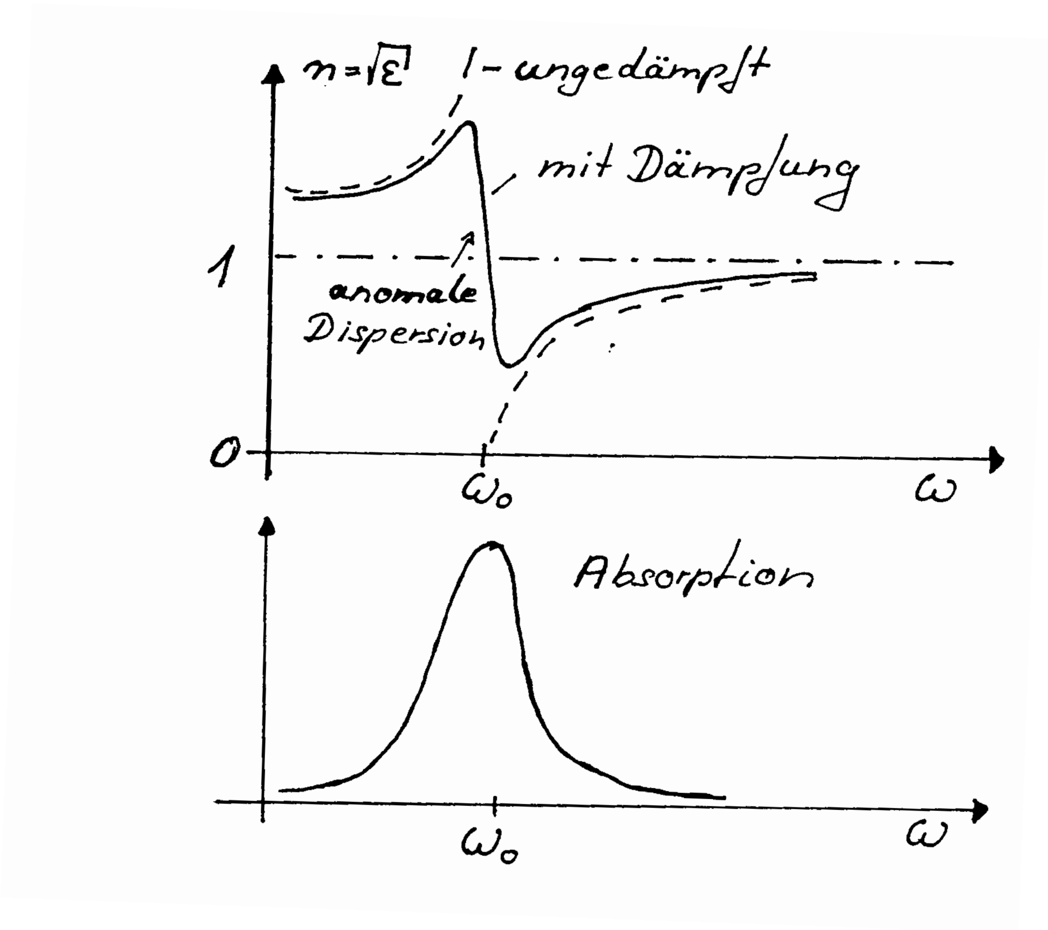


Abbildung 3.16: *Änderung des Brechungsindexes sowie des Absorptionskoeffizienten mit der Erregerfrequenz ω.*

Im Resonanzgebiet $\omega \approx \omega_1$ tritt maximale Absorption auf, da die Ladungsträger in diesem Frequenzbereich mit größter Amplitude schwingen. Bei genauer Untersuchung stellt man fest, daß das Maximum der Absorption nicht exakt an der Stelle $\omega = \omega_1$ liegt, sondern aufgrund der Dämpfung etwas verschoben ist.

Im allgemeinen Fall verschiedener Ladungsteilchen, $n = 1, 2, 3 \ldots$, d.h. mehrerer Resonanzen ω_1 , ω_2 , $\omega_3 \ldots$ überlagern sich die Resonanzkurven. Für fehlende Dämpfung $\delta = 0$ erhält man den in Abbildung 3.17 gezeigten Verlauf von n^2:

Charakteristische Merkmale des Verlaufes:

- Für sehr kleine Frequenzen nimmt der Brechungsindex n den statisch gemessenen Wert $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ an.
- Für sehr hohe Frequenzen (ab dem Bereich der Röntgenstrahlung) oberhalb des letzten Resonanzgebietes gilt $\lim_{\omega\to\infty} n(\omega) = 1$.

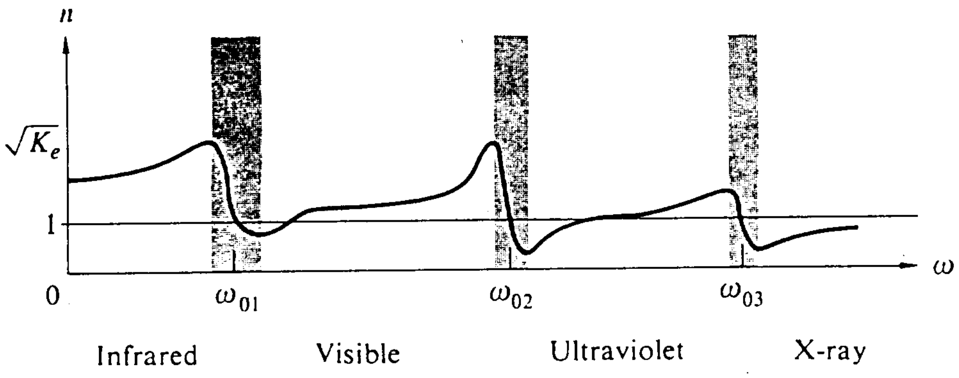


Abbildung 3.17: *Verlauf des Brechungsindexes mit der Erregerfrequenz. (aus [13])*

- Die Resonanzgebiete $\omega \approx \omega_i$ (abgedunkelte Bereiche im Bild) heißen **Absorptionsbande**. Hier findet anomale Dispersion statt. Die Absorption ist maximal.

Wir haben die Erläuterungen zur Dispersion allgemein unter Voraussetzung verschiedener Ladungsteilchen vorgenommen. Welche Schwingungsvorgänge werden nun konkret angeregt?

Im Bereich zwischen Infrarot – und Röntgenlicht sind dies hauptsächlich zwei Vorgänge:

1. **Ionenschwingung**
   Falls im Medium die Bildung von Ionen vorliegt, schwingen diese gegeneinander.

   Bsp.: NaCl $\Rightarrow$ $Na^+ \Leftrightarrow Cl^-$

   Aufgrund der Größe der Ionenmassen ist die Resonanzfrequenz niedrig, sie liegt im infraroten Bereich.

2. **Elektronenresonanzen**
   Elektronen besitzen eine geringe Masse, hier treten Resonanzen im Gebiet zwischen sichtbarem Licht und Röntgenstrahlung auf. Dabei regt das sichtbare Licht nur die äußeren Elektronen der Atomhülle an. Die Resonanzen der weiter innen liegenden, stärker gebundenen Elektronen liegen im höherfrequenten Bereich (Röntgenlicht).

3.8 Energiedichte einer elektromagnetischen Welle

Zum Aufbau von elektrischen sowie magnetischen Feldern wird Energie benötigt. Im vergangenen Semester wurde bereits folgendes hergeleitet:

$$\begin{aligned} \text{elektrische Energiedichte in Materie:} \quad & w_{el} = \frac{1}{2}\,\vec{E}\,\vec{D} \\ \text{magnetische Energiedichte in Materie:} \quad & w_m = \frac{1}{2}\,\vec{H}\,\vec{B} \end{aligned}$$

Für isotrope Stoffe gilt
$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_r\,\varepsilon_0\,\vec{E} \\ \vec{B} &= \mu_r\,\mu_0\,\vec{H} \end{aligned}$$

Damit lauten die Energiedichten einer elm. Welle in isotroper Materie

$$\begin{aligned} w_{el} &= \frac{1}{2}\,\varepsilon_r\,\varepsilon_0\,E^2 \\ w_m &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\mu_r\,\mu_0}\,B^2 \end{aligned}$$

Die gesamte Energiedichte berechnet sich zu

$$\begin{aligned} w &= w_{el} + w_m \\ w &= \frac{1}{2}\,\varepsilon_r\,\varepsilon_0\,E^2 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\mu_r\,\mu_0}\,B^2 \end{aligned}$$

Wir betrachten nun ebene Wellen mit

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix}$$

Für harmonische, ebene Wellen hatten wir die Gültigkeit der Beziehung $E = c\,B$ nachgewiesen. Mit $c = 1/\sqrt{\varepsilon_r\,\varepsilon_0\,\mu_r\,\mu_0}$ lassen sich folgende Umformungen vornehmen:

$$\begin{aligned} w_m &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\mu_r\,\mu_0}\,B^2 \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\mu_r\,\mu_0}\,\frac{1}{c^2}\,E^2 \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\mu_r\,\mu_0}\,\varepsilon_r\,\varepsilon_0\,\mu_r\,\mu_0\,E^2 \\ &= \frac{1}{2}\,\varepsilon_r\,\varepsilon_0\,E^2 \\ &= w_{el} \end{aligned}$$

Dies gilt allgemein für beliebige elm. Wellen!
Damit ergibt sich für die <u>Energiedichte einer elm. Welle in isotroper Materie</u>

$$\boxed{w_m = w_{el} = \frac{1}{2}\,w}$$

$$\boxed{w = \frac{1}{\mu_r\,\mu_0}\,B^2 = \varepsilon_r\,\varepsilon_0\,E^2}$$

Speziell für harmonische, ebene Wellen läßt sich dies mit $E = c\,B$ umformen zu

$$\boxed{w = \varepsilon_r\,\varepsilon_0\,c\,E\,B} \quad .$$

Die Intensität einer elektromagnetischen Welle

Wir haben die Intensität bereits bei der Behandlung mechanischer Wellen definiert:

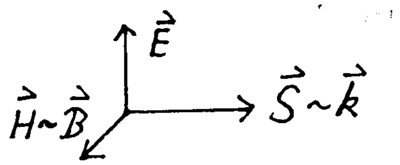
Intensität einer Welle: $I = w\,c$

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{\text{Energie}}{\text{Volumen}} \\ c &= \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}} \end{aligned}\right\} \quad I = \frac{\text{Energie}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}}$$

Wendet man diese Definition auf die elm. Wellen an, so folgt

$$I = \varepsilon_r\,\varepsilon_0\,c^2\,E\,B = \frac{1}{\mu_r\,\mu_0}\,E\,B = E\,H$$

Um den Energietransport einer elm. Welle vektoriell beschreiben zu können, führt man den sogenannten **Poynting – Vektor** ein,



$\boxed{\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}}$ Poynting – Vektor

benannt nach dem Physiker J.H.Poynting (1852 – 1914).
Er gibt die Größe der Energiestromdichte sowie die Richtung des Energiestromes einer elektromagnetischen Welle an.

In welche Richtung weist $\vec{S}$ bei einer ebenen Welle?
Für eine ebene elm. Welle gilt $\vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{k}$, daher zeigt $\vec{S}$ mit $\vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{S}$ in die Richtung $\vec{k}$ der Wellenausbreitung. Die Energie fließt also längs der Fortpflanzungsrichtung der Welle.

Der Betrag des Poynting – Vektors liefert die Intensität der Welle:

$$|\vec{S}| = S = E\,H = I = w\,c \qquad \text{Einheit: } [S] = 1\,\frac{\text{Joule}}{\text{m}^2\,\text{s}}$$

Der Poynting – Vektor $\vec{S}$ ist eine sehr wichtige Größe in der Elektrodynamik und Elektrotechnik.

Der Strahlungsdruck

Im Jahre 1619 erkennt der Physiker Kepler, daß die Krümmung eines Kometenschweifes (von der Sonne weg) zurückzuführen ist auf den Strahlungsdruck, welcher durch die von der Sonne ausgehende elektromagnetische Strahlung entsteht.

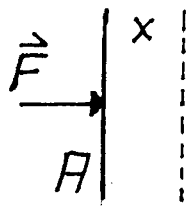
Diese mit der elektromagnetischen Strahlung assoziierte Größe ist verantwortlich für verschiedene weitere Phänomene der Physik. So ist der Strahlungsdruck auch von Bedeutung für die Stabilität großer Sterne gegen den Gravitationsdruck.

Der Strahlungsdruck wurde von mehreren Wissenschaftlern experimentell nachgewiesen und von MAXWELL qualitativ formuliert.

Wie läßt sich der Strahlungsdruck formal beschreiben?

Allgemein gilt:

$$\text{Druck} \quad P = \frac{F}{A} = \frac{F\,x}{V} = \frac{W}{V} = w \quad \text{Energiedichte}$$



Dies gilt auch für den von elm. Wellen erzeugten Stahlungsdruck P unter der Voraussetzung, daß die Strahlung senkrecht auf die Grenzfäche des Mediums auftrifft und vollständig absorbiert wird:

$$P = w = \frac{I}{c} = \frac{S}{c}$$

In vektorieller Schreibweise erhält man

$$\boxed{\vec{P} = \frac{\vec{S}}{c}} \qquad \underline{\text{Strahlungsdruck}}$$

Als Beispiel berechnen wir den Strahlungsdruck der Sonnenstrahlung auf der Erdoberfläche. Die Intensität der Sonnenstrahlung an der Erdoberfläche beträgt $I = 1330\,\mathrm{W/m^2}$ (Solarkonstante). Wir nehmen nun an, der Strahlungseinfall sei senkrecht und es finde totale Absorption statt. Dann ergibt sich der Strahlungsdruck zu

$$P = \frac{I}{c} = \frac{1330\,\mathrm{W/m^2}}{3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}} = 4,4 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}}$$

Man vergleiche dieses Ergebnis mit dem Atmosphärendruck, der etwa $10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}}$ beträgt!

Der Strahlungsimpuls

Die Kraft, die von der Strahlung auf die Oberfläche A ausgeübt wird, beträgt

$$F = A\,P = A\,\frac{S}{c} = \frac{dp}{dt}$$

Dabei ist p der Impuls, den die auf A auftreffenden elm. Wellen tragen. Betrachtet man den Impuls pro Volumeneinheit $p_V = p/V$, so ergibt sich

$$\frac{p_V\, dV}{dt} = p_V\, A\, \frac{dx}{dt} = p_V\, A\, c = A\, \frac{S}{c}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{p}_V = \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{\vec{P}}{c}} \quad ; \quad p_V = \frac{w}{c} \quad \text{Impuls einer elm. Welle}$$

Eine elm. Welle trägt also einen Impuls, dessen Dichte mit der Energiedichte direkt über die Beziehung

$$p_V = \frac{w}{c}$$

verknüpft ist. Wie wir später sehen werden, fand EINSTEIN zwischen Energie und Impuls folgenden Zusammenhang:

$$E^2 = (c\, p)^2 + (m_0\, c^2)^2 \qquad m_0\text{: Ruhemasse}$$

Er interpretierte die Erscheinung "Licht" nicht als elm. Welle, sondern als Strom von Energiepaketen, den **Photonen**, welche korpuskulare Eigenschaften besitzen. Nach seiner Theorie besitzen die Photonen die Ruhemasse $m_0 = 0$, was zu der Beziehung

$$E^2 = c^2\, p^2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{E = p\, c}$$

führt. Die dualistischen Modelle von MAXWELL und EINSTEIN liefern also für den Zusammenhang zwischen Energie und Impuls von Licht übereinstimmende Ergebnisse.

Kapitel 4

Wechselstrom und elektromagnetische Schwingungen

4.1 Wechselstrom und Wechselstromwiderstände

Der Inhalt dieses ersten Unterkapitels ist bereits im vorigen Semester (siehe Skript II 5.7 Wechselstrom) behandelt worden. Wir werden daher hier die in der Vorlesung Physik II gewonnenen Ergebnisse nur kurz wiederholen.

Erzeugung von Wechselstrom

Versuch: Durch Drehung einer Leiterschleife (Spule) im annähernd homogenen Magnetfeld eines Permanentmagneten wird eine Wechselspannung induziert (siehe Abb. 4.1). Ihr zeitlicher Verlauf wird auf einem Kathodenstrahloszillographen aufgezeichnet. Es ergibt sich eine Sinuskurve.

Die Leiterschleife mit der Fläche A rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω im Magnetfeld $\vec{B}$. Die induzierte Spannung berechnet sich zu

$$\begin{aligned} U_i(t) &= -\frac{d\psi_n}{dt} = -\frac{d(\vec{B}\,\vec{A})}{dt} = -\frac{d(B\,A\,\cos\omega t)}{dt} \\ U_i(t) &= B\,A\,\omega\,\sin\omega t = U_m\,\sin\omega t \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet U_m den Scheitelwert der erzeugten Sinusspannung, welcher zu unterscheiden ist von $U_0 = U(t=0)$, dem Anfangswert der Spannung.

Bei Vorliegen eines geschlossenen Stromkreises mit rein OHMschem Widerstand wird nach dem OHMschen Gesetz $U = R\,I$ ein Wechselstrom der Form

$$I(t) = \frac{U_m}{R}\,\sin\omega t = I_m\,\sin\omega t$$

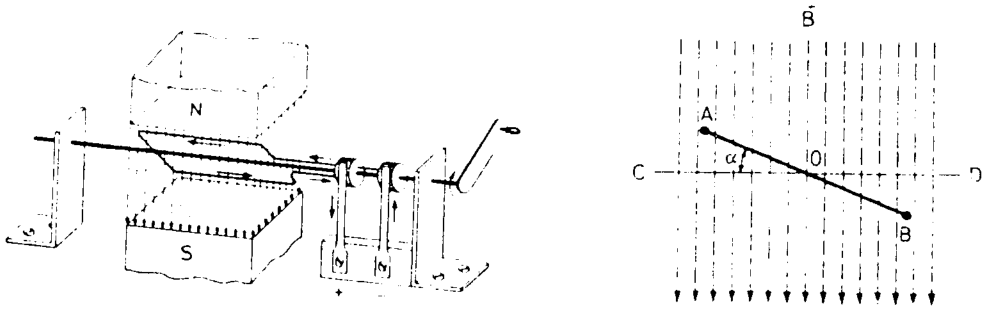
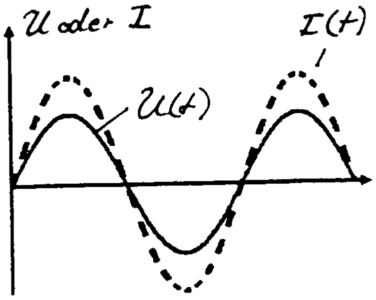


Abbildung 4.1: *Erzeugung einer Wechselspannung durch Drehung einer Leiterschleife im homogenen magnetischen Feld. (aus [3])*



erzeugt. Bei rein Ohmschem Widerstand sind also Strom und Spannung des Wechselstromkreises in Phase.

Enthält der Wechselstromkreis kapazitive sowie induktive Widerstände, so tritt abhängig von deren Größe eine Phasenverschiebung φ zwischen der angelegten Wechselspannung und dem durch die Bauelemente fließenden Wechselstrom auf. Dieser hat die allgemeine Form

$$I(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$U(t)$ und $I(t)$ sind sogenannte Momentanwerte der sich periodisch in Stärke und Richtung ändernden Größen Wechselspannung und Wechselstrom. Die Wechselstromgrößen sind bestimmt durch Scheitelwert und Phasenlage.

Um solche Größen messen und miteinander vergleichen zu können, führt man sogenannte Effektivwerte ein. Dabei handelt es sich um die zeitlich quadratischen Mittelwerte der entsprechenden elektrischen Größen.

Wir berechnen die Effektivwerte von Wechselstrom und – spannung, I_{eff} und U_{eff}, bei rein OHMschem Widerstand:

$$\begin{aligned} I_{eff} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2(t)\,dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \, \sin^2 \omega t \, dt} \\ &= I_m \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t \, dt} \\ &= I_m \sqrt{\frac{T}{2T}} \\ &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \cdot I_m \end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U^2(t)\,dt} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot U_m$$

Diese Effektivwerte entsprechen der anliegenden Spannung und der Stromstärke eines Gleichstromes, dessen Leistung gleich der mittleren Leistung des Wechselstromes bei rein OHMschem Widerstand ist. Es gilt nämlich:

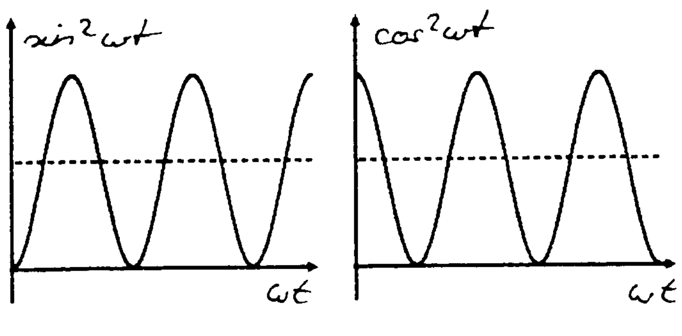
Die Leistung $P(t) = U(t)\,I(t)$ des Wechselstromes lautet bei rein OHMschem Widerstand

$$P(t) = U_m \, I_m \, \sin^2 \omega t$$

Wir bilden den zeitlich quadratischen Mittelwert

$$\overline{P} = U_m \, I_m \, \overline{\sin^2 \omega t}$$

Folgende Überlegungen ersetzen die Berechnung des Integrals:
Es gilt $\overline{\sin^2 \omega t} = \overline{\cos^2 \omega t}$.



Aus $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ folgt $\cos^2 \alpha = 1/2\,(\cos 2\alpha + 1)$. Also gilt $\overline{\sin^2 \omega t} = \overline{\cos^2 \omega t} = \overline{1/2\,(\cos 2\omega t + 1)} = 1/2\,(\overline{\cos 2\omega t} + 1)$.

Mit $\overline{\cos 2\omega t} = 0$ lautet das Ergebnis

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\, U_m\, I_m = \frac{U_m}{\sqrt{2}}\, \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$\overline{P} = U_{eff}\, I_{eff}$$

Zum besseren Verständnis des Wechselstromkreises sowie zur Vereinfachung der Rechnungen werden wir im folgenden Wechselstrom und – spannung sowie die Wechselstromwiderstände als komplexe Größen ausdrücken und in Form von Zeigern in der GAUSSschen Zahlenebene veranschaulichen. Dies hat außerdem den Vorteil, daß gleichzeitig Betrag und Phase der komplexen Größe dargestellt werden können. Wir kennzeichnen die komplexen Größen mit einer Schlangenlinie.

Die komplexe Wechselstromgröße $\tilde{Z}$

$$\tilde{Z} = |\tilde{Z}|\, e^{i\,\varphi} \quad \text{bzw. mit } |\tilde{Z}| = Z \qquad \tilde{Z} = Z\, e^{i\,\varphi}$$

hat nach der EULERschen Formel

$$Z\, e^{i\,\varphi} = Z\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$$

folgende Darstellung in der GAUSSschen Zahlenebene:

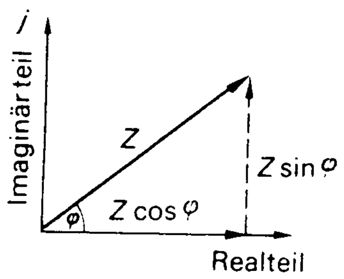


Abbildung 4.2: Darstellung komplexer Größen im Zeigerdiagramm. (aus [14])

Diese Darstellungsweise soll nun am Beispiel des Wechselstroms erläutert werden. Es ist

$$I(t) = I_m\, \sin(\omega t + \varphi)$$

Die Fortsetzung ins Komplexe lautet

$$\tilde{I}(t) = I_m\, e^{i\,(\omega t + \varphi)} = I_m\, e^{i\,\varphi}\, e^{i\,\omega t}$$

Mit $I_m\, e^{i\,\varphi} = \tilde{I_m}$ wird dies zu

$$\tilde{I}(t) = \tilde{I_m}\, e^{i\,\omega t}$$

Der vorangehend definierte Strom $I_m\, e^{i\,\varphi} = \tilde{I_m}$ wird im Zeigerdiagramm in Betrag und Phase dargestellt, d.h. als Pfeil der Länge I_m, welcher mit der reellen Achse den Winkel φ einschließt.
Der Wechselstrom $\tilde{I} = \tilde{I_m}\, e^{i\,\omega t} = I_m\, e^{i\,\varphi}\, e^{i\,\omega t}$ wird daher durch einen Zeiger der Länge I_m ausgedrückt, welcher mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, wobei der Start zur Zeit $t = 0$ mit der Phase φ erfolgt.

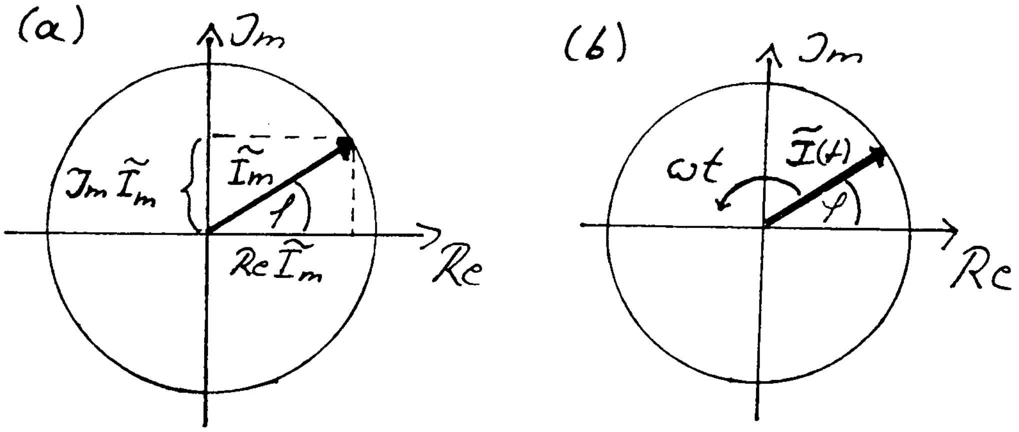


Abbildung 4.3: (a) Darstellung eines Stromes mit konstanter Phase, (b) Darstellung eines Wechselstromes im Zeigerdiagramm. (aus [7])

Nur der Realteil einer komplexen Wechselstromgröße ist physikalisch sinnvoll. Man bezeichnet den Realteil daher auch als **Wirkanteil**, den Imaginärteil als **Blindanteil** der elektrischen Größe. Die Summe beider Anteile im Zeigerdiagramm ergibt als komplexen Zeiger die **Scheingröße** (siehe Abb. 4.4).

Die Darstellung im Zeigerdiagramm bietet die Möglichkeit, Wechselstromgrößen vektoriell zu addieren. Wie sehr dies das Verständnis der Zusammenhänge im Wechselstromkreis erleichtert, wird deutlich am Beispiel der

Sternschaltung des Drehstroms

Im öffentlichen Stromnetz fließt ein sogenannter **Dreiphasenstrom** oder **Drehstrom** (siehe Abb. 4.5(b)). Dieser wird verursacht durch drei Wechselspannungen $U_1(t)$, $U_2(t)$ und $U_3(t)$, die jeweils um 120° ($2\pi/3$) phasenverschoben sind. Sie werden im Wechselstromgenerator erzeugt durch drei Spulen, welche sternförmig angeordnet sind (siehe Abb. 4.5(a)).

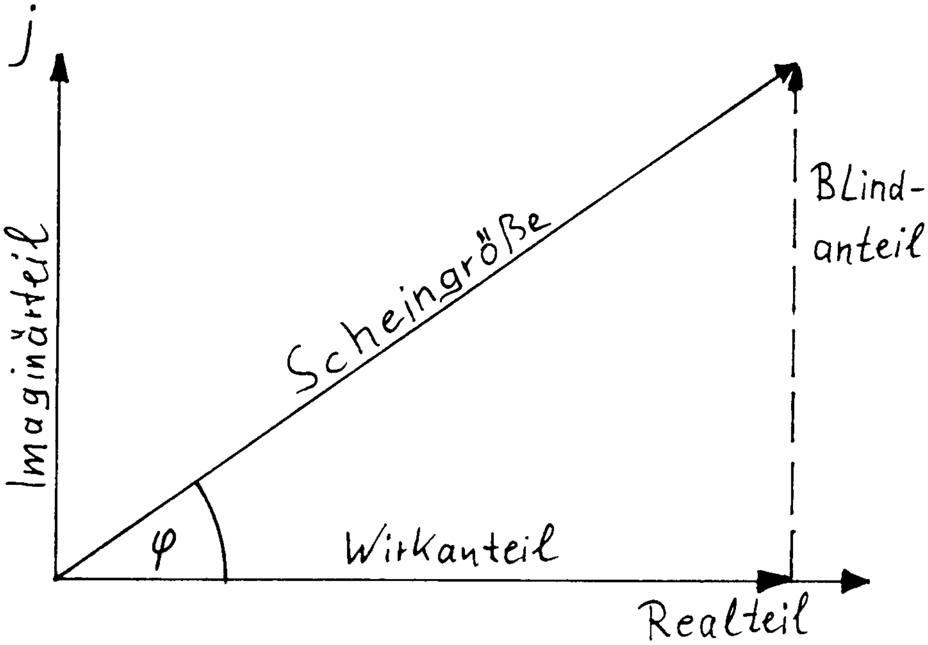


Abbildung 4.4: *Bezeichnung elektrischer Wechselstromgrößen im Zeigerdiagramm. (aus [14])*

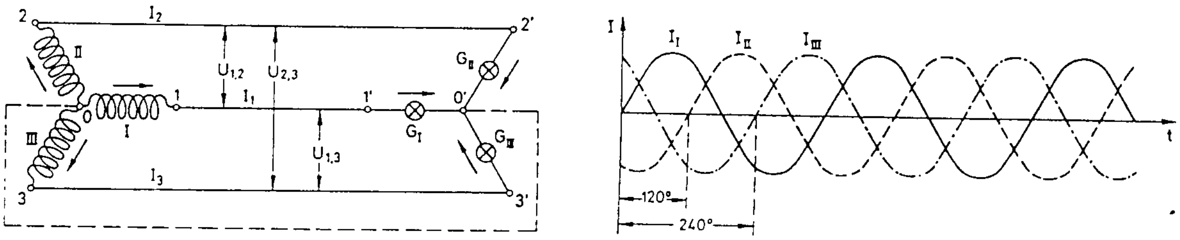


Abbildung 4.5: *(a) Drehstrom–Sternschaltung, (b) Dreiphasenstrom (aus [3])*

Die durch die Spulen fließenden Ströme sind

$$\begin{aligned} I_1(t) &= I_m \sin \omega t \\ I_2(t) &= I_m \sin(\omega t + 2\pi/3) \\ I_3(t) &= I_m \sin(\omega t + 4\pi/3) \end{aligned}$$

Für $|I_1(t)| = |I_2(t)| = |I_3(t)|$ verschwindet der Mittelpunktsstrom: $I_0 = 0$. Dies läßt sich mit Hilfe des Zeigerdiagramms leicht einsehen:
Es gilt $\vec{I_2} + \vec{I_3} = -\vec{I_1}$, also $I_1 + I_2 + I_3 = I_0 = 0$.

4.2 Komplexe Widerstände

Es wurde bereits erwähnt, daß Induktivität und Kapazität im Wechselstromkreis eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung hervorrufen. Das Verhalten dieser beiden Wechselstromwiderstände soll nun genauer untersucht werden.

4.2.1 Kapazitiver Widerstand (Kondensator)

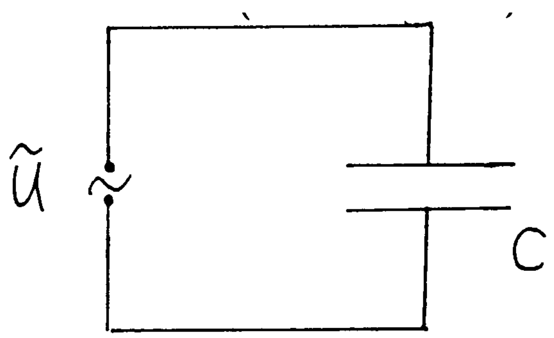


Abbildung 4.6: Kondensator im Wechselstromkreis

Der Zusammenhang zwischen Ladung und Spannung am Kondensator ist gegeben durch

$$\tilde{U}(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

Mit $\tilde{I}(t) = \dfrac{dQ(t)}{dt} = C\,\dfrac{d\tilde{U}(t)}{dt}$ und $\tilde{U} = \tilde{U}_m\, e^{i\,\omega t}$ folgt

$$\tilde{I}(t) = C\,\frac{d\left(\tilde{U}_m\, e^{i\,\omega t}\right)}{dt} = i\,\omega\, C\, \tilde{U}_m\, e^{i\,\omega t}$$
$$\tilde{I}(t) = i\,\omega\, C\, \tilde{U}(t) \;\Rightarrow\; \tilde{U}(t) = \frac{1}{i\,\omega\, C}\,\tilde{I}(t)$$

Aus $\tilde{U} = \tilde{Z}\,\tilde{I}$ folgt der **komplexe kapazitive Widerstand**

$$\boxed{\tilde{Z}_C = \frac{1}{i\,\omega\, C}}$$

Der kapazitive Widerstand Z_C ist frequenzabhängig, er nimmt mit steigender Frequenz proportional zu $1/\omega$ ab.

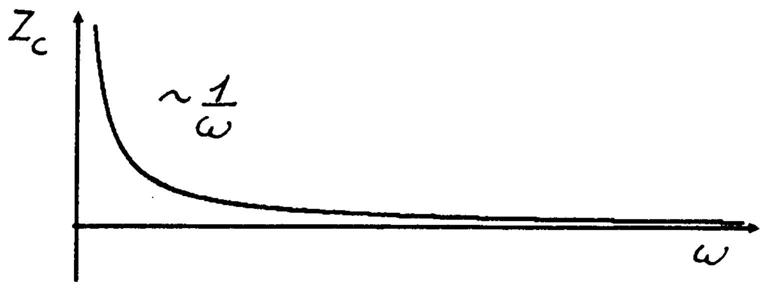


Abbildung 4.7:

<u>Welche Phasendifferenz besteht zwischen Strom und Spannung?</u>

Es ist $\tilde{I} = i\,\omega\, C\, \tilde{U}$. Mit $i = e^{i\,\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi}{2}$ folgt

$$\tilde{I} = e^{i\,\frac{\pi}{2}}\,\omega\, C\, \tilde{U} \quad ,$$

d.h. der Strom ist gegenüber der Spannung um $\varphi = +\,\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben.

Der Strom eilt der Spannung um $\pi/2$ voraus (s. Abb. 4.8).

4.2.2 Induktiver Widerstand (Spule)

Nach dem Induktionsgesetz gilt

$$\tilde{U}_{ind}(t) = -\,L\,\frac{d\tilde{I}(t)}{dt}$$

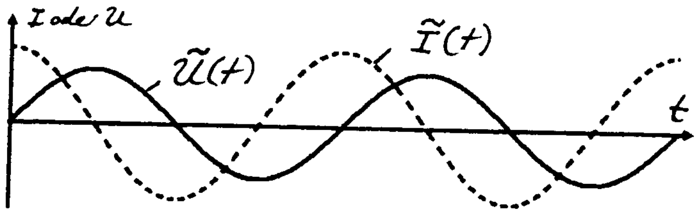


Abbildung 4.8:

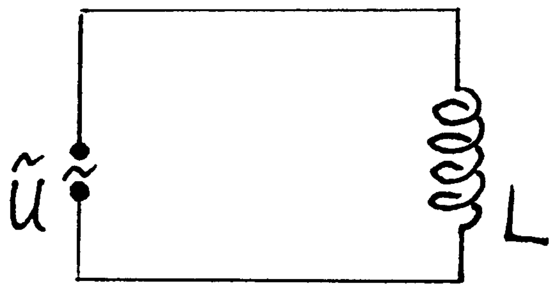


Abbildung 4.9: Spule im Wechselstromkreis

Mit $\tilde{U}_{ind}(t) = -\tilde{U}$ und $\tilde{U}(t) = \tilde{U}_m\, e^{i\,\omega t}$ wird daraus

$$\begin{aligned} L\,\frac{d\tilde{I}(t)}{dt} &= \tilde{U}_m\, e^{i\,\omega t} \\ \frac{d\tilde{I}(t)}{dt} &= \frac{\tilde{U}_m}{L}\, e^{i\,\omega t} \end{aligned}$$

Integration ergibt

$$\tilde{I}(t) = +\frac{1}{i\,\omega\,L}\,\tilde{U}_m\, e^{i\,\omega t} = \frac{1}{i\,\omega\,L}\,\tilde{U}(t)$$

Aus $\tilde{U} = i\,\omega\,L\,\tilde{I}$ ergibt sich der **komplexe induktive Widerstand**

$$\boxed{\tilde{Z}_L = i\,\omega\,L}$$

Der induktive Widerstand Z_L wächst proportional zur Frequenz ω.

<u>Phasenverschiebung zwischen Wechselstrom und – spannung bei der Induktivität:</u>

Es ist

$$\tilde{I}(t) = \frac{1}{i\,\omega\,L}\,\tilde{U}(t) = (-\,i)\,\frac{1}{\omega\,L}\,\tilde{U}(t)$$

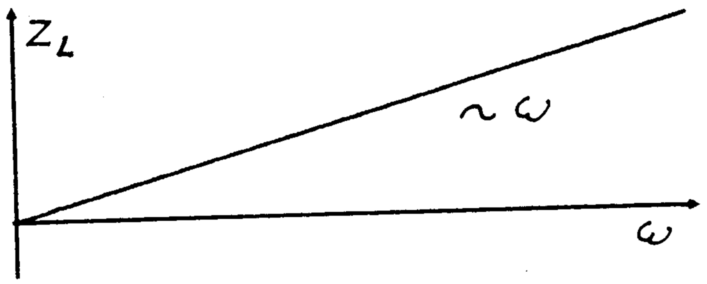


Abbildung 4.10:

Mit $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} - i\,\sin\frac{\pi}{2}$ läßt sich dies umschreiben zu

$$\tilde{I}(t) = \frac{1}{\omega\, L}\, e^{-i\frac{\pi}{2}}\, \tilde{U}(t) \;\; ,$$

d.h. der Strom ist gegenüber der Spannung um $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben.

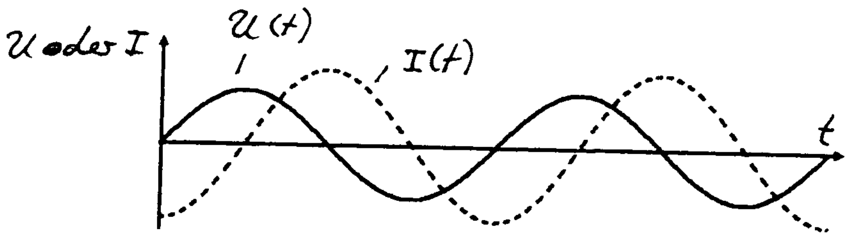


Abbildung 4.11:

Der Strom hinkt um $\pi/2$ hinter der Spannung her.
Die Phasenunterschiede lassen sich experimentell beobachten:

Versuch: Generator für den langsamen Wechselstrom

Kondensator und Spule werden einzeln an den langsamen Generator (Aufbau siehe Abb. 4.12) angeschlossen. Strom – und Spannungsmessung für den jeweiligen Verbraucher können gleichzeitig in der Projektion beobachtet werden:

a) Beim Kondensator eilt der Strom der Spannung voraus.

b) Bei der Spule hinkt der Strom der Spannung hinterher.

Die komplexen Widerstände $\tilde{Z}_C$ und $\tilde{Z}_L$ sind rein imaginär. Man bezeichnet sie als **Blindwiderstände**. Im Gegensatz zum reellen, ohmschen Widerstand R, dem **Wirkwiderstand**, wird in ihnen keine Stromwärme erzeugt (siehe später).

Kombination von Wechselstromwiderständen

Schaltet man einen kapazitiven, induktiven und ohmschen Widerstand in Reihe, so läßt sich der resultierende **Scheinwiderstand**, auch **Impedanz** genannt, durch vektorielle Addition im Zeigerdiagramm ermitteln (siehe Abb. 4.14).

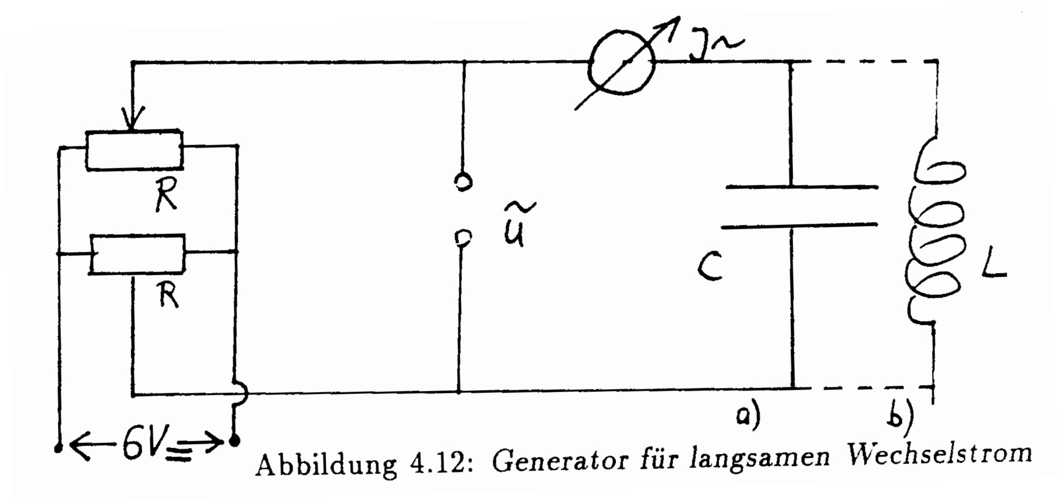


Abbildung 4.12: Generator für langsamen Wechselstrom

Abbildung 4.12: *Generator für langsamen Wechselstrom*

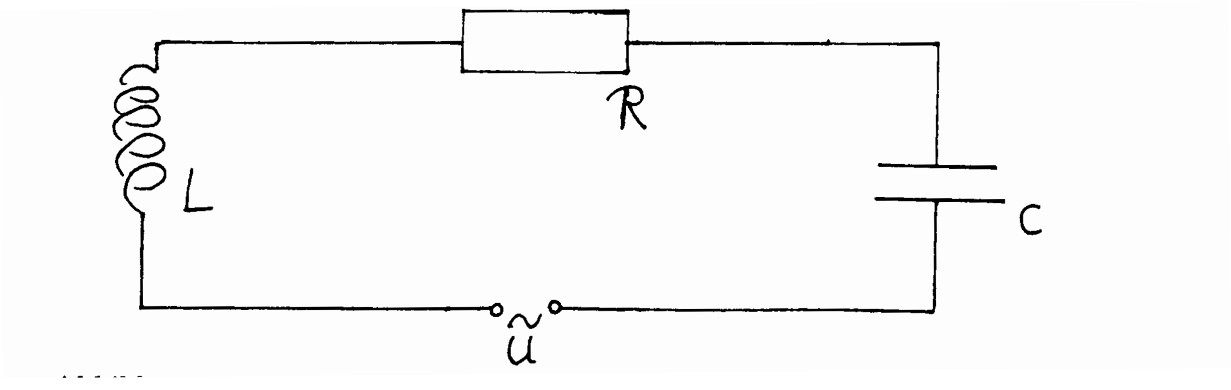


Abbildung 4.13: *Reihenschaltung von Widerständen im Wechselstromkreis*

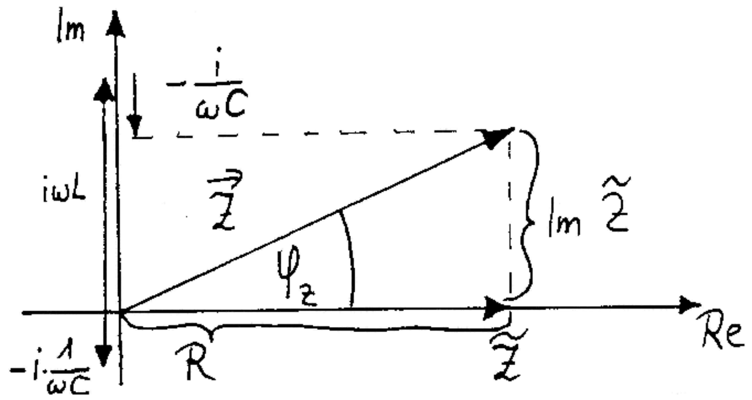


Abbildung 4.14: *Vektorielle Addition im Zeigerdiagramm*

4.3 Schwingkreise

4.3.1 Der ungedämpfte Schwingkreis ($R = 0$)

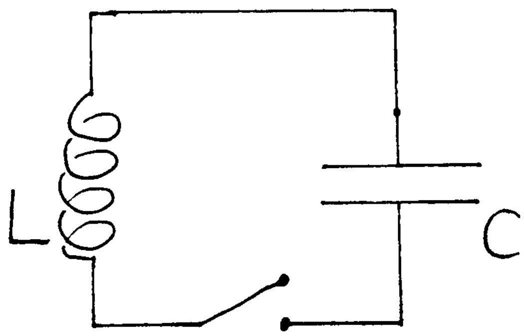


Abbildung 4.15: *Ungedämpfter Schwingkreis*

Wir betrachten die in Abbildung 4.15 gezeigte Schaltung. Zur Zeit $t = 0$ sei der Kondensator geladen und der Schalter S werde geschlossen. Dann gilt

$$\tilde{U}_L + \tilde{U}_C = 0 \quad .$$

Am Kondensator fällt die Spannung $\tilde{U}_C = Q/C$ ab, die Spannung an der Spule ist $\tilde{U}_L = L\, d\tilde{I}/dt$. Es gilt also

$$L\,\frac{d\tilde{I}}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

Differenzieren wir nach t und setzen $dQ/dt = \tilde{I}$, so erhalten wir für das Verhalten des

Wechselstromes die folgende homogene Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{d^2\tilde{I}}{dt^2} + \frac{1}{L\,C}\,\tilde{I} = 0$$

Dies ist eine Schwingungsgleichung, wie wir sie in ähnlicher Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\,x = 0$$

bereits in der Mechanik kennengelernt haben. Der Vergleich der beiden Gleichungen ergibt

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}}$$

als Kreisfrequenz des Wechselstromes $\tilde{I}$, der nach Schließen des Schalters im Schaltkreis schwingt. Da $\omega = 2\,\pi\,\nu = 2\,\pi\,1/T$ ist, gilt für die Frequenz bzw. für die Schwingungsdauer

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\,\pi}\,\frac{1}{\sqrt{L\,C}}}$$

Mit $\tilde{I}(t) = \tilde{I}_m\,e^{i\,\omega_0 t}$ folgt aus $-\tilde{U}_C = \tilde{U}_L = L\,d\tilde{I}/dt$ für die an den Bauelementen abfallenden Spannungen

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_L(t) &= i\,\omega_0\,L\,\tilde{I}(t) = e^{i\,\frac{\pi}{2}}\,\omega_0\,L\,\tilde{I}(t) \\
\tilde{U}_C(t) &= -\,i\,\omega_0\,L\,\tilde{I}(t) = e^{-\,i\,\frac{\pi}{2}}\,\omega_0\,L\,\tilde{I}(t)
\end{aligned}$$

$\tilde{U}_L$ ist gegenüber $\tilde{I}$ um $\varphi = +\,\pi/2$ phasenverschoben, $\tilde{U}_C$ besitzt gegenüber $\tilde{I}$ die Phasenverschiebung $\varphi = -\,\pi/2$.

Bei der betrachteten Serienschaltung von Spule und Kondensator, dem einfachsten Fall eines **Schwingkeises**, entstehen freie, elektromagnetische Schwingungen.

Um die Analogie zu mechanischen Schwingungen zu verdeutlichen, werden wir nun energetische Betrachtungen durchführen, wobei wir auf aus dem zweiten Semester bekannte Formeln zurückgreifen.

Energie der Spule:

$$\begin{aligned}
W_L &= \frac{1}{2}\,L\,I^2 \\
&= \frac{1}{2}\,L\,\left[Re\,\left(\tilde{I}\right)\right]^2 \\
&= \frac{1}{2}\,L\,I_m^2\,\cos^2\omega_0 t
\end{aligned}$$

Energie des Kondensators:

$$\begin{aligned}
W_C &= \frac{1}{2}\,C\,U_C^2 = \frac{1}{2}\,C\,\left[Re\,\left(\tilde{U}_C\right)\right]^2 \\
&= \frac{1}{2}\,C\,\left[\text{Ł}\,\frac{dI}{dt}\right]^2 \\
&= \frac{1}{2}\,C\,L^2\,I_m^2\,\omega_0^2\,\sin^2\omega_0^2 t \\
&= \frac{1}{2}\,C\,L^2\,\left(\frac{1}{LC}\right)\,I_m^2\,\sin^2\omega_0 t = \frac{1}{2}\,L\,I_m^2\,\sin^2\omega_0 t
\end{aligned}$$

Aus dem Vergleich der Formeln erkennt man, daß zwischen der Energie der Spule (magnetische Energie!) und der Energie des Kondensators (elektrische Energie!) eine Phasendifferenz von $\frac{\pi}{2}$ besteht.

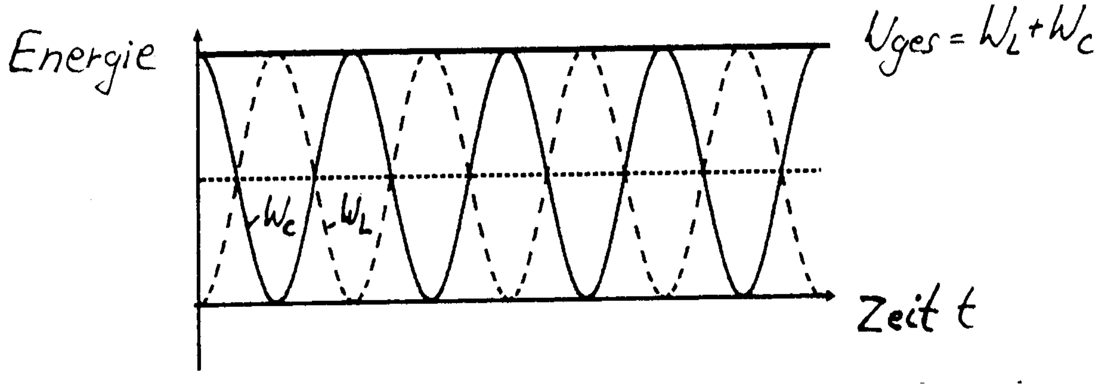


Abbildung 4.16: *Elektrische und magnetische Energie schwingen im Gegentakt*

$$W_{ges} = W_L + W_C$$

Analog zu den mechanischen Schwingungen, wo kinetische und potentielle Energie im Gegentakt schwingen und ineinander umgewandelt werden, findet bei den elektromagnetischen Schwingungen ein periodischer Austausch zwischen elektrischer und magnetischer Feldenergie statt (siehe Abb. 4.16). Für die zeitlichen Mittelwerte gilt

$$\overline{W_L} = \overline{W_C} = \frac{1}{2} W_{ges} \quad \text{in Analogie zu} \quad \overline{W_{kin}} = \overline{W_{pot}} = \frac{1}{2} W_{ges}$$

4.3.2 Der gedämfte Schwingkreis ($R \neq 0$)

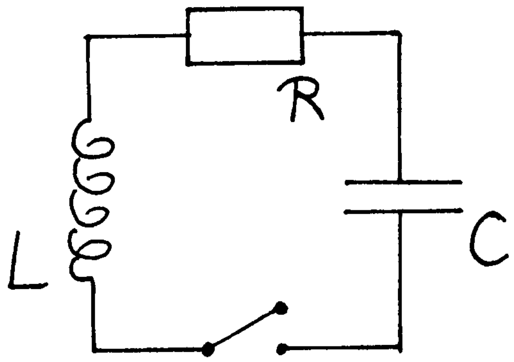


Abbildung 4.17: *Gedämpfter Schwingkreis*

Der Schaltkreis unter 4.3.1 wird um einen ohmschen Widerstand erweitert. Nach dem Schließen des Schalters gilt dann

$$\tilde{U}_L + \tilde{U}_R + \tilde{U}_C = 0$$

Drückt man die Spannung nach den jeweils geltenden Gesetzen durch den Strom oder die Ladung aus, so erhält man

$$L\,\frac{d\tilde{I}}{dt} + R\,\tilde{I} + \frac{Q}{C} = 0$$

Wir gehen weiter vor wie unter 4.3.1 und erhalten die Schwingungsgleichung

$$\frac{d^2\tilde{I}}{dt^2} + \frac{R}{L}\,\frac{d\tilde{I}}{dt} + \frac{1}{L\,C}\,\tilde{I} = 0$$

Der Vergleich mit der Differentialgleichung für die mechanische gedämpfte Schwingung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\,\delta\,\frac{dx}{dt} + \omega_0^2\,x = 0$$

liefert $2\,\delta = R/L$, also

$$\boxed{\delta = \frac{R}{2\,L}} \qquad \text{Dämpfungskonstante}$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung für die gedämpfte elektromagnetische Schwingung lautet

$$\tilde{I}(t) = A_1\,e^{\alpha_1 t} + A_2\,e^{\alpha_2 t} \quad \text{mit} \quad \alpha_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Hier lassen sich drei verschiedene Fälle je nach Art der Dämpfung diskutieren:

(i) $\delta > \omega_0$ Starke Dämpfung $\Rightarrow$ nicht – periodisches Verhalten des Stromes

(ii) $\delta = \omega_0$ Aperiodischer Grenzfall

(iii) $\delta < \omega_0$ Schwache Dämpfung $\Rightarrow$ gedämpfte harmonische elm. Schwingung

Wir wollen nur auf den dritten Fall näher eingehen. Sei also $\delta < \omega_0$. Dies ist erfüllt, wenn die Größen R, C und L der Ungleichung

$$\frac{R}{2\,L} < \frac{1}{\sqrt{L\,C}} \quad \text{bzw.} \quad R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

genügen. Definieren wir $\omega_\delta = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, so gilt

$$\begin{aligned} \alpha_{1/2} &= -\delta \pm i\,\omega_\delta \\ \alpha_{1/2} &= -\frac{R}{2\,L} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{4\,L^2}} \end{aligned}$$

Wir erhalten als Lösung eine gedämpfte, harmonische Schwingung der Kreisfrequenz ω_δ , deren Amplitude exponentiell mit $e^{-\frac{R}{2\,L}\,t}$ abnimmt (siehe Abb. 4.18).

Das Einfügen eines ohmschen Widerstandes in den Schwingkreis aus Spule und Kondensator bewirkt also sowohl eine Dämpfung, als auch eine Frequenzverschiebung der freien, elm. Schwingungen. Aus der Definition $\omega_\delta^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ geht hervor, daß die Kreisfrequenz ω_δ der gedämpften Schwingung kleiner ist als die Frequenz ω_0 der ungedämpften Eigenschwingung.

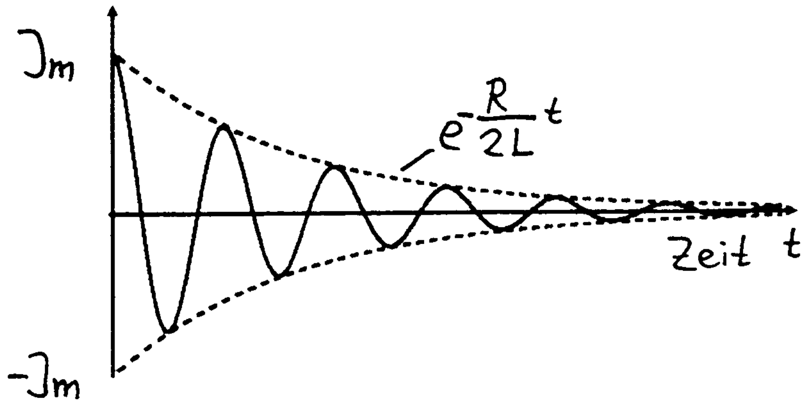


Abbildung 4.18: *Gedämpfte harmonische Schwingung*

4.4 Erzwungene Schwingungen

4.4.1 Parallel – Schwingkreis

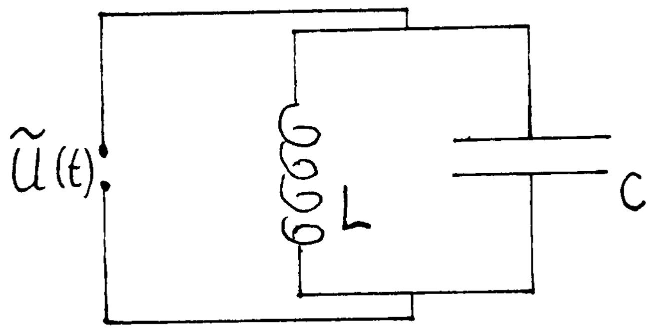


Abbildung 4.19: *Parallel–Schwingkreis*

Eine Spule und ein Kondensator werden parallel geschaltet (siehe Abb. 4.19). An diese Schaltung wird von außen eine Wechselspannung $\tilde{U}(t) = \tilde{U}_m \, e^{i\,\omega t}$ angelegt. Es gilt

$$\tilde{I}(t) = \frac{\tilde{U}(t)}{\tilde{Z}} \quad ,$$

wobei sich der Kehrwert des komplexen Gesamtwiderstandes bei einer Parallelschaltung durch Addition der Kehrwerte der komplexen Einzelwiderstände berechnet. Es addieren sich also die komplexen Leitwerte. Aus dem komplexen Gesamtleitwert

$$\frac{1}{\tilde{Z}} = \sum \frac{1}{\tilde{Z}_i} = \frac{1}{\tilde{Z}_C} + \frac{1}{\tilde{Z}_L} = i\,\omega\,C + \frac{1}{i\,\omega\,L} = i\,\left(\omega\,C - \frac{1}{\omega\,L}\right)$$

ergibt sich der gesamte Wechselstromwiderstand $\tilde{Z}$ zu

$$\tilde{Z} = \frac{1}{i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = i\,\frac{1}{\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)} = i\,\frac{\omega L}{1 - \omega^2 L C}$$

Aus $\tilde{Z} = Z\, e^{i\,\varphi_Z}$ folgt

$$\boxed{Z = \frac{\omega L}{1 - \omega^2 L C}} \qquad \underline{\text{Impedanz}}$$

Die Veranschaulichung der Impedanz in der Gaussschen Zahlenebene ist in Abbildung 4.20 zu sehen.

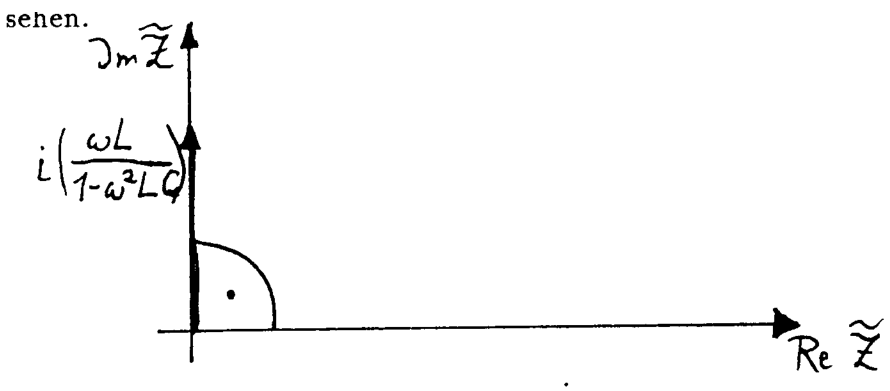


Abbildung 4.20: *Addition der Wechselstromwiderstände*

Wir untersuchen im folgenden den im Parallelschwingkreis oszillierenden Strom $\tilde{I}$. Es gilt

$$\tilde{I}(t) = \frac{\tilde{U}(t)}{\tilde{Z}} = \frac{U_m\, e^{i\,\varphi_U}\, e^{i\,\omega t}}{Z\, e^{i\,\varphi_Z}} = \frac{U_m}{Z}\, e^{i\,(\varphi_U - \varphi_Z)}\, e^{i\,\omega t} = \frac{U_m}{Z}\, e^{i\,\varphi}\, e^{i\,\omega t} \quad ,$$

d.h. der Strom ist gegen die äußere Wechselspannung um die Phase $\varphi = \varphi_U - \varphi_Z$ verschoben. Mit $\tilde{I}(t) = \tilde{I}_m\, e^{i\,\omega t} = I_m\, e^{i\,\varphi}\, e^{i\,\omega t}$ folgt für den Scheitelwert I_m

$$I_m = \frac{U_m}{Z}$$

Es war $Z = Z(\omega) = \omega L\, /\, (1 - \omega^2 L C)$. Daher hat der Scheitelwert den frequenzabhängigen Betrag

$$I_m(\omega) = \left|\frac{1}{\omega L} - \omega C\right|\, U_m$$

In Abbildung 4.21(a) ist der Betrag des Scheitelwertes gegen die Frequenz ω graphisch aufgetragen.

Bei der Resonanzfrequenz $\omega_0 = 1/\sqrt{L C}$ verschwindet der Strom trotz von außen angelegter Spannung, da die Impedanz der Schaltung beliebig hoch wird.

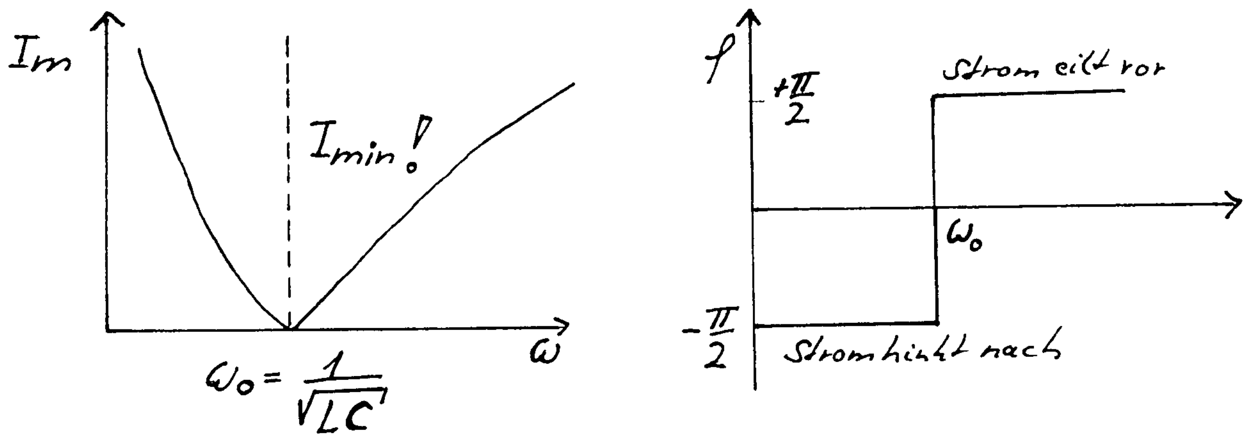


Abbildung 4.21: *(a) Stromscheitelwert ⇔ Erregerfrequenz, (b) Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung ⇔ Erregerfrequenz*

Auch die Phasenbeziehung zwischen Strom und Spannung ist abhängig von der Erregerfrequenz, d.h. der Frequenz der von außen angelegten Spannung. Aus

$$\tilde{I}(t) = i\left(\omega\, C - \frac{1}{\omega\, L}\right) \tilde{U}(t)$$

läßt sich die Phasenverschiebung ermitteln:

ω klein ($\omega < \omega_0$):

$$|Z|\cdot\tilde{I}(t) = -\,i\,\tilde{U}(t) = e^{-\,i\,\frac{\pi}{2}}\,\tilde{U}(t) \;\Rightarrow\; \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

Für sehr kleine Frequenzen sperrt der Kondensator, so daß der Strom praktisch über die Spule fließt. Der Spulenstrom hinkt der Spannung hinterher.

ω groß ($\omega > \omega_0$):

$$|Z|\cdot\tilde{I}(t) = i\,\tilde{U}(t) = e^{i\,\frac{\pi}{2}}\,\tilde{U}(t) \;\Rightarrow\; \varphi = +\frac{\pi}{2}$$

Für sehr große Frequenzen wächst der Leitwert des Kondensators stark an, der Spulenstrom wird vernachlässigbar. Der Kondensatorstrom eilt der Spannung voraus.

$\omega = \omega_0$:

$$\tilde{I}(t) = 0$$

In diesem Fall heben sich der voreilende Kondensatorstrom und der nachhinkende Spulenstrom gerade auf!

4.4.2 Reihenschaltung (Serien – Schwingkreis)

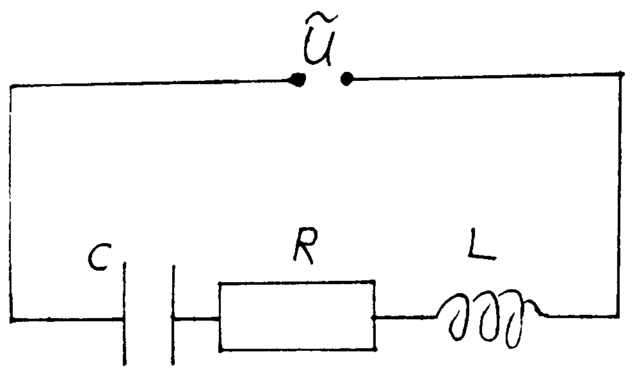


Abbildung 4.22: *Serien–Schwingkreis*

Wir betrachten nun die in Abb. 4.22 skizzierte Serienschaltung eines OHMschen Widerstandes, einer Spule und eines Kondensators, an die von außen eine Spannung

$$\tilde{U}(t) = \tilde{U}_m \, e^{i\,\omega t}$$

angelegt ist.
Es gilt $\tilde{I}(t) = \dfrac{\tilde{U}(t)}{\tilde{Z}}$,
wobei sich der komplexe Gesamtwiderstand $\tilde{Z}$ im Falle der Serienschaltung durch Addition der einzelnen Wechselstromstände berechnet.

$$\tilde{Z} = R + \tilde{Z}_L + \tilde{Z}_C = R + i\,\omega\,L + \frac{1}{i\,\omega\,C} = R + i\left(\omega\,L - \frac{1}{\omega\,C}\right)$$

Die Impedanz ergibt sich zu

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega\,L - \frac{1}{\omega\,C}\right)^2}}$$

Wir gehen weiter vor wie unter 4.4.1 und diskutieren die Frequenzabhängigkeit des Scheitelwertes I_m sowie der Phasenverschiebung φ zwischen Strom und Spannung (Abb. 4.24).

Aus dem Verlauf des Stromscheitelwertes

$$I_m(\omega) = \frac{U_m}{Z} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega\,L - \frac{1}{\omega\,C}\right)^2}}\,U_m$$

ist ersichtlich, daß Resonanz vorliegt, wenn die Frequenz der anregenden Spannung den Wert $\omega = \omega_0$ annimmt. Dann gilt $Z = R$. Der Scheitelwert $I_m(\omega)$ hat bei der Frequenz ω_0

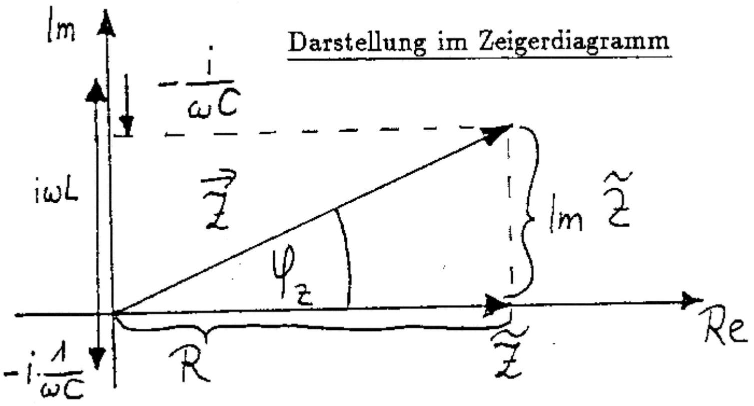


Abbildung 4.23: *Ermittlung des Gesamtwiderstandes im Zeigerdiagramm*

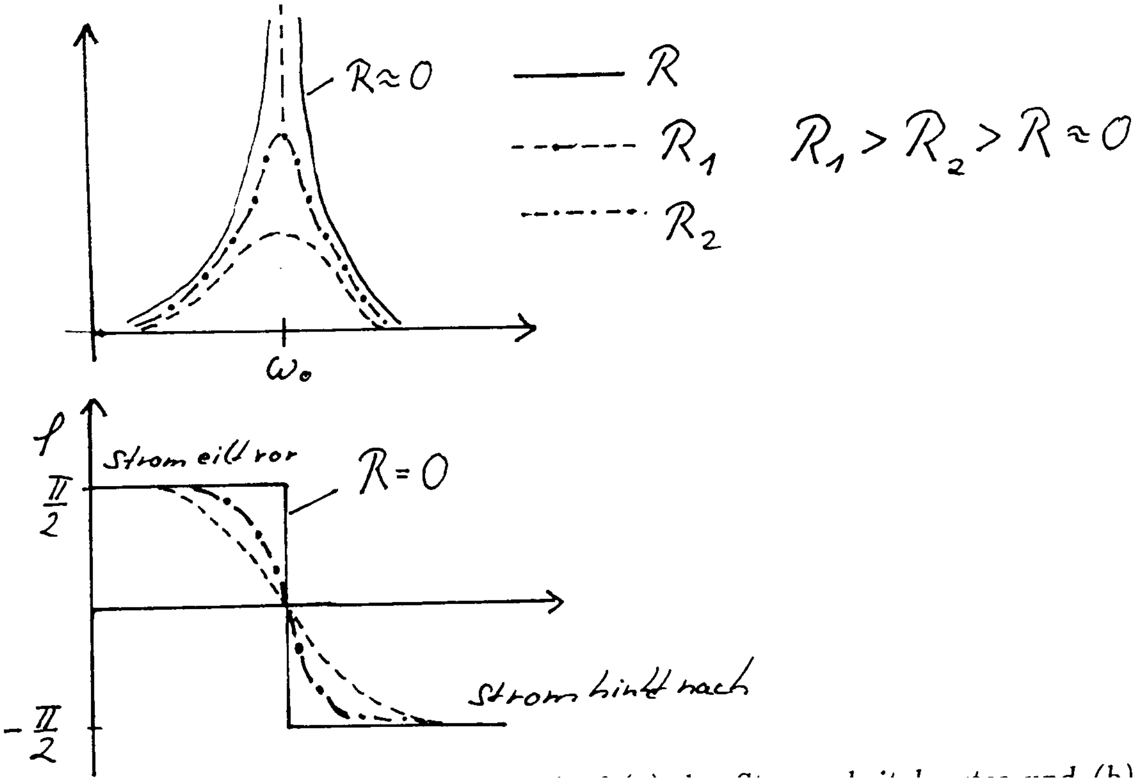


Abbildung 4.24: *Frequenzabhängiger Verlauf (a) des Stromscheitelwertes und (b) der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung*

ein Maximum, welches umso größer ausfällt, je geringer die OHMschen Verluste sind. Bei $R = 0$ und $\omega = \omega_0$ verschwindet die Impedanz, so daß der Strom unendlich groß wird.

Bevor wir den Verlauf der Phasenverschiebung interpretieren, werden wir den Ausdruck $\varphi(\omega)$ mathematisch herleiten.

Dazu nehmen wir an, die äußere Spannung besitze den Phasenwinkel Null, es sei also

$$\tilde{U}(t) = U_m\, e^{i\,\omega t}$$

Aus $\tilde{I}(t) = \dfrac{\tilde{U}(t)}{\tilde{Z}} = \dfrac{1}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}\, U_m\, e^{i\,\omega t} = \tilde{I}_m\, e^{i\,\omega t}$ folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_m &= \frac{U_m}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{U_m\left[R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \\
&= U_m\left[\frac{R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} + i\,\frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\right]
\end{aligned}$$

Da für die Phase φ_Z einer komplexen Größe $\tilde{Z} = Z\, e^{i\,\varphi_Z}$ die Beziehung $\tan\varphi_Z = \mathrm{Im}\tilde{Z}/\mathrm{Re}\tilde{Z}$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\tan\varphi &= \frac{\mathrm{Im}\tilde{I}_m}{\mathrm{Re}\tilde{I}_m} = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R} \\
\Leftrightarrow \quad \varphi &= \arctan\left[\frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}\right]
\end{aligned}$$

Die Phase ändert sich mit wachsender Erregerfrequenz ω von $\varphi = +\pi/2$ zu $\varphi = -\pi/2$. Bei kleinen Frequenzen ($\omega < \omega_0$) eilt der Strom der Spannung voraus, bei großen Frequenzen ($\omega > \omega_0$) hinkt er hinterher. Der Übergang von positiver zu negativer Phasenverschiebung bei $\omega = \omega_0$ geschieht umso abrupter, je schwächer die Dämpfung ist. Bei $\omega = \omega_0$ schwingen Strom und Spannung gleichphasig!

Frequenzfilter

Bei dem zuletzt besprochenen Reihen – Schwingkreis ist die Stärke des schwingenden Stromes maximal, wenn die von außen angelegte Spannung die Resonanzfrequenz ω_0 besitzt. Greift man eine Spannung am OHMschen Widerstand ab, so bleibt diese bevorzugt erhalten, da im Resonanzfall die gesamte äußere Spannung am OHMschen Widerstand abfällt ($\tilde{Z} = R$). Alle Spannungen mit anderen Frequenzen werden dagegen unterdrückt. Dies legt die Möglichkeit nahe, die Kombination von OHMschem Widerstand R, Kondensator C und Spule L als **Frequenzfilter** zu nutzen.

a) **Tiefpaß**
Als Tiefpaß dient die Reihenschaltung von L und C , das sogenannte LC – Glied (siehe Abb. 4.25). Die Eingangsspannung, die am gesamten LC–Glied anliegt, beträgt

$$\tilde{U}_E = \tilde{I}\,\tilde{Z}_{LC}| = \tilde{I}\,(\tilde{Z}_L + \tilde{Z}_C)$$

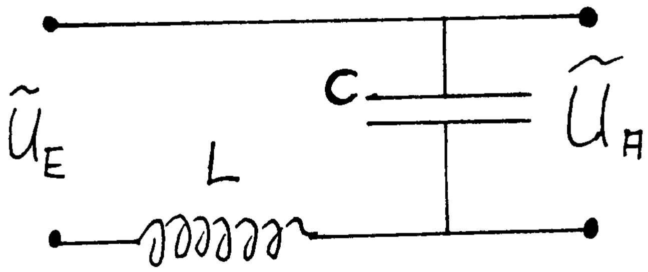


Abbildung 4.25: *Schaltskizze eines Tiefpasses*

Die Ausgangsspannung wird am Kondensator abgegriffen.

$$\tilde{U}_A = \tilde{I}\,\tilde{Z}_C$$

Der Tiefpaß ist ein frequenzabhängiger Spannungsteiler. Es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{U}_A &= \tilde{U}_E\,\frac{\tilde{Z}_C}{\tilde{Z}_L + \tilde{Z}_C} &= \tilde{U}_E\,\frac{1/i\,\omega\,C}{i\,\omega\,L + 1/i\,\omega\,C} \\ \tilde{U}_A &= \tilde{U}_E\,\frac{1}{1-\omega^2\,L\,C} \end{aligned}$$

Die Ausgangsspannung ist umso größer, je niedrigerfrequent die Eingangsspannung ist.
Der Tiefpaß ist also für kleine Frequenzen durchlässig.

b) **Hochpaß**
Der Hochpaß ist analog zum Tiefpaß aufgebaut mit dem Unterschied, daß die Ausgangsspannung an der Spule abgegriffen wird (siehe Abb. 4.26).

$$\tilde{U}_A = \tilde{I}\,\tilde{Z}_L$$

Dann gilt für das Spannungsverhältnis

$$\begin{aligned} \tilde{U}_A &= \tilde{U}_E\,\frac{\tilde{Z}_L}{\tilde{Z}_L + \tilde{Z}_C} &= \tilde{U}_E\,\frac{i\,\omega\,L}{i\,\omega\,L + 1/i\,\omega\,C} \\ \tilde{U}_A &= \tilde{U}_E\,\frac{1}{1-1/\omega^2\,L\,C} \end{aligned}$$

Der Hochpaß ist für hohe Frequenzen durchlässig.

c) **Bandpaß**
Den Aufbau des Bandpasses zeigt die Abbildung 4.27.

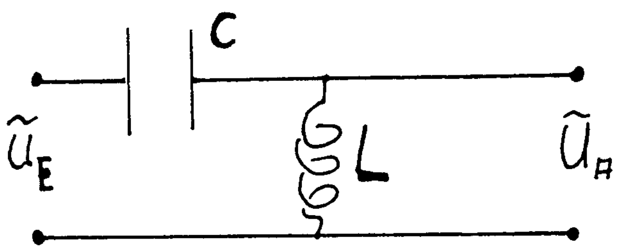


Abbildung 4.26: *Schaltskizze eines Hochpasses*

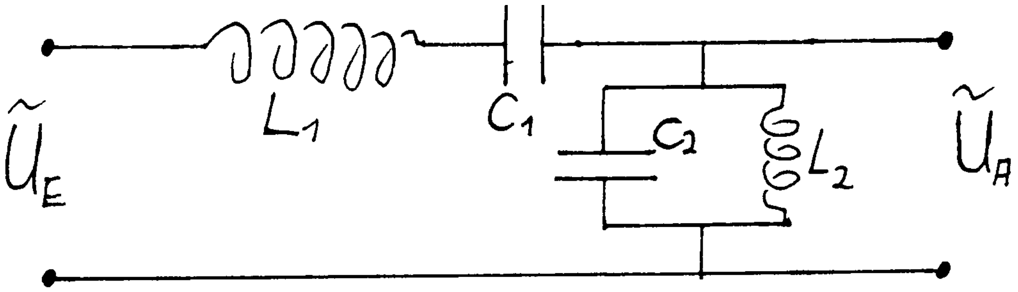


Abbildung 4.27: *Schaltskizze eines Bandpasses*

Hier gilt

$$\tilde{U}_E = \tilde{I}\left(\tilde{Z}_{L_1} + \tilde{Z}_{C_1} + \frac{1}{1/\tilde{Z}_{L_2} + 1/\tilde{Z}_{C_2}}\right)$$

$$\tilde{U}_A = \tilde{I}\,\frac{1}{1/\tilde{Z}_{L_2} + 1/\tilde{Z}_{C_2}}$$

Damit berechnet sich das Spannungsverhältnis zu

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_A &= \tilde{U}_E\,\frac{\dfrac{1}{1/\tilde{Z}_{L_2} + 1/\tilde{Z}_{C_2}}}{\tilde{Z}_{L_1} + \tilde{Z}_{C_1} + \dfrac{1}{1/\tilde{Z}_{L_2} + 1/\tilde{Z}_{C_2}}} \\
&= \tilde{U}_E\,\frac{1}{1 + (\tilde{Z}_{L_1} + \tilde{Z}_{C_1})\left(1/\tilde{Z}_{L_2} + 1/\tilde{Z}_{C_2}\right)} \\
&= \tilde{U}_E\,\frac{1}{1 + \dfrac{\tilde{Z}_{L_1}}{\tilde{Z}_{L_2}} + \dfrac{\tilde{Z}_{C_1}}{\tilde{Z}_{C_2}} + \dfrac{\tilde{Z}_{C_1}}{\tilde{Z}_{L_2}} + \dfrac{\tilde{Z}_{L_1}}{\tilde{Z}_{C_2}}} \\
\tilde{U}_A &= \tilde{U}_E\,\frac{1}{1 + \dfrac{L_1}{L_2} + \dfrac{C_2}{C_1} - \dfrac{1}{\omega^2\,L_2\,C_1} - \omega^2\,L_1\,C_2}
\end{aligned}$$

Der Bandpaß filtert ein bestimmtes Band des mittleren Frequenzbereiches heraus. Er “sperrt” sowohl für sehr niedrige, als auch für sehr hohe Frequenzen.

4.5 Leistung im Wechselstromkreis

Die Leistung eines Gleichstromes ist $P = U\,I$. Im Wechselstromkreis sind Strom und Spannung zeitlich veränderlich und besitzen eine Phasendifferenz φ. Seien Wechselstrom und – spannung beschrieben durch

$$U(t) = U_m\,\cos\omega t \qquad I(t) = I_m\,\cos(\omega t - \varphi)$$

dann ist die momentane Leistung des Wechselstromes

$$\begin{aligned}
P(t) &= U(t)\,I(t) \\
&= U_m\,I_m\,\cos\omega t\,(\cos\omega t\,\cos\varphi + \sin\omega t\,\sin\varphi) \\
&= U_m\,I_m\,\cos\varphi\,\cos^2\omega t + U_m\,I_m\,\sin\varphi\,\cos\omega t\,\sin\omega t \\
&= \frac{1}{2}\,U_m\,I_m\,[\,\underbrace{\cos\varphi\,(1+\cos 2\omega t)}_{\substack{\text{momentane}\\ \text{Wirkleistung } P_W(t)}} + \underbrace{\sin\varphi\,\sin 2\omega t}_{\substack{\text{momentane}\\ \text{Blindleistung } P_B(t)}}\,]
\end{aligned}$$

Je nach Richtung und Größe des Wechselstromes bzw. der Wechselspannung besitzt die Momentanleistung positive und negative Energieflüsse. D.h. es wird einerseits Energie von der Spannungsquelle an die Bauelemente abgegeben, andererseits fließt Energie in das Netz zurück (siehe Abb. 4.28).

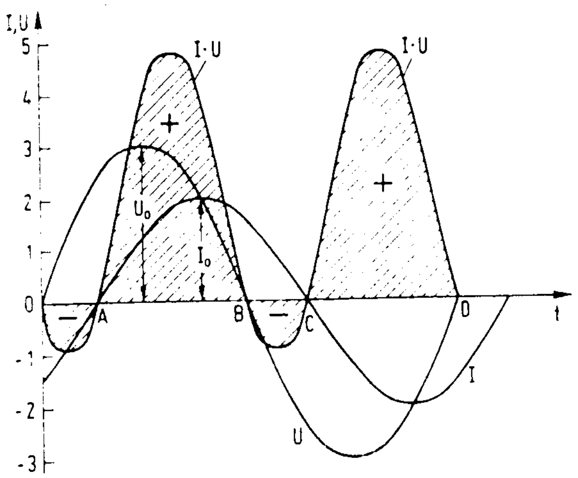


Abbildung 4.28: *Zeitlicher Verlauf der Augenblicksleistung (aus [3])*

Die mittlere Leistung $\overline{P}$ entspricht derjenigen Fläche, die man erhält, wenn man den Betrag der von Leistungskurve und Zeitachse eingeschlossenen negativen Flächen von den positiven Flächen subtrahiert.

Rechnerisch findet man den Mittelwert $\overline{P}$ der Leistung durch Mittelung der Momentanleistung über eine Periodendauer T:

$$\begin{aligned}
\overline{P} &= \tfrac{1}{T} \int_0^T P(t)\, dt \\
&= \tfrac{1}{2} U_m\, I_m\, \cos\varphi\, \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T (1+\cos 2\omega t)\, dt}_{=1} + \tfrac{1}{2} U_m\, I_m\, \sin\varphi\, \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \sin 2\omega t\, dt}_{=0} \\
&= \tfrac{1}{2} U_m\, I_m\, \cos\varphi \\
&= U_{eff}\, I_{eff}\, \cos\varphi
\end{aligned}$$

Die Blindleistung des Wechselstromes in den Blindwiderständen X verschwindet im zeitlichen Mittelwert. Die im Mittel beobachtete Leistung entspricht daher der Wirkleistung P_W.

$$\boxed{P_W = U_{eff}\, I_{eff}\, \cos\varphi} \quad \underline{\text{Wirkleistung}} \text{ eines Wechselstromes}$$

Die Wirkleistung ist umso größer, je größer $\cos\varphi$, d.h. je kleiner der Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung ist. Man nennt $\cos\varphi$ den **Leistungsfaktor**.

a) $\underline{\varphi = 0°\,,\ \cos\varphi = 1 \ \Rightarrow\ P_W \text{ maximal}}$

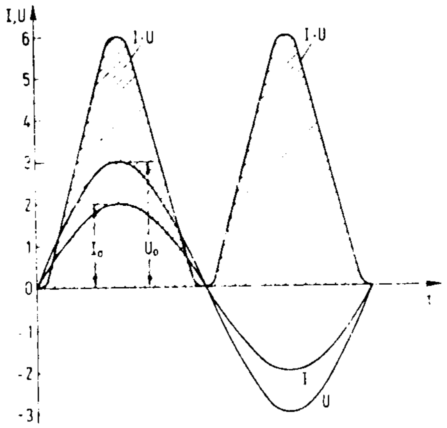


Abbildung 4.29: *Leistungskurve $U \cdot I$ eines Wechselstromes bei der Phasenverschiebung Null zwischen Strom und Spannung (aus [3])*

Ihren Maximalwert erreicht die Wirkleistung, wenn Strom und Spannung in Phase schwingen (siehe Abb. 4.29). Die Momentanleistung ist dann zu jeder Zeit positiv. Dieser Fall tritt für $Z = R$ ein, d.h., wenn entweder ein reiner Wirkwiderstand oder Resonanz vorliegt.

b) $\underline{0 < \varphi < 90°\,,\ 0 < \cos\varphi < 1}$

Die Wirkleistung ist hier kleiner als im Fall a) (siehe Abb. 4.28).

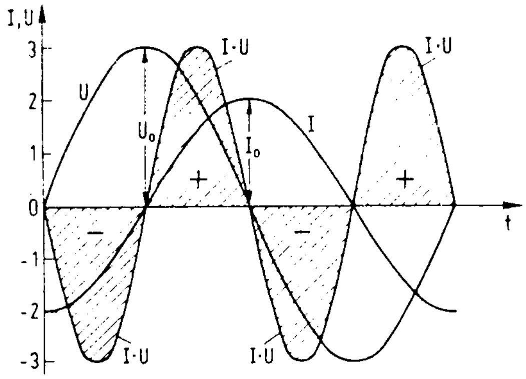


Abbildung 4.30: *Leistungskurve $U \cdot I$ eines Wechselstromes bei einer Phasenverschiebung von $90°$ zwischen Strom und Spannung (aus [3])*

c) $\varphi = 90°\,,\ \cos\varphi = 0\ \Rightarrow\ P_W = 0$
Dieser Fall tritt auf, wenn der Wirkwiderstand verschwindend klein gegenüber dem Blindwiderstand wird. Dann gibt der Strom gerade so viel positive Energie an die Bauelemente ab, wie negative Energie zur Stromquelle zurückgeliefert wird (siehe Abb. 4.30). Der in der Leitung fließende Strom leistet also keine Arbeit (**wattloser Strom**)!

In der Praxis ist es wichtig, den Leistungsfaktor möglichst groß ($\cos\varphi \approx 1$) und damit die Blindleistung gering zu halten, um zu gewährleisten, daß die elektrischen Geräte und deren Zuleitungen für die zusätzlich zu den Wirkströmen fließenden Blindströme dimensioniert sind! Hinsichtlich der Energieversorgung des Verbrauchers bedeutet ein schlechter Leistungsfaktor , daß das Elektrizitätswerk eine Scheinleistung zur Verfügung stellen muß, die wesentlich größer ist als die vom Verbraucher tatsächlich abgenommene Nutz – (Wirk –) Leistung. Der Leistungsfaktor wirkt sich also in hohem Maße auf die Wirtschaftlichkeit der Elektrizitätsversorgung aus.

Zur **Messung der Arbeit im Wechselstromkreis** dient ein **Wechselstromzähler**.

Versuch: Gezeigt wird ein Modell eines Wechselstromzählers, wie er in jedem Haushalt zu finden ist. Der Aufbau ist in Abbildung 4.31 gezeigt.

(a) Eichung des Wechselstromzählers
Nacheinander werden die Glühlampen als Verbraucher eingedreht und mit Hilfe einer Stoppuhr die Umlaufzeit der Zählscheibe ermittelt. Bei jedem Versuchsdurchgang mit unterschiedlicher Anzahl eingedrehter Lämpchen werden Strom und Spannung der Glühlampenschaltung gemessen und die Leistung berechnet. Bildung des Produktes aus Leistung und Umlaufzeit der Zählscheibe sowie Mittelung

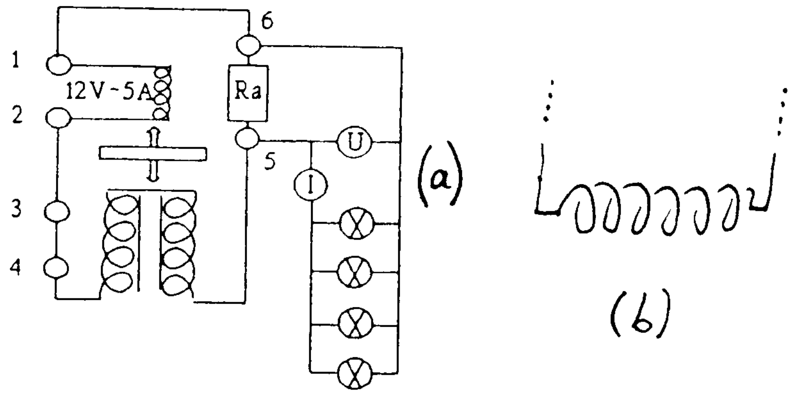


Abbildung 4.31: *Modell eines Wechselstromzählers (aus [9])*

über alle Versuchsdurchgänge ($n = 1, \ldots 4$) ergibt schließlich die

$$\text{pro Umdrehung geleistete Arbeit} \qquad \overline{A} = \frac{\sum_{i=1}^{4} U_i \, I_i \, T_i}{4}$$

(b) <u>Wattloser Strom</u>
Man schließt nun anstelle der Glühlampenschaltung eine Spule als Verbraucher an den Zähler an. Schiebt man einen Weicheisenkern in die Spule ein, so nimmt mit steigender Induktivität die Wirkleistung ab. Ist die Induktivität so hoch, daß man als Verbraucher einen reinen Blindwiderstand hat, so stoppt der Zähler, die Wirkleistung verschwindet. Es liegt der Fall eines "wattlosen Stromes" vor.

4.6 Wellenleiter

Wir haben bisher die Ausbreitung elm. Wellen im Vakuum sowie in Materie besprochen. Elm. Wellen können sich auch in sogenannten **Doppelleitern**, d.h. zwischen zwei parallelen Drähten oder Platten fortpflanzen (beliebig langer Plattenkondensator). Außerdem kommt es in einem **Koaxialkabel** (Aufbau vergleichbar mit einem Zylinderkondensator) zur Ausbreitung elm. Wellen.

4.6.1 Doppelleiter

Wir betrachten zwei parallele Drähte, welche an ihrem einen Ende über eine Leiterschleife gekoppelt sind. In dieser Leiteranordung, welche man nach E.Lecher, der sich 1890 als erster damit befaßte, als **Lecherleitung** bzw. **Lechersystem** bezeichnet, wird durch einen Schwingkreis eine Wechselspannung induziert (siehe Abb. 4.33).

Dies ist möglich, da das Lechersystem selbst einen LC – Schwingkreis darstellt. Dabei ist die Kapazität C gleich der Kapazität der beiden Drähte gegeneinander; die Leiterschleife kann als Spule mit einer einzigen Wicklung angesehen werden, sie bildet daher die Induktivität L.

Die Länge l des Lechersystems sei so gewählt, daß Resonanz mit dem Schwingkreis eintritt. Da sowohl Kapazität, als auch Induktivität der Lecherleitung sehr klein sind, ist mit $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ die induzierte Spannung sehr hochfrequent.

Wir denken uns an die Anordung ein Koordinatensystem so angelegt, daß die Drähte in x – Richtung verlaufen und die Überbrückung an der Stelle $x = 0$ gelegen ist. Die bei $x = 0$ induzierte Spannung breitet sich in Form einer Spannungswelle

$$U(x,t) = U_M \sin(\omega t - kx)$$

entlang der Paralleldrähte aus.

Durch Reflexion am offenen Ende der Paralleldrahtleitung und Überlagerung von einfallender und reflektierter Welle bildet sich zwischen den Drähten eine stehende Welle

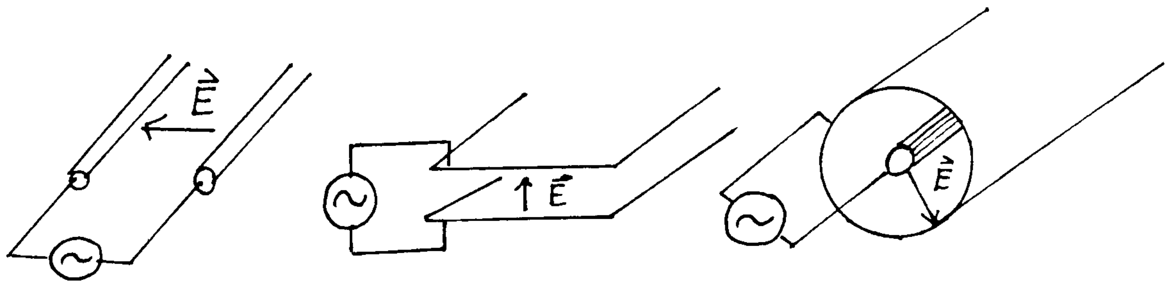


Abbildung 4.32: *Verschiedene Wellenleiterausführungen*

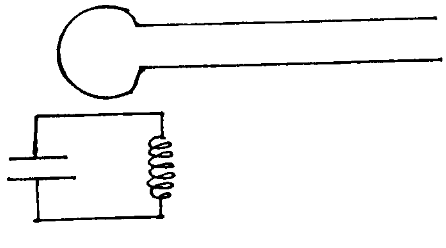


Abbildung 4.33: *Lechersystem*

aus. An dem durch die Leiterschleife geschlossenen Ende des Doppelleiters liegt ein Spannungsknoten vor, am offenen Ende befindet sich ein Spannungsbauch,auf der gesamten Leiterlänge wechseln sich Knoten und Bäuche in Abständen von $\lambda/4$ ab.

Wie sieht die Stromverteilung längs der Drähte aus?

Die zwischen den Leitern herrschende Spannung ist zurückzuführen auf die Ladungsverteilung längs der Drähte. Die Verschiebung dieser Ladungen ruft einen Strom hervor, so daß mit der Spannungswelle eine Stromwelle gleicher Geschwindigkeit verknüpft ist. Die sich analog ausbildende stehende Stromwelle ist gegenüber der Spannungswelle um $\lambda/4$ verschoben.

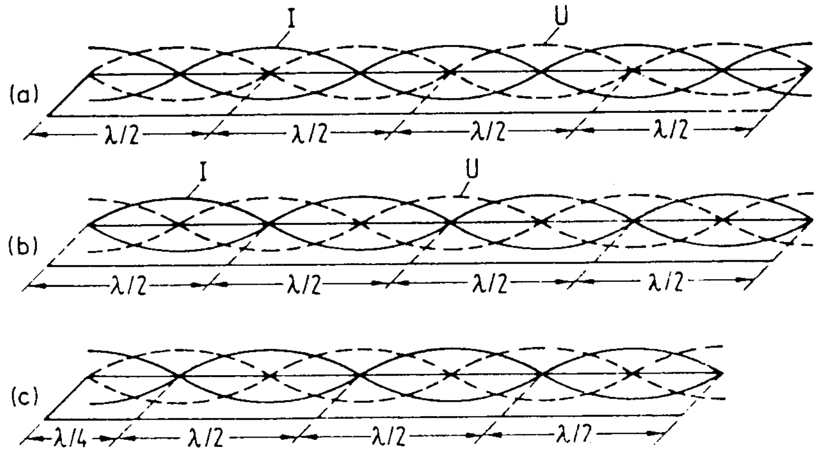


Abbildung 4.34: *Strom– und Spannungsverteilung (1) auf einem (a) beidseitig geschlossenen, (b) beidseitig offenen und (c) einseitig geschlossenen Lechersystem, (2) auf einem einseitig geschlossenen Lechersystem zu vier um $T/4$ auseinanderliegenden Zeiten (aus [3])*

Stehende Wellen bilden sich auf einem einseitig offenen Lechersystem nur dann aus, wenn die Länge l der Leitung ein ungerades Vielfaches einer Viertelwellenlänge $l = (2k+1)\,\lambda/4$ beträgt (siehe Abb. 4.34)!

<u>*Versuch:*</u> Die stehenden Wellen zwischen den Paralleldrähten eines Lechersystems werden mit Hilfe zweier Indikatorlampen nachgewiesen.
Fährt man mit einer Drahtbrücke, welche als Stromanzeiger eine Glühlampe enthält (siehe Abb. 4.35), an den Drähten entlang, so zeigt das Aufleuchten und Erlischen der Glühlampe die Lage der Strombäuche und – knoten an. Spannungsbäuche und – knoten werden auf die gleiche Weise mit Hilfe einer Glimmlampe nachgewiesen.

Strom – und Spannungswelle bei einer einseitig offenen Lecherleitung verhalten sich wie Geschwindigkeits – und Druckwelle bei einer gedackten Pfeife.

Mit der Strom – und Spannungswelle, die sich entlang des Lechersystems ausbreiten, ist ein sich periodisch änderndes elektromagnetisches Feld verknüpft. Die elektrische Spannung ruft ein elektrisches Feld hervor, dessen Feldlinien zwischen den Drähten verlaufen. Der im Leitungsdraht fließende Strom erzeugt ein den Draht umschließendes Magnetfeld (siehe Abb. 4.36).

Längs der Drähte bewegt sich also eine elektromagnetische Welle fort, deren Energie in dem die Drähte umgebenden Feldraum gespeichert ist.

Bei einer störungsfreien, unendlich langen Leitung breitet sich die Welle wie im freien Raum aus. Dabei sind $\vec{E}$ und $\vec{B}$, d.h. Strom – und Spannungspulse in Phase (siehe

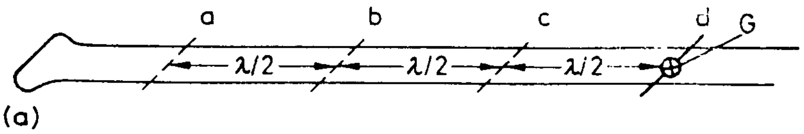


Abbildung 4.35: *Nachweis der Strom– und Spannungsbäuche auf einem Lechersystem (aus [3])*

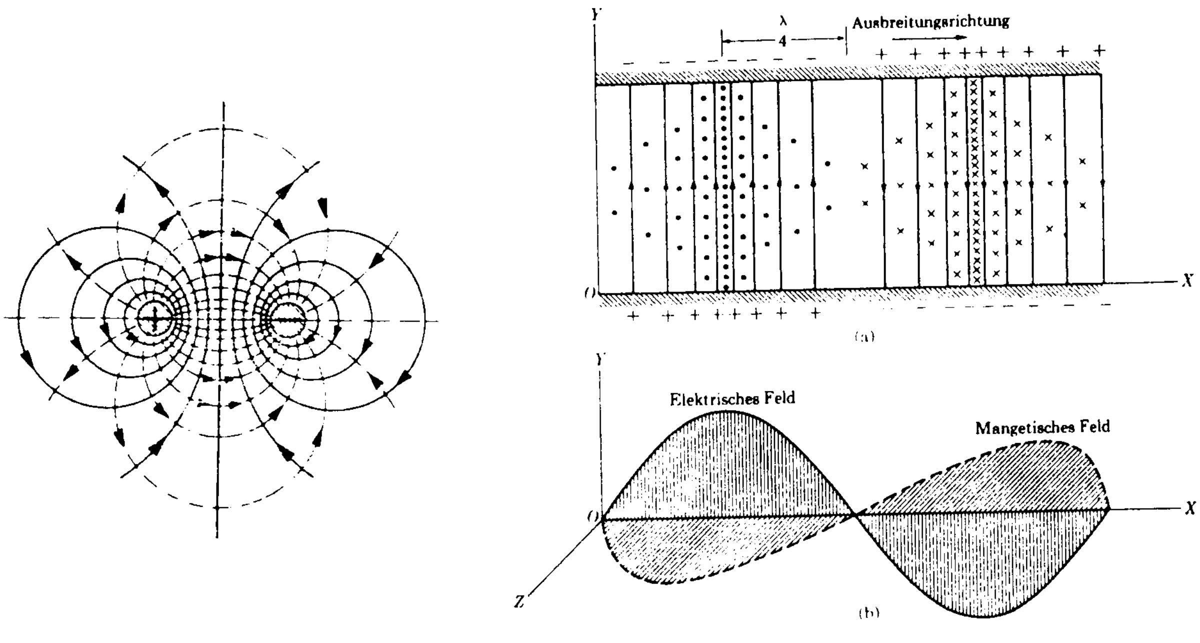


Abbildung 4.36: *(1) Verlauf der elektrischen (– – –) und magnetischen (——) Feldlinien um eine Paralleldrahtleitung (aus [3]), (2) Feldlinienverlauf zwischen zwei reflektierenden Ebenen ($\vec{E}$–Feld: senkrechte Linien, $\vec{B}$–Feld: Punkte und Kreuze) (aus [1])*

Abb. 4.37).

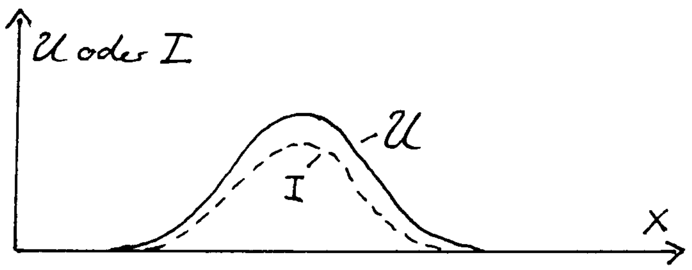
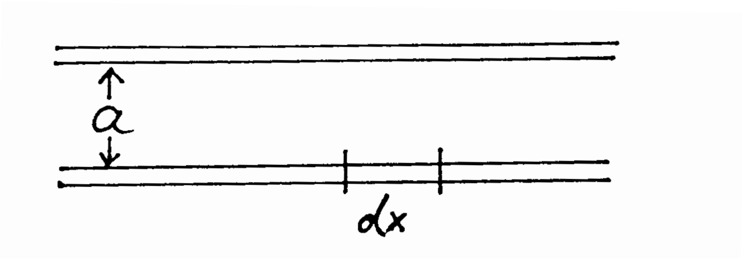


Abbildung 4.37: *Ausbreitung auf einer störungsfreien Leitung*

An Störstellen wie z.B. an Überbrückungen oder an den Enden einer endlich langen Leitung treten Reflexionen auf, es kommt zur Ausbildung stehender Wellen, die Fortbewegung wird behindert. In der Praxis ist man bestrebt, Reflexionen zu vermeiden, um die schnelle Ausbreitung der Welle zu gewährleisten.

Paralleldrahtleitungen werden in der Praxis verwendet, um elektrische Schwingungen vom Generator zum Verbraucher zu leiten. Auch Fernsprech – oder Telegraphenleitungen sind vergleichbar aufgebaut. Die Geschwindigkeit, mit der die Übertragung erfolgt, ist dabei von großem Interesse:

Mit welcher Geschwindigkeit erfolgt die Wellenausbreitung auf einem Wellenleiter? Zur Klärung dieser Frage betrachten wir ein Stück dx eines Doppelleiters mit Leiterabstand a.



Für Strom – und Spannungswelle gilt

$$U = U(x,t) \qquad\qquad I = I(x,t)$$

Die Induktionsspannung beträgt $U = \dfrac{\partial \psi_M}{\partial t} = L\,\dfrac{\partial I}{\partial t}$.

Für die folgenden Überlegungen ist es günstiger, Induktivität, Kapazität und ohmschen Widerstand pro Längeneinheit anzugeben:

$$L^* = \frac{L}{l} \qquad C^* = \frac{C}{l} \qquad \left(R^* = \frac{R}{l}, zun\ddot{a}chst = 0\right)$$

Das Stück dx des Doppelleiters hat dann die Induktivität $L^*\,dx$ und die Kapazität $C^*\,dx$. Damit lautet die Induktionsspannung dU für den Leiterabschnitt dx

$$\begin{aligned} dU &= L^*\,dx\,\frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= L^*\,\frac{\partial I}{\partial t} \qquad (1) \end{aligned}$$

Der Strom auf dem Stück dx ändert sich durch Zufluß des Verschiebungsstromes

$$dI = \frac{\partial I}{\partial x}\,dx \ ,$$

woraus mit $I = \partial Q/\partial t$ folgt

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t\,\partial x} = \frac{\partial I}{\partial x}$$

Für die Kapazität gilt allgemein $Q = C\,U$, speziell für unsere Betrachtungen findet man

$$dQ = C^*\,dx\,U$$

Partielle Ableitung nach t ergibt

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t\,\partial x} = C^*\,\frac{\partial U}{\partial t}$$

Drücken wir die Ladung durch den Strom aus, so erhalten wir

$$\frac{\partial I}{\partial x} = C^*\,\frac{\partial U}{\partial t} \qquad (2)$$

Wir leiten nun Gleichung (1) partiell nach t und Gleichung (2) partiell nach x ab. Dies führt zu

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial x} = L^*\,\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = C^*\,\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial t}$$

Wir erhalten also für die Stromwelle auf einem Doppelleiter im speziellen Fall einer verlustlosen Leitung ($R^* = 0$) die Wellengleichung

$$\boxed{\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = L^*\,C^*\,\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}}$$

Wellengleichung
für die Stromwelle
bei $R^* = 0$

Analog ergibt sich für die Spannungswelle

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = L^*\,C^*\,\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}}$$

Wellengleichung
für die Spannungswelle
bei $R^* = 0$

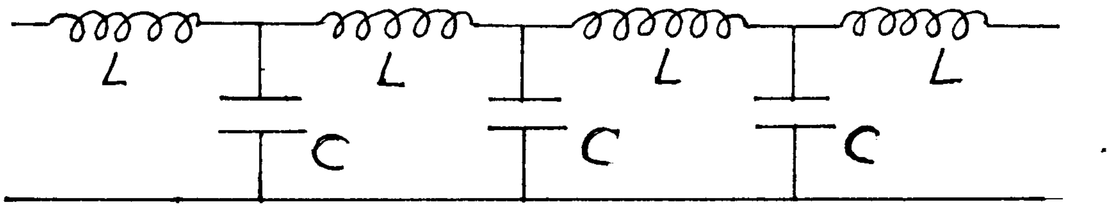


Abbildung 4.38: *Ersatzschaltbild für einen Doppelleiter*

Für die Phasengeschwindigkeit, mit der sich eine elektromagnetische Welle entlang einer Paralleldrahtleitung fortbewegt, liest man ab

$$\boxed{c^2 = \frac{1}{C^*\,L^*}}$$ Phasengeschwindigkeit einer elm. Welle auf einem Doppelleiter

Ein anschauliches Ersatzschaltbild für einen Doppelleiter zeigt die Abbildung 4.38:

In der Realität liegt jedoch eine *kontinuierliche* Verteilung von Kapazität und Induktivität vor.

Die Energie eines Doppelleiters setzt sich zusammen aus der

- Energie der Kapazität: $W_C = 1/2\,C\,U^2$
- Energie der Induktivität: $W_L = 1/2\,L\,I^2$

Damit folgt für die Energiedichte, hier für die Energie pro Länge

$$\frac{W_{ges}}{l} = \frac{W_C}{l} + \frac{W_L}{l} = 1/2\,C^*\,U^2 + 1/2\,L^*\,I^2$$

Die Energie einer elektromagnetischen Welle besteht zu gleichen Teilen aus elektrischer und magnetischer Feldenergie. Daher kann

$$1/2\,C^*\,U^2 = 1/2\,L^*\,I^2$$

gesetzt werden. Daraus ergibt sich für das Strom – Spannungs – Verhältnis an einer verlustlosen Paralleldrahtleitung die Beziehung

$$U = \sqrt{\frac{L^*}{C^*}}\,I$$

Es gilt also $U = Z\,I$ analog zu $U = R\,I$. Die Größe

$$Z = \sqrt{\frac{L^*}{C^*}}$$

ist kennzeichnend für eine Stromleitung. Sie besitzt die Dimension eines Widerstandes und heißt daher **Impedanz** oder **Wellenwiderstand** der Leitung. Es handelt sich jedoch nicht um einen ohmschen Widerstand; im vorliegenden Fall widerstandsloser Drähte ($R^* = 0$) wird keine Energie in Wärme umgewandelt.

Der Wellenwiderstand ist zu beachten, wenn Reflexionen in Kabeln vermieden werden sollen. Dazu sollten nur Kabel gleichen Wellenwiderstandes aneinander angeschlossen werden. Verbindet man zwei Leitungen verschiedener Impedanzen Z_1 und Z_2 miteinander, so gilt (ohne Beweis)

$$U_{refl.} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} U_{einf.}$$

Reflexionen können auch verhindert werden, indem man ein Kabel mit einem ohmschen Widerstand abschließt, dessen Größe dem Wellenwiderstand des Kabels entspricht. Dann wird die gesamte Energie der Welle in Wärmeenergie umgesetzt.

4.6.2 Koaxiales Kabel

Eine weitere Form eines Wellenleiters ist das Koaxialkabel, das besonders in der Hochfrequenztechnik bei der Fortleitung hochfrequenter Energien seine Anwendung findet.

Das Koaxialkabel besteht aus einem Leitungsdraht (Innenleiter), der axial in einem dünnwandigen Metallrohr (Außenleiter) verläuft. Im Innenraum des Leiters baut sich ein elektromagnetisches Feld auf, die elektrischen Feldlinien verlaufen radial, die magnetischen Feldlinien kreisförmig um den Innenleiter (siehe Abb. 4.39). Der Außenraum bleibt feldfrei.

Die Phasengeschwindigkeit c, mit der sich eine elm. Welle im Koaxialkabel fortbewegt sowie der Wellenwiderstand Z sind abhängig von

– der Geometrie des Kabels (Abstand Innenleiter $\longleftrightarrow$ Außenleiter)

– dem im Innenraum befindlichen Dielektrikum

Sehr gebräuchlich sind Kabel mit $Z = 50\,\Omega$ und $c \approx 1\,\mathrm{m}/5\,\mathrm{ns} = 200.000\,\mathrm{km/s}$.

Wir leiten hier die Ausdrücke für Phasengeschwindigkeit und Wellenwiderstand nicht theoretisch her. Stattdessen untersuchen wir den Einfluß der Impedanz auf die Wellenausbreitung im Koaxialkabel experimentell.

<u>*Versuch:*</u> Gezeigt wird das Verhalten einer elektromagnetischen Welle in einem Koaxialkabel je nach Abschluß des Kabels.

a) Im ersten Versuchsteil werden ein kurzes und ein langes Kabel gleichen Wellenwiderstandes $Z_1 = Z_2 = 50\,\Omega$ miteinander verbunden. Das kurze Kabel verbindet den Ausgang eines Pulsgenerators mit dem Kanal 1 eines Oszillographen. Von da aus wird das lange Kabel an den zweiten Kanal angeschlossen.

b) Man löst den Anschluß des langen Kabels, so daß der zweite Kanal kein Signal mehr zeigt. Das lange Kabel besitzt nun ein offenes Ende $R = \infty$, an dem der ankommende Spannungspuls reflektiert wird und zum ersten Eingang des KO zurückläuft. $\Rightarrow$ Auf Kanal 1 sieht man das Eingangssignal und mit doppelter Laufzeitverschiebung das abgeschwächte reflektierte Signal aus dem langen Kabel.

c) An das lange Kabel wird ein variabler Widerstand angeschlossen und auf $R = Z = 50\,\Omega$. Er bewirkt die vollständige Umwandlung der Energie des ankommenden Signals in Wärme, das Signal wird nicht mehr reflektiert. $\Rightarrow$ Auf dem KO ist nur das Eingangssignal sichtbar.

d) Reguliert man den Widerstand auf $R = 0$, so wirkt er bei der Reflektion wie ein festes Ende, es kommt zum Phasensprung.

e) Stellt man ihn beliebig hoch ein ($R \to \infty$), dann entspricht er einem offenen Ende, es ergibt sich kein Phasensprung. $\Rightarrow$ Der KO zeigt ein Bild wie unter b).

Die zu den einzelnen Fällen gehörigen KO–Bilder zeigt die Figur 4.40.

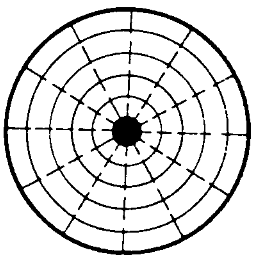


Abbildung 4.39: *Verlauf der elektrischen (– – –) und magnetischen (——) Feldlinien in einem Koaxialkabel (aus [3])*

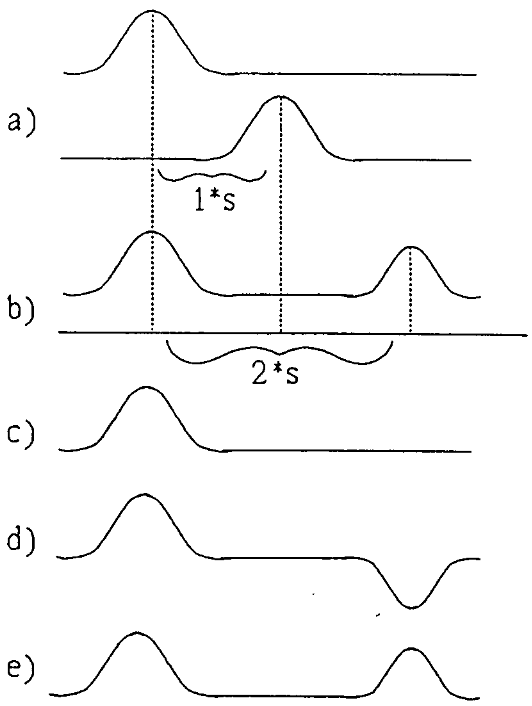


Abbildung 4.40: *Auf dem KO erscheinende Signale (aus [9])*

4.7 Hohlleiter

Zur Fortleitung von Zentimeter – und Millimeterwellen (z.B. bei Radaranlagen) werden **Hohlleiter** verwendet. Dies sind dünnwandige Rohre, meist mit rechteckigem Querschnitt, deren Innenseiten zur Erhöhung der Leitfähigkeit versilbert sind.
Die Entwicklung des Hohlleiters beruht auf der Idee, daß die Wellenleitereigenschaft erhalten bleibt, wenn in einem Koaxialkabel der Innenleiter weggelassen wird.

Wir betrachten einen Hohlleiter mit rechteckigem Querschitt und definieren ein Koordinatensystem so, daß die Wellenausbreitung in x – Richtung erfolgt (siehe Abb. 4.41).

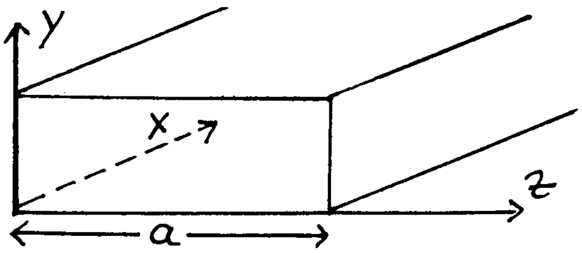


Abbildung 4.41: *Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt der Breite a*

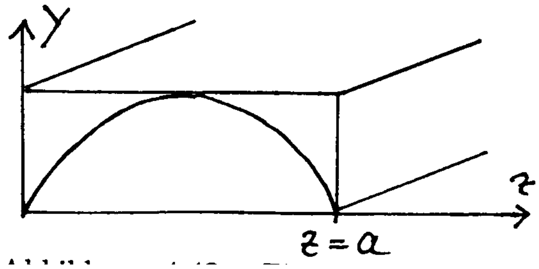


Abbildung 4.42: *Einfachste Wellenform im betrachteten Hohlleiter*

Welche Wellenformen (Moden) sind möglich? Wie verlaufen bei den verschiedenen Moden die $\vec{E}$ – und $\vec{B}$ – Felder?

Folgende Randbedingungen müssen erfüllt sein: Da an den Wänden des Hohlleiters wegen der sehr hohen elektrischen Leitfähigkeit kein elektrisches Feld bestehen kann, muß die elektrische Feldstärke dort verschwinden.

Für die einfachste Mode, die diese Bedingung erfüllt (siehe Abb. 4.42), können wir ansetzen

$$E_y = E_0 \sin\frac{\pi\, z}{a}\cos(\omega t - k_x x) \qquad E_x = E_z = 0$$

Eine Momentanbetrachtung dieser Wellenform aus verschiedenen Perspektiven ergibt den in Abbildung 4.43 dargestellten Feldlinienverlauf. Wir setzen nun unseren Ansatz

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad E_y = E_0 \sin\frac{\pi\, z}{a}\cos(\omega t - k_x x)$$

in die Wellengleichung $\Delta\vec{E} = 1/c^2\ \partial^2\vec{E}/\partial t^2$ ein

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Ausführung der partiellen Ableitungen liefert

$$-k_x^2\, E_y - \frac{\pi^2}{a^2}\, E_y = -\frac{1}{c^2}\,\omega^2\, E_y$$

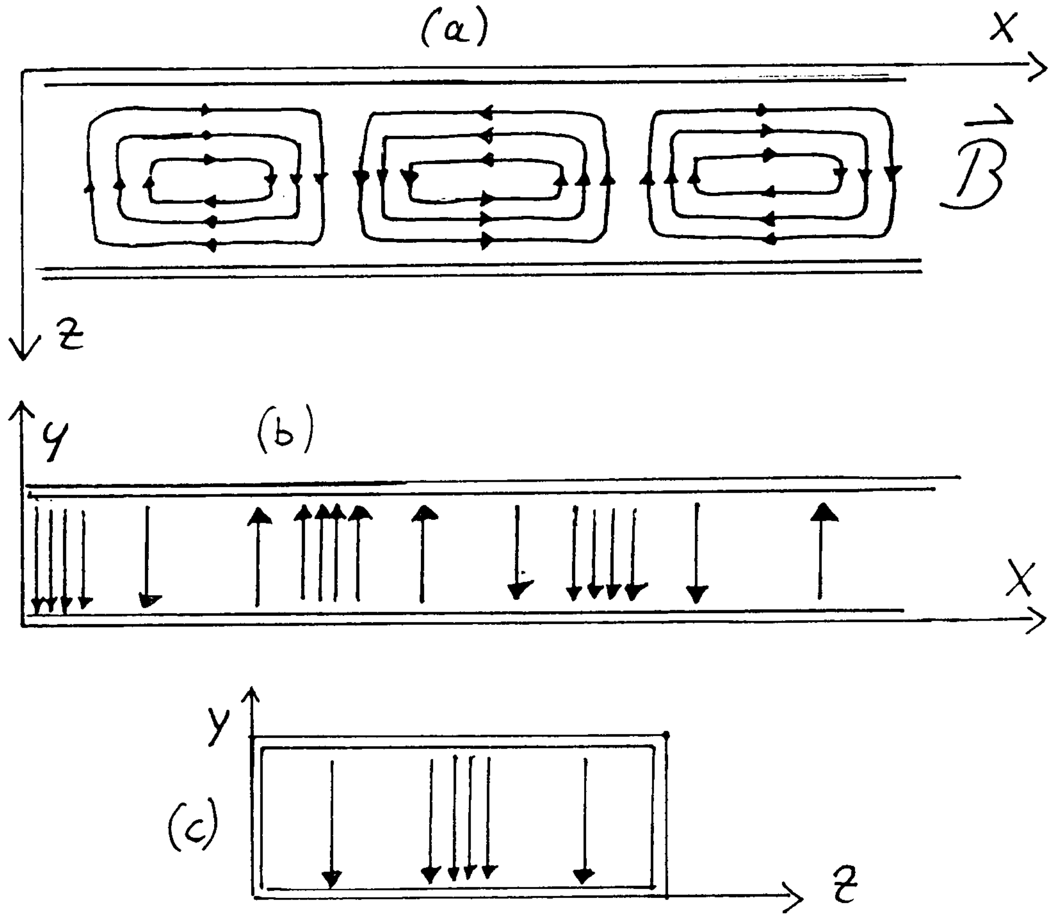


Abbildung 4.43: *Feldlinienverlauf im Hohlleiter: (a) Draufsicht, (b) Seitansicht, (c) Frontansicht. (aus [7])*

Wir erhalten für den Betrag des Wellenvektors der im Hohlleiter fortschreitenden Welle die Beziehung

$$\boxed{k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}$$

Damit Wellenausbreitung stattfinden kann, muß die Größe k_x reell sein.
Die Bedingung $\frac{\omega^2}{c^2} \geq \frac{\pi^2}{a^2}$ liefert $\omega \geq \frac{\pi}{a} c$.
Es existiert also eine Grenzfrequenz $\omega_0 = \frac{\pi}{a} c$, die eine Welle zur Fortbewegung in einem Hohlleiter mindestens besitzen muß. Unterhalb dieser Mindestfrequenz ist keine Fortpflanzung möglich. Hohlleiter wirken daher als Frequenzfilter.

Eine Welle, deren Frequenz der obigen Bedingung genügt, läuft mit der Phasengeschwindigkeit

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k_x} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

durch den Hohlleiter. Dabei gilt $v_{ph} \neq c$, d.h. es findet Dispersion statt! Für die Gruppengeschwindigkeit der Hohlleiterwelle findet man mit

$$\omega = \sqrt{c^2 \left(k_x^2 + \frac{\pi^2}{a^2}\right)}$$

den Ausdruck

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk_x} = \frac{c^2\, k_x}{\omega} = \frac{k_x}{\omega}\, c^2$$

Wir gelangen also zu der Beziehung

$$\boxed{v_{ph}\, v_{gr} = c^2}$$

Wegen $\omega > \omega_0$ ist $v_{ph} > c$. Die obige Formel liefert daher

$$v_{gr} < c \quad .$$

Das Postulat der Relativitätstheorie, daß die Gruppengeschwindigkeit, welche zur Übermittlung von Signalen dient, die Lichtgeschwindigkeit nicht überschreiten darf, ist erfüllt. Die Phasengeschwindigkeit darf, wie der vorliegende Fall zeigt, größer als die Vakuumlichtgeschwindigkeit werden.

Aus der vorangehenden Diskussion geht hervor, daß sich selbst ein Hohlleiter, in dessen Innenraum *Vakuum* herrscht, wie ein *dispergierendes* Medium mit einem Brechungsindex $n < 1$ verhält!

Wir betrachten nun noch den Fall, daß der Hohlraum mit einem Dielektrikum gefüllt ist. Hier ergibt sich analog der Zusammenhang

$$\boxed{v_{ph}\, v_{gr} = c_M^2} \quad ,$$

wobei c_M die Geschwindigkeit bezeichnet, mit der sich die elektromagnetische Welle frei im entsprechenden Dielektrikum ausbreiten würde.

Kapitel 5

Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen

Wir wollen uns in diesem Kapitel damit beschäftigen, wie freie elektromagnetische Wellen im Raum erzeugt werden können.

Nach den MAXWELL – Gleichungen sind die Quellen elektrischer Felder raumfeste Ladungen. Magnetische Felder werden durch stationäre Ströme, d.h. gleichförmig bewegte Ladungen erzeugt. Anschaulich läßt sich daraus der Schluß ziehen, daß die Quellen elektromagnetischer Wellen *beschleunigte* Ladungen sein müssen.

Im folgenden Abschnitt wollen wir eine Anordnung zur Abstrahlung elektromagnetischer Wellen diskutieren, welche einfach, aber zugleich die wichtigste überhaupt ist.

5.1 Der schwingende elektrische Dipol

Unsere Überlegungen gehen vom LECHERsystem aus. Wir hatten gesehen, daß auf einer einseitig offenen LECHERleitung die Ausbildung stehender Wellen nur dann möglich ist, wenn die Drahtlänge l ein ungerades Vielfaches einer Viertelwellenlänge beträgt. Zwischen l und k muß also die Beziehung

$$l = (2k+1)\,\frac{\lambda}{4} \qquad (k = 0, 1, 2\ldots)$$

bestehen. Für den Fall $k = 0$, $l = \lambda/4$ sehen Strom – und Spannungsverteilung auf der LECHERleitung wie in Abb. 5.1 aus.

Biegt man die LECHERleitung zu einem geraden Leiter der Länge $l = \lambda/2$ auf (Abb. 5.2), wobei die Anregung durch den Schwingkreis unverändert gelassen wird, so fließt in dem entstehenden Leiter weiterhin ein Wechselstrom. Man erhält einen schwingenden, elektrischen Dipol, welcher auch als **Hertzscher Dipol** bezeichnet wird. In seiner Grundschwingung weist man die in Bild 5.3 gezeigte Strom – und Spannungsverteilung nach.

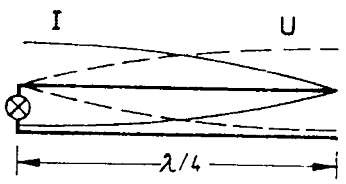


Abbildung 5.1: *Strom– und Spannungsverteilung auf einem einseitig geschlossenen* LECHER*system mit* $l = \lambda/4$. *(aus [3])*

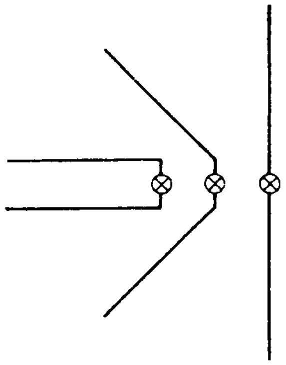


Abbildung 5.2: *Entstehung eines* HERTZ*schen linearen Oszillators aus der Paralleldrahtleitung. (aus [3])*

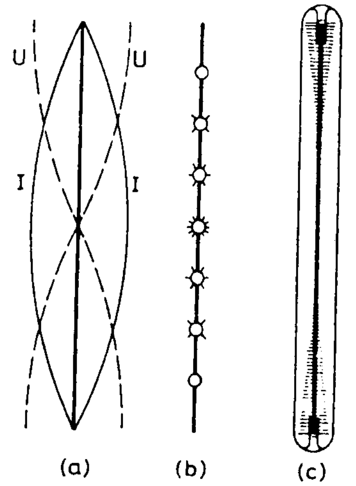


Abbildung 5.3: HERTZ*scher Dipol: (a) Strom– und Spannungsverteilung, (b) Nachweis der Stromverteilung, (c) Nachweis der Spannungsverteilung. (aus [3])*

Die negative Ladung führt harmonische Schwingungen entlang des geraden Leiters aus. Ständiger Wechsel zwischen Ladungsüberschuß an einem sowie Ladungsmangel am anderen Ende des Leiters und Ladungsausgleich führt zu periodischer Ausbildung eines Dipolmomentes, welches beim Ladungsausgleich verschwindet, um danach mit umgekehrtem Vorzeichen neu zu entstehen.
Da die einzelnen Vorgänge zeitlich sehr schnell aufeinanderfolgen, können die einen Dipolzustand begleitenden Feldlinien nicht unendlich weit in den Raum vordringen. Das Feld im Abstand r rührt von demjenigen Zustand her, in dem sich der Oszillator vor der Zeit $t = r/c$ befand. Ist ω die Schwingungsfrequenz, so hat das zeitabhängige Dipolmoment

$p(t)$ die skalare Form

$$p(t) = p_0 \cos \omega t \quad .$$

Zur Zeit $t = 0$ herrscht zwischen den Leiterenden maximale Ladungsdifferenz und es gilt

$$p(0) = p_0 = q\, l \quad ,$$

wobei l die Leiterlänge bezeichnet. Zu diesem Zeitpunkt ist die Stärke des elektrischen Feldes, welches durch die Ladungsdifferenz hervorgerufen wird, am größten. Anzahl und Dichte der vom Ladungsmangel hin zum Ladungsüberschuß verlaufenden elektrischen Feldlinien sind maximal. Mit der Verschiebung der Ladungen verringert sich das Dipolmoment, das elektrische Feld wird schwächer. Mit dem Verschwinden des Dipolmomentes schließen sich die elektrischen Feldlinien. Das erneute Anwachsen des Dipolmomentes führt zur Ausbildung entgegengesetzt orientierter Feldlinien und der Vorgang wiederholt sich. Ausgehend vom Dipolsender breiten sich die geschlossenen Feldlinien im Raum aus.

Der im HERTZschen Dipol fließende Wechselstrom erzeugt außerdem ein Magnetfeld, dessen Feldlinien konzentrische Kreise um die Dipolachse bilden. Sie besitzen in abwechselnder Folge entgegengesetzten Richtungssinn und verlaufen in der Ebene senkrecht zur Dipolachse. Die magnetische Feldstärke ist maximal, wenn der Strom im oszillierenden Dipol sein Maximum annimmt.

Die Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen von einem Sender in den freien Raum beruht auf dieser Verkettung von elektrischen und magnetischen Feldlinien.

Im gesamten Raum stehen $\vec{E}$ – und $\vec{B}$ – Feld senkrecht aufeinander und sind transversal zur Ausbreitungsrichtung.

Strahlungscharakteristik des Hertzschen Dipols

Im folgenden wird uns die Frage beschäftigen, wie groß bei gegebener Feldstruktur die an einen Raumpunkt $P(r, \vartheta, \theta)$ ausgestrahlte Intensität I ist.

Dazu denken wir uns eine konzentrische Kugel um den Dipol gelegt. Dann verlaufen die elektrischen Feldlinien in den Meridianebenen, die Magnetfeldlinien in den zur Äquatorebene parallelen Ebenen. Der POYNTING–Vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$, welcher den Energiefluß angibt, zeigt demnach überall radial nach außen. Da $\vec{E}$ und $\vec{H}$ in jedem Punkt senkrecht aufeinanderstehen, ergibt sich die radial abgestrahlte Intensität zu

$$I = |\vec{S}| = |\vec{E}|\,|\vec{H}|$$

Genaue Berechnung führt zu (siehe theoretische Physik)

$$I(\vartheta, r, t) = \frac{\omega^4\, p(t)^2}{(4\pi)^2\, \varepsilon_0\, c^3}\, \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \qquad \text{mit} \quad p(t) = p_0 \cos \omega t$$

Da $\overline{\cos^2 \omega t} = 1/2$ ist, beträgt der zeitliche Mittelwert der Ausstrahlung

$$\overline{I}(\vartheta, r) = \frac{1}{2}\, \frac{\omega^4\, p_0^2}{(4\pi)^2\, \varepsilon_0\, c^3}\, \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2}$$

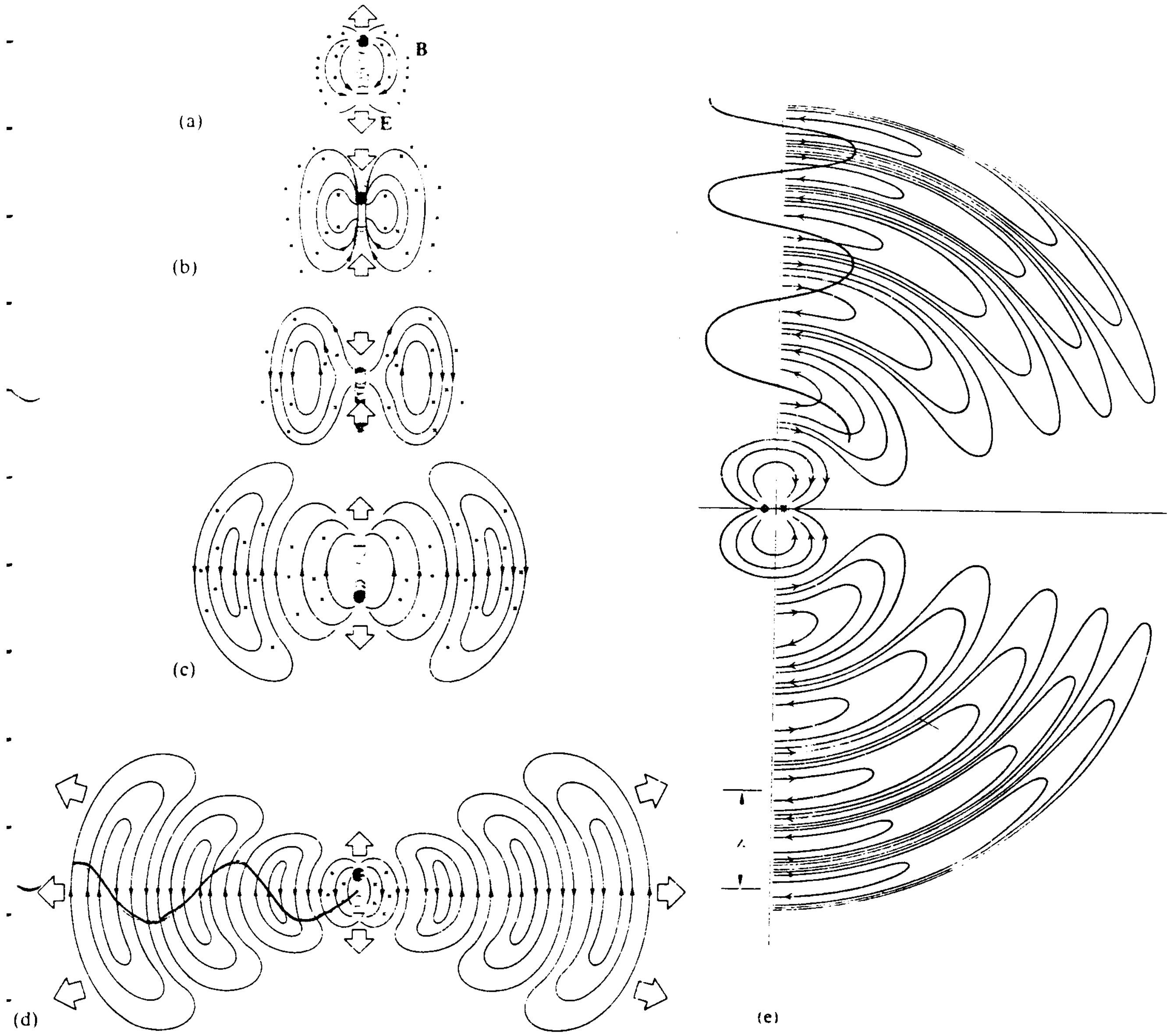


Abbildung 5.4: *Wellenabstrahlung eines* HERTZ*schen Dipols. (aus [13])*

Es ergeben sich also die Abhängigkeiten

$$\begin{array}{lll} I \sim 1/r^2 & \multirow{2}{*}{mit} & r: \text{ Entfernung zur Dipolmitte} \\ I \sim \sin^2\vartheta & & \vartheta: \text{ Winkel zur Dipolachse} \end{array}$$

Trägt man die Intensität in einem Polardiagramm von der Dipolmitte aus auf (Abb. 5.5), so gelangt man zu der

Strahlungscharakteristik des Dipolstrahlers

Die räumliche Verteilung der Strahlungsintensität (siehe Abb. 5.6) erhält man, wenn man in Gedanken die ebene Strahlungscharakteristik in Rotation um die Dipolachse versetzt.

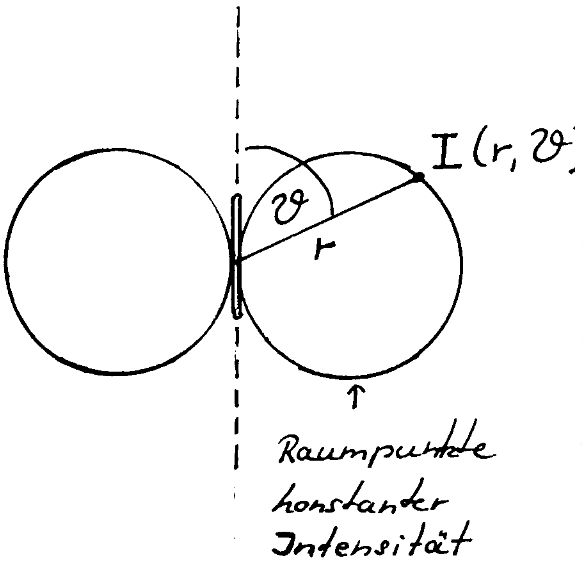


Abbildung 5.5: *Strahlungscharakteristik des Hertzschen Dipols*

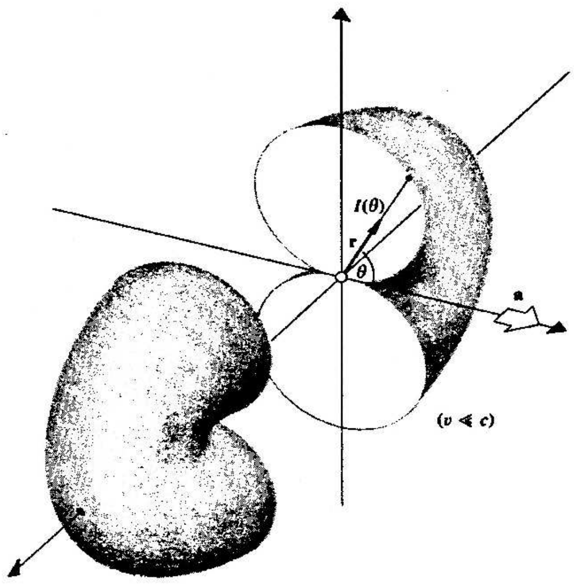


Abbildung 5.6: *Torusförmige Verteilung der Strahlungsintensität (aus [13])*

Die lineare Beschleunigung der Ladung im oszillierenden elektrischen Dipol erzeugt eine elektromagnetische Strahlung, deren Intensität torusförmig um die Dipolachse verteilt ist.

Die am HERTZschen Dipol durchgeführten Betrachtungen lassen auf folgenden allgemeinen Sachverhalt schließen:

Eine beschleunigte Ladung strahlt elektromagnetische Wellen ab. Dabei erfolgt die Ausstrahlung wie beim Dipol senkrecht zur Beschleunigungsrichtung.

Wir wollen nun einige Anwendungen dieses sehr wichtigen Sachverhaltes behandeln.

I. **Die Röntgenröhre**

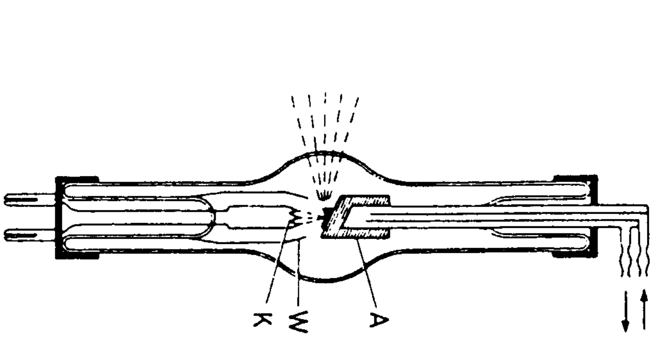


Abbildung 5.7: *Röntgenröhre (aus [3])*

Der Aufbau einer Röntgenröhre ist in Abbildung 5.7 skizziert. Die aus der Glühkathode austretenden Elektronen werden im Wehneltzylinder gebündelt und durch die anliegende Hochspannung U auf die Anode zu beschleunigt. Die Spannung liegt dabei in der Größenordung von mehreren zehntausend Volt.

$$\vec{F} = Q\,\vec{E} = m\,\vec{a}$$

In der Anode, welche meist aus schwerem Metall wie z.B. Wolfram besteht, werden die Elektronen stark abgebremst. Diese negative Beschleunigung führt zur Abstrahlung eines kleinen Teiles ihrer Energie in Form von sehr hochfrequenten elektromagnetischen Wellen. Die kurzwellige Strahlung wird nach ihrem Entdecker W.C.RÖNTGEN (1845 – 1923), der 1901 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet wurde, **Röntgenstrahlung** genannt. Der weitaus größere Teil der Elektronenenergie wird jedoch beim Aufprall in Wärme umgewandelt, weshalb die Anode ausreichend gekühlt werden muß.

II. **Synchrotronstrahlung**

Für viele Experimente der Elementarteilchenphysik werden Teilchen sehr hoher Energie benötigt. Mit Hilfe von Teilchenbeschleunigern werden die Elementarteilchen auf die erforderliche Geschwindigkeit gebracht. In den sogenannten ZIRKULARBESCHLEUNIGERN geschieht dies, indem die geladenen Teilchen durch $\vec{E}$ – und $\vec{B}$ – Felder auf einer Kreisbahn beschleunigt werden. Dabei ist die mit der Beschleunigung verbundene kontinuierliche Abstrahlung von elektromagnetischer Energie, die **Synchrotronstrahlung**, unerwünscht.

Von welchen Größen hängt die abgestrahlte Intensität ab?

Wir betrachten ein Ladungsteilchen, welches unter dem Einfluß eines magnetischen Feldes eine Kreisbahn durchläuft. Das Teilchen wird durch das Gleichgewicht von Zentrifugal – und Lorentzkraft auf seiner Bahn gehalten.

$$F_Z = m\,\frac{v^2}{r} \qquad\qquad F_B = q\,v\,B$$

Gleichsetzen liefert den Bahnradius

$$r = \frac{m\,v}{q\,B} = \frac{p}{q\,B}$$

Das Teilchen erfährt die Beschleunigung

$$a_z = \frac{v^2}{r} = \frac{p^2}{m^2\,r} \quad .$$

Für die abgestrahlte Intensität gilt

$$I \sim a_z^2 \quad \Rightarrow \quad I \sim \frac{p^4}{m^4\,r^2} \quad .$$

Die räumliche Intensitätsverteilung der Synchrotronstrahlung hat die Form zweier tangential zur Kreisbahn gerichteter Keulen, einer Vorwärts – und einer Rückwärtskeule. Nähert sich die Teilchengeschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit, so erfolgt die Abstrahlung der Energie verstärkt nach vorne in Richtung der Momentangeschwindigkeit. Für $v \approx c$ bildet sich die Rückwärtskeule fast ganz zurück und die Vorwärtskeule ist in die Ebene senkrecht zur Kreisebene eingebettet (Abb. 5.8). Um den durch die Strahlung bewirkten Energieverlust gering zu halten, baut man

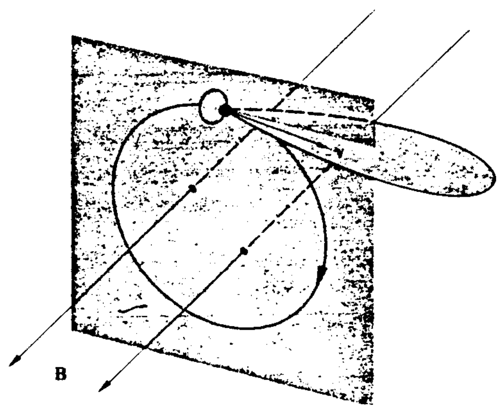


Abbildung 5.8: *Verteilung der Strahlungsintensität eines kreisenden Elektrons (aus [13])*

Zirkularbeschleuniger mit möglichst großem Bahnradius.

Das Frequenzspektrum der Synchrotronstrahlung ist ein reines Kontinuum und reicht je nach der Teilchenenergie vom Radiowellenbereich bis zur Röntgenstrahlung.

III. Ein **Beispiel aus der Astrophysik** ist die **Synchrotronstrahlung des Krabben–Nebels**. Als Quelle dieser Lichterscheinung vermutet man Ladungsteilchen, die sich in magnetischen (Induktions–) Feldern mit hoher Geschwindigkeit auf Kreisbahnen bewegen. Das Frequenzspektrum der Strahlung reicht von Radiofrequenzen bis zum Ultraviolett.

IV. **Rayleigh – Streuung**

Wir betrachten die Streuung von Licht an Atomen. Dabei stellen wir uns das Atom aufgebaut aus positivem Atomkern und Elektronenhülle vor. Eine in das Atom eindringende Lichtwelle, deren Frequenz ober– oder unterhalb der Resonanzfrequenz des Atoms liegt, regt die Elektronen zu erzwungenen Schwingungen an. Die oszillierenden Elektronen im Feld des positiven Kerns können dann als HERTZsche Dipole angesehen werden. Sie senden ihrerseits elektromagnetische Strahlung aus. Primärstrahlung und Streustrahlung sind frequenzgleich und zwischen ihnen besteht keine Phasenverschiebung. Man bezeichnet den beschriebenen Effekt als **Rayleigh–Streuung**.

Da beim HERTZschen Dipol die Ausstrahlung rotationssymmetrisch um die Dipolachse erfolgt, ist die Richtung der Streustrahlung bevorzugt senkrecht zum einfallenden Lichtstrahl (Abb. 5.9).

Für die abgestrahlte Intensität des oszillierenden Dipols gilt

$$\boxed{I \sim \omega^4 \sim \frac{1}{\lambda^4}}$$

Kurzwelliges Licht (blau) wird stärker gestreut als langwelliges Licht (rot).

Durch die RAYLEIGH–Streuung ist auch die blaue Farbe des Himmels zu erklären. Trifft das Sonnenlicht auf die Luftmoleküle der Atmosphäre, so weicht der langwellige, rote Anteil kaum von seiner Strahlungsrichtung ab, während das kurzwellige, blaue Licht stark gestreut wird. Die hochfrequente Streustrahlung erreicht den Beobachter auf der Erde aus allen Richtungen, so daß diesem der Himmel hell und blau erscheint. Das unmittelbar von der Sonne kommende Licht (Primärstrahlung) sieht der Beobachter aufgrund des durch die Streuung verlorengegangenen kurzwelligen Anteils gelb und rot. Je länger der durch die Atmosphäre zurückgelegte Weg ist, desto röter erscheint es. Dies ist beim Sonnenaufgang oder –untergang zu beobachten.

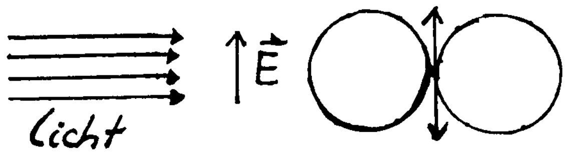


Abbildung 5.9: *Streuung bevorzugt senkrecht zur Einfallsrichtung des Lichtes (aus [7])*

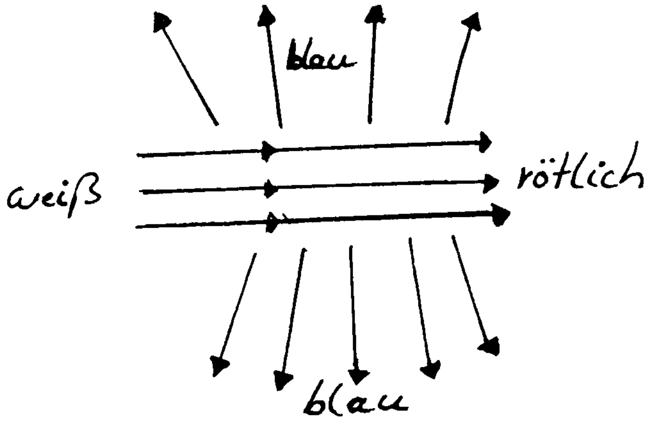


Abbildung 5.10: *Erklärung der blauen Farbe des Himmels (aus [13])*

V. Die Erkenntnis, daß beschleunigte Ladungen Energie abstrahlen, war auch für die **Atomphysik** von großer Wichtigkeit. Sie führte 1913 zur **Verbesserung des Rutherfordschen Atommodells durch Niels Bohr**.

Das Atommodell von RUTHERFORD (1911) beschrieb das Atom als positiven Kern, um den sich die Elektronen wie Planeten um die Sonne bewegen. Die kreisenden Elektronen müßten aber als beschleunigte Ladungen elektromagnetische Strahlung ihrer Umlauffrequenz aussenden. Der dadurch bedingte Energieverlust würde dazu führen, daß sie sich auf Spiralbahnen zum Kern hin bewegten. Aufgrund der Instabilität der Bahnen müßte die ausgesandte Strahlung einen kontinuierlichen Frequenzbereich überdecken. Die Diskrepanz zwischen diesen Überlegungen und den Ergebnissen experimenteller Untersuchungen führte zur Aufstellung der Bohrschen Postulate und zur Entwicklung des Bohrschen Atommodells (NIELS BOHR 1885 – 1962).

Kapitel 6

Geometrische Optik

Dies ist das erste von fünf Kapiteln, in denen wir uns mit der Optik befassen werden. Bevor wir uns speziell der geometrischen Optik zuwenden, soll an dieser Stelle eine Übersicht über die Struktur der gesamten physikalischen Optik gegeben werden.

6.1 Einführung in die physikalische Optik

Als Licht bezeichnen wir die physikalischen Erscheinungen, die durch das menschliche Sinnesorgan Auge wahrgenommen werden. Die Optik ist die Lehre vom Licht, sie beschäftigt sich mit den Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten der Entstehung, Ausbreitung und der physikalischen Wirkung des Lichtes. Sie behandelt jedoch nicht die subjektiven Empfindungen, die vom Licht im Auge hervorgerufen werden.

Die Vorstellung vom Wesen des Lichtes hat sich im Laufe der Zeit mehrmals geändert.
NEWTON stellte 1669 eine **Korpuskulartheorie** auf, derzufolge eine Lichtquelle sehr kleine Teilchen (Korpuskeln) aussendet, die sich mit sehr großer Geschwindigkeit geradlinig fortbewegen. Damit war er in der Lage, Reflexion und Brechung des Lichtes zu erklären, nicht aber Interferenz– und Beugungserscheinungen.
Dies wurde mit der 1677 von HUYGENS entwickelten **Wellentheorie** möglich, die das Licht als elastische Welle in einem das Weltall erfüllenden "Lichtäther" ansah. HUYGENS sowie auch YOUNG (1807) gingen dabei von Longitudinalwellen aus, bis die Entdeckung der Polarisierbarkeit des Lichtes durch MALUS (1808) und FRESNEL (1815) zur Annahme von Transversalwellen führte.
Nachdem der für die Wellentheorie grundlegende "Lichtäther" nicht nachgewiesen werden konnte, deutete MAXWELL 1871 in seiner **elektromagnetischen Lichttheorie** das Licht als einen elektromagnetischen Wellenvorgang. Seine Vorstellung wurde 1886 von H.HERTZ experimentell bestätigt. Demnach handelt es sich bei Licht um elektromagnetische Transversalwellen eines bestimmten Wellenlängen– bzw. Frequenzbereiches des elektromagnetischen Spektrums, welche Sinneseindrücke im Auge hervorrufen. Die Wellenlängen dieses "sichtbaren Spektrums" liegen im Vakuum zwischen der roten Grenze bei etwa $\lambda = 780\,\mathrm{nm}$ und der violetten Grenze bei etwa $\lambda = 380\,\mathrm{nm}$.
Die Gültigkeit dieser Theorie wurde zu Beginn des 20. Jahrhunderts in Frage gestellt,

als bei Experimenten zur Wechselwirkung von Licht und Materie Erscheinungen auftraten, die anhand der Wellenvorstellung nicht erklärt werden konnten. Die Interpretation dieser Wechselwirkungsvorgänge lieferte EINSTEIN 1905 mit der Formulierung seiner **Lichtquantenhypothese**. Danach besitzt Licht korpuskularen Charakter; es besteht aus bestimmten Energiequanten, den sogenannten Photonen, welche bei Wechselwirkung mit Materie ausgetauscht werden.
Zur vollständigen Beschreibung der Lichterscheinungen bestanden Wellen- und Lichtquantentheorie gleichberechtigt nebeneinander und wurden je nach Art eines Experimentes zu dessen Interpretation eingesetzt. Man spricht vom **Welle-Teilchen-Dualismus des Lichtes**.
Erst in der modernen **Quantenoptik** bzw. **Quantenelektrodynamik** wurden die gegensätzlichen Vorstellungen durch die HEISENBERGsche Unschärferelation vereinigt.

Das Schema in Abb. 6.1 zeigt die Gliederung der Optik in ihre historisch gewachsenen Teilgebiete.

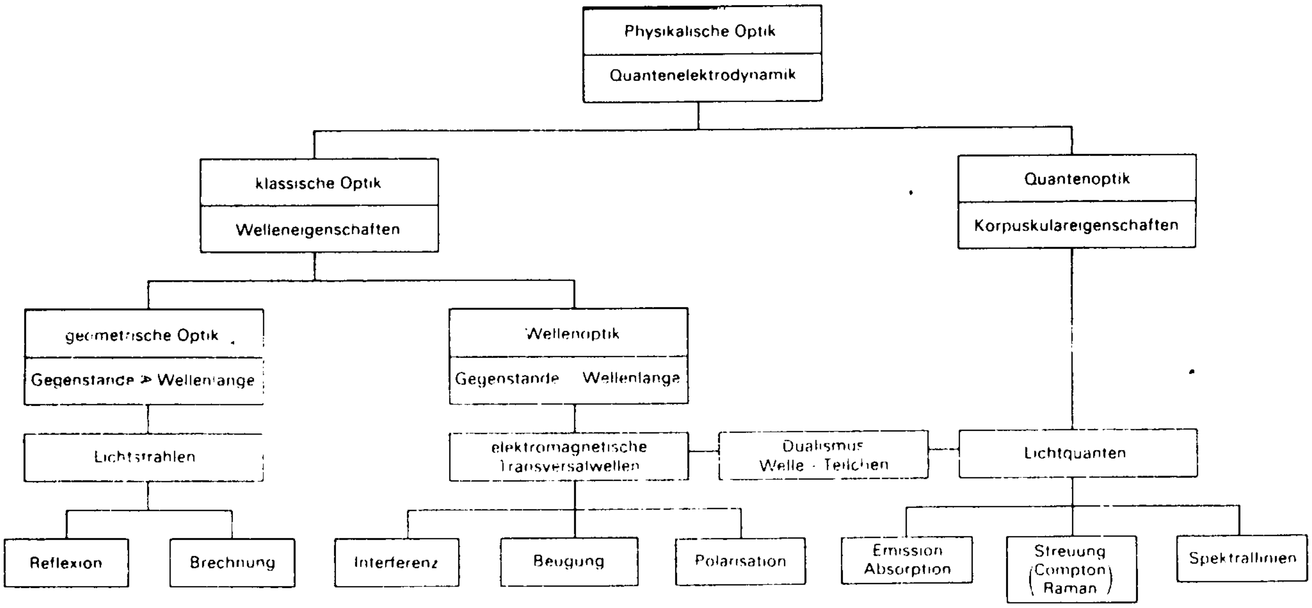


Abbildung 6.1: *Strukturbild physikalische Optik (aus [14])*

Wir beschäftigen uns im folgenden mit dem Teilgebiet der geometrischen Optik.

Die geometrische Optik beschreibt die Lichtausbreitung mit Hilfe von Lichtstrahlen, welche bei der Auffassung von Licht als Wellenerscheinung den Wellennormalen entsprechen. Diese sind orthogonal zu den Wellenflächen und geben daher die Ausbreitungsrichtung der Welle an. Im besonderen sind diejenigen Lichterscheinungen Gegenstand der geometrischen Optik, die auftreten, falls die Wellenlänge des Lichtes sehr klein im Verhältnis zur Größenordnung der verwendeten Versuchsgegenstände (Blende, Spiegel, usw.) ist.

Dabei haben folgende Gesetzmäßigkeiten Gültigkeit:

(a) Die Ausbreitung des Lichtes im homogenen, isotropen Medium ist geradlinig, d.h. die Lichtstrahlen sind Geraden.

(b) Der Lichtweg ist grundsätzlich umkehrbar.

(c) Die Lichtstrahlen sind unabhängig voneinander, ein Lichtstrahl verläuft so, als ob keine anderen Strahlen vorhanden wären.

(d) **Reflexions – Brechungsgesetz**

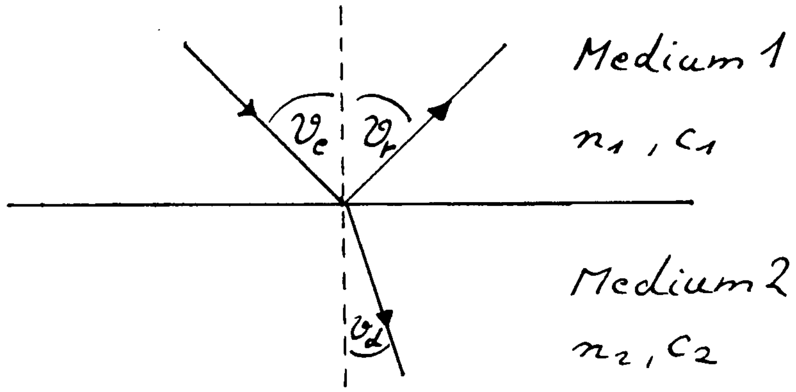


Abbildung 6.2: *Reflexion und Brechung eines Lichtstrahls an der Grenzfläche zwischen zwei Medien.*

Fällt Licht schräg auf die ebene, glatte Grenzfläche zweier verschiedener Medien (z.B. Luft/Glas oder Luft/Wasser), so wird i.allg. ein Teil des Lichtes in das erste Medium zurückgeworfen. Der übrige Teil dringt unter Änderung seiner Richtung in das zweite Medium ein. Ein schräg auf die Trennfläche auftreffender Lichtstrahl (e) erfährt also eine Aufteilung in einen reflektierten (r) und einen gebrochenen Strahl (d).

Einfallender und reflektierter Strahl verhalten sich nach dem **Reflexionsgesetz**: Sie bilden mit dem Einfallslot den gleichen Winkel. Es gilt

Einfallswinkel = Ausfallswinkel

$$\boxed{\vartheta_e = \vartheta_r} \qquad \text{Reflexionsgesetz}$$

Dabei liegen einfallender Stahl, reflektierter Strahl und Einfallslot in einer Ebene, der Einfallsebene.

Für den einfallenden und den gebrochenen Strahl gilt das 1618 von SNELLIUS gefundene **Brechungsgesetz**:

$$\boxed{\frac{\sin\vartheta_e}{\sin\vartheta_d} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} = const.} \qquad \text{SNELLIUSsches Brechungsgesetz}$$

Dabei bezeichnet ϑ_d den Brechungswinkel, den der durch die Grenzfläche hindurchgehende Strahl mit dem Einfallslot einschließt. Auch der gebrochene Strahl liegt in der Einfallsebene.

Das Brechungsgesetz läßt sich auch in der folgenden Form schreiben:

$$\boxed{n_1 \sin\vartheta_e = n_2 \sin\vartheta_d}$$

Das Produkt $n \sin\vartheta$ heißt **numerische Apertur** eines Lichtstrahls gegen das Einfallslot. Das Brechungsgesetz besagt also, daß bei der Brechung die numerische Apertur des Lichtstrahls konstant bleibt.

Die Konstante n_{21} heißt **relativer Brechungsindex** des Mediums 1 in Bezug auf das Medium 2. Sie gibt das Verhältnis der absoluten Brechungsindizes an und hängt von der Art der beiden Medien sowie von der Wellenlänge (Frequenz) des Lichtes ab.
Man nennt einen Stoff optisch dichter (dünner) im Vergleich zu einem anderen, wenn sein absoluter Brechungsindex größer (kleiner) ist als der des anderen.
Beim Übergang eines Lichtstrahls von einem optisch dünneren in ein optisch dichteres Medium, wie z.B. von Luft in Glas oder Wasser, gilt mit $n_2 > n_1$

$$\begin{aligned} \frac{\sin\vartheta_e}{\sin\vartheta_d} = \frac{n_2}{n_1} &> 1 \\ \Leftrightarrow \qquad \sin\vartheta_e &> \sin\vartheta_d \\ \Leftrightarrow \qquad \vartheta_e &> \vartheta_d \end{aligned}$$

d.h., der Lichtstrahl wird zum Einfallslot hingebrochen. Im anderen Fall wird der Strahl vom Lot weggebrochen, wie man aus der Umkehrbarkeit des Lichtweges folgern kann.

Es gibt im wesentlichen drei allgemeine Prinzipien, aus denen sich die Gesetze der geometrischen Optik ableiten lassen:

1. Das Huygenssche Prinzip sowie das damit eng verbundene Prinzip von Malus, welche zeitgleich entwickelt wurden
2. Das Prinzip von Fermat
3. Die Maxwellschen Gleichungen

Zu 1) Das Huygenssche Prinzip 1678

Was geschieht, wenn eine Welle auf ein Hindernis trifft?

Als Antwort auf diese Frage entwickelte der holländische Physiker Huygens (1629 – 1695) eine Methode, mit der sich der weitere Wellenverlauf auf unkomplizierte Weise angeben läßt.
Basis bildet die Definition der Wellenfläche als Gesamtheit derjenigen Punkte, die

vom Erregungszentrum zur gleichen Zeit angeregt werden. Die Punkte einer Wellenfläche besitzen den gleichen Schwingungszustand und unterscheiden sich in ihren Schwingungen grundsätzlich nicht vom Erregungszentrum. Sie können daher selbst als Wellenzentren angesehen werden.

> *Alle Punkte einer Wellenfront können als Ausgangspunkte von Elementarwellen aufgefaßt werden. Die äußere Einhüllende dieser Elementarwellen ergibt die fortlaufende Welle.*

Das Prinzip ist in Abbildung 6.3 veranschaulicht.

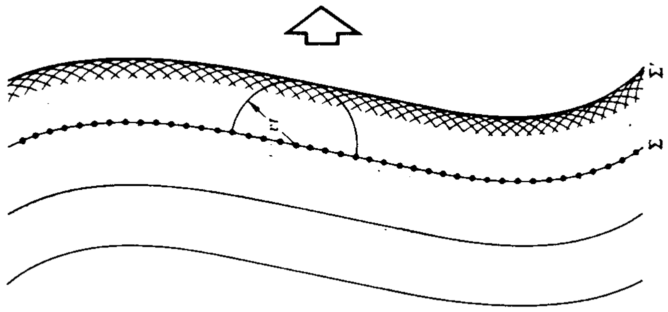


Abbildung 6.3: *Ausbreitung einer Wellenfront nach dem* HUYGENS*schen Prinzip. (aus [13])*

Die Elementarwellen sind

- Kugelwellen, falls eine dreidimensionale Ausgangswelle vorliegt,
- Kreiswellen, falls nur zwei Dimensionen betrachtet werden.

Das Prinzip von Malus

Nach dem Satz von MALUS (1807) sind Strahlen und Wellenfronten stets orthogonal zueinander bei allen Prozessen der Wellenausbreitung in isotropen Medien. An einer Grenzfläche erfahren die Strahlen durch Reflexion und Brechung eine Richtungsänderung, wobei die Orthogonalitätsbeziehung erhalten bleibt.

Herleitung des Brechungsgesetzes aus dem Prinzip von Malus

Wir erörtern die Brechung einer ebenen Welle beim Übergang von einem Medium 1 in ein Medium 2. Die Welle bewege sich im Medium i mit der Geschwindigkeit c_i fort, wobei $c_1 > c_2$ gelte. Wir betrachten die zur Strahlrichtung senkrechten

Wellenfronten der einfallenden Welle.

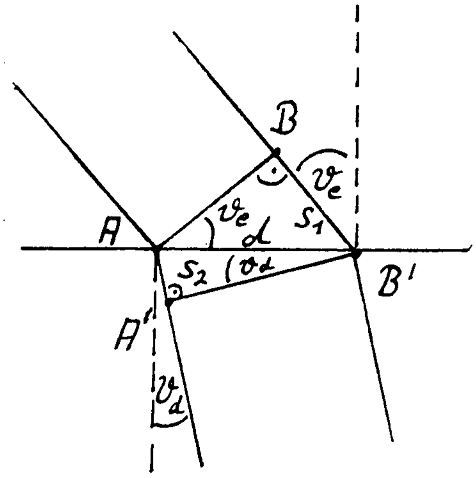


Abbildung 6.4: *Brechung einer ebenen Welle*

Wir werten Abbildung 6.4 aus: Zum Zeitpunkt Null trifft die Wellenfront AB im Punkt A auf die Grenzfläche zwischen den beiden Medien. Zur Zeit t erreicht die Wellenfront im Medium 2 den Punkt A', während sie im Medium 1 im Punkt B' die Trennfläche berührt.

Für die Fortpflanzung der Wellenfront in den verschiedenen Medien gilt:

$$s_1 = c_1\, t = \frac{c}{n_1}\, t = d\, \sin\vartheta_e$$

$$s_2 = c_2\, t = \frac{c}{n_2}\, t = d\, \sin\vartheta_d$$

Division der beiden Gleichungen ergibt

$$\boxed{\frac{\sin\vartheta_e}{\sin\vartheta_d} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}}$$

Dabei bezeichnen n_1, n_2 die absoluten Brechungsindizes der Medien, und c ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit.

Zu 2) Das Fermatsche Prinzip (1679)

> *"Licht, das durch Spiegelung von einem Raumpunkt zum anderen gelangt, wählt immer denjenigen Weg, für den die Laufzeit ein Minimum ist!"*

Die mathematisch exaktere Formulierung des Prinzips von Fermat besagt, daß die Laufzeit des Lichtes zwischen zwei Raumpunkten A und B ein Minimum für nahe benachbarte Wege annimmt:

$$t_{AB} = \int_A^B \frac{ds}{c_M} = \frac{1}{c} \int_A^B n\, ds = \text{Minimum!}$$

Ein solches Laufzeitproblem ist mit Hilfe der Variationsrechnung zu lösen, was sich jedoch bei Medien mit kontinuierlich variierendem Brechungsindex als mathematisch sehr schwierig erweist.

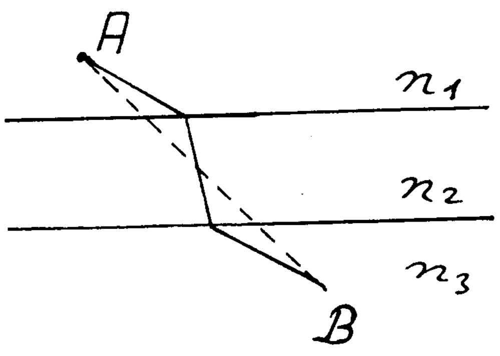


Abbildung 6.5: *Fortpflanzung eines Lichtstrahls durch Materialschichten mit verschiedenen Brechungsindizes*

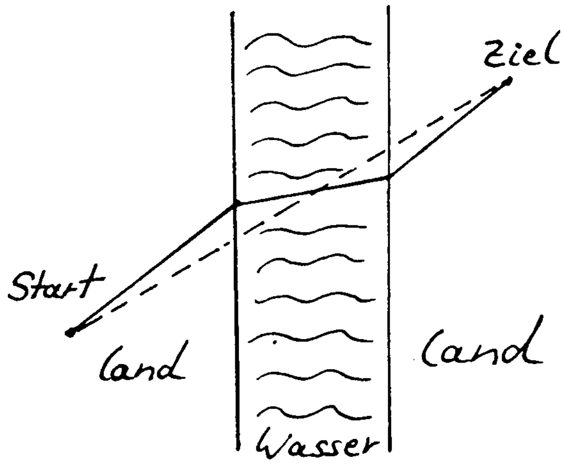


Abbildung 6.6: *Anschauliches Beispiel zum Prinzip von* FERMAT

Wir wollen hier die formale Vorgehensweise am einfachen Beispiel übereinandergeschichteter Lagen verschiedener Stoffe (Brechungsindizes n_1, n_2 und n_3) erläutern. Wir betrachten dazu Abbildung 6.5.

Die Laufzeit t_{AB} berechnet sich zu

$$t_{AB} = \frac{s_1}{c_1} + \frac{s_2}{c_2} + \frac{s_3}{c_3} = \frac{1}{c}\,(n_1\, s_1 + n_2\, s_2 + n_3\, s_3)$$

Die Laufzeit nimmt ein Minimum an, falls

$$dt_{AB} = \frac{1}{c}\,(n_1\, ds_1 + n_2\, ds_2 + n_3\, ds_3) = 0$$

In der Zeichnung gibt die durchgezogenen Linie den zeitlich kürzeren Weg an. Die gestrichelte Direktverbindung der beiden Punkte würde eine längere Laufzeit ergeben.

Hier sei noch ein Beispiel zur Veranschaulichung des Fermatschen Prinzips angefügt: Wir betrachten einen Wettlauf von A nach B, wobei sich zwischen Start – und Zielpunkt ein Wasserkanal (ohne Strömung) befinde, welcher schwimmend durchquert werden muß. Wie verläuft der zeitlich kürzeste Weg, den ein Läufer einschlagen sollte, um den Sieg zu erlangen?

Die Geschwindigkeit eines Wettläufers ist beim Schwimmen wesentlich kleiner als beim Laufen. Daher ist der zeitlich kürzeste Weg nicht die geradlinige Verbindung AB (gestrichelte Linie), sondern eine Route mit kürzerer Wasserstrecke (durchgezogene Linie).

Herleitung des Brechungsgesetzes aus dem Fermatschen Prinzip

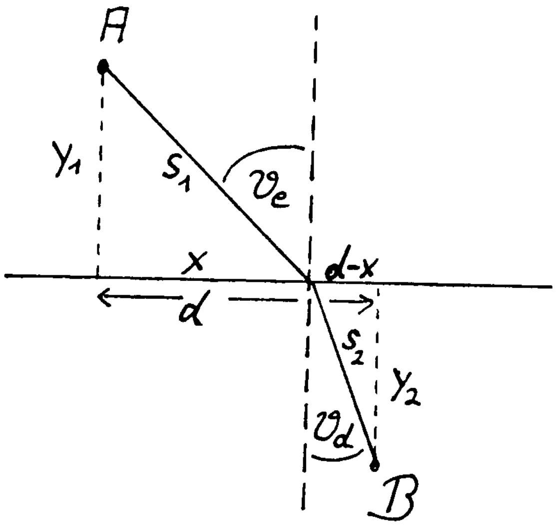


Abbildung 6.7: *Herleitung des Brechungsgesetzes nach dem Prinzip von* FERMAT

Die Lichtwege variieren mit dem Parameter x. Die Bedingung für den minimalen Lichtweg lautet daher

$$\frac{dt_{AB}}{dx} = 0$$

Mit $t_{AB} = \frac{1}{c} \int_A^B n\, ds = \frac{1}{c}\,(n_1\, s_1 + n_2\, s_2)$ folgt daraus

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(n_1\, s_1 + n_2\, s_2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad n_1 \frac{ds_1}{dx} + n_2 \frac{ds_2}{dx} &= 0 \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{x^2 + y_1^2} & \Rightarrow \quad \frac{ds_1}{dx} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_1^2}} = \frac{x}{s_1} \\ s_2 &= \sqrt{(d-x)^2 + y_2^2} & \Rightarrow \quad \frac{ds_2}{dx} &= \frac{-(d-x)}{\sqrt{(d-x)^2 + y_2^2}} = \frac{-(d-x)}{s_2} \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt

$$n_1 \frac{x}{s_1} - n_2 \frac{d-x}{s_2} = 0$$

Wie aus der Skizze ersichtlich ist, gilt

$$\sin\vartheta_e = \frac{x}{s_1} \qquad \sin\vartheta_d = \frac{d-x}{s_2}$$

Dies liefert

$$n_1 \sin\vartheta_e - n_2 \sin\vartheta_d = 0$$

und man erhält das Brechungsgesetz

$$\boxed{\frac{\sin\vartheta_e}{\sin\vartheta_d} = \frac{n_2}{n_1}}$$

Zu 3) Die Ableitung der geometrischen Gesetze durch Lösung der MAXWELLschen Gleichungen unter speziellen Randbedingungen wird in den Vorlesungen zur Theoretischen Physik gelehrt, wir gehen hier nicht darauf ein.

6.2 Die Totalreflexion

Wir betrachten den Übergang eines Lichtstrahls von einem optisch dichteren Medium 1 in ein optisch dünneres Medium 2. Aus dem Brechungsgesetz

$$\frac{\sin\vartheta_e}{\sin\vartheta_d} = \frac{n_2}{n_1} < 1$$

folgt in diesem Fall für das Größenverhältnis von Einfallswinkel ϑ_e und Brechungswinkel ϑ_d die Beziehung $\vartheta_d > \vartheta_e$. Der Strahl wird vom Lot weggebrochen. Bei dieser Art der Brechung kann offensichtlich der Fall auftreten, daß der Brechungswinkel 90° überschreitet. Dann existiert kein durchgehender Strahl mehr, sondern das Licht wird vollständig reflektiert. Man spricht von **Totalreflexion**.

Bei welchen Einfallswinkeln ϑ_e tritt Totalreflexion auf?

Zur Klärung dieser Frage untersuchen wir den Grenzfall $\vartheta_d = 90°$, in dem der gebrochene Strahl entlang der Trennfläche der beiden Medien verläuft.
Der Winkel $\vartheta_d = 90°$ tritt auf bei einem bestimmten Einfallswinkel, dem **Grenzwinkel der Totalreflexion** ϑ_T, welcher festgelegt ist durch

$$\frac{\sin\vartheta_T}{\sin 90°} = \frac{n_2}{n_1}$$

Mit $\sin 90° = 1$ folgt

$$\boxed{\sin\vartheta_T = \frac{n_2}{n_1}}$$

Grenzwinkel
der Totalreflexion
$(n_1 > n_2)$

Erfolgt der Übergang des Lichtstrahls in Vakuum oder Luft, so kann $n_2 = 1$ und $n_1 = n$ gesetzt werden.

$$\boxed{\sin \vartheta_T = \frac{1}{n}}$$ Grenzwinkel der Totalreflexion gegen Vakuum/Luft

Erfüllt also der Einfallswinkel die Bedingung $\vartheta_e > \vartheta_T$, so wird das auf die Grenzfläche treffende Licht vollständig reflektiert.

Werte für die Brechzahlen einiger Stoffe für sichtbares Licht gibt die untenstehende Tabelle an.

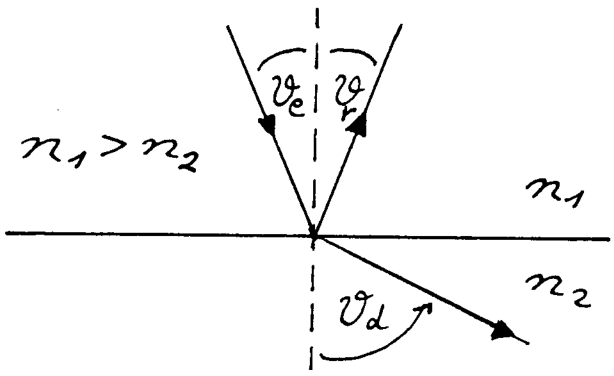


Abbildung 6.8: *Übergang eines Lichtstrahls von einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium*

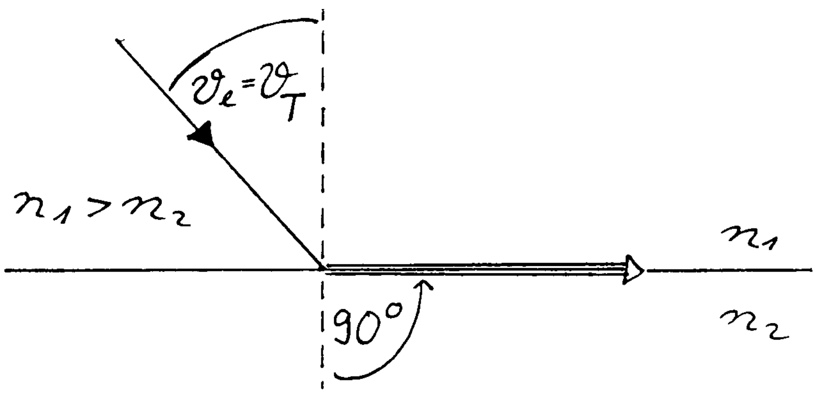


Abbildung 6.9: *Grenzwinkel der Totalreflexion*

Stoff	Brechzahl n
Luft	1,0003
H_2O	1,33
Glas	1,5
Diamant	2,42

Damit lassen sich für verschiedene Übergänge die Grenzwinkel der Totalreflexion berechnen:

$$\begin{aligned}
\text{Wasser} \rightarrow \text{Luft}: \quad \sin\vartheta_T &= \frac{1}{1,33} = 0,75 \quad \Rightarrow \quad \vartheta_T = 48,8^\circ \\
\text{Glas} \rightarrow \text{Luft}: \quad \sin\vartheta_T &= \frac{1}{1,5} = 0,667 \quad \Rightarrow \quad \vartheta_T = 41,8^\circ \\
\text{Glas} \rightarrow \text{Wasser}: \quad \sin\vartheta_T &= \frac{1,33}{1,5} = 0,887 \quad \Rightarrow \quad \vartheta_T = 62,5^\circ
\end{aligned}$$

Die umgekehrte Vorgehensweise stellt eine wichtige Anwendung der Totalreflexion dar:

> Der Grenzwinkel der Totalreflexion läßt sich sehr genau messen. Diese Tatsache wird zur Bestimmung von Brechungsindizes unter Verwendung der Beziehung $\sin\vartheta_T = n_2/n_1$ ausgenutzt!

Ein weiteres **praktisches Anwendungsbeispiel** ist das Glasfaserkabel. Licht, das an einem Ende einer dünnen Glasfaser eintritt, wird bis zum anderen Ende geleitet, da die Totalreflexion ein seitliches Austreten verhindert. Dabei ist vorausgesetzt, daß der Krümmungsradius der Glasfaser groß gegen den Querschnitt ist.

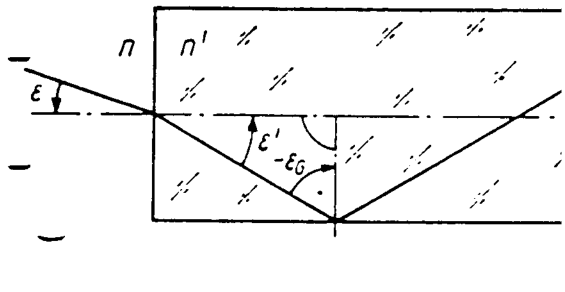


Abbildung 6.10: *Totalreflexion in einem Glasstab (aus [12])*

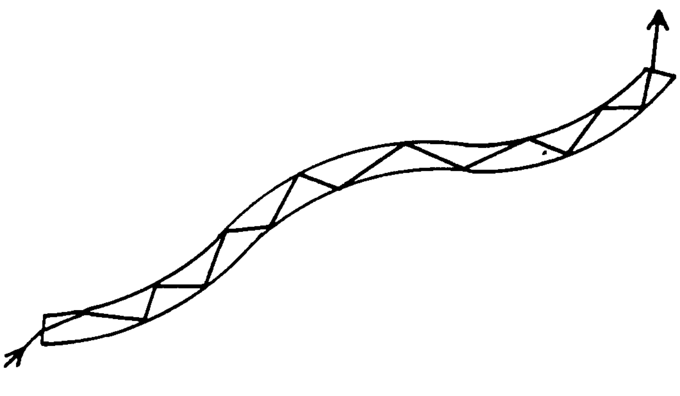


Abbildung 6.11: *Lichtleitung in einer dünnen Glasfaser (aus [7])*

Versuche zur Totalreflexion

<u>*Versuch 1:*</u> <u>Totalreflexion in Wasser</u>

Gezeigt wird die Totalreflexion, die beim Übergang eines Lichtstrahls von Wasser in Luft auftritt (Versuchsaufbau siehe Abb. 6.12!).
In einem mit Wasser gefüllten Aquarium befindet sich ein Spiegel, der

den auf ihn gerichteten Lichtstrahl einer Kohlebogenlampe nach oben reflektiert. Dieser wird an der Wasseroberfläche zunächst teilweise reflektiert und gebrochen. Einfallender, rflektierter und gebrochener Strahl sind durch im Hintergrund befindliche verschiedenfarbige Pappen deutlich sichtbar. Man ändert nun den Neigungswinkel des Spiegels, bis der durchgehende Strahl verschwindet. Dann liegt Totalreflexion vor.

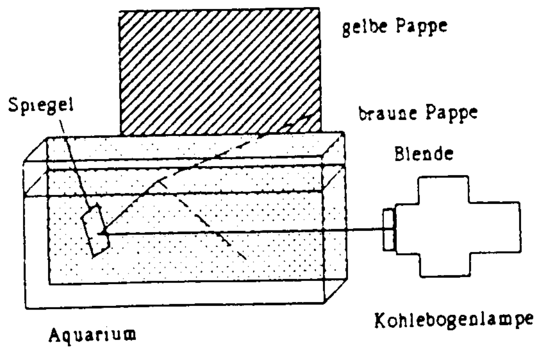


Abbildung 6.12: *Versuchsaufbau zur Totalreflexion in Wasser (aus [9])*

Versuch 2: Totalreflexion im gebogenen Plexiglasstab

Gezeigt wird die Lichtleitung in einem gebogenen Plexiglasrohr.
Aufgrund der wiederholten Totalreflexion an der inneren Oberfläche des Plexiglasrohres gelangt die Strahlung vollständig vom einen zum anderen Ende, obwohl das Rohr gekrümmt ist.
Umfaßt man die Biegestellen des Plexiglasrohres mit den Händen und verändert auf diese Weise den Brechungsindex, so wird das am Rohrende austretende Licht schwächer. Dieser Effekt wird durch Einfettung der Hände noch verstärkt. Daß an den mit Fettresten behafteten Biegestellen Licht aus dem Rohr austritt, zeigt das Leuchten dieser Stellen nach Entfernen der Hände.

Versuch 3: Gebogener Lichtstrahl in Kochsalzlösung

Schichtet man eine NaCl – Lösung und Wasser übereinander, so entsteht durch Diffusion der NaCl – Moleküle aus der gesättigten Lösung in das Wasser eine Grenzschicht mit kontinuierlichem Brechungsindexgefälle. Ein in die Diffusionszone eintretender Lichtstrahl wird aufgrund des Brechzahlgefälles nach dem FERMATschen Prinzip gekrümmt. Außerdem erfährt er am oberen Rand der Diffusionszone (Grenzfläche zum reinen Wasser) eine Totalreflexion.
Der Strahl wird sichtbar aufgrund der Streuung an zugesetzten Schwebeteilchen.

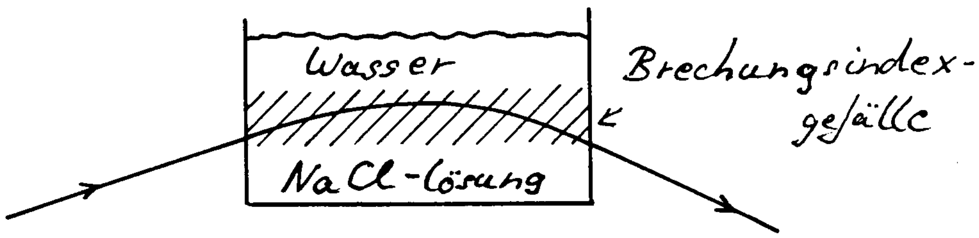


Abbildung 6.13: *Gebogener Lichtstrahl in Kochsalzlösung (aus [7])*

6.3 Einfache optische Instrumente

6.3.1 Die optische Abbildung

Ein Beobachter sieht einen Gegenstand unmittelbar, wenn die von dem Gegenstand ausgehenden Lichtstrahlen ohne Änderung ihrer Richtung in sein Auge gelangen. Der Sinneseindruck des Gegenstandes wird dadurch erzeugt, daß jeder Punkt des Gegenstandes Ausgangspunkt eines Kegels divergierender Strahlen ist, welche geradlinig in die Pupille einfallen.
Durch Einbringen eines geeigneten optischen Instrumentes in den Strahlengang erreicht man, daß die von den Objektpunkten ausgehenden divergenten Strahlenbündel in das Auge gelangen, nachdem sie eine Richtungsänderung erfahren haben.
Für den Sinneseindruck ist nur der Verlauf der Strahlen beim Eintritt in das Auge maßgebend. Der Beobachter sieht daher jeden Objektpunkt dort, von wo aus die Strahlen divergieren oder zu divergieren scheinen. Diese Punkte heißen Bildpunkte, ihre Gesamtheit formt das Bild des Gegenstandes.

Je nach Art der optischen Vorrichtung sind dabei zwei Fälle zu unterscheiden:
Führt das optische Instrument die von einem Gegenstandspunkt herkommenden Strahlen tatsächlich in dem vom Beobachter wahrgenommenen Bildpunkt zusammen, von dem sie wie vom wirklichen Objektpunkt aus divergieren, so liegt ein reelles Bild vor. Dieses kann auf einer Mattscheibe oder Photoplatte aufgefangen werden.
Ist aber der Bildpunkt nur ein scheinbarer Divergenzpunkt, d.h. schneiden sich die in das Auge fallenden Strahlen nicht wirklich in ihm, sondern nur ihre rückwärtigen Verlängerungen, so spricht man von einem virtuellen Bild. Dieses Bild ist photographierbar, es kann aber nicht am Ort des Bildes mit einer Platte oder Mattscheibe aufgefangen werden.

Eine optische Abbildung erzeugt also ein vergrößertes, verkleinertes oder originalgroßes Bild eines Gegenstandes, indem die vom Gegenstandspunkt ausgehenden Lichtstrahlen im Bildpunkt direkt oder durch Zurückverlängern vereinigt werden.

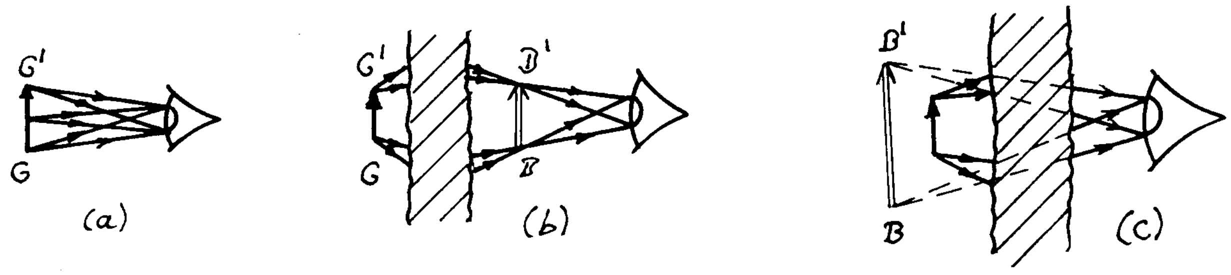


Abbildung 6.14: *Optische Abbildung: (a) unmittelbares Sehen des Gegenstandes, (b) reelles Bild, (c) virtuelles Bild. (aus [8])*

In diesem Kapitel sollen die an verschiedenen Abbildungsvorrichtungen stattfindenden optischen Abbildungen anschaulich erläutert und mathematisch beschrieben werden. Für die auftretenden optischen Größen werden dabei je nach Art der Abbildungseinrichtung Vorzeichen festgelegt. Die Wahl der Vorzeichen ist willkürlich unter der Bedingung, daß sie konsequent einbehalten wird. Da keine einheitliche Verzeichenkonvention vorgegeben ist, arbeiten die verschiedenen Lehrbücher zur Optik mit unterschiedlichen Festlegungen. Wir werden uns in diesem Vorlesungsskript an die Vorzeichenkonvention halten, die auch im Lehrbuch "Optics" von E.Hecht (Literaturverzeichnis [13]) verwendet wird.

6.3.2 Abbildung durch Spiegel

Der Planspiegel

Beispiele für ebene Spiegel sind polierte Metallflächen oder Glasplatten mit aufgedampfter Metallschicht. Wichtig ist, daß Unebenheit und Rauhigkeit der Spiegelflächen klein im Verhältnis zur Wellenlänge des auftreffenden Lichtes sind. Anderenfalls findet diffuse Reflexion statt, d.h., ein einfallendes Lichtbündel wird nicht als Ganzes in eine Richtung refektiert, sondern zerstreut durch Reflexion in alle Richtungen (siehe Abb. 6.15).

Bei regulärer Reflexion (Abb. 6.16) läßt sich zu einem beliebigen Gegenstandspunkt G der zugehörige Bildpunkt B unter Verwendung des Reflexionsgesetzes konstruieren. Die Konstruktion zeigt, daß der Planspiegel nur virtuelle Bildpunkte, also von ausgedehnten Gegenständen immer virtuelle Bilder erzeugt.

Frage: In einem Spiegelbild sind rechte und linke Seite vertauscht. Warum vertauscht der Spiegel nicht oben und unten?

6.3.3 Gekrümmte Spiegel

Spiegel, die die Form eines Teiles einer Kugelfläche besitzen, heißen **sphärische Spiegel**. Bei **Konkav** – oder **Hohlspiegeln** ist die Innenseite, bei **Konvex** – oder **Wölbspiegeln** ist die Außenseite spiegelnd.

Das im Mittelpunkt der Spiegelfläche auf diese errichtete Lot wird als optische Achse bezeichnet. Sie verläuft durch den Krümmungsmittelpunkt C der Kugel, aus deren Fläche der Spiegel ausgeschnitten ist. Die dicht an der optischen Achse verlaufenden Strahlen nennt man paraxiale Strahlen.

Wir wenden bei der mathematischen Behandlung der sphärischen Spiegel die in der folgenden Tabelle (aus [13]) angegebene Vorzeichenkonvention an:

Optische Größe	Vorzeichen	
	+	−
Radius r	konvexer Spiegel, d.h. C rechts von H	konkaver Spiegel, d.h. C links von H
Brennweite f	konkaver Spiegel	konvexer Spiegel
Gegenstandsweite g	links von H	rechts von H
Bildweite b	links von H	rechts von H
Gegenstandsgröße $y = \overline{GG'}$	von der opt. Achse nach oben, aufrechtes Objekt	von der opt. Achse nach unten, umgekehrtes Objekt
Bildgröße $y' = \overline{BB'}$	von der opt. Achse nach oben, aufrechtes Bild	von der opt. Achse nach unten, umgekehrtes Bild

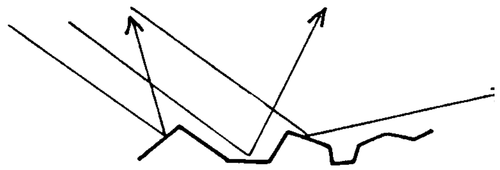


Abbildung 6.15: *Diffuse Reflexion (aus [7])*

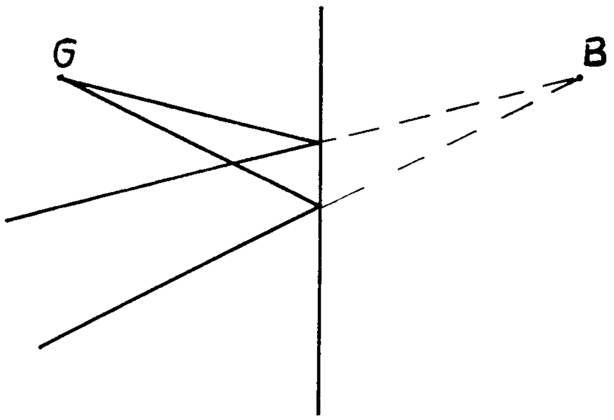


Abbildung 6.16: *Reguläre Reflexion*

Wir werden uns bei den folgenden Betrachtungen auf achsennahe Strahlen beschränken.

a) **Der Hohlspiegel**

Wir konstruieren zunächst zu einem auf der optischen Achse in der endlichen Gegenstandsweite g gelegenen Objektpunkt G den zugehörigen Bildpunkt B (Abb. 6.17). Dieser liegt ebenfalls auf der optischen Achse in der Bildweite b. Zur Konstruktion benutzen wir den entlang der optischen Achse verlaufenden Mittelpunktsstrahl, welcher in sich zurückgeworfen wird sowie einen unter dem Einfallswinkel α auf die Spiegelfläche fallenden Strahl. Letzterer wird an der im Einfallspunkt an den Spiegel angelegten Tangentialebene reflektiert. Es gelten folgende Winkelbeziehungen:

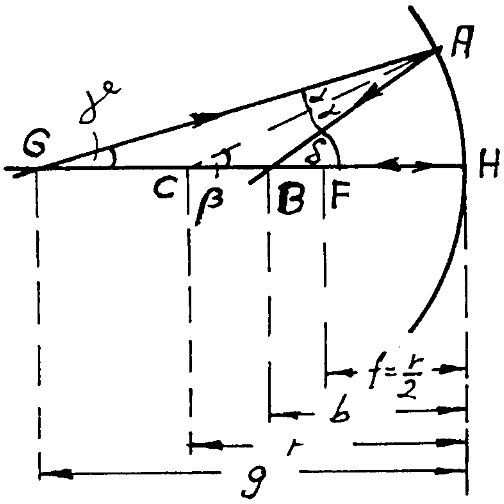


Abbildung 6.17: *Bildpunktkonstruktion am Hohlspiegel (aus [8])*

$$\left.\begin{array}{rcl} \beta & = & \alpha+\gamma \\ \delta & = & 2\,\alpha+\gamma \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \delta = 2\,(\beta-\gamma)+\gamma \;\Leftrightarrow\; \gamma+\delta = 2\,\beta$$

Für paraxiale Strahlen sind die auftretenden Winkel sehr klein und es kann

$$\gamma \simeq \frac{\overline{AH}}{g}\;,\;\beta \simeq \frac{\overline{AH}}{r}\;,\;\delta \simeq \frac{\overline{AH}}{b}$$

gesetzt werden. Aus $\gamma+\delta = 2\,\beta$ folgt damit

$$\frac{\overline{AH}}{g}+\frac{\overline{AH}}{b} = 2\,\frac{\overline{AH}}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{g}+\frac{1}{b} = \frac{2}{r}} \quad \underline{\text{Abbildungsgleichung beim Hohlspiegel}}$$

Für eine unendlich große Gegenstandsweite $g \to \infty$ ergibt sich daraus die Bildweite $b_\infty = r/2$, welche als **Brennweite** f des Spiegels bezeichnet wird.

$$\boxed{f = \frac{r}{2}} \quad \underline{\text{Brennweite des Hohlspiegels}}$$

Alle von einem sehr weit entfernten Objektpunkt kommenden Strahlen verlaufen durch den sogenannten **Brennpunkt** F des Spiegels als den zugehörigen Bildpunkt.

Da die aus dem Unendlichen kommenden Strahlen praktisch als parallel angesehen werden können, läßt sich folgendes festhalten:
Der Hohlspiegel fokussiert ein paraxiales, paralleles Lichtbündel im Brennpunkt. Befindet sich umgekehrt im Brennpunkt des Hohlspiegels eine punktförmige Lichtquelle, so verlaufen die davon ausgehenden paraxialen Strahlen nach der Reflexion am Spiegel parallel zur optischen Achse. Dies folgt aus der Umkehrbarkeit des Lichtweges.

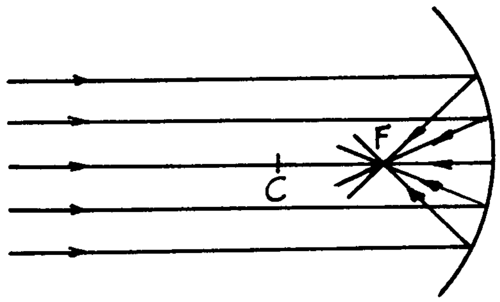


Abbildung 6.18: *$g = \infty \Rightarrow b = f$ (aus [8])*

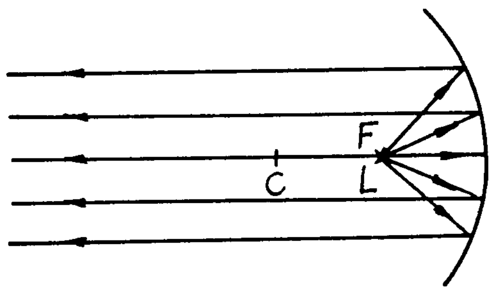


Abbildung 6.19: *$g = f \Rightarrow b = \infty$ (aus [8])*

<u>Versuch:</u> Der erste Versuchsteil zeigt den Strahlengang des Hohlspiegels: Wird ein paralleles Lichtbündel am Hohlspiegel reflektiert, so entstehen mehrere dicht beieinanderliegende Schnittpunkte. Blendet man mit Hilfe einer Schlitzblende mehr und mehr Randstrahlen aus, so daß nur noch achsennahe, parallele Strahlen einfallen, so vereinigen sich die Schnittpunkte in einem einzigen Punkt. Im zweiten Versuchsteil wird speziell die Fokussierung eines *zur optischen Achse parallelen* Lichtbündels demonstriert. Eine im Brennpunkt befindliche Wunderkerze entzündet sich durch die starke Intensitätskonzentration.

Mit der Brennweite $f = r/2$ läßt sich die Abbildungsgleichung umschreiben zu

$$\boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}}$$ <u>Abbildungsgleichung beim Hohlspiegel</u> (Näherung für Paraxialstrahlen)

Wir hatten die Abbildungsgleichung mittels einer Bildkonstruktion für den Fall $g > f$ hergeleitet. Dabei ergab sich ein reeller Bildpunkt. Im Fall $g < f$ ist die Abbildungsgleichung ebenfalls gültig. Hier ist der Bildpunkt jedoch virtuell. Die Bildweiten virtueller Bildpunkte erhalten per Konvention negatives Vorzeichen, wenn sie vom Scheitelpunkt H aus nach rechts aufgetragen werden.

<u>Geometrische Bildkonstruktion beim Hohlspiegel</u>

Für die Bildkonstruktion ausgedehnter Gegenstände beim Hohlspiegel stehen vier ausgezeichnete Strahlen zur Verfügung, von denen jedoch zwei bereits ausreichend sind:

(i) Ein achsenparalleler Strahl geht nach der Reflexion durch den Brennpunkt F.

(ii) Ein vom Brennpunkt F her einfallender Strahl verläuft nach der Reflexion achsenparallel.

(iii) Ein vom Kugelmittelpunkt C her radial einfallender Strahl wird in sich selbst zurückgeworfen.

(iv) Für einen auf den Spiegelmittelpunkt H treffenden Strahl gilt bezüglich der optischen Achse: Einfallswinkel = Ausfallswinkel.

Variiert man die Gegenstandsweite, dann ändern sich Größe und Art des Bildes, wie Abbildung 6.21 zeigt. Das Verhältnis von Bildgröße zu Gegenstandsgröße

$$M_T = \frac{\overline{B'B}}{\overline{G'G}}$$

wird als **Abbildungsmaßstab** oder **transversale Vergrößerung** bezeichnet. Aus dem Verlauf des Strahles 4 in der ersten Konstruktionszeichnung liest man ab

$$\frac{\overline{G'G}}{g} = \tan\theta = \frac{\overline{B'B}}{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\overline{B'B}}{\overline{G'G}} = \frac{b}{g}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_T = \frac{b}{g}} \quad \underline{\text{transversale Vergrößerung}}$$

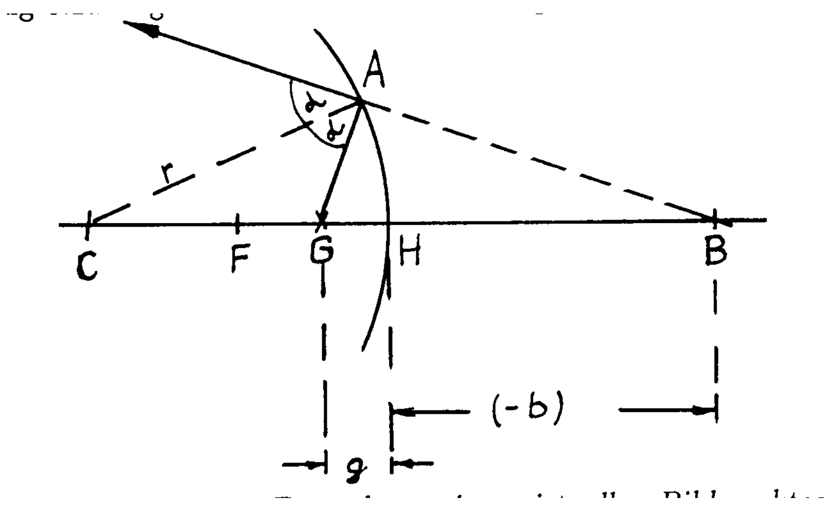


Abbildung 6.20: *Entstehung eines virtuellen Bildpunktes*

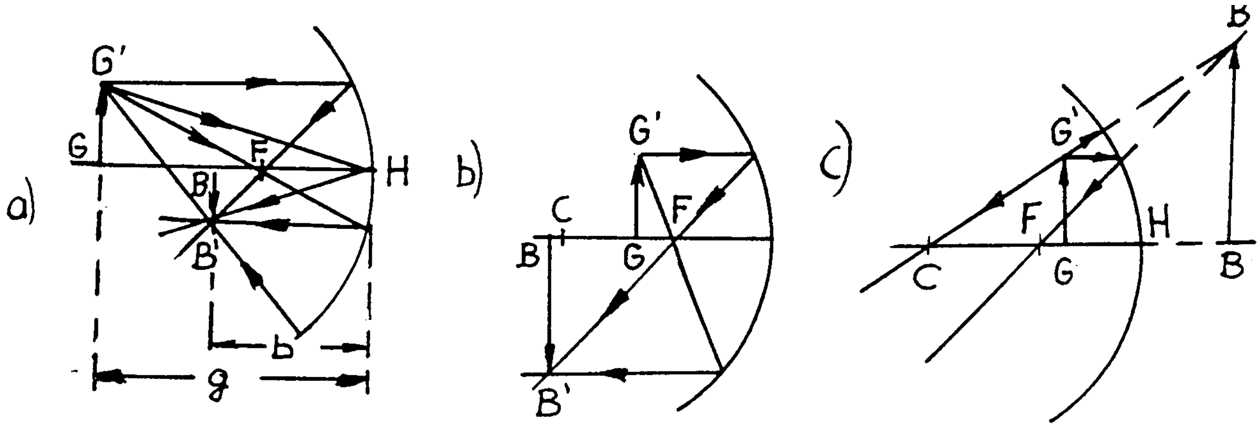


Abbildung 6.21: *Geometrische Bildkonstruktion am Hohlspiegel: (a) reelles, umgekehrtes, verkleinertes Bild, (b) reelles, umgekehrtes, vergrößertes Bild, (c) virtuelles, aufrechtes, vergrößertes Bild. (aus [8])*

Beachte: Die transversale Vergrößerung stimmt nicht unbedingt mit der Vergrößerung überein, die der Beobachter wahrnimmt! (siehe dazu Abschnitt 6.5.2 Die Lupe)

b) **Der konvexe Spiegel**

Die für den Hohlspiegel gefundenen Ergebnisse gelten im wesentlichen auch für den konvexen Spiegel. Unterschiede resultieren aus der Tatsache, daß Kugelmittelpunkt C und Brennpunkt F hinter der Spiegelfläche liegen. Krümmungsradius r und Brennweite f sind hier negativ zu rechnen.

Zur Bildkonstruktion können wieder vier ausgezeichnete Strahlen verwendet werden:

(i) Ein achsenparallel einfallender Strahl wird so reflektiert, daß die rückwärtige Verlängerung des reflektierten Strahls durch den Brennpunkt F verläuft, der sich im Abstand $\overline{HF} = r/2 = -f$ hinter dem Spiegel befindet.

(ii) Ein in Richtung auf F einfallender Lichtstrahl wird achsenparallel reflektiert.

(iii) Ein in Richtung auf C einfallender Strahl läuft in sich zurück.

(iv) Ein in H auftreffender Strahl wird um den gleichen Winkel zur optischen Achse reflektiert.

Es entstehen nur virtuelle aufrechte, verkleinerte Bilder!

c) **Der Parabolspiegel**

Die Spiegelfläche eines Parabolspiegels ist ein Rotationsparaboloid.

Der Vorteil eines Parabolspiegels gegenüber dem Hohlspiegel liegt darin, daß er *alle* Parallelstrahlen unabhängig von ihrem Achsenabstand in seinem Brennpunkt fokussiert (Abb. 6.23). Der umgekehrte Vorgang, die Parallelisierung der Brennpunktstrahlen durch den Parabolspiegel wird z.B. bei Autoscheinwerfern ausgenutzt.

d) **Der Ellipsoid**

Von einem Brennpunkt F_1 ausgehende Strahlen werden im zweiten Brennpunkt F_2 vereinigt (siehe Abb. 6.24).

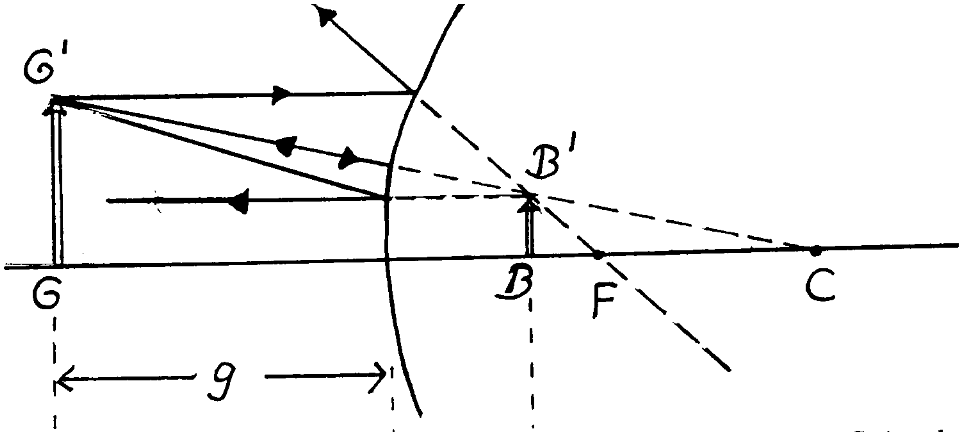


Abbildung 6.22: *Bildkonstruktion am konvexen Spiegel*

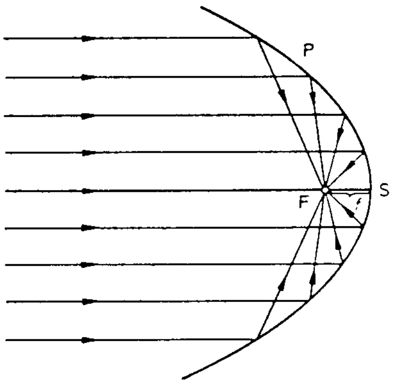


Abbildung 6.23: *Einfall eines parallelen Strahlenbündels in einen Parabolspiegel (aus [4])*

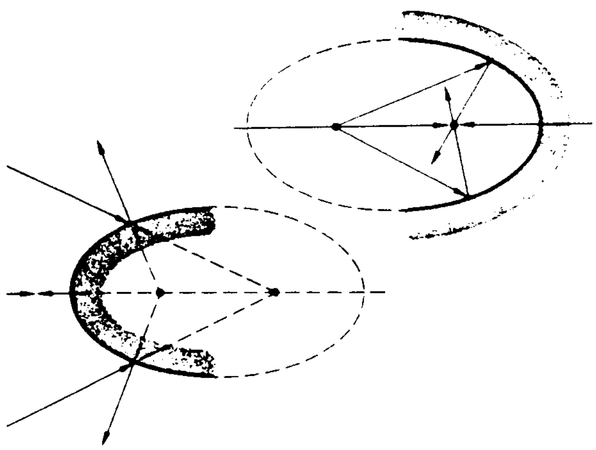


Abbildung 6.24: *Elliptischer Spiegel (aus [13])*

6.4 Brechung an sphärischen Oberflächen

Wir betrachten als brechende Fläche eine Kugelschale mit Radius r, welche zwei lichtdurchlässige Medien mit den Brechungsindizes n_1 und n_2 trennt.

Das Vorliegen zweier Medien unterschiedlicher Brechzahl grenzt diese Art der Abbildung deutlich von der Abbildung am sphärischen Spiegel ab.

Zur mathematischen Beschreibung der Brechung an sphärischen Oberflächen benutzen wir die in der untenstehenden Tabelle aufgeführte Vorzeichenkonvention:

Optische Größe	**Vorzeichen**	
	+	−
Radius r	konvexe Fläche, d.h. C rechts von H	konkave Fläche, d.h. C links von H
Brennweite f	links von H	rechts von H
Brennweite f'	rechts von H	links von H
Gegenstandsweite g	links von H	rechts von H
Bildweite b	rechts von H	links von H
Gegenstandsgröße $y = \overline{GG'}$	von der opt. Achse nach oben	von der opt. Achse nach unten
Bildgröße $y' = \overline{BB'}$	von der opt. Achse nach oben	von der opt. Achse nach unten

Ein von dem Gegenstandspunkt G auf der optischen Achse unter dem Winkel α ausgehender Strahl schneidet nach der Brechung an der Kugeloberfläche die optische Achse in dem Bildpunkt B. Welcher Zusammenhang besteht hier zwischen der Gegenstandsweite g und der Bildweite b?

Zur Beantwortung dieser Frage ermitteln wir die Abbildungsgleichung:
Dabei setzen wir Paraxialstrahlen voraus. Dann sind die auftretenden Winkel hinreichend klein, so daß wir jeweils den Sinus oder Tangens eines Winkels durch den Winkel selbst ersetzen dürfen.

Es lassen sich folgende Winkelbeziehungen aufstellen:

Aus dem Brechungsgesetz $\dfrac{\sin\theta_e}{\sin\theta_d} = \dfrac{n_2}{n_1}$ folgt mit $\dfrac{\sin\theta_e}{\sin\theta_d} \approx \dfrac{\theta_e}{\theta_d}$ die Beziehung $n_1\,\theta_e = n_2\,\theta_d$ bzw. $\theta_d = \frac{n_1}{n_2}\,\theta_e$.

Weiter ist aus Abbildung 6.25 ersichtlich:

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{Dreieck } GAC : \ \theta_e & = & \alpha + \gamma \\ \text{Dreieck } CAB : \ \gamma & = & \theta_d + \beta = \frac{n_1}{n_2}\,\theta_e + \beta \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{n_1}{n_2}\,(\alpha+\gamma) + \beta$$

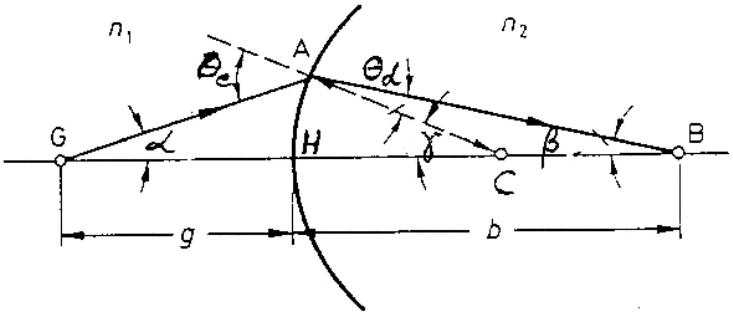


Abbildung 6.25: *Abbildung eines Achsenpunktes G durch eine konvexe brechende Kugelfläche (aus [4])*

Umformung ergibt

$$\begin{aligned} (1 - \tfrac{n_1}{n_2})\,\gamma &= \tfrac{n_1}{n_2}\,\alpha + \beta \\ \Leftrightarrow \quad (n_2 - n_1)\,\gamma &= n_1\,\alpha + n_2\,\beta \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\alpha \simeq \frac{\overline{AH}}{g}\ ,\ \beta \simeq \frac{\overline{AH}}{b}\ ,\ \gamma \simeq \frac{\overline{AH}}{r}$$

Dies führt zur **Descartesschen Formel** für die Brechung an einer sphärischen Fläche:

$$\boxed{\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = (n_2 - n_1)\,\frac{1}{r}}$$

Da die durch die sphärische Oberfläche getrennten Medien verschiedene Brechungsindizes besitzen, treten bei dieser Abbildungsform zwei unterschiedliche Brennpunkte auf.

Von einem unendlich weit entfernten Gegenstandspunkt kommende, achsenparallele Strahlen werden nach der Brechung im <u>bildseitigen Brennpunkt F'</u> fokussiert.
Der <u>objektseitige Brennpunkt F</u> ist dadurch gekennzeichnet, daß er ins Unendliche abgebildet wird, von ihm ausgehende Strahlen verlaufen nach der Brechung parallel zur optischen Achse.

Die Diskussion der DESCARTESschen Formel für die genannten Grenzfälle $g \to \infty$ und $b \to \infty$ liefert die zugehörigen Brennweiten f' und f:

$$\boxed{f' = \frac{n_2\,r}{n_2 - n_1}} \qquad \text{bildseitige Brennweite}$$

$$\boxed{f = \frac{n_1\,r}{n_2 - n_1}} \qquad \text{objektseitige Brennweite}$$

Für die Brennweiten gelten die Beziehungen

$$\boxed{f' - f = r} \qquad \boxed{\frac{f}{f'} = \frac{n_1}{n_2}} \qquad \boxed{\frac{f}{g} + \frac{f'}{b} = 1}$$

Bildkonstruktion bei der Brechung an Kugelflächen

Bildkonstruktion für $g > f$ und $g < f$:

Lautet das Größenverhältnis der Brechzahlen $n_2 > n_1$, so entsteht je nach Gegenstandsweite ein reelles oder virtuelles Bild. Im Fall $n_2 < n_1$ ist das Bild stets virtuell, da die Strahlen nach der Brechung divergieren. Die transversale Vergrößerung ergibt sich zu

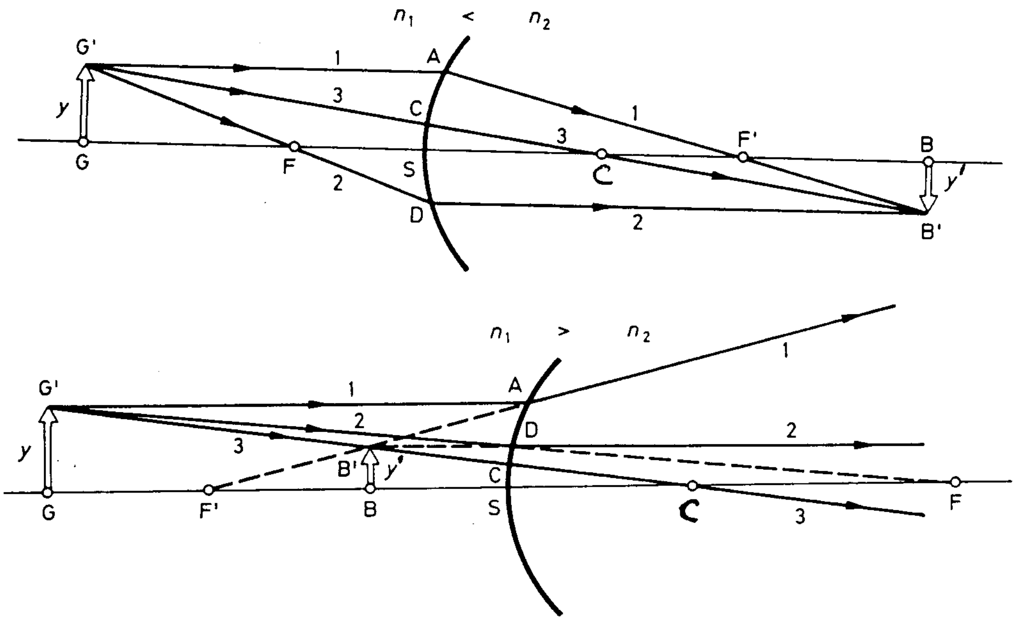


Abbildung 6.26: *Bildkonstruktion an der konvexen brechenden Kugelfläche für die beiden Fälle, daß $n_1 < n_2$ und $n_1 > n_2$ ist. (aus [4])*

$$\boxed{M_T = \frac{\overline{BB'}}{\overline{GG'}} = \frac{b - r}{g + r} = \frac{n_1}{n_2}\frac{b}{g}}$$

Der DESCARTESschen Formel kommt fundamentale Bedeutung zu: Mit ihrer Hilfe läßt sich die Abbildungsgleichung und damit der Strahlengang einer beliebigen Folge sphärischer Oberflächen bestimmen, deren Krümmungsmittelpunkte alle auf der optischen Achse gelegen sind. Diese Tatsache werden wir in den folgenden Abschnitten zu Herleitung der Abbildungsformel für Linsen und Linsensysteme ausnutzen.

6.5 Linsen

Wird ein lichtdurchlässiges, brechendes Material beidseitig begrenzt von zwei zentrierten Kugelflächen bzw. von einer Kugelfläche und einer Ebene, so liegt eine sphärische Linse vor.

Je nach Anordnung der begrenzenden Flächen und der sich daraus ergebenden Form und Wirkweise unterscheidet man folgende Arten von Linsen:

- **Sammellinsen**, welche in der Mitte eine größere Dicke als am Rand besitzen, haben i.allg. die Eigenschaft, achsenparallel auffallendes Licht zu fokussieren. Sie lassen sich weiter unterteilen in (i) bikonvexe, (ii) plankonvexe und (iii) konkavkonvexe Sammellinsen (Abb. 6.27).

- Die (i) bikonkaven, (ii) plankonkaven und (iii) konvexkonkaven **Zerstreuungslinsen** machen achsenparallel auffallendes Licht divergent. Sie sind am Rand dicker als in der Mitte (Abb. 6.28).

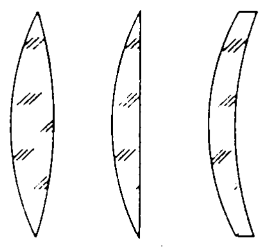


Abbildung 6.27: *Verschiedene Sammellinsenausführungen (aus [4])*

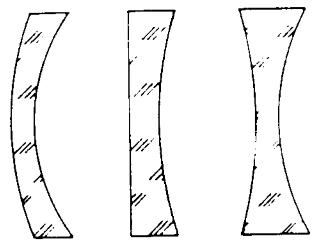


Abbildung 6.28: *Verschiedene Zerstreuungslinsenausführungen (aus [4])*

6.5.1 Abbildung durch dünne sphärische Linsen

Man bezeichnet eine Linse als dünn, wenn ihre Dicke gegenüber den auftretenden Gegenstands– und Bildweiten vernachlässigbar klein ist. Dies ist erfüllt, wenn die Dicke klein gegen die Krümmungsradien der Linsenflächen ist.

Die Vorzeichen der in die mathematische Beschreibung eingehenden Größen werden wie bei der Brechung an sphärischen Oberflächen festgelegt. Sie können aus der Tabelle in Abschnitt 6.4 entnommen werden.

Zur Herleitung der Abbildungsgleichung betrachten wir zwei bikonvex im Abstand d angeordnete Kugelflächen mit den Krümmungsradien r_1 und r_2, die ein Medium mit Brechungsindex $n > 1$ gegen Luft ($n_{Luft} \approx 1$) abgrenzen (Abb. 6.29). Die erste brechende

Oberfäche mit Radius r_1 bildet den Objektpunkt G auf den Bildpunkt B' in der Bildweite b' ab. Nach der DESCARTESschen Formel gilt für diese Abbildung

$$\frac{1}{g} + \frac{n}{b'} = (n-1)\,\frac{1}{r_1} \qquad (*)$$

Bezüglich der zweiten Kugelfläche mit Radius r_2 ist B' als Gegenstandspunkt in der Gegenstandsweite g' anzusehen. Die Brechung, welche in der Bildweite b den Bildpunkt B erzeugt, wird beschrieben durch

$$\frac{n}{g'} + \frac{1}{b} = (1-n)\,\frac{1}{r_2} = -(n-1)\,\frac{1}{r_2} \qquad (**)$$

Wegen $r_2 < 0$ ist die rechte Seite der Gleichung positiv. Addition der beiden Gleichungen ergibt

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} + n\left(\frac{1}{g'} + \frac{1}{b'}\right) = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Mit $g' = d - b'$ folgt

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} + n\left(\frac{1}{d-b'} + \frac{1}{b'}\right) = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Für vernachlässigbare Dicke, d.h. im Grenzfall $d \to 0$ erhält man daraus die Abbildungsgleichung für dünne Linsen:

$$\boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \qquad \text{Linsenschleiferformel}$$

Wie im Fall der Brechung an einer sphärischen Oberfläche ergibt sich daraus im Grenzübergang $g \to \infty$ die

$$\text{bildseitige Brennweite} \quad f' = \frac{r_1\,r_2}{(n-1)\,(r_2 - r_1)}$$

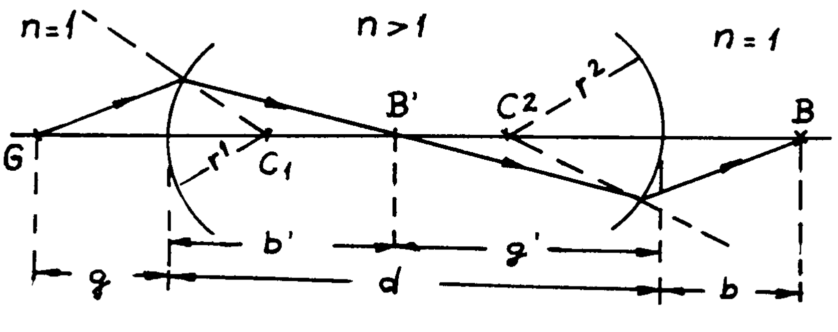


Abbildung 6.29: *Abbildung durch zwei bikonvex im Abstand d angeordnete, brechende Kugelflächen (aus [8])*

Analog liefert die Betrachtung des Grenzfalles unendlicher Bildweite $b \to \infty$ die

$$\text{objektseitige Brennweite} \quad f = \frac{r_1\, r_2}{(n-1)\,(r_2 - r_1)}$$

Für dünne Linsen gilt also $f = f'$! Die Linsenschleiferformel läßt sich mit $1/f = (n-1)\,(1/r_1 - 1/r_2)$ umwandeln in die

$$\underline{\textbf{Gaußsche Linsengleichung}} \quad \boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}}$$

Die obenstehenden wichtigen Beziehungen, welche wir der Einfachheit halber für eine bikonvexe Anordnung zweier Kugelflächen hergeleitet haben, gelten für beliebige dünne Linsen. Dabei sind bei den verschiedenen Linsenformen die Vorzeichen der Krümmungsradien r_1 und r_2 zu beachten!

Welchen praktischen Nutzen haben die gefundenen Gleichungen? Sie geben Aufschluß über die Wirkung einer Linse und ermöglichen auf diese Weise, den bestmöglichen Einsatz in einer optischen Anordnung zu ermitteln. Wir betrachten beispielsweise eine Glaslinse ($n = 1,5$), deren begrenzende Kugelflächen gleichen Radius besitzen. Im Fall einer bikonvexen Sammellinse bedeutet dies, daß $r_1 = -r_2 = r$ gilt. Abbildungs– und Linsengleichung liefern dann

$$\boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n-1)\,\frac{2}{r} = \frac{1}{f}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f = \frac{r}{2\,(n-1)}}$$

Einsetzen des Brechungsindexes von Glas führt zu dem Ergebnis $\underline{f = r}$. Die Sammellinse hat also die Eigenschaft, achsenparallel auffallende Lichtstrahlen zum Krümmungsmittelpunkt hin zu brechen und dort zu vereinigen.

Zur Beschreibung einer Linse gibt man anstelle ihrer Brennweite oft ihre **Brechkraft** oder **Stärke** $D = 1/f$ an. Als spezielle Einheit der Brechkraft führt man die **Dioptrie** ein.

$$[D] = 1/\mathrm{m} = 1\,\mathrm{D} = 1\,\mathrm{Dioptrie}$$

Sammellinsen besitzen positive, Zerstreuungslinsen negative Brechkraft.

Bildkonstruktion

Als Hilfsmittel zur Bildkonstruktion bei dünnen Linsen dienen drei ausgezeichnete Strahlen:

1. Der Parallelstrahl wird bei Sammellinsen zum Brennpunkt im Bildraum hingebrochen, bei Zerstreuungslinsen verläuft er nach der Brechung so, als ginge er vom virtuellen Brennpunkt im Objektraum aus.

2. Der Brennpunktstrahl, der bei Sammellinsen vom Brennpunkt kommend auf die Linse trifft, bei Zerstreuungslinsen auf den hinter der Linse befindlichen, virtuellen Brennpunkt gerichtet ist, verläuft nach der Brechung achsenparallel.

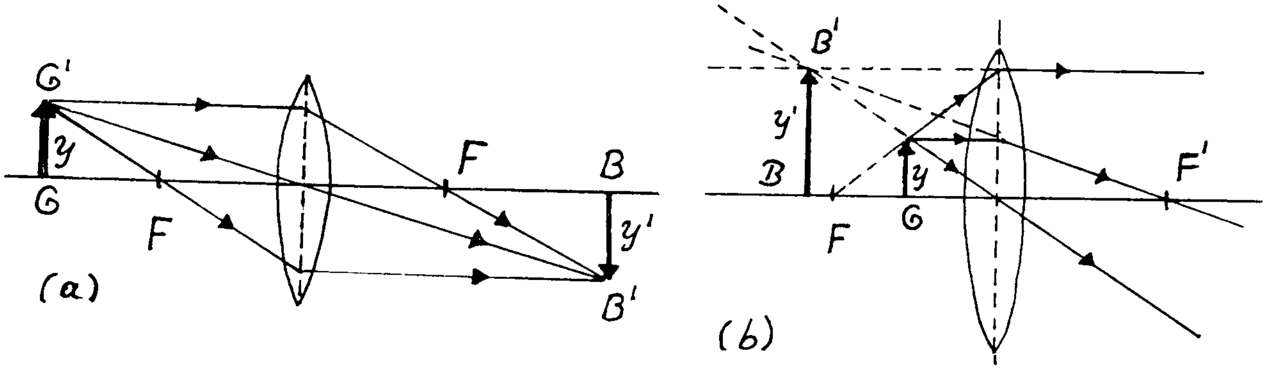


Abbildung 6.30: *Bildkonstruktion bei einer dünnen, bikonvexen Linse: (a) $g > f \Rightarrow$ reelles, aufrechtes Bild, (b) $g < f \Rightarrow$ virtuelles aufrechtes Bild.*

3. Der Mittelpunktsstrahl, der auf die Linsenmitte trifft, durchläuft die Linse annähernd ohne Richtungsänderung. Die geringe Parallelverschiebung, die er erfährt, ist bei dünnen Linsen vernachlässigbar.

Aus den Konstruktionszeichnungen ergibt sich der Abbildungsmaßstab zu

$$\boxed{\beta = \frac{\overline{B'B}}{\overline{G'G}} = -\frac{b}{g} = -\frac{b-f}{f} = -\frac{f}{g-f}}$$

Ist der Abbildungsmaßstab positiv, so liegt ein aufrechtes Bild vor, eine negative transversale Vergrößerung bedeutet ein umgekehrtes Bild.

Mögliche Abbildungen bei dünnen Linsen

Sammellinse				
Gegenstand	Bild			
Gegenstandsweite	*Typ*	*Bildweite*	*Orientierung*	*Relative Größe*
$\infty > g > 2f$	reell	$f < b < 2f$	umgekehrt	verkleinert
$g = 2f$	reell	$b = 2f$	umgekehrt	unverändert
$f < g < 2f$	reell	$\infty > b > 2f$	umgekehrt	vergrößert
$g = f$		$\pm\infty$		
$g < f$	virtuell	$\lvert b\rvert > g$	aufrecht	vergrößert

Zerstreuungslinse				
Gegenstand	Bild			
Gegenstandsweite	*Typ*	*Bildweite*	*Orientierung*	*Relative Größe*
beliebig	virtuell	$\lvert b\rvert < \lvert f\rvert$, $\lvert b\rvert < g$	aufrecht	verkleinert

Die Sammellinse entwirft im Sonderfall $g < f$ ein virtuelles Bild. Dieses ist aufrecht, vergrößert und befindet sich in größerem räumlichen Abstand vom Auge des Beobachters als der Gegenstand selbst. Diese Tatsache nutzt man aus, um das Auge bei der Betrachtung kleiner Objekte zu unterstützen. Die Sammellinse dient dann als **Lupe**.

6.5.2 Die Lupe

Um ein kleines Objekt genauer betrachten zu können, muß der Beobachter es nahe an sein Auge heranführen. Er vergrößert auf diese Weise den **Sehwinkel** α, unter dem er das Objekt sieht (siehe Abb. 6.31). Beim menschlichen Auge ist der Abstand von der

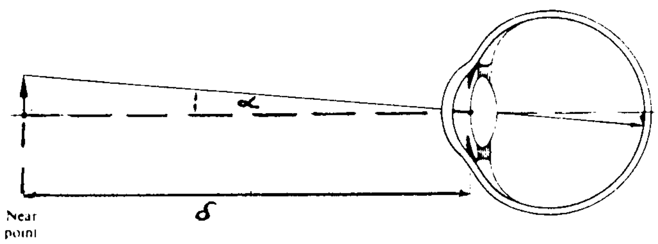


Abbildung 6.31: *Das menschliche Auge betrachtet ein Objekt unter dem Sehwinkel α. (aus [13])*

Augenlinse zur Netzhaut nahezu fest. Die Bildweite b_A ist daher festgelegt. Scharfe Abbildungen entwirft das Auge durch Akkommodation, d.h., indem die Brennweite f_A der Augenlinse variiert wird. Bei einem normalsichtigen, erwachsenen Menschen kann durch die Akkommodation des Auges die Brennweite so weit verkürzt werden, daß ein bis zu einer Entfernung von $\delta = 25\,\text{cm}$ an das Auge herangebrachter Gegenstand noch scharf gesehen wird. Diese Mindestentfernung $\underline{\delta = 25\,\text{cm}}$ für das Scharfsehen des menschlichen Auges heißt die **deutliche Sehweite**. Den zugehörigen Sehwinkel, welcher ohne Zuhilfenahme eines optischen Instrumentes maximal erreicht werden kann, bezeichnen wir mit α.

Hält der Beobachter eine Sammellinse dicht vor sein Auge und ordnet das Objekt innerhalb der Brennweite der Linse an, so wird die Brechkraft des Auges und damit der Sehwinkel erhöht. Das Auge sieht nun das von der Linse entworfene, vergrößerte Bild des Gegenstandes in größerem Abstand $|b| > g > \delta$ vom Auge.
Der Sehwinkel α' ist maximal, wenn der Beobachter die Gegenstandsweite so wählt, daß das virtuelle, vergrößerte Bild genau im **Nahpunkt** seines Auges entsteht, d.h. die Bildweite $|b| = \delta$ hat. Die Vergrößerung, welche der Beobachter durch den Gebrauch eines optischen Instrumentes erzielt, ist i.allg. nicht gleichzusetzen mit der bisher bekannten transversalen Vergrößerung. Um die Wirkung eines optischen Instrumentes zu charakterisieren, führt man die sogenannte **angulare Vergrößerung** ein. Diese ist definiert

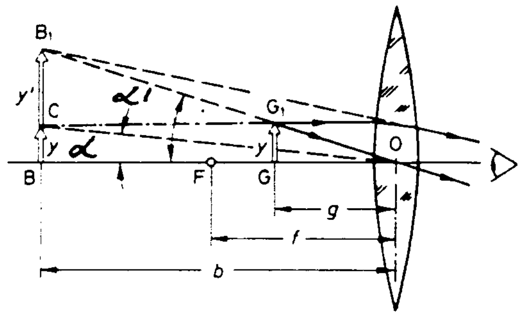


Abbildung 6.32: *Vergrößerung des Sehwinkels durch eine Sammellinse (aus [4])*

durch

$$M_A = \frac{\text{Sehwinkel mit opt. Instrument}}{\text{Sehwinkel ohne opt. Instrument}} = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

Um im Fall der Lupe die angulare Vergrößerung berechnen zu können, verschieben wir in der Konstruktionszeichnung (Abb. 6.32) den Gegenstand an den Ort des Bildes und erhalten $y = \overline{GG'} = \overline{BC}$. Dann liest man ab

$$\tan\alpha' = \frac{\overline{BB}'}{(-b)} = -\frac{y'}{b} \qquad \tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{(-b)} = -\frac{y}{b}$$

In der paraxialen Optik kann $\tan\alpha' \approx \alpha'$, $\tan\alpha \approx \alpha$ gesetzt werden. Bei dem weiter oben erläuterten Gebrauch der Lupe wird die angulare Vergrößerung

$$M_A = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{y'}{y} = \frac{(-b)}{g} = \frac{|b|}{g}$$

erzielt. In diesem Fall stimmen transversale und angulare Vergrößerung überein!

Maximale angulare Vergrößerung wird erreicht, wenn die Lupe den Gegenstand in den Nahpunkt des menschlichen Auges abbildet.

$$\boxed{M_A\rfloor_{|b|=\delta} = \frac{\delta}{f} + 1 = D\,\delta + 1}$$ maximale angulare Vergrößerung der Lupe

Eine als Lupe gebrauchte Sammellinse sollte eine möglichst kurze Brennweite, d.h. hohe Brechkraft besitzen.

Die gebräuchlichste Verwendung der Lupe ist die, bei der das Objekt genau in die Brennebene der Linse gebracht wird. Das virtuelle Bild liegt dann im Unendlichen und kann mit entspanntem, auf Unendlich akkommodiertem Auge betrachtet werden.
Die angulare Vergrößerung wird in diesem Spezialfall unendlicher Brennweite als die **Normalvergrößerung der Lupe** bezeichnet. Mit den Sehwinkeln

$$\alpha = \frac{y}{f} \quad \text{und} \quad \alpha_0 = \frac{y}{\delta}$$

ergibt sich

$$\boxed{M_A\big]_{|b|=\infty} = \frac{\delta}{f}}$$ Normalvergrößerung der Lupe

6.6 Abbildung durch dicke Linsen

Ein Lichtstrahl, der eine Linse durchsetzt, wird an deren beiden Grenzflächen gebrochen, erfährt also eine zweimalige Richtungsänderung. Bei einer dünnen Linse konnten wir die Strecke, die ein Lichtstrahl innerhalb der Linse zurücklegt, vernachlässigen und die Brechungen an der Vorder– und Rückseite zu einer einzigen Brechung zusammenfassen. In den Konstruktionszeichnungen haben wir daher die gesamte Richtungsänderung des Strahls an der Mittelebene der Linse angetragen.
Bei einer dicken Linse ist dies nicht mehr möglich. Zur Bildkonstruktion ordnet man einer dicken Linse zusätzlich zur Mittelebene zwei **Hauptebenen** zu. Dann kann die Bildkonstruktion mit Hilfe idealisierter Strahlen durchgeführt werden. Diese erfahren ebenfalls nur eine Richtungsänderung, welche jeweils an einer der beiden Hauptebenen erfolgt (Abb. 6.33 und Abb. 6.34).

Voraussetzung für die Definition der Hauptebenen ist die Tatsache, daß auch bei dicken Linsen achsenparallel einfallende Paraxialstrahlen im Brennpunkt fokussiert werden. Bei der folgenden Herleitung betrachten wir eine Sammellinse, an die beidseitig das gleiche Medium, hier speziell Luft ($n_L \approx 1$), angrenzt. Aus dem Objektraum einfallende, ach-

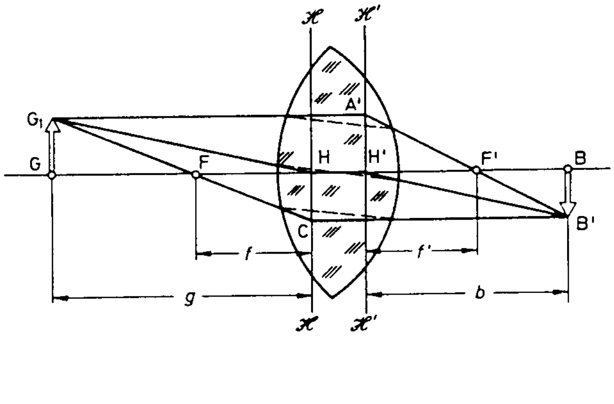


Abbildung 6.33: *Bildkonstruktion bei einer bikonvexen dicken Linse mit Hilfe der Hauptebenen und Hauptpunkte (aus [4])*

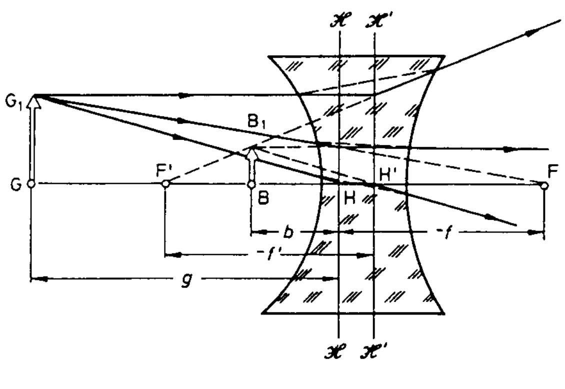


Abbildung 6.34: *Bildkonstruktion bei einer bikonkaven dicken Linse (aus [4])*

senparallele Paraxialstrahlen durchlaufen hinter der Linse den Brennpunkt F'. Verlängert man die Strahlabschnitte vor und hinter der Linse geradlinig bis zu ihrem Schnittpunkt, so legt dieser eine zur optischen Achse senkrechte Ebene fest, die bildseitige Hauptebene $\mathcal{H}'$. Ganz analog wird die objektseitige Hauptebene $\mathcal{H}$ definiert, wenn man die vom Bildraum her einfallenden, achsenparallelen Strahlen betrachtet, welche im objektseitigen Brennpunkt F vereinigt werden. Man nennt die Schnittpunkte H und H' der Hauptebenen mit

der optischen Achse die **Hauptpunkte** der Linse. Die Hauptebenen werden in der Praxis empirisch ermittelt.
Die Brennweiten f und f' einer dicken Linse ergeben sich als Abstände der Brennpunkte von den zugehörigen Hauptebenen. Objekt – und bildseitige Brennweite stimmen überein, wenn die Linse wie im vorliegenden Fall beidseitig von dem gleichen Medium umgeben ist. Im allgemeinen liegen die Hauptebenen jedoch ganz unsymmetrisch zur Linse, häufig befinden sie sich außerhalb von dieser.

6.7 Linsensysteme

Setzt man beliebig viele dünne Linsen mit gemeinsamer optischer Achse zusammen, so erhält man wieder ein abbildendes System. In Analogie zu den dicken Linsen lassen sich für ein solches Linsensystem zwei Hauptebenen ermitteln, deren Angabe zusammen mit den Brennpunkten das System vollständig charakterisiert.
Wie bei dicken Linsen läßt sich auch die Bildkonstruktion mit Hilfe von ausgezeichneten, idealisierten Strahlen und den Hauptebenen durchführen.

Bei Kombination zweier dünner Linsen der Brennweiten f_1 und f_2 im Abstand d ist die Gesamtbrennweite f gegeben durch

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1\, f_2}}$$

Für $d \ll f_1$ oder f_2 gilt dann die Näherung

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{D = D_1 + D_2}$$

Die Brechkraft des Linsensystems ist gleich der Summe der Brechkräfte der einzelnen Linsen.

6.8 Zusammengesetzte optische Instrumente

6.8.1 Das Mikroskop

Eine höhere angulare Vergrößerung als mit der Lupe erzielt man mit dem Mikroskop, bei dem ein *nahes* Objekt in zwei Stufen abgebildet wird. Die Erfindung geht zurück auf den holländischen Brillenmacher Zacharias Janssen of Middleburg im Jahre 1590, sowie auf Galileo Galilei, der seine Erfindung im Jahre 1610 bekanntgab.

Wir wollen im folgenden den grundlegenden Aufbau eines Mikroskops erläutern: Es besteht im wesentlichen aus zwei Sammellinsen, dem **Objektiv** L_1 und dem **Okular** L_2, die in großem Abstand voneinander angeordnet sind. Die Entfernung zwischen den einander zugekehrten Brennpunkten der Linsen wird als **optische Tubuslänge** t bezeichnet. Sie ist größer als die Summe der beiden Brennweiten.

Der zu examinierende Gegenstand y wird dicht vor den objektseitigen Brennpunkt des Objektivs gebracht. Dieses entwirft ein umgekehrtes, vergrößertes, reelles Zwischenbild y' innerhalb der objektseitigen Brennweite des Okulars. Das Okular wirkt daher als Lupe und erzeugt von dem Zwischenbild ein virtuelles, aufrechtes, nochmals vergrößertes Bild y'', welches durch die Augenlinse auf die Netzhaut des Betrachters abgebildet wird (Abb. 6.35). Damit bei längerem Arbeiten mit dem Mikroskop das Auge nicht durch

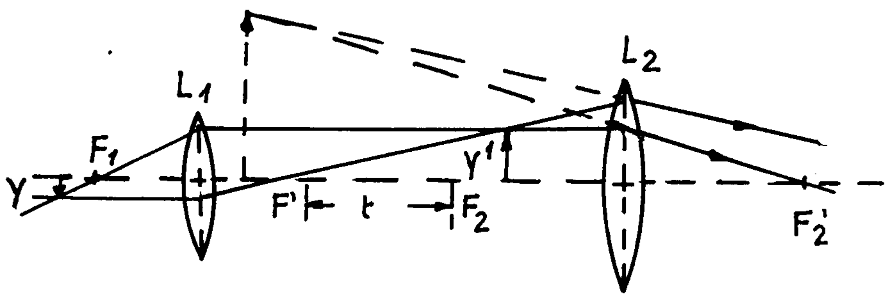


Abbildung 6.35: *Strahlengang beim Mikroskop (aus [8])*

die erforderliche Akkommodation ermüdet, wählt man die Gegenstandsweite so, daß das Zwischenbild in der Brennweite des Okulars entsteht (Abb. 6.36). Dann liegt das virtuelle Endbild im Unendlichen und kann mit entspanntem Auge betrachtet werden. Die zugehörige angulare Vergrößerung wird als **Normalvergrößerung des Mikroskops** bezeichnet. Aufgrund der zweistufigen Abbildung ergibt sich die Gesamtvergrößerung als

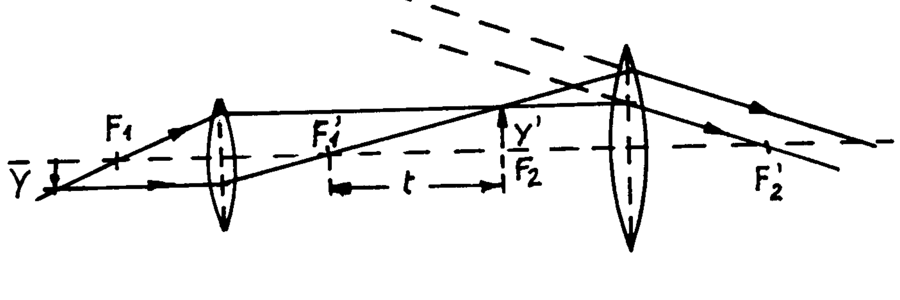


Abbildung 6.36: *Üblicher Gebrauch des Mikroskops: das Endbild liegt im Unendlichen. (aus [8])*

Produkt aus der transversalen Vergrößerung durch das Objektiv und der Normalvergrößerung des Okulars (Lupe):

$$M_A = M_{T_{Obj.}} \cdot M_{A_{Ok.}}$$

Dabei ist

$$M_{T_{Obj.}} = \frac{y'}{y} = \frac{b'}{g} = \frac{t}{f_1}$$
$$M_{A_{Ok.}} = \frac{\delta}{f_2} \quad \text{mit } \delta = 25\,\text{cm}$$

Also gilt für die Normalvergrößerung des Mikroskops

$$\boxed{M_A = \frac{\delta\, t}{f_1\, f_2}}$$

Mit Hilfe einer Lupe kann maximal eine angulare Vergrößerung von $M_A = 25$ erzielt werden. Je nach Beschaffenheit des Objektivs können transversale Vergrößerungen bis zum Hundertfachen erreicht werden. Mit einem Mikroskop ist eine bis zu tausendfache Vergrößerung möglich. (Linsensysteme!)

Bei der beschriebenen Anordnung begrenzt der Durchmesser des Okulars den beobachtbaren Ausschnitt des Objektes, das **Gesichtsfeld**, auf einen gewissen achsennahen Bereich. Von achsenfernen Punkten ausgehende Strahlen gelangen nicht mehr in das Okular und sind somit nicht beobachtbar.
Um das Gesichtsfeld zu vergrößern, ordnet man vor dem Okular eine weitere Sammellinse an. Die **Feldlinse** bricht auch die unter größerem Winkel vom Objektiv kommenden Strahlen in das Okular hinein. Objektiv und Feldlinse erzeugen also zusammen das reelle Zwischenbild, welches zwischen Feldlinse und Okular liegt. Die Feldlinse bewirkt keine zusätzliche Vergrößerung.

Versuch: Gezeigt wird der sinnvolle Einsatz einer Feldlinse.

Ein Dia wird über eine Mikroskopanordnung ohne Feldlinse vergrößert. Man sieht nur einen Ausschnitt des Motivs. Nach Einfügen der Feldlinse wird das vollständige Bild sichtbar, wobei die Vergrößerung unverändert bleibt.

6.8.2 Das Fernrohr

Zur Vergrößerung *weit entfernter* Objekte dient das Fernrohr. Ähnlich wie beim Mikroskop erfolgt hier die Vergrößerung des Sehwinkels durch eine zweistufige Abbildung. Außerdem wird das Fernrohr genutzt, um dem Auge ein helleres Bild eines Objektes zuzuführen.

Das astronomische oder Keplersche Fernrohr (J.Kepler 1611) hat eine Sammellinse großer Brennweite f_1 als Objektiv und eine Sammellinse kurzer Brennweite f_2 als Okular. Diese sind so angeordnet, daß der bildseitige Brennpunkt des Objektivs mit dem objektseitigen Brennpunkt des Okulars zusammenfällt. Von einem weit entfernten Gegenstand, der mit dem freien Auge unter dem Winkel α gesehen wird, erzeugt das Objektiv in seiner bildseitigen Brennebene ein umgekehrtes, stark verkleinertes,reelles Bild. Dies wird von dem als Lupe wirkenden Okular unter dem Sehwinkel α' betrachtet und ins Unendliche abgebildet. Das auf Unendlich akkommodierte Auge nimmt schließlich ein umgekehrtes, vergrößertes, virtuelles Bild des Gegenstandes wahr (Abb. 6.37). Die Vergrößerung ist als

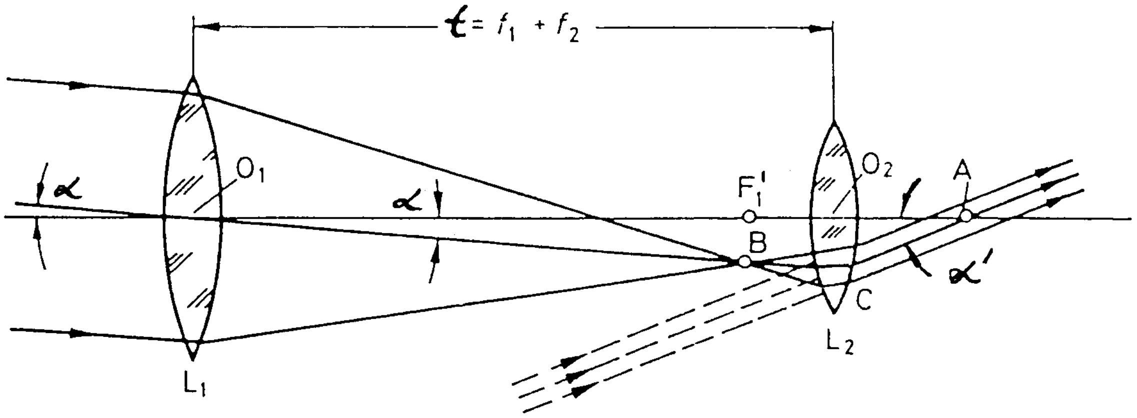


Abbildung 6.37: *Strahlengang des* KEPLER*schen Fernrohres (aus [4])*

das Verhältnis der Sehwinkel

$$M_A = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\text{Sehwinkel mit Fernrohr}}{\text{Sehwinkel ohne Fernrohr}}$$

definiert. Es ist $\alpha = \frac{y'}{f_1}$ und $\alpha' = \frac{y'}{-f_2}$. Damit folgt

$$\boxed{M_A = \frac{-f_1}{f_2}} \quad \underline{\text{angulare Vergrößerung des Keplerschen Fernrohres}}$$

Da das KEPLERsche Fernrohr ein umgekehrtes Bild erzeugt, wird es vorwiegend für astronomische Beobachtungen genutzt.

Beim **Holländischen oder Galileischen Fernrohr** (vorgestellt von H.LIPPERHEY im Jahr 1608 und G.GALILEI im Jahr 1609) ist das Okular eine kurzbrennweitige Zerstreuungslinse. Objektiv und Okular sind so angeordnet, daß der bildseitige Brennpunkt des Objektivs mit dem objektseitigen Brennpunkt des Okulars zusammenfällt (Abb. 6.38). Es entsteht ein aufrechtes, vergrößertes, virtuelles Bild im Unendlichen. Da das Bild aufrecht ist, eignet sich diese Art des Fernrohres besonders für irdische Beobachtungen (Feldstecher). So besteht z.B. ein Opernglas aus zwei parallel zueinander in Augenabstand angeordneten holländischen Fernrohren. Für die Vergrößerung des holländischen oder GALILEIschen Fernrohres gilt

$$\boxed{M_A = -\frac{f_1}{f_2}}$$

Hier ist die Brennweite des Okulars negativ.

Versuch: Gezeigt wird die Wirkungsweise der beiden Fernrohrarten.
Beim KEPLERschen Fernrohr kann zur Vergrößerung des Gesichtsfeldes

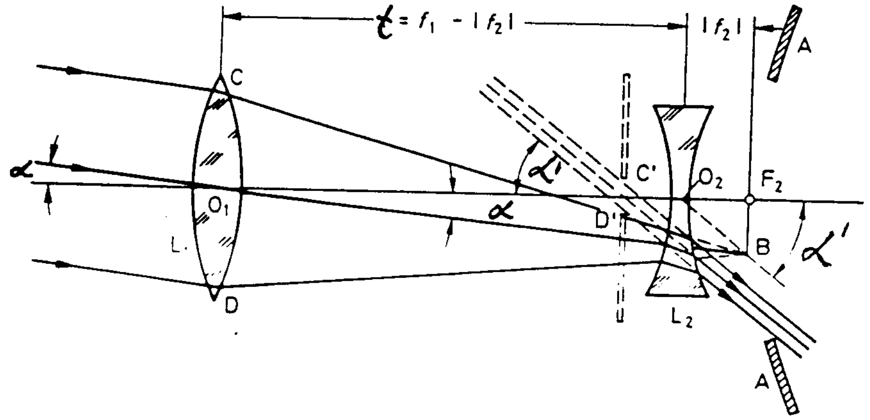


Abbildung 6.38: *Strahlengang des Holländischen Fernrohres (aus [4])*

vor dem Okular eine Feldlinse angeordnet werden. Diese bricht dann auch die unter größerem Winkel vom Objektiv einfallenden Strahlen in das Okular hinein, so daß der Durchmesser des Okulars klein gehalten werden kann.

6.8.3 Der Projektionsapparat (Dia – und Overhead – Projektor)

Die Funktion eines Projektionsapparates besteht darin, von einem durchsichtigen Gegenstand, einem Lichtbild oder Diapositiv, ein vergrößertes Bild auf einem Schirm zu entwerfen. Dazu muß der Gegenstand vollständig ausgeleuchtet werden. Wichtig ist, daß alle zur Beleuchtung dienenden Lichtstrahlen ins Objektiv gelangen, damit eine vollständige Abbildung des Gegenstandes erzeugt wird. Dies leistet eine dicht vor dem Dia angeordnete Beleuchtungslinse, der sogenannte **Kondensor** (Abb. 6.39).

Versuch: Am Beispiel eines Diaprojektors wird die wichtige Funktion einer Kondensorlinse herausgestellt:
Ein Dia wird zunächst ohne Kondensor an die Wand projeziert. Es entsteht ein durch die Linsenfassung des Objektivs beschränktes Bild. Nach Einklappen einer Kondensorlinse wird das Dia besser ausgeleuchtet und vollständig auf der Wand abgebildet.

6.8.4 Abbildungsfehler

Bei den bisherigen Erläuterungen zu optischen Abbildungen an den verschiedenen Abbildungsvorrichtungen sind wir stets von paraxialen Strahlen und, was noch nicht ausdrücklich erwähnt wurde, monochromatischem Licht ausgegangen. Diese Einschränkungen

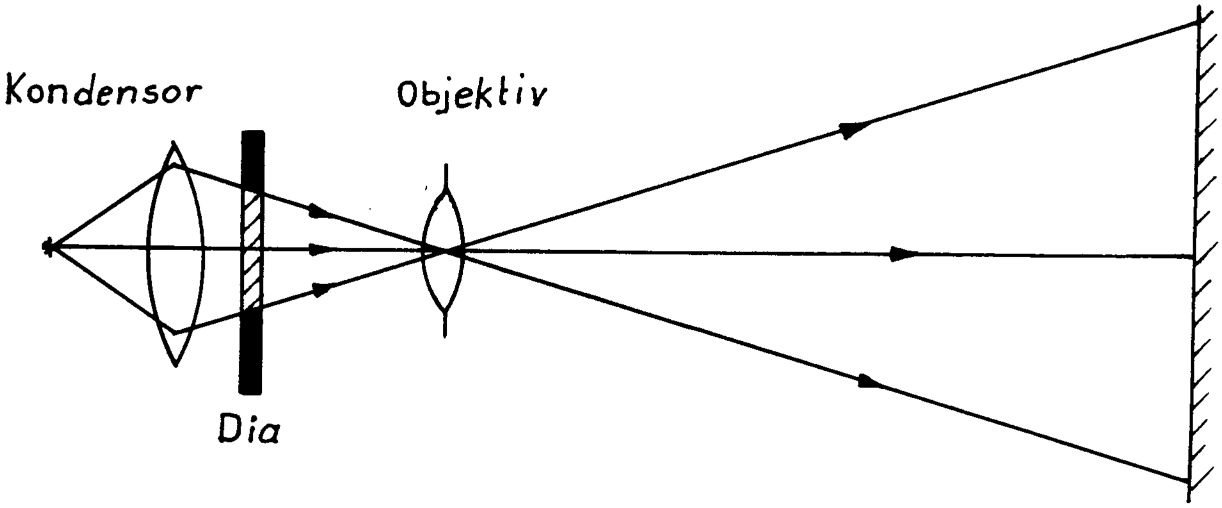


Abbildung 6.39: *Strahlengang eines Diaprojektors*

bilden die Voraussetzung für eine *ideale* Abbildung, bei der das Bild eines Gegenstandspunktes wieder genau ein Punkt ist.

In der Praxis werden jedoch ausgedehnte Gegenstände i.allg. mit nicht monochromatischem Licht und unter größeren Öffnungswinkeln zur optischen Achse abgebildet. Der Verlauf der Lichtstrahlen weicht dann vom idealen Strahlengang ab; es treten Abbildungsfehler auf, welche Verzerrungen und Unschärfe der Bilder zur Folge haben.
Man unterscheidet **monochromatische Abbildungsfehler**, die auch bei der Verwendung monochromatischer Lichtbündel auftreten, und **chromatische Abbildungsfehler**, welche durch die Dispersion hervorgerufen werden. Die Abweichung vom idealen Strahlengang wird auch als **Aberration** bezeichnet.

Monochromatische Abbildungsfehler

a) **Sphärische Aberration**

Äußere Strahlen, die auf die Randzonen der Linse treffen, werden stärker gebrochen als Strahlen, die dicht an der optischen Achse verlaufen (Abb. 6.40). Achsenfernen Parallelstrahlen entspricht eine kürzere Brennweite als achsennahen Strahlen. Wird daher ein Gegenstandspunkt durch ein weit geöffnetes Strahlenbündel abgebildet, so entsteht als Bild kein einzelner Punkt, sondern ein Lichtfleck oder Zerstreuungsscheibchen.
Zur Beseitigung dieses Öffnungsfehlers kombiniert man geeignete Sammel – und Zerstreuungslinsen, da bei den beiden Linsenarten das Gefälle der Brechkraft vom Rand hin zur optischen Achse gerade entgegengesetzt ist. Eine solche Korrektur ist aber immer auf eine bestimmte Gegenstands – und Bildweite begrenzt. Zur Abhilfe

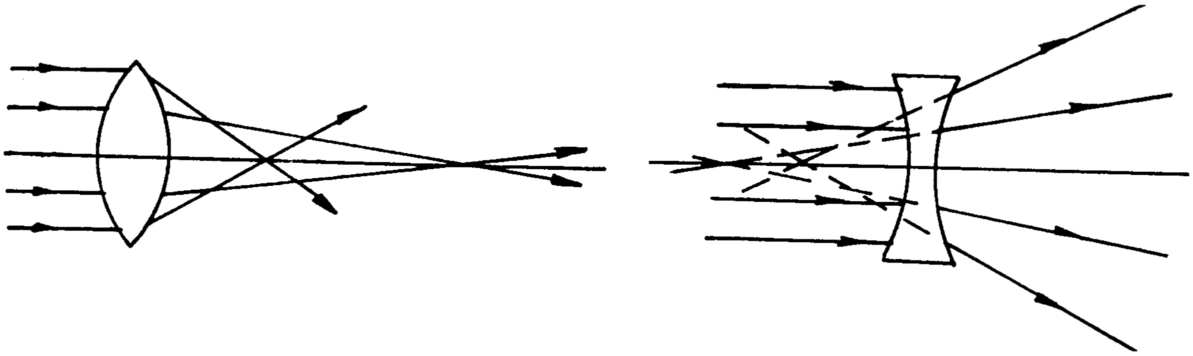


Abbildung 6.40: *Sphärische Abberation bei der Sammel– und der Zerstreuungslinse (aus [8])*

kann auch eine Öffnungsblende zur Ausblendung der Randstrahlen eingesetzt werden, was jedoch die Bildhelligkeit negativ beeinflußt. Ein korrigiertes System heißt **Aplanat**.

Versuch: Mit Hilfe verschiedener Blenden wird die Linsenzone, an der die Strahlen gebrochen werden, variiert. Je stärker der Rand ausgeleuchtet ist, desto unterschiedlicher erfolgt die Ablenkung der Strahlen.

b) **Astigmatismus**

Bei der Abbildung eines Punktes, der seitlich von der optischen Achse gelegen ist, entsteht auch bei Verwendung schmaler Lichtbündel kein einzelner Bildpunkt. Stattdessen erzeugt das schief auf die Linse auftreffende Strahlenbündel zwei in gewissem Abstand liegende, zueinander senkrecht verlaufende Bildlinien (Abb. 6.41). Astigmatismus tritt auch bei einem symmetrisch auf eine Linse auffallenden Strahlenbündel auf, falls deren Begrenzungsflächen nicht exakt kugelförmig, d.h. in allen Richtungen gleich stark gekrümmt sind. Dann stellen die Hauptebenen die Ebenen maximaler bzw. minimaler Krümmung dar. Letzteren entsprechen eine linsennahe und eine linsenferne "Brennlinie", in denen die auf die Hauptebenen treffenden Strahlen vereinigt werden. Wird ein zur Linsenachse senkrechter Gegenstand abgebildet, so äußert sich der Astigmatismus durch eine Unschärfe am Bildrand.

Abhilfe schafft hier ein Linsensystem aus geeigneten Glassorten sowie die Veränderung der Blendenlage. Ein korrigiertes System wird als **Astigmat** bezeichnet.

Versuch: Am Beispiel der Projektion eines Kreuzgitterdias wird der durch die Linsenwölbung hervorgerufene Astigmatismus vorgeführt:
Lampe, Diahalter, Linse und Mattscheibe werden zunächst so justiert, daß das Kreuzgitter scharf auf der Mattscheibe entworfen wird. Bei nachfolgender, leichter Drehung der Linse werden die senkrechten Linien unscharf, die Schärfe der waagerechten Striche hingegen bleibt erhalten.

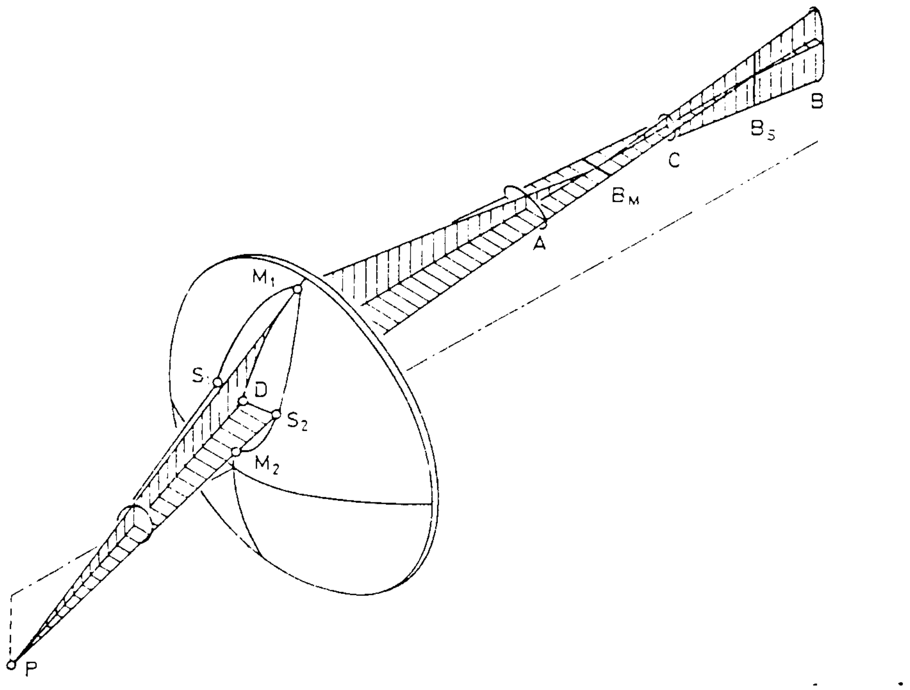


Abbildung 6.41: *Astigmatische Abbildung eines seitlich von der Systemachse gelegenen Punktes P durch eine bikonvexe Linse. (aus [4])*

c) **Bildfeldwölbung**

Ein flächenhafter Gegenstand, der in einer Ebene senkrecht zur optischen Achse angeordnet ist, wird nicht in einer ebenen, sondern in einer gewölbten Bildfläche abgebildet (Abb. 6.42).

d) **Kissen – und tonnenförmige Verzeichnung**

Im Gegensatz zu den bisher genannten Abbildungsfehlern beinträchtigt die Verzeichnung, für sich allein genommen, nicht die Bildschärfe, sondern bewirkt lediglich eine *Verzerrung* des *gesamten* Bildes.
Der Fehler kommt dadurch zustande, daß die transversale Vergrößerung in der nicht – paraxialen Optik nicht mehr als konstant angesehen werden kann. Sie hängt bei außeraxialen Punkten von dem Abstand zur optischen Achse ab.
Werden insbesondere zur Beseitigung von Schärfefehlern Blenden eingesetzt, dann tritt bei falscher Blendenlage oder Beleuchtung Verzeichnung auf. Wird die Blende vor der Linse angeordnet, so führt dies zu tonnenförmiger Verzeichnung, bei welcher der Abbildungsmaßstab in Achsenferne kleiner ist als in Achsennähe. Liegt die Blende hinter der Linse, so ist die Verzeichnung kissenförmig. Hier nimmt die transversale Vergrößerung mit wachsender axialer Entfernung zu.

Versuch: An der Projektion eines Kreuzgitterdias sind die Verzeichnungen, die durch falsche Plazierung einer Blende entstehen, deutlich erkennbar

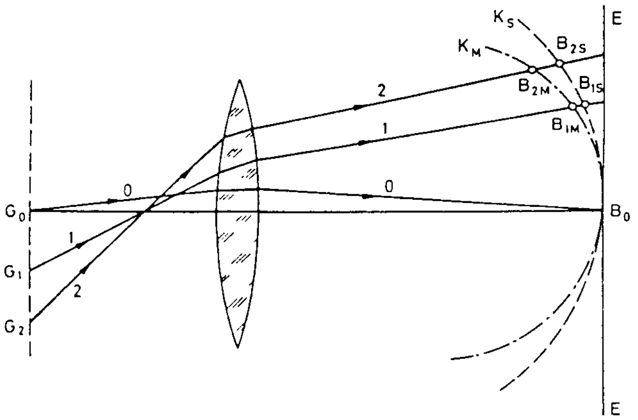


Abbildung 6.42: *Entstehung sogenannter Bildschalen bei der Abbildung durch eine bikonvexe Linse. (aus [4])*

(Abb. 6.43).

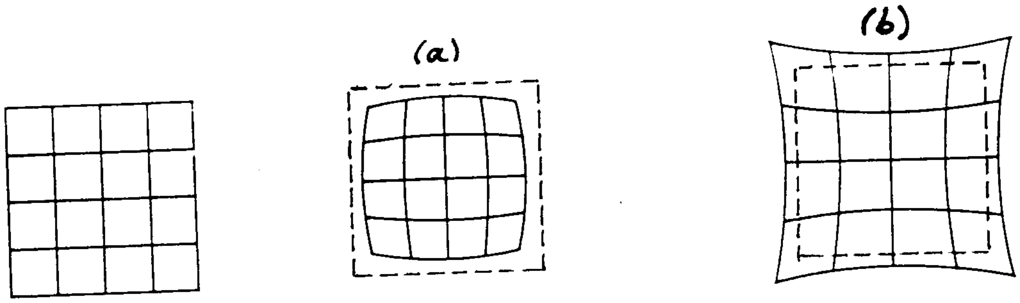


Abbildung 6.43: *Projektion des Kreuzgitterdias: (a) tonnenförmige, (b) kissenförmige Verzeichnung. (aus [7])*

Um Verzeichnungen zu vermeiden, muß eine Blende in die Linsenebene eingesetzt werden. Dies ist bei den sogenannten **orthoskopischen Objektiven** verwirklicht.

e) **Koma**

Dieser Fehler tritt auf, wenn bei der Abbildung weit geöffnete Lichtbündel verwendet werden, deren Strahlen die Linse auch in achsenfernen Bereichen durchsetzen. Dann entsteht als Bild eines stark seitlich der optischen Achse liegenden Punktes kein Punkt, sondern eine ovale Figur mit kometenartigem Schweif. Diese Erscheinung, die auf der einseitigen Lichtanhäufung in der Bildebene beruht, läßt sich durch hinreichendes Abblenden der Linse unterdrücken.

Chromatische Abbildungsfehler

Chromatische Aberration

Wird zur Abbildung kein monochromatisches Licht verwendet, dann entsteht aufgrund der Dispersion des Linsenmaterials ein Farbfehler. Genauer:
Der Brechungsindex des Linsenmaterials hängt von der Frequenz bzw. Wellenlänge des einfallenden Lichtes ab:

$$n = \frac{c}{c_M(\lambda)} = n(\lambda)$$

Damit ist auch die Brennweite der Linse wellenlängenabhängig:

$$f = \frac{r_1\, r_2}{(n[\lambda] - 1)\,(r_2 - r_1)} = f(\lambda)$$

Da der Brechungsindex mit zunehmender Wellenlänge abnimmt, hat eine dünne Linse für blaues Licht eine kürzere Brennweite als für rotes Licht (Abb. 6.44). Bei der Abbildung ei-

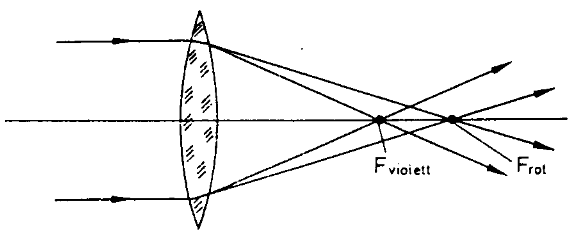


Abbildung 6.44: *Chromatische Aberration bei einer Konvexlinse (aus [4])*

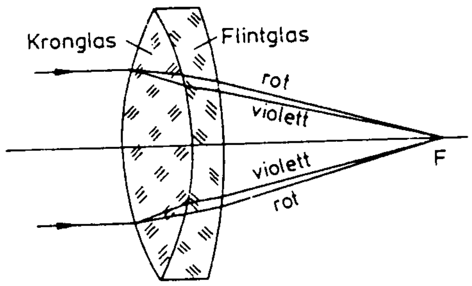


Abbildung 6.45: *Achromatische Linse (aus [4])*

nes Gegenstandes mit weißem Licht entsteht für jede Farbe ein anderes Bild. Aufgrund der unterschiedlichen Brennweiten haben die farbigen Bilder verschiedene Abstände zur Linse (**chromatische Längsabweichung**). Zusätzlich unterscheiden sie sich in ihrer Größe (**chromatische Vergrößerungsdifferenz**). Insgesamt erhält man in jeder Auffangebene ein unscharfes Bild mit farbigen Rändern.
Der Farbfehler läßt sich teilweise beheben, indem man eine Sammellinse starker Dispersion (z.B. Kronglas) kombiniert mit einer Zerstreuungslinse schwacher Dispersion (z.B. Flintglas). Auf diese Weise kann man erreichen, daß die Brennweite des Linsensystems zumindest für zwei verschiedene Farben den gleichen Wert besitzt. Farbkorrigierte Linsensysteme heißen **achromatische Linsen** oder **Achromate** (Abb. 6.45).

6.8.5 Einsatz und Wirkung der Blenden

In den vorangehenden Abschnitten wurde bereits auf den Gebrauch von Blenden im Rahmen der Verringerung von Linsenfehlern eingegangen. Hier dient die Blende zur Begrenzung des abbildenden Strahlenbündels auf annähernd paraxiale Strahlen. Dabei wurde darauf hingewiesen, daß auch die Wahl des Blendenortes die Abbildung beeinflußt.

Falsche Plazierung verursacht kissen– oder tonnenförmige Verzeichnung oder führt zu ungleichmäßiger Ausleuchtung des Bildes (Koma).

Beim Einfügen einer Blende in ein optisches System ist zu beachten, daß diese selbst durch das System abgebildet wird. Zu jeder materiell vorhandenen Blende gehören daher ein oder, falls sich die Blende zwischen den abbildenden Linsen befindet, zwei Blendenbilder. Optisch wirksam ist nicht der Blendenkörper, sondern die Blendenbilder!

Nach ihrer Funktion unterscheidet man die **Apertur**– oder **Öffnungsblende** und die **Gesichtsfeldblende**.
Die **Aperturblende** wird eingesetzt zur Steuerung der Bildhelligkeit. Das objektseitige Bild der Aperturblende heißt Eintrittspupille, das bildseitige nennt man Austrittspupille. Sinnvoll angewendet ist die Aperturblende bei Plazierung am Bildort der Lichtquelle, da sich die Eintrittspupille dann am Ort der Lichtquelle selbst befindet. Bei der Benutzung optischer Instrumente kommt der Austrittspupille besondere Bedeutung zu. Um die Helligkeit eines solchen Instrumentes vollständig ausnutzen zu können, muß man die Augenpupille vollständig mit der Austrittspupille zur Deckung bringen.

Die **Gesichtsfeldblende** begrenzt das Gesichtsfeld, welches ein im Mittelpunkt der Eintrittspupille situiertes Auge sieht. Die zugehörigen Blendenbilder werden, je nachdem, ob sie im Gegenstands– oder Bildraum entstehen, als Eintritts– oder Austrittsluke bezeichnet.

Eine Anwendung der Aperturblende zeigt das Problem der Tiefenschärfe.

Tiefenschärfe

Ein optisches System kann jeweils nur von einer Ebene des Gegenstandsraumes ein scharfes Bild im Bildraum entwerfen.

Haben zwei auf der optischen Achse gelegene Punkte P_1 und P_2 einen gewissen Abstand voneinander (Abb. 6.46), so werden die Strahlen, die von dem weiter entfernt von der Linse befindlichen Punkt P_1 ausgehen, schwächer gebrochen als die vom Punkt P_2 kommenden Strahlen. Ein in Richtung der optischen Achse ausgedehnter Gegenstand wird daher nur in einer gewissen Tiefe scharf abgebildet. Durch Einfügen einer Apertur wird das Bild in allen Tiefen schärfer, zugleich aber die Bildhelligkeit erniedrigt.

Versuch: Ein Glühwendel mit mehreren Wicklungen wird durch eine Linse zunächst ohne Blende abgebildet. Das Bild ist insgesamt unscharf. Bei Verschieben der Linse sind jeweils einzelne Teilbereiche des Wendels scharf zu sehen, während die übrigen Bereiche verschwommen erscheinen. Nach Einsatz einer Aperturblende zeigt die Mattscheibe sämtliche Wicklungen in guter Schärfe, das Bild ist aber insgesamt dunkler.

Wir wollen an dieser Stelle unsere Betrachtungen zur geometrischen Optik abschließen und zur Wellenoptik, insbesondere zur elektromagnetischen Lichttheorie von MAXWELL übergehen.

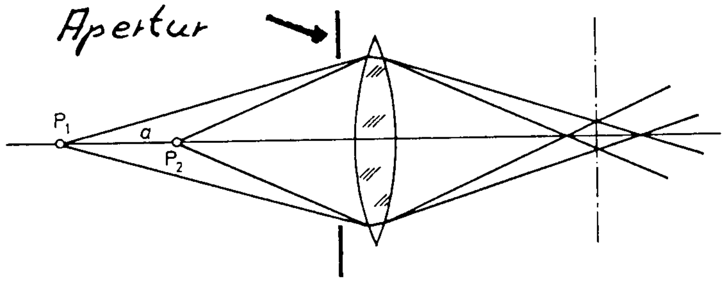


Abbildung 6.46: *Eine Aperturblende erhöht die Tiefenschärfe. (aus [4])*

Kapitel 7

Maxwellsche Lichttheorie

Reflexions – und Brechungsgesetz sollen nun aus den Maxwellschen Gleichungen heraus interpretiert werden. Dabei lassen sich zusätzlich zu den im Rahmen der geometrischen Optik gefundenen Ergebnissen Aussagen über die Intensität des reflektierten und gebrochenen Lichtes gewinnen.

7.1 Elektromagnetische Wellen an Grenzflächen

Wie verhalten sich das elektrische und magnetische Feld einer Welle an der Grenzfläche zwischen zwei optisch verschiedenen Medien?
Zur Klärung dieser Frage suchen wir zunächst Randbedingungen, welche die Beziehungen zwischen den Feldern diesseits und jenseits der Trennfläche angeben.

Randbedingungen

Bei den nachfolgenden Erörterungen setzen wir der Einfachheit halber voraus, daß für die betrachtete Materie

$$\vec{D} = \varepsilon\,\varepsilon_0\,\vec{E} \qquad \text{und} \qquad \vec{B} = \mu\,\mu_0\,\vec{H}$$

gilt. Es seien also z.B. ferromagnetische Stoffe aus unseren Betrachtungen ausgeschlossen.

Eine elektromagnetische Welle falle auf die Grenzfläche zweier Dielektrika mit den Dielektrizitätskonstanten ε_1 und ε_2. Die beiden Medien enthalten keine freien elektrischen Ladungen, es tritt lediglich nach

$$\vec{D} = \varepsilon_0\,\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon\,\varepsilon_0\,\vec{E}$$

Polarisation auf. Nach der MAXWELLschen Fassung des GAUSSschen Satzes gilt dann

$$\oiint \vec{D}\,d\vec{A} = Q_{frei} = 0$$

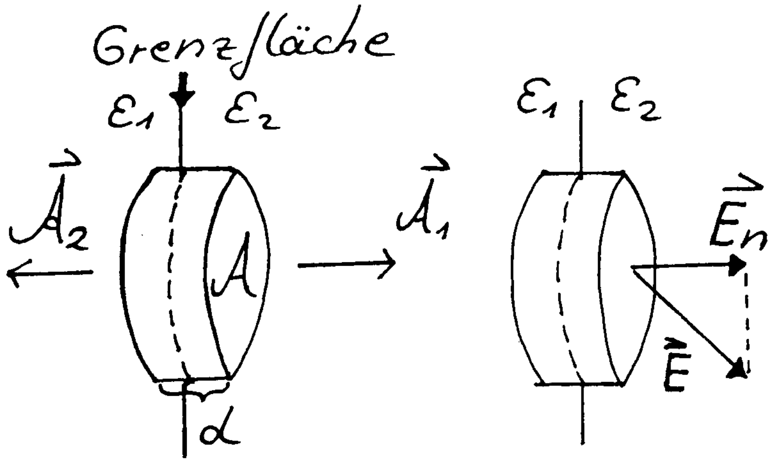


Abbildung 7.1:

Wir legen nun in Gedanken eine Dose um die Grenzfläche, wie in Abb. 7.1 skizziert ist. Diese habe die infinitesimale Dicke d ($d \to 0$), sowie die endliche, aber beliebige Grundfläche $\mathcal{A}$. Anwendung der ersten MAXWELL – Gleichung auf dieses Gebiet ergibt

$$\oint\!\!\!\int \vec{D}\, d\vec{A} = \iint D_n\, d\mathcal{A} = \iint_{\mathcal{A}_1} D_n\, d\mathcal{A} + \iint_{\mathcal{A}_2} D_n\, d\mathcal{A} = \iint_{\mathcal{A}} (D_{n1} - D_{n2})\, d\mathcal{A}$$

Dabei sind D_{n1} und D_{n2} die nach außen gerichteten Normalkomponenten der dielektrischen Verschiebung. Der Beitrag der Seitenflächen zum Integral verschwindet im Grenzfall $d \to 0$.

Wir wählen die Dosenabmessungen so klein, daß D_n auf der Grundfläche $\mathcal{A}$ nicht variiert. Dann folgt

$$\boxed{D_{n1} = D_{n2}} \quad ,$$

d.h. die Normalkomponenten von $\vec{D}$ sind an der Grenzfläche stetig. Andererseits gilt wegen $\vec{D} = \varepsilon\, \varepsilon_0\, \vec{E}$ für die Feldstärke

$$\boxed{\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \quad ,$$

d.h. die Normalkomponenten der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ erfahren an der Trennfläche einen Sprung.

Welche Aussagen lassen sich über die tangentialen Komponenten von $\vec{D}$ und $\vec{E}$ machen?

Wir stellen uns nun die Grenzfläche von einer geschlossenen Kurve umgeben vor (Abb. 7.2). Die Kurve schließt eine streifenförmige Fläche ein, deren Breite d infinitesimal klein ist. Die Länge l ist endlich, aber beliebig wählbar, so daß der Flächeninhalt des Streifens im Grenzfall $d \to 0$ vernachlässigt werden kann. Wenden wir daher die dritte MAXWELL – Gleichung

$$\oint \vec{E}\, d\vec{r} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{A}$$

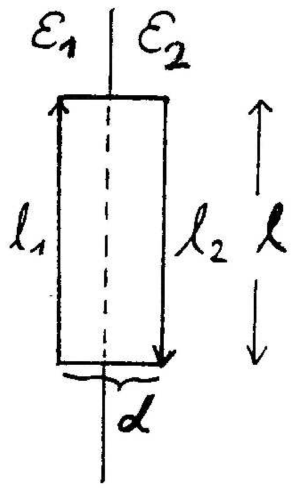


Abbildung 7.2:

auf die betrachtete Kurve an, so wird die rechte Seite Null und es gilt

$$\oint \vec{E}\, d\vec{r} = \int_{l_1} E_t\, dl + \int_{l_2} E_t\, dl = \int_l (E_{t1} - E_{t2})\, dl = 0$$

Wir wählen l so kurz, daß E_t längs des Streifens als konstant angesehen werden kann, dann folgt

$$\boxed{E_{t1} = E_{t2}} \quad ,$$

d.h. die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes sind beim Übergang von einem in ein anderes Dielektrikum stetig. Im Gegensatz dazu erleiden die tangentialen Komponenten der dielektrischen Verschiebung einen Sprung.

$$\boxed{\frac{D_{t1}}{D_{t2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

Eine elektromagnetischen Welle an der Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika erfüllt also folgende Randbedingungen (Abb. 7.3):

$$\text{Stetig sind} \begin{cases} \text{die Tangentialkomponenten des } \vec{E} \text{ – Feldes} \\ \text{die Normalkomponenten des } \vec{D} \text{ – Feldes} \end{cases}$$

Analog lassen sich die Randbedingungen für das $\vec{B}$ – Feld aufstellen. Aus der zweiten Maxwell – Gleichung $\oint \vec{B}\, d\vec{A} = 0$ folgt, daß die Normalkomponente B_n stetig ist.

$$\boxed{B_{n1} = B_{n2}}$$

Die vierte Maxwell – Gleichung

$$\oiint \frac{\vec{B}}{\mu\, \mu_0}\, d\vec{r} = I_{frei} + \iint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\, d\vec{A}$$

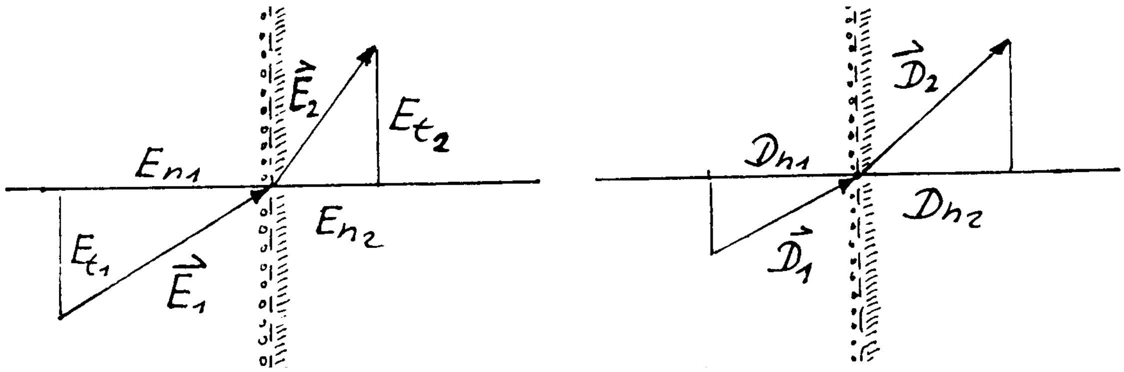


Abbildung 7.3: *Randbedingungen für das $\vec{E}$– und das $\vec{D}$–Feld an der Grenzfläche zwischen zwei Medien. (aus [7])*

liefert die Beziehung

$$\boxed{\frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}} \; .$$

Da für Isolatoren meist $\mu \approx 1$ gesetzt werden kann, nehmen wir für unsere weiteren Betrachtungen an, daß der Durchgang des $\vec{B}$ – Feldes durch eine Grenzfläche insgesamt stetig erfolgt.

Berechnung des Reflexions – und Transmissionsgrades

Unser besonderes Interesse gilt nun der Frage, wie sich bei Reflexion und Brechung die Intensität der einfallenden Lichtwelle aufteilt in die Intensitäten des reflektierten und des durchgehenden Lichtes. Die gesuchten Größen, welche die Intensitätsverhältnisse angeben, sind

Reflexionsgrad R

$$\boxed{R = \frac{I_r}{I_e}}$$

Transmissionsgrad T

$$\boxed{T = \frac{I_d}{I_e}}$$

Es ist uns an dieser Stelle nicht möglich, R und T für den allgemeinen Fall zu berechnen. Wir können für einen beliebigen Einfallswinkel der Lichtwelle keine genaue Angabe über die Richtung des elektrischen Feldes machen, da der elektrische Feldvektor senkrecht zur Ausbreitungsrichtung $\vec{k}$ eine beliebige Lage einnehmen kann. Aus diesem Grund beschränken wir uns auf den Fall, daß die Lichtwelle senkrecht auf die Grenzfläche auftrifft. Dann ist $\vec{E}$ parallel zur Grenzschicht.

Nach dem Energieerhaltungssatz muß für die Intensitäten

$$I_e = I_r + I_d \qquad (1)$$

gelten. Dabei ist der Zusammenhang von Intensität und elektrischer Feldstärke gegeben durch

$$I = w\,c = c\,\varepsilon\,\varepsilon_0\,E^2 \qquad (2)$$

Bei senkrechtem Einfall sind die elektrischen Feldvektoren sowohl der einfallenden und der reflektierten, als auch der transmittierten Welle parallel zur Grenzfläche.

$$\vec{E}_e \parallel \vec{E}_r \parallel \vec{E}_d \parallel \text{Grenzfläche}$$

Die Stetigkeit der Tangentialkomponenten liefert die Beziehung

$$E_e + E_r = E_d \qquad (3)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$c_1\,\varepsilon_1\,\varepsilon_0\,E_e^2 = c_1\,\varepsilon_1\,\varepsilon_0\,E_r^2 + c_2\,\varepsilon_2\,\varepsilon_0\,E_d^2$$

Mit (3) ergibt sich daraus

$$c_1\,\varepsilon_1\,\varepsilon_0\,(E_e^2 - E_r^2) = c_2\,\varepsilon_2\,\varepsilon_0\,(E_e + E_r)^2$$

Division durch $(E_e + E_r)$ führt zu

$$c_1\,\varepsilon_1\,\varepsilon_0\,(E_e - E_r) = c_2\,\varepsilon_2\,\varepsilon_0\,(E_e + E_r)$$

Auflösen nach E_r ergibt

$$E_r = E_e\,\frac{c_1\,\varepsilon_1 - c_2\,\varepsilon_2}{c_1\,\varepsilon_1 + c_2\,\varepsilon_2} \qquad (*)$$

In dem Ausdruck für die Lichtgeschwindigkeit in den Dielektrika

$$c_i = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_i\,\varepsilon_0\,\mu\,\mu_0}}$$

setzen wir näherungsweise $\mu = 1$. Aus $c_i = c/\sqrt{\varepsilon_i}$ folgt dann mit $n_i = c/c_i$ für den Brechungsindex der beiden Medien $n_i = \sqrt{\varepsilon_i}$. Damit läßt sich die Umformung

$$\varepsilon_i\,c_i = n_i^2\,c_i = n_i\,c_i\,n_i = c\,n_i$$

vornehmen, welche, eingesetzt in $(*)$, zu der Beziehung

$$\boxed{E_r = E_e\,\left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)}$$

führt. Daraus resultiert

$$\boxed{R = \frac{I_r}{I_e} = \frac{E_r^2}{E_e^2} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2} \qquad \textbf{Reflexionsgrad R}$$

Aus der Energieerhaltung bzw. aus Gleichung (1) ergibt sich

$$T = 1 - R \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{T = 1 - \frac{E_r^2}{E_e^2}}$$

als Zusammenhang zwischen Reflexions – und Transmissionsgrad. Der **Transmissionsgrad T** berechnet sich also zu

$$\boxed{T = \frac{4\, n_1\, n_2}{(n_1 + n_2)^2}}$$

Beachte $T = \frac{I_d}{I_e} = \frac{c_2\, \varepsilon_2\, E_d^2}{c_1\, \varepsilon_1\, E_e^2} \neq \frac{E_d^2}{E_e^2}$!!

Kapitel 8

Polarisation

8.1 Skalare Wellen und Vektorwellen

Zur mathematischen Beschreibung einer ebenen Welle denken wir uns von nun an ein euklidisches Koordinatensystem so angelegt, daß sich die Welle entlang der z – Richtung ausbreite.
Dann wird eine skalare ebene Welle in ihrer allgemeinen Form beschrieben durch

$$u(z,t) = u(z \mp ct)$$

und der Ausdruck für eine skalare harmonische Welle lautet

$$u(z,t) = u_0 \, e^{i\,(\omega t - kz)}$$

Ebene Wellen, die der obigen Bedingung genügen, können wir weiter wie folgt klassifizieren:

1.*Klassifizierung:*	Longitudinalwellen	$\leftrightarrow$	Transversalwellen
	$u(z,t) = u_z(z,t)$		$u_z = 0$
	$u_x = u_y = 0$		$u_x\,,\, u_y \neq 0$

2.*Klassifizierung:* **Skalare Wellen** $\leftrightarrow$ **Vektorwellen**

Skalare Wellen haben die mathematische Form

$$u(z,t) = u_0 \, e^{i\,(\omega t - kz)} \quad ,$$

wobei u_0 eine skalare Größe ist. Longitudinalwellen sind skalar.

Vektorwellen werden beschrieben durch

$$\vec{u}(z,t) = \vec{u_0} \, e^{i\,(\omega t - kz)}$$

Dabei legt der Vektor $\vec{u_0}$ die **Schwingungsebene** der Welle fest. Diese liegt bei Transversalwellen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, welche durch den Wellenvektor $\vec{k}$ bestimmt wird. Es gilt also: $\vec{u_0} \perp \vec{k}$.

Die Lage von $\vec{u_0}$ in der zu $\vec{k}$ senkrechten Ebene ist beliebig. Ändert sich die Lage von $\vec{u_0}$ und damit die Schwingungsrichtung der Welle zeitlich willkürlich und völlig regellos, so heißt die Transversalwelle **unpolarisiert**. Ist jedoch im zeitlichen Mittel eine Schwingungsrichtung ausgezeichnet, oder erfolgt die zeitliche Änderung nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit, so spricht man von der **Polarisation** der Welle. Nach der **Polarisationsrichtung**, die der Vektor $\vec{u_0}$ festlegt, unterscheidet man verschiedene Arten der Polarisation.

Transversale Wellen können also untereinander noch zusätzlich dadurch klassifiziert werden, ob und wie sie polarisiert sind. Wir wollen nun die verschiedenen Arten der Polarisation am Beispiel der Lichtwellen besprechen.

8.2 Polarisiertes Licht

Da es sich bei Licht um eine elektromagnetische Wellenerscheinung handelt, sind Lichtwellen transversal. In ihnen schwingen elektrische und magnetische Feldstärke senkrecht zueinander und senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung.

$$\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{k} \text{ bzw. } \vec{c}$$

Licht ist also polarisierbar. Dabei wird die Polarisationsrichtung einer Lichtwelle als die Richtung des elektrischen Feldvektors $\vec{E}$ definiert. Eine Lichtwelle wird daher i.allg. beschrieben durch

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i\,(\vec{k}\,\vec{r} - \omega t)}$$

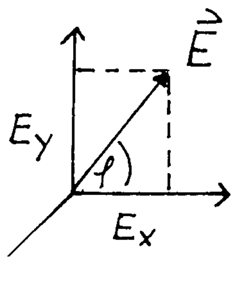
Wir beschränken uns hier auf Lichtwellen der Form

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz) \quad ,$$

welche sich in z – Richtung ausbreiten.

Man könnte ebenso das $\vec{B}$ – Feld zur Definition der Polarisation benutzen, dann ist lediglich die Polarisationsrichtung um 90° gedreht.

8.2.1 Linear polarisiertes Licht



Es gilt

$$\vec{E}(z,t) = \begin{pmatrix} E_x(z,t) \\ E_y(z,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 \cos\varphi \\ E_0 \sin\varphi \end{pmatrix} \cos(\omega t - kz)$$

Bei **linear polarisiertem Licht** schwingt die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ in jedem Punkt in dieselbe Richtung, in die **Polarisationsrichtung**. Die Vektoren $\vec{k}$ und $\vec{E}$ spannen daher eine Ebene auf, die als **Schwingungsebene** bezeichnet wird. Senkrecht dazu schwingt die magnetische Flußdichte $\vec{B}$ in der **Polarisationsebene**.

Linear polarisiertes Licht ist als Überlagerung von zwei gleich– oder gegenphasig in x – und y – Richtung schwingenden Wellen zu beschreiben. In dem Wellenausdruck

$$\vec{E}(z,t) = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x}\,\cos(\omega t - kz) \\ E_{0y}\,\cos(\omega t - kz + \delta) \end{pmatrix}$$

ist demnach bei linearer Polarisation

$$\delta = 0 \quad \text{oder} \quad \delta = \pi$$

zu setzen.

8.2.2 Zirkular polarisiertes Licht

Für $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ und $\delta = \pm\,\pi/2$ erhält man **zikular polarisiertes Licht**.

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t - kz) \\ \cos(\omega t - kz \pm\, \pi/2) \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t - kz) \\ \mp \sin(\omega t - kz) \end{pmatrix}$$

Hier ist der Betrag des elektrischen Feldvektors konstant.

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{E_0^2\,\cos^2(\omega t - kz) + E_0^2\,\sin^2(\omega t - kz)} = E_0$$

Dagegen variiert die Richtung von $\vec{E}$ mit der Zeit. Nach welcher Gesetzmäßigkeit erfolgt die zeitliche Richtungsänderung von $\vec{E}$?

Sei $\delta + \pi/2$. Wir untersuchen die Richtungsänderung von $\vec{E}$ an einem festen Punkt z_0 auf der z – Achse.

$$\varphi = \omega t - kz_0$$

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ liegt $\vec{E}$ im Winkel $\varphi = -kz_0$ zur x – Achse.

$$\vec{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos(-kz_0) \\ -\sin(-kz_0) \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} \cos(kz_0) \\ \sin(kz_0) \end{pmatrix}$$

Nach einer Zeit $t = kz_0/\omega$ gilt

$$\vec{E} = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

d.h. $\vec{E}$ weist in x – Richtung. Ein Beobachter, auf den sich die Welle zubewegt, d.h., der zur Lichtquelle *hin*schaut, sieht eine Rotation des elektrischen Feldvektors im Uhrzeigersinn um die z – Achse (Abb. 8.1).

<u>Für zirkular polarisiertes Licht läßt sich also festhalten:</u>

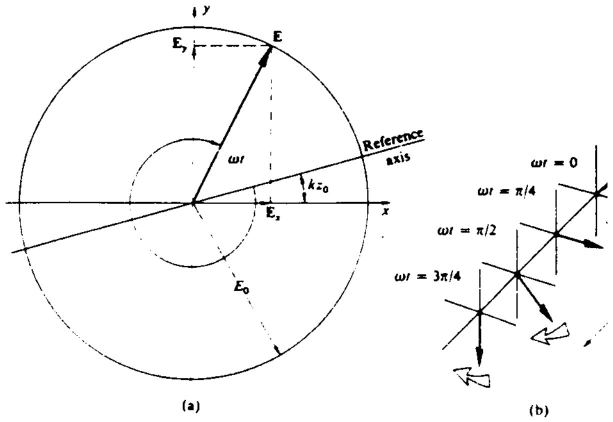


Abbildung 8.1: *Rotation des elektrischen Feldvektors einer rechtszirkular polarisierten Welle. (aus [13])*

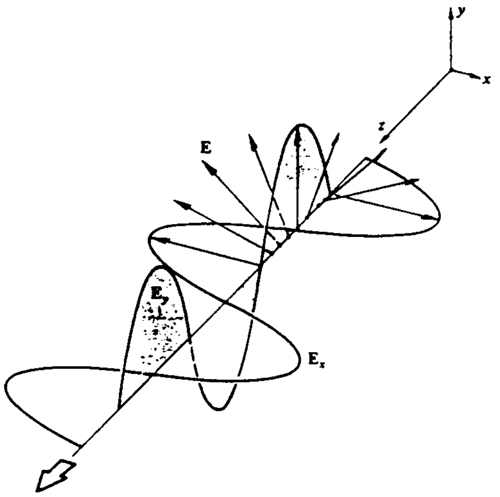


Abbildung 8.2: *Rechtszirkulares Licht (aus [13])*

An jedem festen Ort z_0 rotiert der elektrische Feldvektor $\vec{E}$ in einer zur x, y – Ebene parallelen Ebene. Er läuft mit der Frequenz ω auf einem Kreis mit dem Radius E_0 um. Beim Fortschreiten der Welle in z – Richtung beschreibt die Spitze des $\vec{E}$ – Vektors eine Schraubenlinie, die nach einem Umlauf um eine Wellenlänge λ in z verschoben ist.
Im Fall $\delta = +\pi/2$ sieht ein dem Licht entgegen blickender Beobachter eine Drehung *im Uhrzeigersinn*. Von der Quelle aus gesehen, erfolgt die Rotation rechtshändig. Man spricht daher von **rechtszirkular polarisiertem Licht**.
Bei einer Phase $\delta = -\pi/2$ liegt eine linkshändige Rotation von $\vec{E}$ um die Ausbreitungsrichtung vor. Der Beobachter registriert eine Drehung *entgegen dem Uhrzeigersinn*, das Licht heißt **linkszirkular polarisiert** (Achtung, das Vorzeichen von δ ist definitionsabhängig !) .

Zusammenhang zwischen linearer und zirkularer Polarisation

Überlagert man eine rechtszirkular und eine linkszirkular polarisierte Lichtwelle, welche in Frequenz und Amplitude übereinstimmen

$$\vec{E}_R + \vec{E}_L = \vec{E} \quad ,$$

so ist die Richtung des resultierenden elektrischen Feldvektors fest. Es entsteht eine linear polarisierte Welle (Abb. 8.3).

8.2.3 Elliptisch polarisiertes Licht

Lineare sowie zirkulare Polarisation stellen Spezialfälle elliptisch polarisierten Lichtes dar. Bei **elliptisch polarisiertem Licht** rotiert der elektrische Feldvektor um die Ausbreitungsrichtung und ändert währenddessen zusätzlich seinen Betrag.

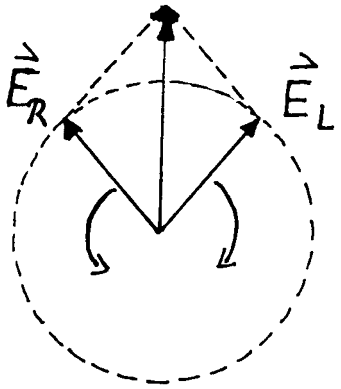


Abbildung 8.3: *Überlagerung von rechts– und linkszirkularem Licht zu einer linear polarisierten Lichtwelle*

Betrachtet man also den allgemeineren Fall $\underline{E_{0x} \neq E_{0y} \text{ und/oder } \delta \neq n\,\pi/2}$, dann beschreibt die Spitze von $\vec{E}$ senkrecht zur Ausbreitungsrichtung eine Ellipse, während die Welle fortschreitet (Abb. 8.4).

$$\vec{E}(z,t) = \begin{pmatrix} E_{0x}\,\cos(\omega t - kz) \\ E_{0y}\,\cos(\omega t - kz + \delta) \end{pmatrix}$$

Die durchlaufene Ellipse läßt sich jeweils in ein Rechteck mit den Maßen $2\,E_{0x}$ auf $2\,E_{0y}$

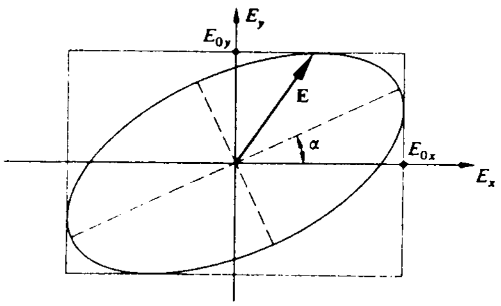


Abbildung 8.4: *Elliptisches Licht (aus [13])*

einbeschreiben. Dabei bestimmt die relative Phasendifferenz δ die Exzentrizität der Ellipse. Diese ist minimal für $\delta = \pm\,\pi/2$ und erreicht ihr Maximum für $\delta = 0\,, \pm\pi$ (Abb. 8.5).

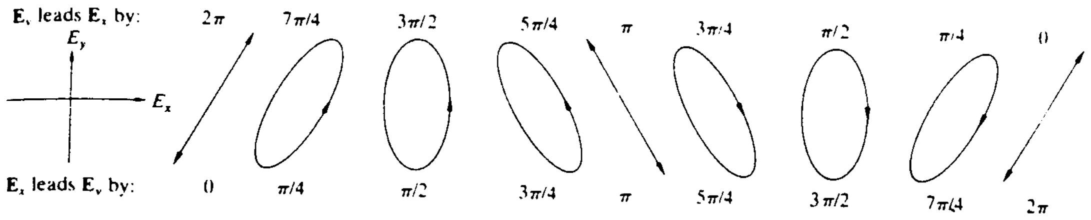


Abbildung 8.5: *(aus [13])*

8.3 Erzeugung polarisierten Lichtes

8.3.1 Gitter und Polarisationsfilter

Wir haben bereits eine Analogie zur Polarisation von Lichtwellen kennengelernt, die Polarisation von Mikrowellen mit Hilfe eines metallischen Drahtgitters.
Fällt eine elektromagnetische Welle (Mikrowelle) auf ein Drahtgitter, so wird nur derjenige Wellenanteil durchgelassen, bei dem der elektrische Feldvektor $\vec{E}$ senkrecht zu den Gitterdrähten schwingt. Der restliche Anteil wird aufgrund der guten Leitfähigkeit der Drähte absorbiert (Abb. 8.6). Das Drahtgitter erzeugt also linear polarisierte Mikrowellen.

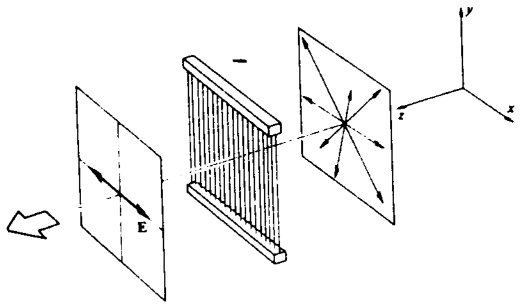


Abbildung 8.6: *Polarisation von Mikrowellen am Drahtgitter*

Lichtwellen auf analoge Weise zu polarisieren, ist aufgrund der kürzeren Wellenlänge wesentlich schwieriger!
Es gelang jedoch G.R.Bird und M.Parrish im Jahr 1960, ein Drahtgitter zu konstruieren, welches 2160 Drähte pro Millimeter enthielt und damit zumindest für die Polarisation von langwelligem Licht geeignet war.
Heute benutzt man in der Praxis sogenannte **Polaroidfilter**, welche im Prinzip wie Gitter funktionieren. Sie wurden ihrer einfachsten Form erstmals 1928 von dem 19jährigen Studenten E.H.Land erfunden.

Es gibt zwei verschiedene Arten der Herstellung von Polaroidfiltern. Zum einen verwendet man dichroitische Kristalle, d.h. Kristalle, die eine optische Vorzugsrichtung besitzen. Sie haben die Eigenschaft, bei Einfall einer Lichtwelle diejenige Komponente des elektrischen Feldes, welche senkrecht zu ihrer optischen Achse gerichtet ist, stark zu absorbieren. Bei genügender Kristalldichte ist daher die austretende Lichtwelle parallel zur optischen Vorzugsrichtung linear polarisiert (Abb. 8.7). Dies macht man sich zunutze, indem man die

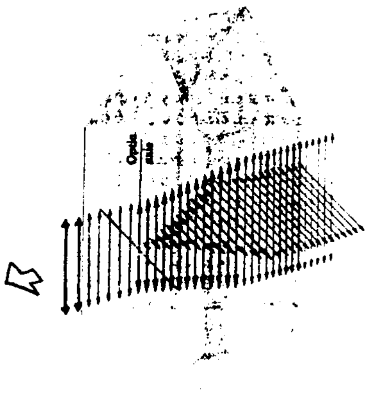


Abbildung 8.7: *Dichroitischer Kristall (aus [13])*

Kristalle mit fester Vorzugsrichtung in Plastikfolien einbettet.

Finanziell günstiger und daher häufiger ist folgendes Herstellungsverfahren: Man bettet anstelle der Kristalle lange, fadenförmige, organische Moleküle (Polyvinyle) in Kunststoffolien ein. Diese zeigen längs der Molekülketten eine gute, quer dazu eine schlechte Leitfähigkeit. Bei einer einfallenden Lichtwelle wird daher die zu den Ketten parallele elektrische Feldkomponente stark absorbiert.

Polaroidfolien sind die gebräuchlichsten Mittel zur Erzeugung, aber auch zum Nachweis von polarisiertem Licht. Dies soll nun anhand einer geeigneten Versuchsapparatur (Abb. 8.8) demonstriert werden. Ein als **Polarisator** eingesetzter Polaroidfilter erzeugt linear polarisiertes Licht, bei der Verwendung als **Analysator** weist er linear polarisiertes Licht nach.

Versuch 1: Als Detektor verwenden wir eine einfache Mattscheibe. Zunächst wird nur der Polarisator zwischen Strahl und Mattscheibe eingefügt. Das Drehen der Polarisationsrichtung verursacht keine Helligkeitsänderung.

Versuch 2: Ordnet man Polarisator und Analysator hintereinander so an, daß ihre Polarisationsrichtungen gerade um $\alpha = 90°$ gegeneinander verdreht sind, dann wird kein Licht durchgelassen. Die Mattscheibe bleibt dunkel. Das vom Polarisator erzeugte linear polarisierte Licht wird vom Analysator vollständig absorbiert.

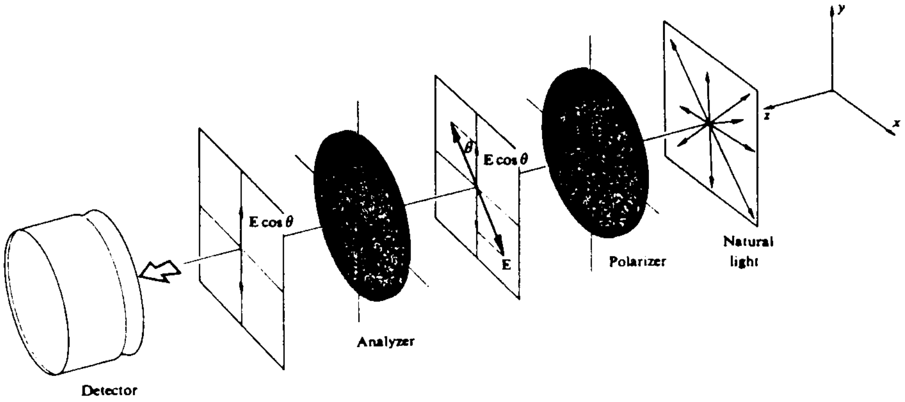
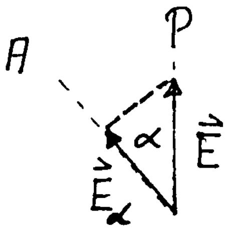


Abbildung 8.8: *Linearer Polarisator und Analysator. (aus [13])*

Durch Drehen des Polarisators wird nun der Winkel α zwischen Polarisator und Analysator verkleinert. Diejenige Feldkomponente des vom Polarisator kommenden Lichtes, welche der Analysator durchgeläßt, wächst. Man beobachtet zunehmende Helligkeit. Maximale Helligkeit wird bei $\alpha = 0$ erreicht, d.h. wenn Polarisator und Analyator gleiche Durchlaßrichtung besitzen.

Welche Gesetzmäßigkeit beschreibt die Intensität des transmittierten Lichtes für den Fall, daß Analysator und Polarisator um einen Winkel α gegeneinander verdreht sind?



Das vom Polarisator kommende Licht läßt sich zerlegen in einen Anteil, dessen Schwingungsebene parallel zur Polarisationrichtung des Analysators liegt, sowie in einen Anteil mit dazu senkrechter Schwingungsebene. Es gilt $\vec{E} = \vec{E}_\alpha + \vec{E}'_\alpha$.
$\vec{E}'_\alpha$ wird von A absorbiert, nur $\vec{E}_\alpha$ kann A passieren. Mit $E_\alpha = E \cos\alpha$ gilt für die vom Detektor gemessene Intensität

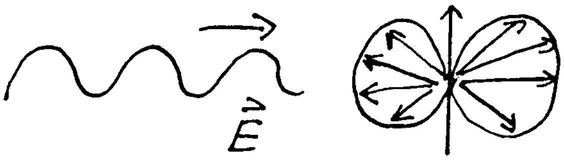
$$I(\alpha) = E_\alpha^2 = E^2 \cos^2\alpha$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{I(\alpha) = I_0 \cos^2\alpha} \quad \textbf{Gesetz von Malus}$$

Dieses erstmals 1809 von E.Malus veröffentlichte Gesetz wurde lange vor der Entdeckung der elektromagnetischen Wellen aufgestellt!

Versuch 3: Zwischen zwei gekreuzte Polarisationsfilter wird ein dritter Filter gebracht. Man beobachtet Aufhellung, da der eingefügte Filter die Polarisationsrichtung des vom Polarisator kommenden Lichtes dreht.

8.4 Polarisation durch Streuung

Wir haben die Streuung von Licht an Atomen (Molekülen), die **Rayleigh–Streuung**, bereits ausführlich besprochen. Hier noch einmal kurz zur Wiederholung:
Die Elektronen eines Atoms werden von einfallendem Licht zu Dipolschwingungen ange-



regt.

Die nötige Schwingungsenergie wird aus der einfallenden Lichtwelle absorbiert. Die entstehenden HERTZschen Dipole senden ihrerseits elektromagnetische Strahlung aus. Die Abstrahlung ist senkrecht zur Dipolachse maximal. Sie erfolgt mit der Intensität

$$I \sim \omega^4 \ .$$

Ist nun die anregende Lichtwelle linear polarisiert, so wird in die Polarisationsrichtung der Welle keine Energie abgestrahlt, da diese mit der Schwingungsrichtung der Dipole übereinstimmt (Abb. 8.9). Eine unpolarisierte Welle läßt sich darstellen als Überlagerung

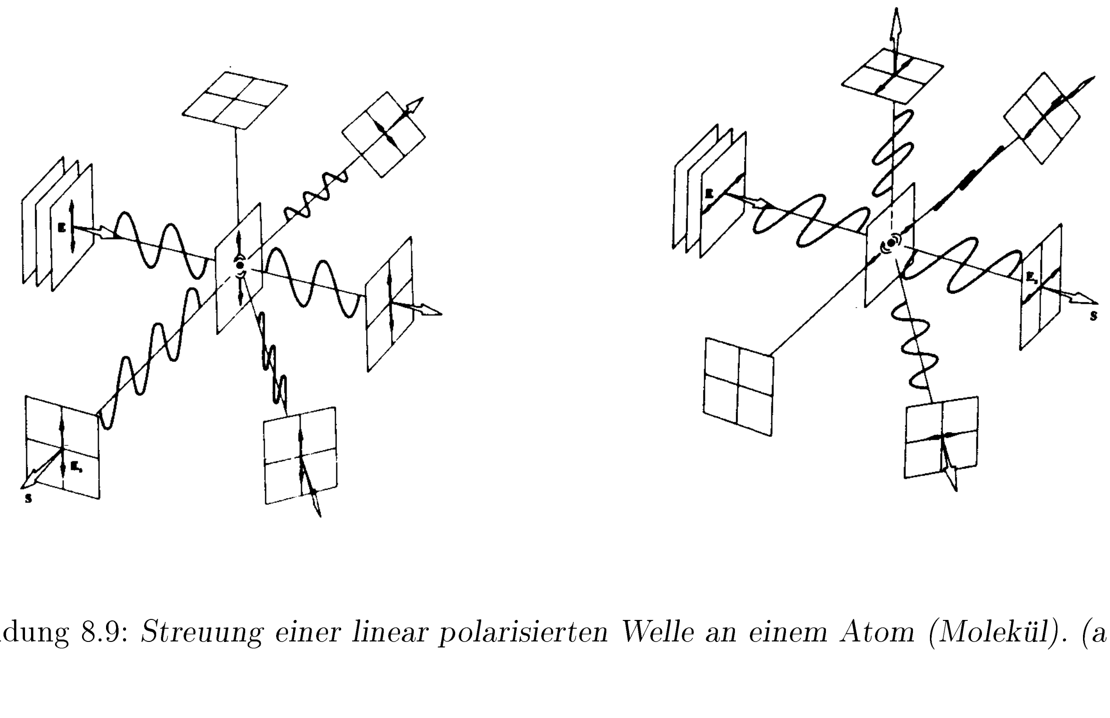


Abbildung 8.9: *Streuung einer linear polarisierten Welle an einem Atom (Molekül). (aus [13])*

zweier inkohärenter, linear polarisierter Teilwellen, welche orthogonal zueinander schwingen. Wird eine unpolarisierte Welle an einem Atom gestreut (Abb. 8.10), so ist die Streustrahlung, die senkrecht zu den Schwingungsebenen ausgesendet wird, linear polarisiert.

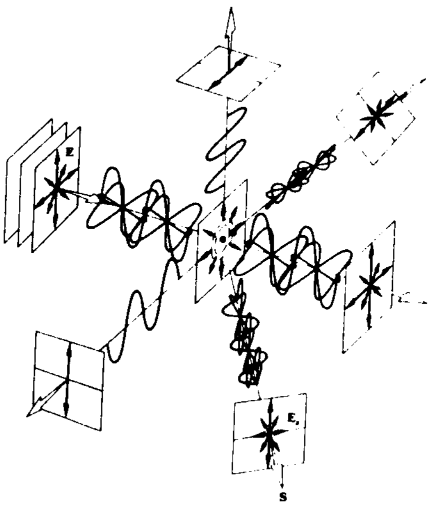


Abbildung 8.10: *Streuung einer unpolarisierten Welle an einem Atom (Molekül). (aus [13])*

<u>*Versuch:*</u> Über einem mit einer Lösung gefüllten, gläsernen Bassin, dessen Hinterseite mit schwarzer Pappe abgedeckt ist, wird unter einem Winkel von 45° ein Spiegel angebracht. Ein von einer Kohlebogenlampe erzeugter Lichtstrahl läuft durch einen Polarisator und dringt dann in die Lösung ein (Abb. 8.11). Die Moleküle der Lösung werden zum Leuchten angeregt. Ist die Durchlaßrichtung des Polarisators horizontal, so verschwindet der leuchtende Strahl im Becken. Bei vertikaler Polarisationsrichtung sind am Spiegel keine Leuchterscheinungen mehr zu beobachten. Die angeregten Ladungsteilchen strahlen also nicht in ihre Schwingungsrichtung ab.

8.5 Polarisation durch Reflexion und Brechung

Wir haben bereits hergeleitet, daß für die Reflexion von Licht an Materie bei senkrechtem Einfall

$$\frac{E_r}{E_e} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

gilt. Der Reflexionsgrad R, der das Verhältnis von reflektierter zu einfallender Intensität beschreibt, ist dann gegeben durch

$$R = \frac{I_r}{I_e} = \left(\frac{E_r}{E_e}\right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$$

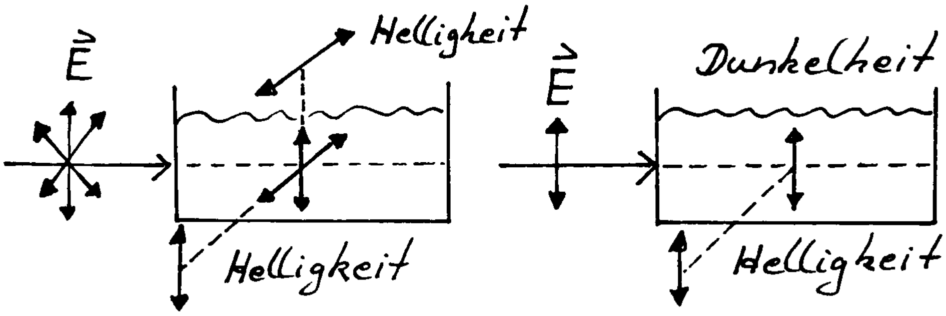


Abbildung 8.11: *Streuung von Licht an den Molekülen einer Lösung*

Beispielsweise beträgt der Reflexionsgrad für den senkrechten Übergang einer Lichtwelle von Luft ($n_1 \approx 1$) in Glas ($n_2 = 1,5$)

$$R = \left(\frac{1-1,5}{1+1,5}\right)^2 = 0,04 = 4\,\%$$

Bei anderen Einfallswinkeln gestaltet sich die Herleitung der reflektierten bzw. transmittierten Intensitäten wesentlich komplizierter. Insbesondere müssen dann die Polarisationsrichtungen der Lichtwellen berücksichtigt werden (Abb. 8.12). Wir unterscheiden für

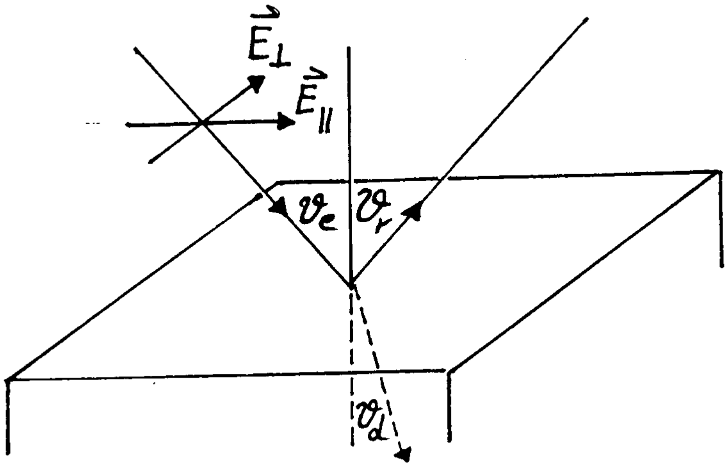


Abbildung 8.12: *Zur Betrachtung der Polarisationsrichtungen der Wellen an einer Grenzfläche*

die einfallende, die reflektierte und die durchgehende Welle

$$\text{lineare Polarisation} \left\langle \begin{array}{l} \text{parallel zur Einfallsebene: } E^{\parallel} \\ \text{senkrecht zur Einfallsebene: } E^{\perp} \end{array} \right.$$

und untersuchen die folgenden Fälle:

$\underline{E_e^{\|} = 0}$: Der einfallende Lichtstrahl ist senkrecht zur Einfallsebene polarisiert. Die sich in der Materie ausbildenden HERTZschen Dipole schwingen ebenfalls orthogonal zur Einfallsebene. Sie erzeugen daher einen reflektierten und einen gebrochenen Strahl, deren Polarisationsrichtung mit der des einfallenden Strahls übereinstimmt (Abb. 8.13).

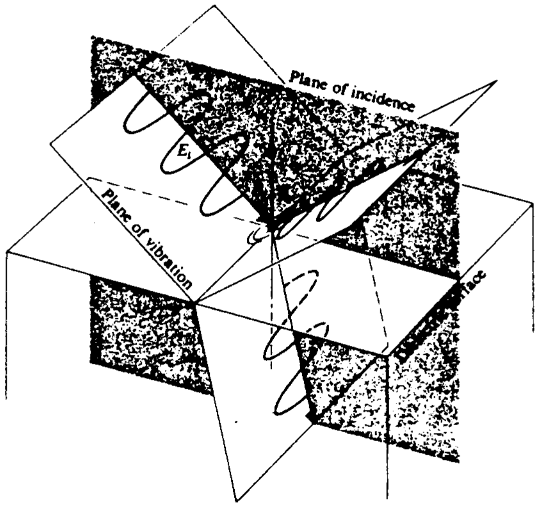


Abbildung 8.13: *Reflexion und Brechung einer senkrecht zur Einfallsebene linear polarisierten Welle.(aus [13])*

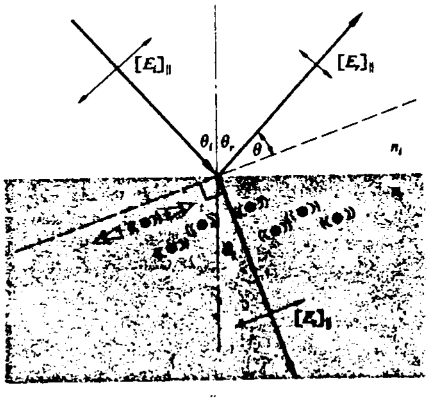


Abbildung 8.14: *Reflexion und Brechung einer parallel zur Einfallsebene linear polarisierten Welle,* BREWSTER*sches Gesetz. (aus [13])*

$\underline{E_e^{\perp} = 0}$: Das einfallende Licht ist parallel zur Einfallsebene polarisiert. Die im Medium angeregten elektrischen Dipole strahlen nur sehr geringe Intensität in Richtung des reflektierten Strahles ab, da dieser einen sehr kleinen Winkel θ mit der Dipolachse einschließt (Abb. 8.14). Im Grenzfall $\theta = 0°$ verschwindet der reflektierte Strahl völlig. Der Einfallswinkel, bei dem dieser Grenzfall eintritt, heißt **Polarisationswinkel** oder **Brewsterwinkel**. Mit $\theta = 0°$ folgt aus $\theta_r + \theta + 90° + \theta_d = 180°$

$$\theta_e = \theta_r = \boxed{90° - \theta_d = \theta_p} \qquad \underline{\text{Brewsterwinkel}}$$

Setzt man dies in das Brechungsgesetz von SNELLIUS $\sin\theta_e / \sin\theta_d = n$ ein, so gelangt man zu dem **Gesetz von Brewster** (D.BREWSTER 1781 –1868):

$$\frac{\sin\theta_p}{\sin(90° - \theta_p)} = \frac{\sin\theta_p}{\cos\theta_p} = \boxed{\tan\theta_p = n}$$

Das Verhalten eines unpolarisierten Strahls an der Grenzfläche kann nun durch die Zusammenfassung beider Fälle erklärt werden.
Trifft unpolarisiertes Licht unter dem Winkel $\theta_e = \theta_p(n)$ auf die Grenzfläche eines Mediums, so wird nur die senkrecht zur Einfallsebene polarisierte Komponente $E_e^{\perp}$ reflektiert.

Durch Reflexion unter dem BREWSTERwinkel läßt sich also *vollständig* linear polarisiertes Licht erzeugen, wobei die Polarisationsrichtung senkrecht zur Einfallsebene ist. Zusätzlich ist der gebrochene Strahl *teilweise* polarisiert.

Nach dem BREWSTERschen Gesetz kann durch experimentelle Bestimmung des Brewsterwinkels der Brechungsindex eines Stoffes ermittelt werden.

Versuch 1: Polarisation durch Reflexion an einer Glasplatte

(a) Überprüfung des BREWSTERschen Gesetzes:
Die Glasplatte wird mit senkrecht zur Einfallsebene polarisiertem Licht bestrahlt, wobei der Einfallswinkel solange variiert wird, bis der reflektierte Strahl verschwindet. Der aus dem BREWSTERwinkel berechnete Wert des Brechungsindexes wird mit dem Literaturwert verglichen.

(b) Untersuchung der Polarisation von reflektiertem und gebrochenem Strahl:
Reflektierter und gebrochener Strahl werden bei Einbringen und Drehen eines Polfilters auf Intensitätsveränderungen hin beobachtet (Abb. 8.16).

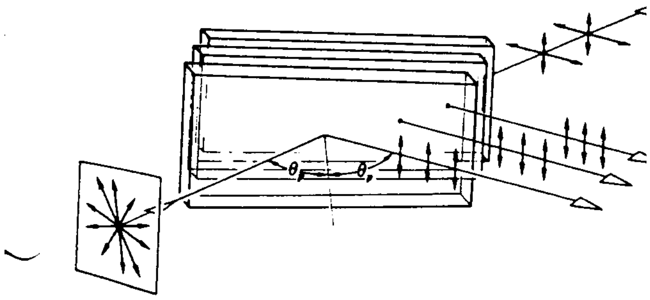


Abbildung 8.15: *Plattenstapelpolarisator*

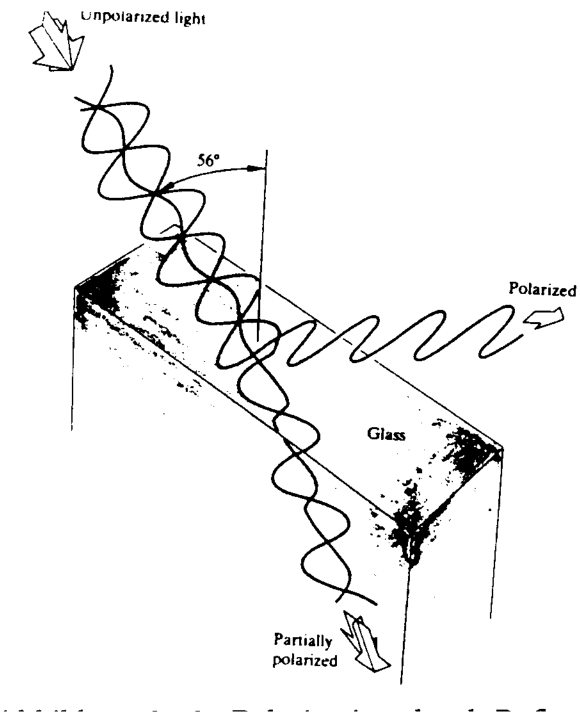


Abbildung 8.16: *Polarisation durch Reflexion an einer Glasplatte. (aus [13])*

Ein großer Nachteil des erläuterten Effektes ist die Tatsache, daß der vollständig polarisierte reflektierte Strahl nur sehr geringe Intensität besitzt. Der intensitätsstarke durchgehende Strahl ist nur unmerklich polarisiert.

Versuch 2: Der Plattenstapelpolarisator (D.F.J.Arago 1812)

Ersetzt man im vorangehenden Versuch die einzelne Glasplatte durch einen Glasplattenstapel (hier aus Diagläsern), so verstärkt sich der Polarisationseffekt. Man erzielt eine merkliche Polarisation auch des gebrochenen Strahls (Abb. 8.15).

Den allgemeinen Zusammenhang zwischen Absorption, Reflexion, Brechung und Polarisation für beliebige Einfallswinkel erhält man auf rechnerischem Wege aus den Maxwellschen Gleichungen. Das Ergebnis bilden die **Fresnelschen Formeln**.

Fresnelsche Formeln für dielektrische Medien

Reflektierter Strahl: Gebrochener Strahl:

$$\frac{E_r^\perp}{E_e^\perp} = -\frac{\sin(\theta_e - \theta_d)}{\sin(\theta_e + \theta_d)} \qquad \frac{E_d^\perp}{E_e^\perp} = \frac{2\sin\theta_d\,\cos\theta_e}{\sin(\theta_e + \theta_d)}$$

$$\frac{E_r^\parallel}{E_e^\parallel} = +\frac{\tan(\theta_e - \theta_d)}{\tan(\theta_e + \theta_d)} \qquad \frac{E_d^\parallel}{E_e^\parallel} = \frac{2\sin\theta_d\,\cos\theta_e}{\sin(\theta_e + \theta_d)\,\cos(\theta_e - \theta_d)}$$

Eine graphische Auswertung der Formeln für drei verschiedene Medienübergänge zeigt die Abbildung.

Für die Übergänge

1. Luft $\rightarrow$ Kronglas
2. Kronglas $\rightarrow$ Luft
3. Luft $\rightarrow$ Stahl (Spiegel)

sind folgende Größen aufgetragen:

a) das Verhältnis $\frac{E_r}{E_e}$ für $E^\perp$ und $E^\parallel$ in Abhängigkeit vom Einfallswinkel

b) die Schwingungsform des reflektierten Strahles für Einfallswinkel unter 135°

c) die durch Reflexion entstehende Phasenverschiebung zwischen $E^\parallel$ und $E^\perp$

8.6 Doppelbrechung

Viele Kristalle sind elektrisch und damit auch optisch anisotrop. Die Elektronen der Kristallatome sind in verschiedenen Raumrichtungen unterschiedlich stark gebunden, so daß sie in den verschiedenen Raumrichtungen unterschiedliche Resonanzfrequenzen besitzen. Je stärker die Bindungskraft ist, desto höher ist die Schwingungsfrequenz eines Elektrons. Wie wir bei der Behandlung der Dispersion gesehen haben, wird der Brechungsindex eines Mediums bestimmt durch die Differenz zwischen der Frequenz der einfallenden Welle und der Eigenfrequenz der Elektronen. Die optische Anisotropie eines Kristalls beruht also darauf, daß der Brechungsindex von der Raumrichtung abhängt.
Die Elektronenbindung im anisotropen Kristall wird veranschaulicht durch das in Abb. 8.17 dargestellte mechanische Modell. In Abb. 8.18 ist der mögliche Verlauf der zugehörigen

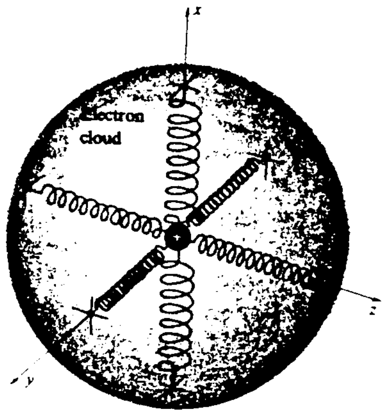


Abbildung 8.17: *Mechanisches Modell für die Elektronenbindung im anisotropen Kristall. (aus [13])*

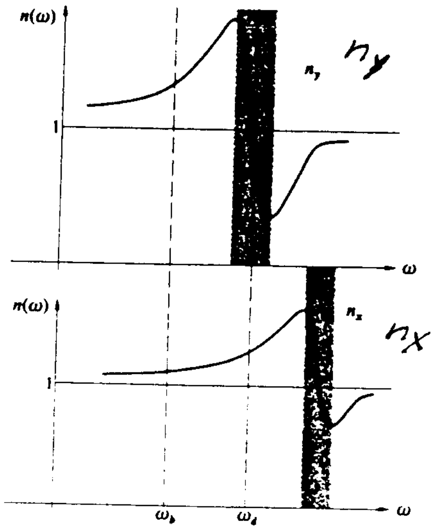


Abbildung 8.18: *Dispersionskurven eines doppelbrechenden Materials. (aus [13])*

Dispersionskurven eines in der x – und y – Richtung anisotropen Materials aufgetragen. Es gilt $n_x(\omega) \neq n_y(\omega)$. Ein solches Material, welches zwei verschiedene Brechungsindizes aufweist, heißt **doppelbrechend**.

Aus dem Kurvenverlauf erkennt man, daß die dichroitischen Kristalle eine spezielle Untergruppe der doppelbrechenden Kristalle darstellen. Ein so beschaffenes Material wird bei Lichteinfall mit einer Frequenz nahe ω_d die in y – Richtung polarisierte Feldkomponente stark absorbieren, während es für die in x – Richtung polarisierte Komponente nahezu durchlässig ist.

Wird der Kristall mit Licht bestrahlt, dessen Frequenz im Bereich von ω_b liegt, so sind die Brechungsindizes für die beiden Raumrichtungen merklich verschieden und die Absorption ist vernachlässigbar.
Der eindringende, gewöhnliche Lichtstrahl spaltet im Kristall in zwei linearpolarisierte

Strahlen mit senkrecht aufeinanderstehenden Schwingungsebenen auf, welche sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten in verschiedene Richtungen ausbreiten. Dieses optische Phänomen der **Doppelbrechung** wurde erstmals im Jahre 1669 von E.Bartholinus (1625 – 1692) am isländischen Kalkspat entdeckt. Da diese Kristallart auch heute am häufigsten für Polarisationsversuche verwendet wird, werden wir die Erscheinung der Doppelbrechung am Kalkspat ($CaCO_3$) erläutern.

Aus natürlichen Kalkspatkristallen lassen sich leicht Einkristalle abtrennen, die die Form eines Rhomboeders (siehe Abb. 8.19) haben, das von sechs Rhomboederflächen gleicher Seitenlänge begrenzt wird. Die optische Achse eines solchen Kalkspatrhomboeders fällt mit der kristallographischen Hauptachse der dreizähligen Symmetrie zusammen. Die optische Achse ist hier nicht eine einzelne Linie, sondern definiert vielmehr eine Vorzugsrichtung im Kristall.
Fällt ein Lichtstrahl auf den Kristall, so wird durch die Einfallsrichtung und die optische Achse eine Ebene aufgespannt, welche man als **Hauptschnitt** bezeichnet. Wie die optische Achse ist auch der Hauptschnitt beliebig parallel verschiebbar.

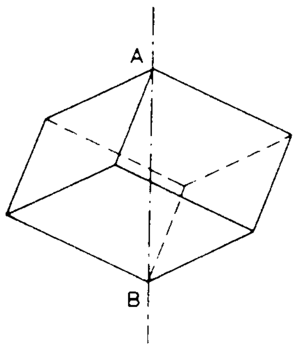


Abbildung 8.19: *Rhomboeder (aus [4])*

<u>*Versuch:*</u> Ein farbiger Punkt auf der Klarsichtfolie eines Overheadprojektors wird mit einem großen Kalkspat abgedeckt. Es erscheint ein zweiter Punkt, welcher bei Drehung des Kalkspates um den ersten wandert. Dreht man einen Polarisiationsfilter über dem Kalkspat, so verschwindet bei zwei um 90° gegeneinander gedrehten Polarisatorstellungen je ein Punkt. Schaut man entlang der optischen Achse auf den Punkt, so ist kein zweiter Punkt zu sehen.

Wir wollen die experimentellen Beobachtungen unter Berücksichtigung der Kristallstruktur genauer formulieren:
Dringt der vom Punkt ausgehende Lichtstrahl schräg zur optischen Achse in den Kalkspat ein, so spaltet er in einen **ordentlichen Strahl (o–Strahl)** und einen **außerordentlichen Strahl (e–Strahl)** auf. Ordentlicher und außerordentlicher Strahl sind senkrecht

zueinander linear polarisiert. Dabei schwingt der $\vec{E}$ – Vektor des o–Strahls orthogonal zum Hauptschnitt, der $\vec{E}$ – Vektor des e–Strahls im Hauptschnitt. Das Phänomen ist rotationssymmetrisch bei Drehung um die Einfallsrichtung. Der o–Strahl gehorcht dem Snelliuschen Brechungsgesetz, der e–Strahl dagegen nicht. Stimmt die Einfallsrichtung des Lichtstrahls mit der optischen Achse überein, so erfolgt keine Auftrennung. Wie lassen

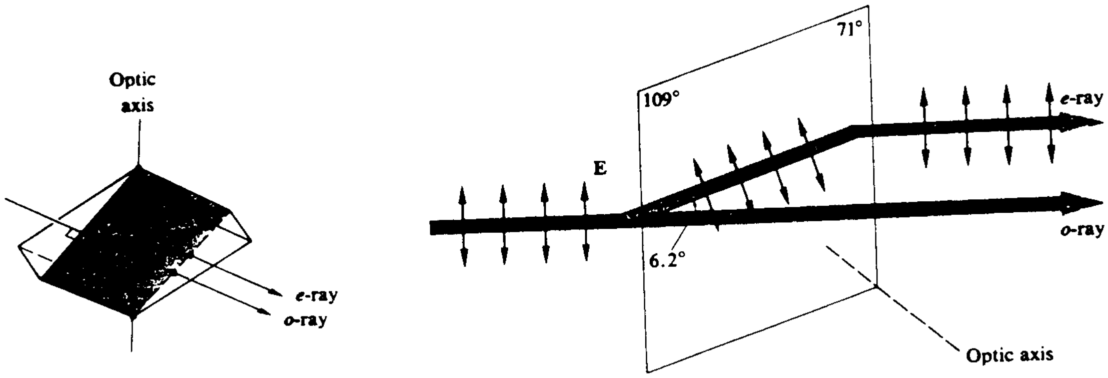


Abbildung 8.20: *Aufspaltung eines Lichtstrahls mit zwei orthogonalen Feldkomponeneten beim Durchqueren eines doppelbrechenden Materials. (aus [13])*

sich die Beobachtungen erklären?

Ausbreitungsgeschwindigkeit und –richtung einer Lichtwelle im Kristall sind aufgrund der Richtungsabhängigkeit des Brechungsindexes je nach Polarisiation unterschiedlich. Für eine Welle, deren $\vec{E}$ – Vektor senkrecht zur optischen Achse oszilliert, besitzt das Medium den Hauptbrechungsindex $n_\perp$, sie pflanzt sich mit der Geschwindigkeit $c_\perp$ fort. Ist der $\vec{E}$ – Vektor parallel zur optischen Achse gerichtet, so ist der Hauptbrechungsindex $n_{||}$, die Ausbreitung erfolgt mit der Geschwindigkeit $c_{||}$.

Wir fassen wieder eine natürliche Lichtwelle als Überlagerung zweier linear polarisierter, orthogonaler Teilwellen auf. Damit können wir einen schräg zur optischen Achse einfallenden natürlichen Lichtstrahl bezüglich des Hauptschnittes in einen o– und einen e–Strahl zerlegen. Das Verhalten der beiden Teilstrahlen läßt sich nun folgendermaßen erläutern: Im **ordentlichen Strahl** ist der $\vec{E}$ – Vektor stets senkrecht zur optischen Achse gerichtet. Nur der Brechungsindex $n_\perp$ ist maßgebend, die Ausbreitung erfolgt normal mit der Geschwindigkeit $c_\perp$ (siehe Abb. 8.21).

Im **außerordentlichen Strahl** schließt der $\vec{E}$ – Vektor bei schrägem Lichteinfall einen Winkel ungleich 90° mit der optischen Achse ein. Er kann in eine dazu parallele und eine senkrechte Komponente zerlegt werden.

$$\vec{E} = \underbrace{\vec{E}_\perp}_{n_\perp,\, c_\perp} + \underbrace{\vec{E}_{||}}_{n_{||},\, c_{||}}$$

Für die beiden Komponenten sind jeweils verschiedene Brechungsindizes, $n_\perp$ und $n_{||}$, wirksam, so daß die Wellenfortpflanzung in den zugehörigen Richtungen mit unterschiedlichen

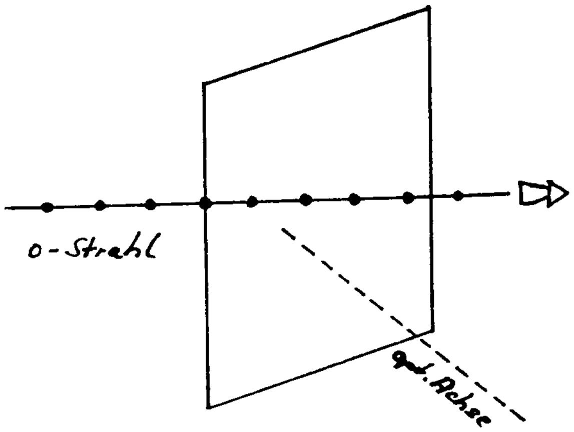


Abbildung 8.21: *Einfallende Welle senkrecht zum Hauptschnitt polarisiert. (aus [7])*

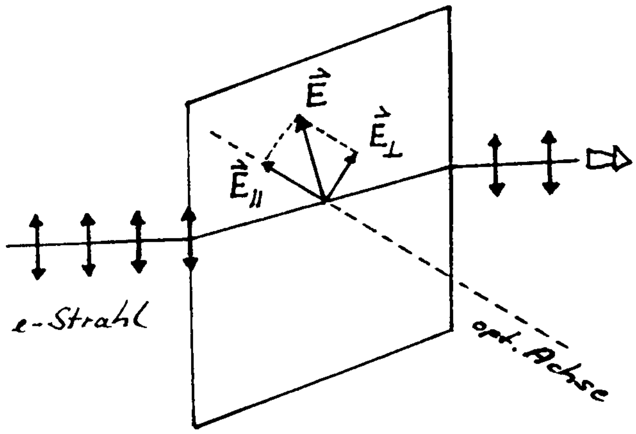


Abbildung 8.22: *Einfallende Welle parallel zum Hauptschnitt polarisiert.(aus [7])*

Geschwindigkeiten erfolgt. Der Strahl erfährt daher beim Durchqueren des doppelbrechenden Mediums eine seitliche Ablenkung (Abb. 8.22).

Man unterscheidet zwei Arten doppelbrechender Substanzen:

Art	Optisch negative Substanz	Optisch positive Substanz
Brechungsindex	$n_\parallel < n_\perp$	$n_\parallel > n_\perp$
Lichtgeschwindigkeit	$c_\parallel > c_\perp$	$c_\parallel < c_\perp$
Beispiele	Kalkspat Turmalin	Quarz Rutil

Wir wollen die Ausbreitung der o– und der e–Welle noch auf vereinfachte Weise nach dem Huygensschen Prinzip diskutieren. Die zugehörigen Wellenfronten bilden Ausgangspunkte von Elementarwellen, welche sich unterschiedlich im doppelbrechenden Medium fortpflanzen. Ihre Wellenflächen formen rotationssymmetrische Figuren mit der optischen Achse als Symmetrieachse. Die Wellenflächen der sich isotrop ausbreitenden o–Elementarwellen sind Kugelflächen, die Wellenflächen der e–Elementarwellen formen aufgrund der anisotropen Ausbreitung Rotationsellipsoide. Die ebene Darstellung der Elementarwellen ist rotationssymmetrisch zu ergänzen!

Die Huygensschen Wellenfronten lassen sich nun konstruieren als Einhüllende der Elementarwellen. Die Fronten der o– und der e– Welle verlaufen parallel. Die Einhüllende der e– Elementarwellen ist jedoch gegenüber der o– Wellenfront seitlich verschoben, so daß o– und e– Strahl räumlich gtrennt werden.

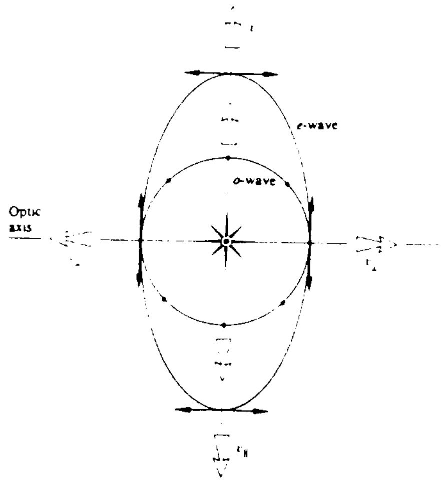


Abbildung 8.23: *Optisch negative Substanz. (aus [13])*

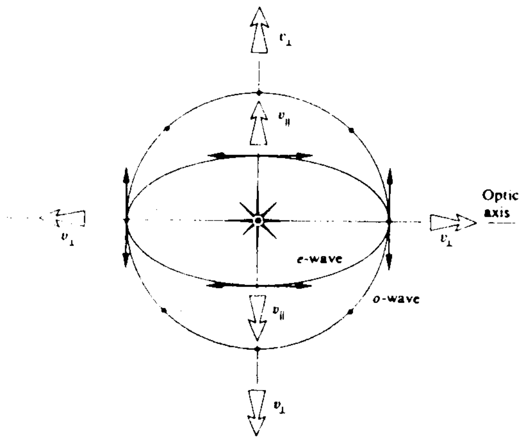


Abbildung 8.24: *Optisch positive Substanz. (aus [13])*

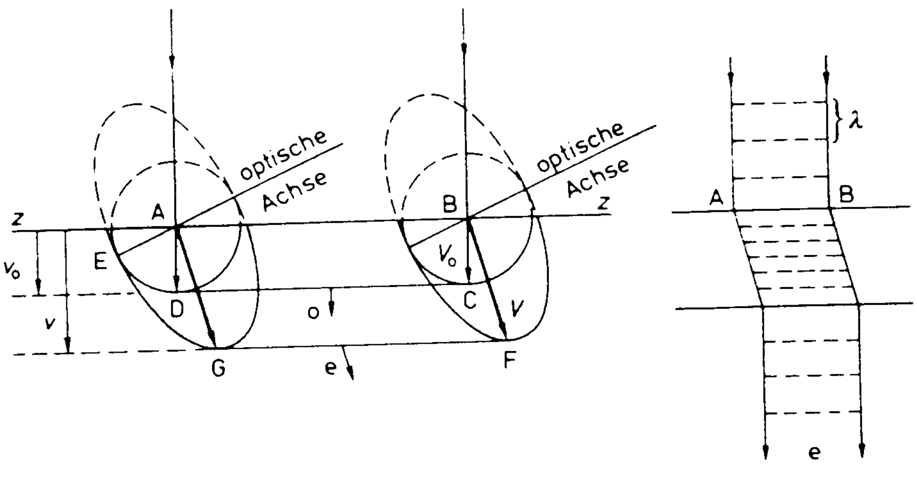


Abbildung 8.25: *Konstruktion der o– und e– Wellenfronten nach Huygens. (aus [4])*

8.7 Anwendungen der Doppelbrechung

8.7.1 Das Nicolsche Prisma

Die Doppelbrechung am Kalkspat wird zur Herstellung von linearen Polarisatoren ausgenutzt. Der berühmteste Vorgänger heutiger Polarisatoren dieser Art ist das **Nicolsche Prisma**, das bereits 1828 von dem schottischen Physiker W.NICOL vorgestellt wurde.

Ein an den Enden geeignet geschliffenes, längliches $CaCO_3$ – Kristallstück wird diagonal in zwei Prismen zerschnitten und anschließend mit einer dünnen Schicht Kanadabalsam wieder zusammengekittet (Abb. 8.26).

Der Wert des Brechungsindexes von Kanadabalsam liegt zwischen $n_\perp$ und $n_\|$ des Kalkspates, d.h. bezüglich des o–Strahls stellt die Kittschicht das optisch dünnere Medium dar. Bei geeigneter Einstellung der Winkel läßt sich daher der o–Strahl aus dem Strahlengang eliminieren: Er wird an der Kittschicht totalreflektiert und anschließend an den geschwärzten Seitenflächen des Kalkspatstückes absorbiert. Aus dem NICOLschen Prisma tritt nur der vollständig linear polarisierte e–Strahl aus. Das NICOLsche Prisma wird heu-

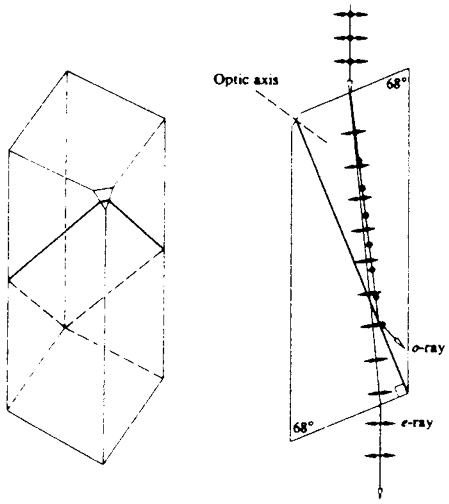


Abbildung 8.26: *Nicolsches Prisma (aus [13])*

te in der Praxis ersetzt durch das ähnlich aufgebaute **Glan – Foucault – Prisma**. Dieses ermöglicht durch spezielle Kristallorientierung senkrechten Lichteinfall und –austritt.

8.7.2 Retardierungsplatten ($\lambda/4$ – Plättchen)

Eine Quarzplatte der geringen Dicke d sei so geschnitten, daß die optische Achse parallel zu der vorderen und der rückwärtigen Fläche verlaufe. Senkrecht auf die Platte falle eine monochromatische, ebene Welle. Dann besitzt der elektrische Feldvektor dieser Welle eine zur optischen Achse parallele, sowie eine dazu senkrechte Komponente. Es erfolgt eine Aufspaltung in o–Welle mit $\vec{E}_\perp$ und e–Welle mit $\vec{E}_\|$, die mit den Geschwindigkeiten $c_\perp = c/n_\perp$ und $c_\| = c/n_\|$ fortschreiten. Die Strahlen erfahren keine räumliche Trennung, sondern die unterschiedlichen Geschwindigkeiten führen zu einem Laufzeitunterschied

$$\Delta t = \frac{d}{c_\perp} - \frac{d}{c_\|} = \frac{d}{c}\left(n_\perp - n_\|\right) \quad .$$

Dieser ruft eine Phasenverschiebung hervor.

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T} = \Delta t\,\nu = d\,\frac{\nu}{c}\left(n_\perp - n_\|\right) = \frac{d}{\lambda_0}\left(n_\perp - n_\|\right)$$

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\,d\left(n_\perp - n_\|\right)} \quad \begin{array}{l}\text{Phasenverschiebung}\\ \text{(senkrecht zur opt. Achse)}\end{array}$$

λ_0 : Wellenlänge im Vakuum

Durch Variation der Plattendicke d lassen sich also beliebige Phasendifferenzen zwischen der o– und der e–Komponente der Welle einstellen. Im allgemeinen setzen sich daher die beiden Teilwellen beim Austritt aus der Platte zu elliptisch polarisiertem Licht zusammen.

Von besonderer Bedeutung sind die Plättchen, die eine relative Phasenverschiebung $\Delta\varphi = \pm\,\pi/2\,(+m\,2\pi)$ zwischen den beiden Strahlen erzeugen. Die Dicke dieser Plättchen muß der Beziehung

$$(4m \pm 1)\,\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\,d\left|n_\perp - n_\|\right|$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boxed{d = \frac{\lambda}{4}\,\frac{4m \pm 1}{\left|n_\perp - n_\|\right|}}$$

genügen.
Mit diesen sogenannnten $\lambda/4$ – **Plättchen** kann man <u>zirkular polarisiertes Licht erzeugen</u>.
Verwendet man ein Quarzplättchen, so folgt wegen $n_\| > n_\perp$

$$\begin{array}{l}\varphi = +\pi/2 \text{ für } 4m+1 \Rightarrow \text{linkszirkulares Licht}\\ \varphi = -\pi/2 \text{ für } 4m-1 \Rightarrow \text{rechtszirkulares Licht}\end{array}$$

Läßt man linear polarisiertes Licht, dessen Polarisationsrichtung um 45° gegen die optische Achse geneigt ist, auf ein $\lambda/4$ – Plättchen fallen, so wird $\vec{E}_\perp$ gegen $\vec{E}_\|$ um $\pi/2 \equiv 90°$ phasenverschoben. Zusätzlich besitzen die beiden Komponenten dann gleiche Amplitude. Bei Drehen des Analysators ist keine Auslöschung beobachtbar, es treten nur Farbeffekte auf. Das Retardierungsplättchen bewirkt also eine Umwandlung von linear polarisiertem in zirkular polarisiertes Licht. Zirkular polarisiertes Licht kann aber mit Hilfe von $\lambda/4$ – Plättchen nicht nur erzeugt, sondern auch nachgewiesen werden (siehe Abb. 8.28). Ergänzt man die oben dargelegte Versuchsanordnung so, daß das entstehende zirkulare Licht auf ein weiteres Retardierungsplättchen fällt, dann tritt wieder linear polarisiertes Licht aus. Mit dem linearen Analysator weist man außerdem nach, daß die Polarisationsrichtung des wiederhergestellten gegenüber der des ursprünglichen linearen Lichtes um 90° gedreht ist.

<u>Versuch:</u> <u>“Surfer”</u>

Auf ein Diaglas werden mehrere Tesafilmlagen treppenförmig übereinandergeklebt. Legt man den Tesafilmstreifen zwischen zwei Polfilter und verdreht diese gegeneinander, so erscheinen farbige Effekte. Diese kommen

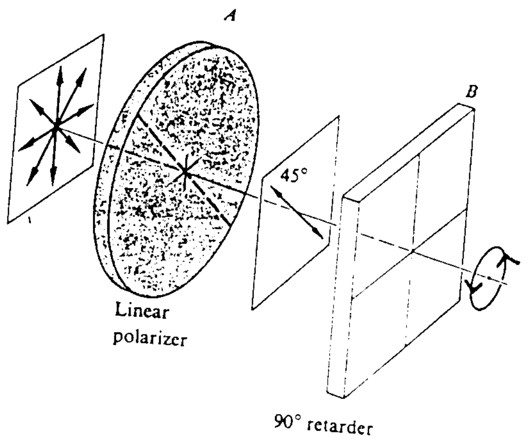


Abbildung 8.27: *Erzeugung von zirkular polarisiertem Licht. (aus [13])*

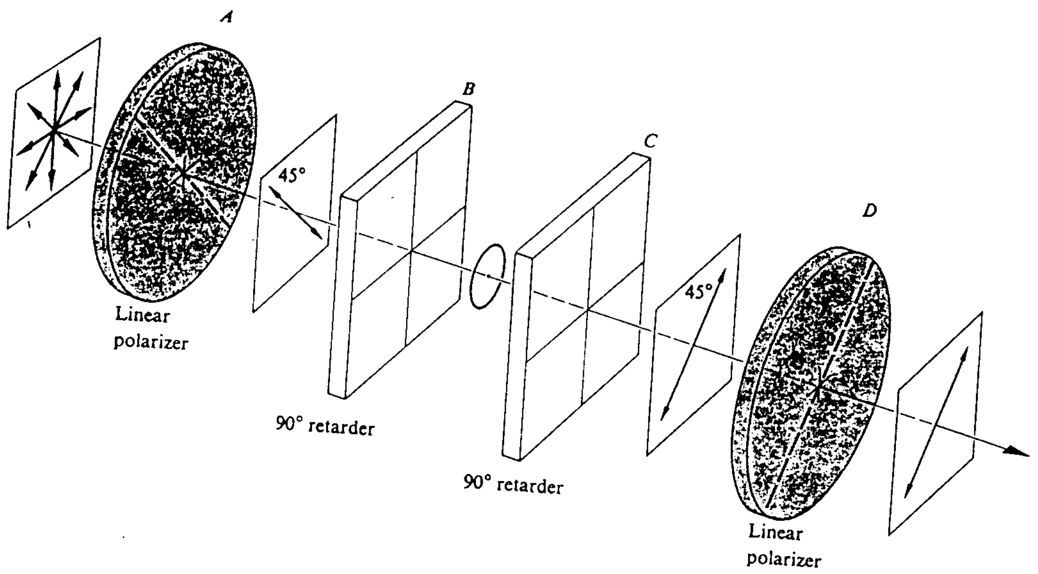


Abbildung 8.28: *Nachweis von zirkular polarisiertem Licht. (aus [13])*

dadurch zustande, daß die unterschiedlichen Dicken der Tesafilmschichten verschiedene Phasenverschiebungen zwischen o – und e – Strahl des austretenden Lichtes hervorrufen.

Wir haben unsere Betrachtungen auf Kristalle beschränkt, die nur eine optische Achse besitzen. Die Mehrzahl der Kristalle hat jedoch eine geringere Symmetrie und besitzt daher zwei optische Achsen. Die optischen Vorgänge stimmen prinzipiell mit den vorangehend erläuterten überein, sie sind aber entsprechend komplizierter.

8.7.3 Spannungsdoppelbrechung

Ein isotroper, fester Körper, z.B. Glas oder Kunststoff, wird doppelbrechend, wenn durch mechanische Beanspruchung die Gleichwertigkeit der verschiedenen Raumrichtungen aufgehoben wird. So erzeugt z.B. eine uniaxiale Krafteinwirkung im Material optische Vorzugsrichtungen ähnlich derer in einachsigen Kristallen. Man nennt diese Erscheinung **Spannungsdoppelbrechung**.

Eine wichtige technische Anwendung ist die Sichtbarmachung mechanischer Spannung in Modellen von Maschinen und Werkstücken.

Versuch: Plexiglas – Modelle von verschiedenen Werkstücken (Haken, Winkel, etc.) werden nacheinander zwischen zwei lineare Polarisatoren unterschiedlichen Drehsinns gebracht und durch Kraftwirkung unter Spannung gesetzt. Es kommt zu Farbeffekten, Linien gleicher Spannung werden durch gleiche Farben erkennbar (Abb. 8.29). Ohne Krafteinwirkung herrscht am Analysator Dunkelheit.

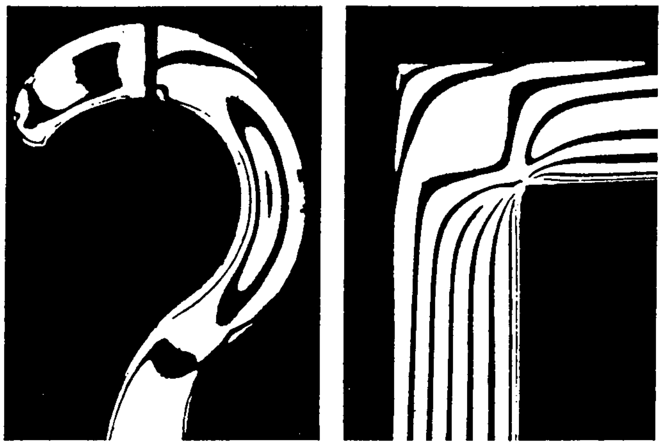
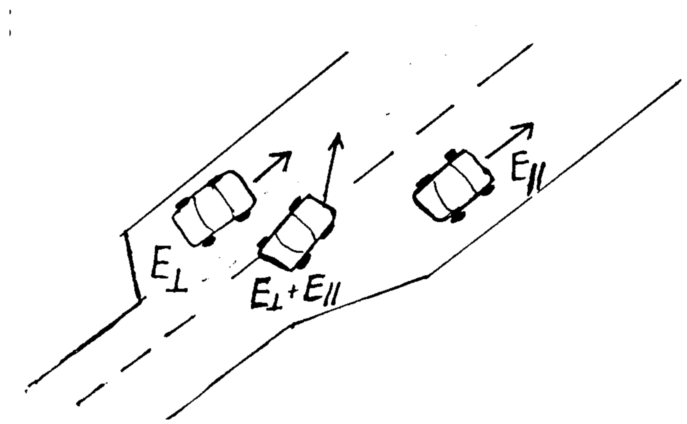


Abbildung 8.29: *Spannungsdoppelbrechung bei Werkstückmodellen aus Plexiglas. (aus [1])*

Wie lassen sich die Versuchsergebnisse deuten?
Die Plexiglasteile werden unter Spannung doppelbrechend. Dabei ist der Phasenunterschied $\Delta\varphi$ zwischen ordentlichem und außerordentlichem Strahl abhängig von der Plexiglasdicke d, der Differenz $(n_\perp - n_\|)$ sowie von der Wellenlänge λ des Lichtes. Je nach Dicke und Spannungszustand treten daher an den verschiedenen Stellen der Plexiglasteile farbige Effekte auf.

8.8 Anschauliches Bild zum Verständnis der Doppelbrechung



Man stelle sich die in die doppelbrechende Substanz eindringenden Wellen als Fahrzeuge vor, die je nach Polarisationsrichtung bezüglich der optischen Achse mit $E_\perp$ und $E_{||}$ gekennzeichnet sind. Die Wagen gelangen an eine Verzweigung, an der sich die Straße in zwei aneinandergrenzende Fahrbahnen mit unterschiedlichem Straßenbelag aufspalte. Der Lichtausbreitung im Kristall entspricht nun weiter die Vorstellung, daß $E_\perp$ – Fahrzeuge ausschließlich die langsame, $E_{||}$ – Fahrzeuge die schnelle Spur benutzen dürfen. Wagen, die zugleich beide Kennzeichen besitzen, fahren auf dem Mittelstreifen.

In diesem Bild lassen sich nun folgende Fälle erklären:

(a) Der Wellenvektor $\vec{k}$ der einfallenden Welle ist parallel zur optischen Achse gerichtet, so daß $\vec{E}$ nur $E_\perp$ – Komponenten besitzt. Dem o – und e – Strahl entsprechen also $E_\perp$ – Fahrzeuge, die sich mit derselben Geschwindigkeit auf der schnellen Spur bewegen.

(b) $\lambda/4$ – Plättchen: Hier steht $\vec{k}$ senkrecht, $\vec{E}$ unter einem 45° – Winkel zur optischen Achse. $\vec{E}$ setzt sich also aus einer $E_\perp$ – sowie einer $E_{||}$ – Komponente zusammen, deren Beträge gleich groß sind. Es tritt eine Phasenverschiebung, jedoch keine Aufspaltung der Strahlen auf.
Dies entspricht dem Bild zweier verschieden gekennzeichneter Wagen, die gleichzeitig auf die parallelen Fahrbahnen auffahren. Das $E_\perp$ – Fahrzeug wird durch den schlechten Belag der langsamen Spur gegenüber dem anderen Fahrzeug verzögert.

(c) Dringt die Welle schräg zur optischen Achse in den Kristall ein, dann hat der e – Strahl sowohl eine parallele, als auch eine senkrechte Feldkomponente. Er wird also veranschaulicht durch einen auf dem Mittelstreifen fahrenden Wagen. Dabei sind die Räder auf der schlechten Spur einer höheren Rollreibung ausgesetzt, was zu einem seitlichen Ausbrechen des Wagens führt.

8.9 Weitere Effekte zur Doppelbrechung

8.9.1 Optische Aktivität

Es gibt Substanzen, die die Schwingungsebene von linear polarisiertem Licht, welches durch sie hindurchtritt, drehen. Diese physikalische Erscheinung wird als **optische Aktivität** bezeichnet. Ihre Bedeutung erstreckt sich jedoch nicht nur auf die Physik, sondern auch auf andere naturwissenschaftliche Gebiete, wie z.B. Chemie und Biologie, da sie Rückschlüsse auf die molekulare Struktur der betreffenden Substanzen zuläßt.

Beobachtet wurde das Phänomen der optischen Aktivität erstmals im Jahre 1811 von dem französischen Physiker J.F.Arago. Er entdeckte die Drehung des elektrischen Feldvektors von linear polarisiertem Licht, das eine Quarzplatte entlang der optischen Achse durchstrahlte (Abb. 8.30).
Spätere Versuche mit geschmolzenem oder flüssigem Quarz ergaben keine optische Akti-

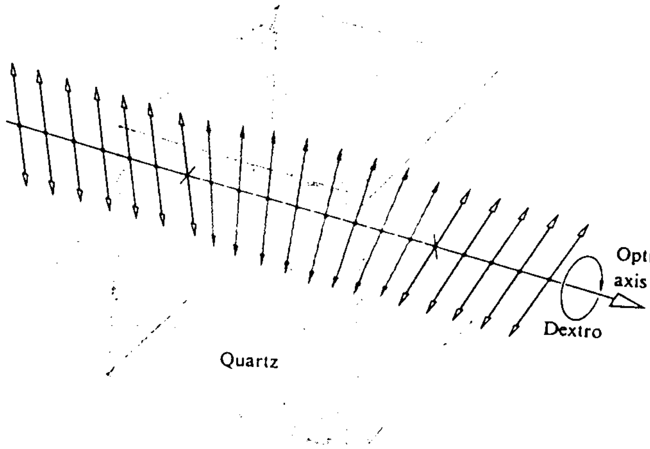


Abbildung 8.30: *Optische Aktivität eines Quarzkristalls. (aus [13])*

vität, was einen Zusammenhang mit der *Anordnung der Moleküle in der Kristallstruktur* vermuten ließ. Wie Quarz, zeigen auch viele andere Substanzen, organische wie anorganische, optische Aktivität nur im kristallinen Zustand.
J.B.Biot (1774 – 1862) wies nach, daß viele natürlich vorkommende organische Stoffe in flüssigem oder gasförmigem Zustand oder in Lösung optisch aktiv sind. Bei diesen Substanzen ist die *optische Aktivität* eine *Eigenschaft der einzelnen Moleküle.*
Zusätzlich stieß man auf die Existenz komplizierterer Substanzen, deren *optische Aktivität sowohl von den einzelnen Molekülen selbst, als auch von deren Anordnung im Kristall* herrührt.

Versuch: Optische Aktivität einer Zuckerlösung

Eine mit Wasser gefüllte Wanne wird mit monochromatischem, linear polarisiertem Licht durchstrahlt. Der hinter der Wanne befindliche Analysator zeigt Helligkeit, falls die Schwingungsebenen von Polarisator und

Analysator parallel zueinander eingestellt sind. Kreuzt man die beiden Polarisatoren, so findet Auslöschung statt. Rührt man nun Dextropur in das Wasser ein, so hellt sich das Gesichtsfeld des Analysators auf, da die optisch aktive Zuckerlösung die Polarisationsrichtung des Lichtes dreht. Der Analysator wird nachgeregelt, bis erneut Auslöschung auftritt. Mit zunehmender Zuckerkonzentration erhöht sich der Winkel α, um den die Schwingungsebene des Lichtes gedreht wird.

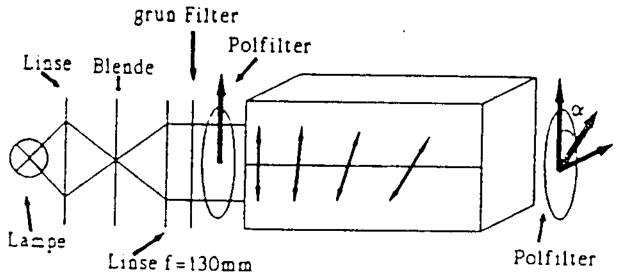


Abbildung 8.31: *Drehung der Schwingungsebene von Licht durch eine optisch aktive Zuckerlösung. (aus [9])*

Weitere Untersuchungen führten zu folgender Unterscheidung optisch aktiver Stoffe:

Erfolgt, bei Blickrichtung hin zur Lichtquelle, die Drehung der Schwingungsebene im Uhrzeigersinn, so spricht man von **rechtsdrehenden** oder **d–drehenden Substanzen**. Rotiert der Feldvektor entgegen dem Uhrzeigersinn, so liegen **linksdrehende** oder **l–Substanzen** vor.

Der englisch Astronom Sir John F.W. Herschel (1792 – 1871) erkannte 1822, daß die l– und d–Formen des Quarz zwar die gleiche chemische Zusammensetzung (SiO_2) haben, aber spiegelverkehrte kristallographische Strukturen besitzen. Die Tatsache, daß Lösungen von Molekülen gleicher chemischer Zusammensetzung sowohl rechts–, als auch linksdrehend sein können, läßt analog auf die Existenz spiegelverkehrter Moleküle schließen. Solche Moleküle heißen **Stereoisomere**.

Allgemein läßt sich festhalten:

Optisch aktive Substanzen haben einen schraubenförmigen Aufbau und kommen in zwei isomeren Formen vor:

– Die linkshändige oder l–Form ist linksdrehend.

– Die rechtshändige oder d–Form ist rechtsdrehend.

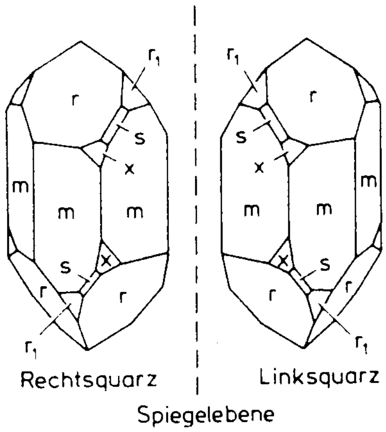


Abbildung 8.32: *Kristallform eines rechts– und eines links–drehenden Quarzes. (aus [4])*

Anhand von diesen Erkenntnissen lieferte FRESNEL schon 1825 eine

Erklärung für das Drehverhalten optisch aktiver Substanzen:

Er betrachtete dabei eine linear polarisierte Lichtwelle als Überlagerung zweier zirkular polarisierter Wellen mit entgegengesetztem Drehsinn, welche die gleiche Frequenz, aber nur eine halbsogroße Amplitude wie die Resultierende besitzen. FRESNEL nahm nun für die beiden Arten zirkularpolarisierten Lichtes unterschiedliche Fortpflanzungsgeschwindigkeiten im optisch aktiven Medium an. Als Konsequenz bildet sich zwischen der rechtszirkularen (R–) Welle und der linkszirkularen (L–) Welle eine Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ aus, welche proportional zu der im Medium zurückgelegten Strecke d ansteigt. Die Zusammensetzung der Teilwellen nach Verlassen des Mediums ergibt eine linearpolarisierte Welle mit einer um $\alpha = \Delta\varphi/2$ gedrehten Schwingungsebene. FRESNEL führt die optische Aktivität zurück auf eine **zirkulare Doppelbrechung**. Die l– und d–Formen der optisch aktiven Substanzen besitzen für L– und R–Licht unterschiedliche Brechungsindizes n_L und n_R . Es gilt

$$\Delta\varphi = \varphi_L - \varphi_R = 2\pi \frac{d}{\lambda_0} (n_L - n_R)$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\Delta\varphi}{2}} \quad \text{Drehwinkel der Polarisationsrichtung}$$

Danach ist bei den d–drehenden Substanzen $n_R < n_L$, bei den l–Formen gilt $n_R > n_L$.
Im Laufe der Zeit wurden im Zusammenhang mit der optischen Aktivität weitere interessante Phänomene entdeckt:

LOUIS PASTEUR (1822 – 1895) zeigte 1848 am Beispiel der Weinsäure, daß eine **racemische Mischung**, die sich zu gleichen Teilen aus l– und d–Molekülen zusammensetzt, kein Drehverhalten aufweist.

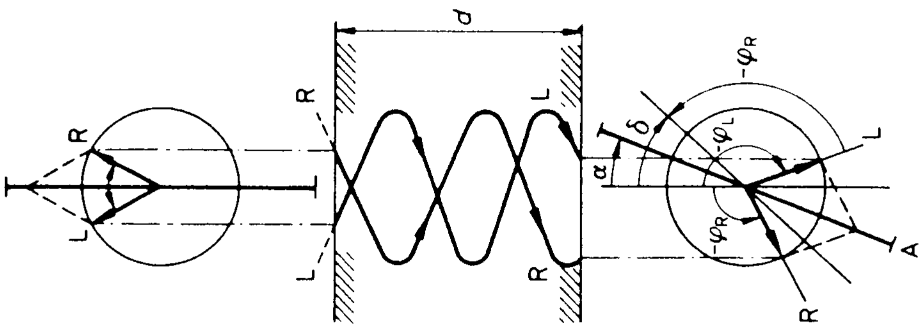


Abbildung 8.33: *Drehung der Schwingungsebene als Folge zirkularer Doppelbrechung. Die rechtszirkulare Welle hat die höhere Geschwindigkeit, da $n_R > n_L$ gilt. (aus [4])*

Von großen Interesse für die Biologie ist der Vergleich natürlich vorkommender optisch aktiver Stoffe mit den entsprechenden im Labor synthetisierten Substanzen. Während bei der *Synthese im Labor* stets optisch inaktive, *racemische Mischungen* entstehen, sind die *biologisch erzeugten Substanzen optisch aktiv* und kommen in der Natur ausschließlich in einer der stereoisomeren Formen vor: Natürlicher Zucker ist stets d–drehend ("Dextrose"). Natürliche Weinsäure ist immer l–drehend. Biologische Aminosäuren kommen mit Ausnahme der Gruppe der Antibiotika nur in der l–Form vor. Die Ribonukleinsäure (RNS) ist nur rechtshändig.

Dieses Phänomen stellt eine **Brechung der Spiegelsymmetrie** dar, über deren Ursachen vielfältige Spekulationen angestellt werden. Häufig wird eine Parallele zur schwachen Wechselwirkung gezogen, bei der ein analoges Phänomen zu beobachten ist:
Obwohl sowohl links–, als auch rechtshändige Elektronen (Drehimpuls $\pm h$) existieren, treten in der schwachen Wechselwirkung nur linkshändige Elektronen auf. Hierin liegt eine mögliche Erklärung für die natürliche Symmentriebrechung, welche aber auch auf zufällige Fluktuation zurückgeführt werden könnte.

8.9.2 Magneto – optische Effekte

M. Faraday entdeckte 1845, daß das Verhalten von Licht beim Durchgang durch ein materielles Medium durch Anlegen eines starken *longitudinalen* Magnetfeldes beeinflußt wird. Dieser nach ihm benannte **Faraday – Effekt** lieferte einen ersten Hinweis auf die elektromagnetische Natur des Lichtes.

Versuch: Ein Bleisilikatglas wird von einem Laserstrahl durchsetzt. Ein hinter dem Glas befindlicher Polarisationsfilter wird so eingestellt, daß er das linear polarisierte Licht des Lasers auslöscht. Bringt man nun das Glas in das starke longitudinale Magnetfeld einer Spule, wobei die Lichtfortpflanzung längs der Feldrichung erfolgt, so ist am Polarisator Helligkeit zu beobachten. Die Polarisationsrichtung des Laserlichtes wird gedreht.

Die magnetische Einwirkung ruft im isotropen Medium eine **künstliche zirkulare Doppelbrechung** hervor. Man spricht von **induzierter optische Aktivität**. Der Winkel, um den die Schwingungsebene des Lichtes gedreht wird, ist der durchstrahlten Materialdicke d sowie der magnetischen Flußdichte B proportional.

$$\alpha = \mathcal{V}\, B\, d \qquad \mathcal{V}\text{: Verdet – Konstante}$$

Durch mehrfache Umkehr des Lichtweges im Material läßt sich der Faraday – Effekt verstärken, d.h. die Größe der Drehung vervielfachen. Dies ist bei der natürlichen zirkularen Doppelbrechung nicht der Fall und stellt somit einen wichtigen Unterschied zwischen induzierter und natürlicher optischer Aktivität dar.

Einen besonders starken Faraday – Effekt zeigen durchsichtige (extrem dünne) Eisen– , Nickel– , und Kobaldschichten, die man durch Kathodenzerstäubung auf Glas herstellen kann.

Eine vollständige theoretische Erklärung ist nur im Rahmen der Quantenmechanik möglich. Uns genügt an dieser Stelle eine vereinfachte klassische Darstellung, die nur für nichtmagnetische Stoffe Gültigkeit besitzt:
Wir gehen von zirkularem Licht aus. Die Elektronen des durchstrahlten Materials werden aufgrund des rotierenden $\vec{E}$ – Feldes zu Kreisbewegungen gezwungen. Die Flußdichte des äußeren Magnetfeldes, welche orthogonal zur Bahnebene der Elektronen gerichtet ist, bewirkt, abhängig von der $\vec{B}$ – Feld – Orientierung sowie dem Drehsinn des Lichtes, eine nach innen oder außen gerichtete radiale Kraft auf das Elektron, welche sich der elastischen Bindungskraft überlagert. Die resultierende Radialkraft nimmt also zwei verschiedene Werte an. Dementsprechend sind zwei Werte für das elektrische Dipolmoment möglich, so daß das Medium für verschieden zirkulares Licht unterschiedliche Brechungsindizes n_R und n_L besitzt. Nach den Erkenntnissen von FRESNEL (siehe S.) wird dann optische Aktivität induziert.

Eine wichtige Anwendung findet der Faraday – Effekt bei der Informationsübertragung durch Laserlicht in der modernen Kommunikationstechnik. Die Abbildung 8.34 zeigt den Aufbau eines **Faraday – Effekt – Modulators**. Das weiterzuleitende Signal wird in Form einer modulierten Spannung über die Spule auf den Laserstrahl übertragen, wo es als Polarisationsmodulation gespeichert wird. Nach Austritt des Laserstrahls aus dem induziert optisch aktiven Medium erfolgt dann mit Hilfe eines Analysators die Umwandlung dieser Polarisations– in eine Amplitudenmodulation, die der Laserstrahl weiterträgt.

<u>Versuch:</u> Gezeigt wird die Informationsübertragung mit Hilfe des Faraday – Effektes. Die Informationen, hier Radiomusik, gelangen als Spannungspulse vom Lautsprecherausgang des Radios zum Faraday – Modulator. Dort werden sie wie oben beschrieben auf einen Laserstrahl übertragen, welcher sie zu einer Photozelle mit vorgeschaltetem Polarisationsfilter weiterleitet. Durch Übertragung der Signale auf die Photozelle wird ein Lautsprecher aktiviert, aus dem Radiomusik ertönt. Die Übertragung wird gestört, sobald man den Laserstrahl unterbricht.

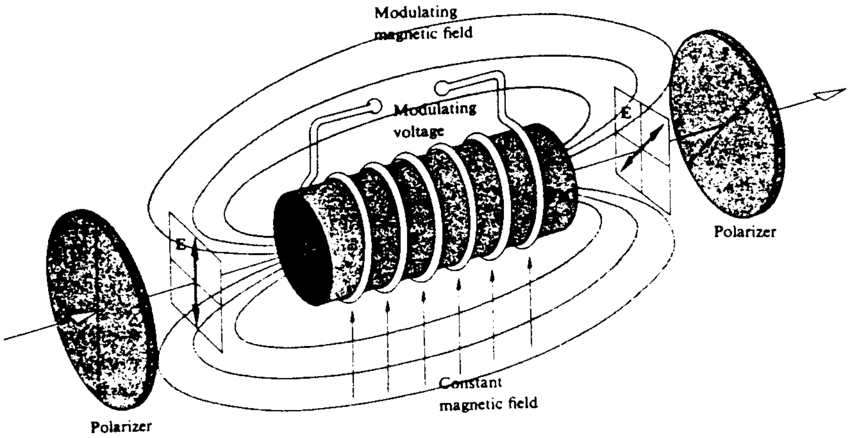
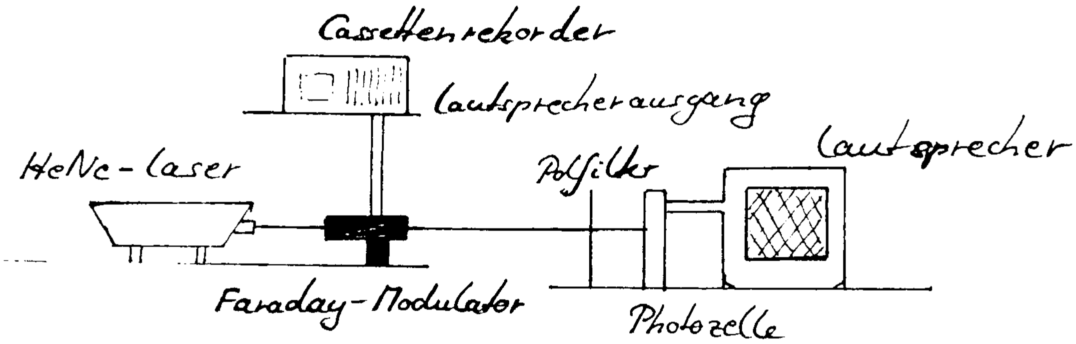


Abbildung 8.34: FARADAY–*Effekt–Modulator (aus [13])*



Weitere magneto – optische Effekte sind der in Gasen auftretende **Voigt**– sowie der in Flüssigkeiten zu beobachtende **Cotton – Mouton – Effekt**. Sie werden hervorgerufen durch die Einwirkung eines *transversalen* Magnetfeldes auf ein transparentes Medium. Die isotrope Substanz zeigt dann eine Doppelbrechung ähnlich der eines einachsigen Kristalls, wobei die optische Vorzugsrichtung parallel zur Magnetfeldrichtung verläuft. Die Doppelbrechung ist proportional zum Quadrat der magnetischen Flußdichte. Es gilt

$$|n_\perp - n_\parallel| \sim B^2$$

8.9.3 Elektro – optische Effekte

Der Kerr – Effekt

Isotrope, transparente Stoffe werden, insbesondere wenn sie aus polaren Molekülen aufgebaut sind, unter dem Einfluß eines elektrischen Feldes doppelbrechend.

Diese Entdeckung machte erstmals 1875 der schottische Physiker J.Kerr (1824 – 1907), nach dem der im folgenden Versuch gezeigte Effekt benannt ist.

Versuch: Eine Küvette, die zwei plattenförmige Elektroden im Format ihrer Längsseiten enthält, wird mit optisch isotropem Nitrobenzol gefüllt. Diese **"Kerrzelle"** wird zwischen zwei gekreuzte Polarisatoren gebracht (siehe Abb. 8.35), deren Durchlaßrichtungen einen Winkel von $\mp 45°$ mit der elektrischen Feldrichtung einschließen. Bei Lichteinstrahlung senkrecht zur Feldrichtung hellt sich das Gesichtsfeld des Analysators auf. Das Nitrobenzol wird unter dem Einfluß eines transversalen $\vec{E}$ – Feldes doppelbrechend.

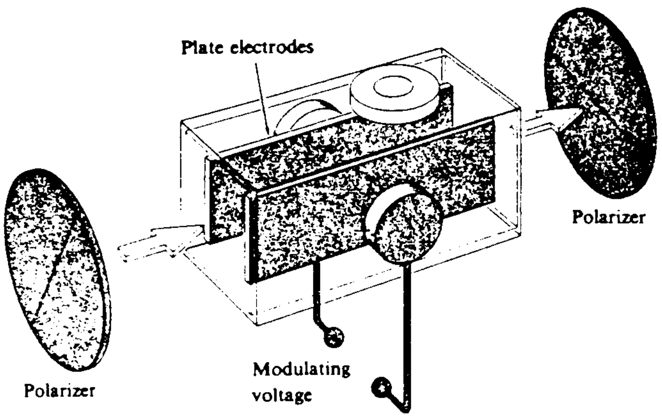


Abbildung 8.35: Kerr–*Zelle (aus [13])*

Der Kerr – Effekt, der Modulationen bis zu 200 MHz ermöglicht, wird unter anderem beim Bau von trägheitslosen, sehr schnellen Schaltern für Licht ausgenutzt, wie sie zum Beispiel für Kameras (in der Hochgeschwindigkeitsphotographie) benötigt werden. Elektro – optische Zellen werden zur Modulation von Licht beim Tonfilm und Bildfunk sowie zur Lichtgeschwindigkeitsmessung eingesetzt.

Der Pockels – Effekt

Der **Pockels – Effekt**, der 1893 von dem deutschen Physiker F.C.A.Pockels (1865-1913) erforscht wurde, tritt bei piezoelektrischen Kristallen ohne Symmetriezentrum auf. Im meist longitudinalen $\vec{E}$ – Feld, wird Doppelbrechung induziert, welche linear von E und damit von der angelegten Spannung abhängt.

$$|n_\perp - n_{\|}| \sim E$$

Die **"Pockels – Zelle"**, deren Aufbau in der Abbildung 8.36 gezeigt ist, dient als Modulator von Licht bis zu Frequenzen von 30 GHz (Anwendungen: siehe Kerr – Effekt).

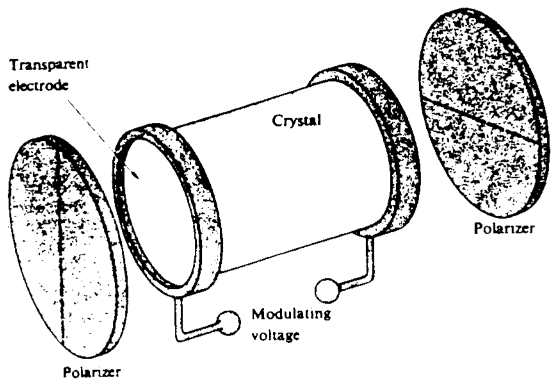


Abbildung 8.36: POCKELS–*Zelle (aus [13])*

Die Flüssigkristall – Anzeige (LCD)

Flüssigkristalle besitzen einen Aggregatzustand zwischen Festkörper und Flüssigkeit. Die länglichen, organischen, stark polaren Moleküle fließen, ohne dabei ihre feste Anordnung zu verlieren (nematische Phase).
An geeignet präparierten Elektroden lagern sich die Moleküle in einer bestimmten Vorzugsrichtung an. Bringt man einen nematischen Flüssigkristall zwischen zwei mit einer transparenten Elektrodenschicht überzogene Glasplatten, deren Vorzugsrichtungen um 90° gegeneinander verdreht sind, so erzielt man eine schraubenförmige Anordnung der Moleküle (verdrillte nematische Phase). In dieser Phase ist der Flüssigkristall optisch aktiv, er dreht die Polarisationsrichtung von linear polarisiertem Licht entsprechend der Verdrillung um 90° (Flüssigkristall–Drehzelle siehe Abb. 8.37). Ein solcher Flüssigkristall befindet sich zwischen den beiden Glasplatten G einer **Reflexionsdrehzelle**, wie sie in Abbildung 8.38 gezeigt ist. Das vorne rechts in die Zelle eindringende Umgebungslicht wird waagerecht polarisiert und kann nach Durchlaufen des Flüssigkristalls den Polarisator P_2 mit senkrechter Durchlaßrichtung passieren. Durch Reflexion an R wird der Lichtweg umgekehrt, an P_1 tritt linear polarisiertes Licht aus. Legt man eine Spannung an einzelne Elektroden der Siebensegmentanzeige an, so wird in diesen Bereichen die verdrillte Phase aufgehoben, da sich die Moleküle nach dem elektrischen Feld ausrichten. Die entsprechenden Segmente bleiben dunkel, die Reflexionsanzeige zeigt eine dunkle Ziffer auf hellem Grund.

Ähnlich läßt sich auch eine Transmissionsanzeige aufbauen.

Versuch: Dreht man über einer LCD – Anzeige eine Polarisationsfolie, so verschwinden die Zahlen und tauchen anschließend wieder auf. Eine Flüssigkristallanzeige arbeitet also mit polarisiertem Licht.

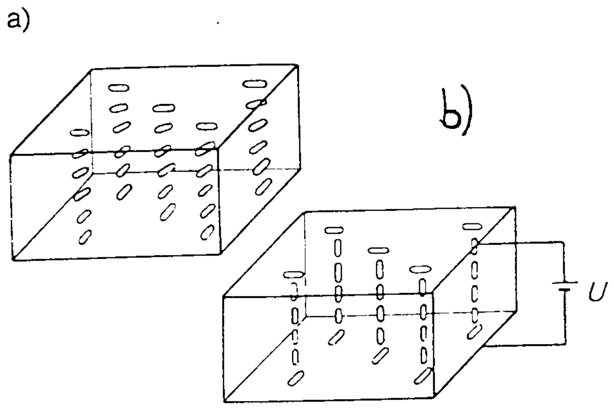


Abbildung 8.37: *Prinzip einer Flüssigkristalldrehzelle. Der Flüssigkristall ist (a) in nematischer, (b) bei angelegter Spannung in verdrillter nematischer Phase. (aus [14])*

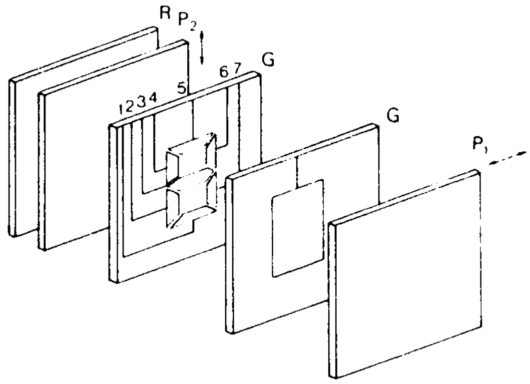
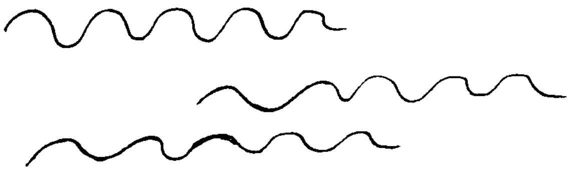


Abbildung 8.38: *Aufbau einer Reflexions–Drehzelle (aus [14])*

8.10 Die Natur des Lichtes

Nach der Wellentheorie ist Licht i.allg. eine Überlagerung vieler, kurzer Wellenzüge (10^{-8} s), welche von der Lichtquelle in schneller Folge ausgesandt werden und mehr oder weniger zufällige Phasen – und Polarisationsbeziehungen besitzen.



Resultierende Phasenlage und Polarisationszustand wechseln daher i.allg. sehr schnell und sind nicht vorhersagbar. Dabei lassen sich zwei Extremfälle herausstellen:

Bei **"natürlichem Licht"** variieren Polarisation und Phasenlage rein zufällig und mit so hoher Geschwindigkeit, daß die einzelnen Zustände nicht mehr wahrnehmbar sind.
Eine Modellvorstellung von natürlichem Licht, von der wir in den vorangehenden Abschnitten Gebrauch gemacht haben, ist die Superposition zweier willkürlicher, inkohärenter, orthogonal zueinander linear polarisierter Wellen gleicher Amplitude, deren relative Phasenverschiebung schnell und zufällig wechselt.

Mathematisch läßt sich natürliches Licht beschreiben durch einen skalaren Wellenausdruck mit räumlich und zeitlich variierender Phase.

$$E = E_0 \, e^{i \, [\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi(\vec{r}, t)]}$$

Ideales **“monochromatisches Licht”** muß als unendlich langer Wellenzug angesehen werden. Eine vollständig monochromatische ebene Welle

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \, e^{i \, [\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi]}$$

ist immer polarisiert.

Beide Extremfälle sind mathematische Fiktionen, welche die Lichterscheinungen der Natur nur angenähert beschreiben. Das von der Sonne ausgestrahlte Tageslicht kommt dem Extremfall “natürlichen Lichtes” nahe. Laserlicht kann annähernd als “monochromatisches Licht” angenommen werden. Sehr häufig tritt in der Natur teilweise polarisiertes Licht auf. Der elektrische Feldvektor variiert dann weder total regelmäßig, noch völlig unregelmäßig.

Die im Rahmen der Wellentheorie genannten Wellenzüge entsprechen in der quantenoptischen Vorstellung des Lichtes den Photonen. Ein Lichtstrahl stellt dann einen Strom von Energiequanten dar und besitzt somit korpuskulare Eigenschaften. Wir haben in Kapitel 7 bereits gesehen, daß Licht Energie und linearen Impuls trägt. Diese Größen werden bei Wechselwirkung von Licht mit Materie auf das Medium übertragen.

Wie lassen sich im Photonenbild die verschiedenen Polarisationszustände des Lichtes erklären?

Beim Eintritt rein zirkular polarisierten Lichtes in ein Medium werden die im Material gebundenen Elektronen zu Kreisbewegungen gezwungen, angetrieben durch die vom rotierenden $\vec{E}$ – Feld ausgehende Kraft. Das vom $\vec{B}$ – Feld auf ein Elektron ausgeübte Drehmoment ist im Mittel über eine Kreisbahn Null. Wir beschränken deshalb unsere Ausführungen auf das $\vec{E}$ – Feld. Die Winkelgeschwindigkeit ω der Elektronen stimmt mit der Kreisfrequenz der Lichtwelle überein. Die an das System abgegebene Leistung ist gleich der pro Zeiteinheit zugeführten Energie

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Für die Leistung bei Rotation gilt

$$P = \frac{dW}{dt} = M \, \omega$$

(analog zur Leistung bei Translation $P = F\, v$). Dabei ist M das Drehmoment des mit ω rotierenden Körpers. Das Drehmoment M entspricht aber der zeitlichen Änderung des Drehimpulses L.

$$M = \frac{dL}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dW}{dt} = \omega \, \frac{dL}{dt}$$

Dies bedeutet, daß die Ladungsteilchen, die eine zirkulare Welle absorbieren, mit der Energie W gleichzeitig auch einen Drehimpuls L aufnehmen, der gegeben ist durch

$$L = \frac{W}{\omega} \quad .$$

Zusätzlich zu Energie und linearem Impuls trägt Licht also auch einen Drehimpuls!

Ist die einfallende Welle rechtszirkular, so läuft (bei Blickrichtung zur Quelle) der $\vec{E}$ – Vektor im Uhrzeigersinn um. In diese Richtung rotiert dann auch eine positive Ladung des absorbierenden Mediums, so daß der Drehimpulsvektor $\vec{L}$ entgegen der Fortpflanzungsrichtung der Welle orientiert ist. Bei linkszirkularem Licht haben Wellenvektor und Drehimpuls die gleiche Orientierung. Überträgt man die gefundenen Ergebnisse auf die

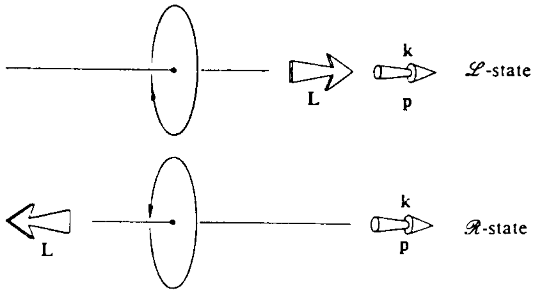


Abbildung 8.39: *Drehimpulsvektor eines Photons. (aus [13])*

quantenoptische Anschauung des Lichtes, so bedeutet dies, daß jedes Photon einen Drehimpuls besitzt (Abb. 8.39). Nach Einstein gilt für Photonen

$$W = h\,\nu = \hbar\,\omega \quad .$$

Aus $L = W/\omega$ erhält man damit

$$\boxed{L = \pm\,\hbar} \quad \text{Drehimpuls eines} \begin{array}{c}\text{linkshändigen}\\ \text{rechtshändigen}\end{array} \text{Photons}$$

Licht ist demnach ein Strom von Lichtquanten, die den Drehimpuls $L = \pm\,\hbar$ tragen und bei Wechselwirkung mit Materie an diese abgeben.

Bei rein $\begin{array}{l}\text{linkszirkularem}\\ \text{rechtszirkularem}\end{array}$ Licht besitzen die Photonen $\begin{array}{l}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{array}$ Drehimpuls,

so daß die Drehimpulsvektoren sämtlicher Photonen, die den Lichtstrahl formen,

$\begin{array}{l}\text{in Strahlrichtung}\\ \text{gegen die Strahlrichtung}\end{array}$ ausgerichtet sind.

Kapitel 9

Interferenz von Lichtwellen

Bei der Überlagerung zweier oder mehrerer Schwingungen bzw. Wellen tritt — unter bestimmten Bedingungen — Interferenz auf. Dabei gilt, solange keine nichtlinearen Effekte auftreten, das **Prinzip der ungestörten Überlagerung**:

> *In jedem Punkt zu jeder Zeit addieren sich bei skalaren Wellen die Wellenfelder, bei Vektorwellen die Vektoren der Wellenfelder.*

Wir haben bereits Interferenzerscheinungen behandelt, wie sie von Wasser– und Schallwellen, sowie von elektromagnetischen Wellen hervorgerufen werden. Dabei haben wir nichtlineare Effekte ausgeschlossen, wie z.B. bei den elastischen Wellen das Verlassen des HOOKEschen Bereiches, bei elektromagnetischen Wellen Übersteuerung.

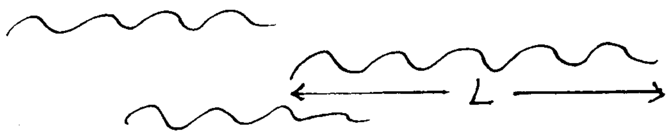
Gleiche Interferenzerscheinungen lassen sich auch mit Licht erzeugen. Lichtinterferenzen bildeten als Beweis der Welleneigenschaft des Lichtes die Grundlage für die Aufstellung der Wellentheorie durch HUYGENS, welche von MAXWELL zur elektromagnetischen Lichttheorie weiterentwickelt wurde.

Für das Auftreten von Interferenz müssen bei allen Wellenarten Bedingungen erfüllt sein. Die Gewährleistung dieser Voraussetzungen ist beim Licht besonders wichtig.

9.1 Kohärenz

Bringt man Lichtbündel zweier *getrennter* Lichtquellen zur Überlagerung, so beobachtet man *keine* Interferenzerscheinungen. Im Überlagerungsgebiet der beiden Bündel herrscht überall die gleiche Lichtintensität. (Anderenfalls würden z.B. bei der künstlichen Beleuchtung eines Raumes durch mehrere Lampen Interferenzerscheinungen auftreten.)

Der Grund hierfür liegt in dem Mechanismus, mit dem die Lichtemission bei einer gewöhnlichen Lichtquelle erfolgt. Eine (temperaturstrahlende) normale Lichtquelle sendet Photonen aus, die dadurch entstehen, daß einzelne Atome *unabhängig voneinander* durch Quantensprünge elektromagnetische Energie abstrahlen. Wie bereits im letzten Teil des vorigen Kapitels dargelegt wurde, besteht Licht daher i.allg. aus vielen Wellenzügen endlicher Länge, deren relative Phase statistisch verteilt ist.



Die Länge eines Wellenzuges L läßt sich aus der Dauer des Emissionsvorganges τ berechnen. Die Zeitdauer der Lichtaussendung eines Atoms ist von der Größenordnung $\tau = 10^{-9}\,\mathrm{s} - 10^{-8}\,\mathrm{s}$. Damit liegt die Länge eines emittierten Wellenzuges in der Größenordnung $L = c/\tau \approx 0{,}3\,\mathrm{m} - 3\,\mathrm{m}$. Genauere Angaben enthält die untenstehende Tabelle.

Bei der Überlagerung von Lichtbündeln aus gleichen, aber getrennten Lichtquellen treffen also ständig in zeitlich unregelmäßiger Folge sehr viele Wellenzüge zusammen, die insgesamt keinen konstanten Phasenunterschied besitzen. Dabei treten kurzzeitig, sowie räumlich und zeitlich unregelmäßig nur einzelne Interferenzfiguren für verschiedene Paare von Wellenzügen auf. Insgesamt ergibt sich jedoch kein stationäres Interferenzbild.

Lichtbündel, welche unterschiedliche Frequenzen besitzen oder deren relative Phasendifferenz sich während der Beobachtungszeit beliebig ändert, sind nicht interferenzfähig. Man spricht von **inkohärentem Licht**. Bei interferenzfähigem, **kohärentem Licht** sind die interferienden Wellenzüge frequenzgleich und weisen am Überlagerungsort einen konstanten Phasenunterschied auf.

Nach dieser Definition sind monochromatische Lichtwellen $\vec{E} = \vec{E_0} \cdot e^{i\,(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$ kohärent und wären damit ideal für die Erzeugung von Lichtinterferenz geeignet. Solche mathematisch fiktiven Wellen sind, wenn auch nur näherungsweise, physikalisch verwirklicht in Form des Laserlichtes.

Die Länge L der Wellenzüge, die von einem Laser ausgesandt werden, ist wesentlich größer als bei gewöhnlichem Licht. Sie liegt in einer Größenordnung von mehreren Kilometern. Dies ist darin begründet, daß sich die Atome eines Lasers gegenseitig zu Energieabstrahlung ("im Gleichschritt") anregen. Die Emissionsvorgänge verlaufen also nicht unabhängig voneinander, sondern die einzelnen Atome *kooperieren* bei der Lichtaussendung *miteinander*. Laserlicht ist daher kohärent.

Lichtquelle	Länge L eines Wellenzuges
weißes Licht	$\approx 1{,}5\,\mu\mathrm{m}$
Cd – Spektrallampe	$\approx 20\,\mathrm{cm}$
Kr – Spektrallampe	$\approx 80\,\mathrm{cm}$
HeNe – Laser	$\approx 2\,\mathrm{km}$

Hat man nun kohärentes Licht gegeben, so kann es vorkommen, daß bei der Überlagerung dennoch keine Interferenzerscheinungen zustandekommen. Die Erklärung ist aus der Abbildung 9.1 ersichtlich. Zwei Wellenzüge können nur dann interferieren, wenn der optische Wegunterschied ein bestimmtes Maß nicht überschreitet.

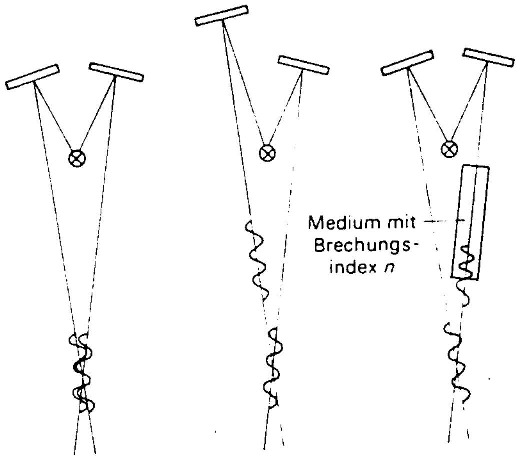


Abbildung 9.1: *Erzeugung kohärenter Wellenzüge durch Reflexion: a) konstruktive Interferenz, b) keine Interferenz aufgrund zu großer* geometrischer *Wegdifferenz, c) keine Interferenz aufgrund zu großer* optischer *Wegdifferenz. (aus [14])*

Definition: Man bezeichnet die maximale optische Wegdifferenz als **Kohärenzlänge** l. Diese muß stets kleiner als die Länge L der interferierenden Wellenzüge sein: $\Delta_{max} = l < L$.

Daraus erhält man eine zusätzliche Interferenzbedingung:

Zeitliche Kohärenzbedingung:
Der optische Wegunterschied zweier Wellenzüge muß kleiner als die Kohärenzlänge sein.

Es existiert noch eine weitere Interferenzbedingung geometischer Art, welche ihre Ursache darin hat, daß die realen Lichtquellen nicht — wie bisher vorausgesetzt — punktförmig sind, sondern eine endliche Ausdehnung besitzen. Dies hat zur Folge, daß zwischen den von den einzelnen Punkten einer Lichtquelle ausgesandten Wellenzügen optische Wegdifferenzen entstehen, da sie aus unterschiedlichen Richtungen zum Interferenzpunkt gelangen.

Örtliche Kohärenzbedingung:
Der optische Wegunterschied für Licht von verschiedenen Punkten einer Lichtquelle muß klein gegen die Wellenlänge sein: $a \cdot \sin\vartheta \ll \lambda$. Genauer muß gelten:

$$\boxed{a \ll \frac{\lambda}{2 \cdot \sin\vartheta}}$$

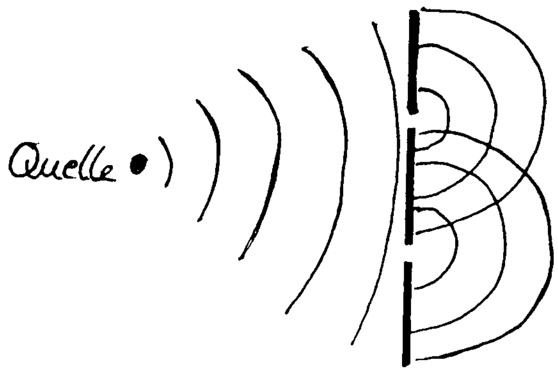
Ein Wellenzug läßt sich nach Fourier beschreiben als Integral über Sinuswellen verschiedener Frequenzen und Wellenlängen. Zur Demonstration eines *deutlichen* Interferenzbildes benötigt man Wellenzüge mit geringer Frequenzbandbreite, d.h. möglichst monochromatisches Licht. Anderenfalls wird das Bild durch Überlagerung der Interferenzerscheinungen verschiedener Wellenlängen unscharf und farbig.

9.2 Erzeugung von kohärentem Licht

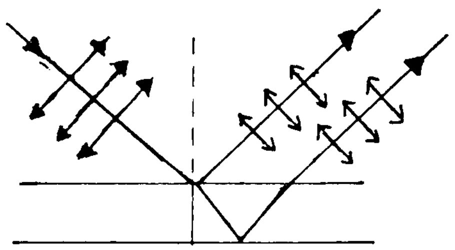
Kohärentes Licht läßt sich durch Teilen des Lichtes derselben Quelle erzeugen. Bei der Aufspaltung eines Lichtbündels in zwei Teilbündel wird jeder Wellenzug des Primärbündels in zwei Teilwellenzüge zerlegt. Diese haben am Überlagerungsort stets den gleichen Phasenunterschied, welcher nur noch vom Gangunterschied der beiden Teilbündel bestimmt wird.

Die Zerlegung eines Wellenzuges kann auf verschiedene Weise erfolgen:

1. **Teilen der Wellenfront**
   Beipiel: Doppelspalt



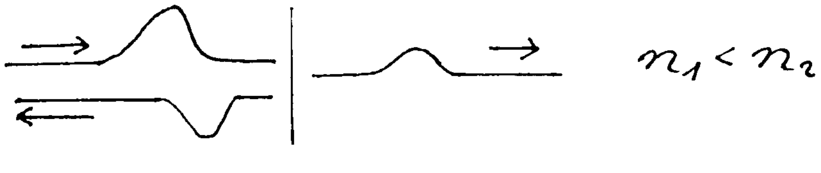
2. **Teilen der Amplitude**



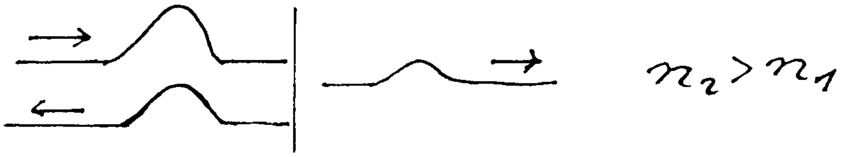
Dies ist möglich durch Aufstrahlen von Licht auf zwei Grenzflächen zwischen Medien mit unterschiedlichen Brechungsindizes $n_1 < n_2$.

Beachte: Bei der Reflexion der Lichtwelle an der Grenzfläche vom optisch dünneren zum dichteren Medium tritt ein Phasensprung um π (180°) auf. Dies steht in Analogie zur Reflexion der elast. und elm. Wellen am "festen Ende". Der Phasensprung muß bei der zeitlichen Kohärenzbedingung berücksichtigt werden!

Reflexion am dichteren Medium



Reflexion am dünneren Medium



Sind bei der Überlagerung von Lichtwellen alle Kohärenzbedingungen erfüllt, so kommt es zu Interferenz. Bei der formalen Betrachtung werden die Wellenfunktionen addiert (Superpositionsprinzip).

Inkohärentes Licht ermöglicht keine Interferenz. Bei der mathematischen Behandlung addieren sich in diesem Fall die Intensitäten.

9.3 Interferenzversuche

9.3.1 Lichtinterferenz durch Aufspalten von Wellenfronten

a) FRESNELscher Spiegelversuch
Im Jahr 1821 demonstrierte A.J. FRESNEL die Interferenz von Lichtwellen. Den Aufbau seines Spiegelversuches zeigt Abbildung 9.2.

Das Licht einer punktförmigen Lichtquelle L wird durch Reflexion an einem Winkelspiegel in zwei kohärente Teilbündel aufgespalten, welche von den beiden virtuellen Spiegelbildern L_1 und L_2 der Quelle L herzukommen scheinen. Die virtuellen Lichtquellen L_1 und L_2 senden also kohärente Lichtwellen aus, welche im Überlappungsgebiet ein stationäres Interferenzbild erzeugen.

b) FRESNELsches Biprisma
Ein von einer punktförmigen Lichtquelle L herkommendes Lichtbündel wird durch ein Biprisma in zwei gebrochene Bündel zerlegt. Die virtuellen Bilder L_1 und L_2 der Lichtquelle L wirken als scheinbare Emissionszentren der kohärenten Wellen (Abb. 9.3).

c) YOUNGscher Doppelspalt
Das Licht einer Quelle L fällt auf einen Schirm mit zwei Spalten, deren Breite d sehr klein im Vergleich zur Wellenlänge ist: $d \ll \lambda$. Nach dem HUYGENSschen Prinzip werden an den Spalten zwei kohärente Kugelwellen erzeugt, deren Überlagerung zu Interferenzerscheinungen führt (Abb. 9.4).
Bei endlicher Spaltbreite sind die Vorgänge am Doppelspalt komplizierter, es tritt Beugung auf (siehe unter 10.3 Fraunhofersche Beugung am Doppelspalt).

In allen drei Fällen treten im wesentlichen dieselben Interferenzerscheinungen auf, wie wir sie bereits bei den Wasserwellen formal behandelt haben. Daher seien hier die Bedingungen für das Auftreten von Interferenzminima und – maxima nur kurz angeführt.

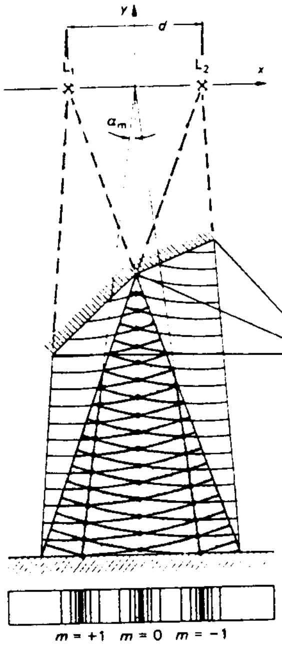


Abbildung 9.2: *Fresnelscher Spiegelversuch (aus [14])*

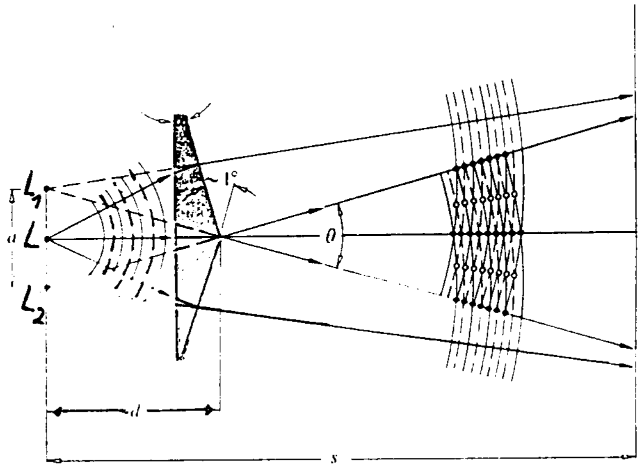


Abbildung 9.3: *Fresnelsches Biprisma (aus [13])*

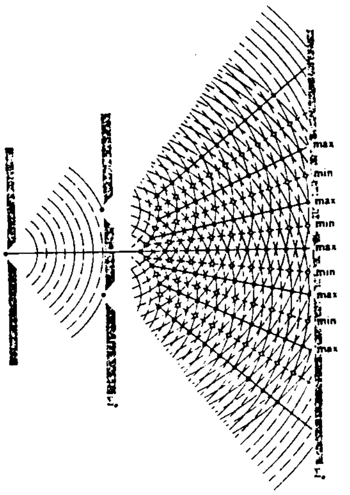


Abbildung 9.4: *Interferenz am Doppelspalt. (aus [13])*

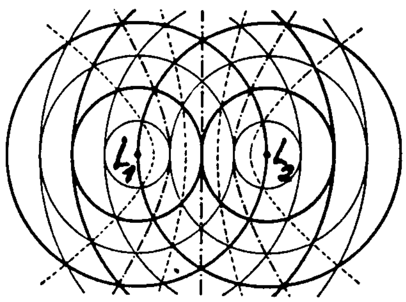


Abbildung 9.5: *Interferenzkurven sind Hyperbeln mit den Brennpunkten L_1 und L_2. (aus [4])*

Wellen mit
einem Gangunterschied $\Delta = r_1 - r_2 = \left\{ \begin{array}{c} n \cdot \lambda \\ (2n+1) \cdot \frac{\lambda}{2} \end{array} \right\}$ interferieren $\left\{ \begin{array}{c} \text{konstruktiv} \\ \text{destruktiv} \end{array} \right\}$.

Orte mit gleichem Gangunterschied, d.h. für die $r_1 - r_2 = const.$ erfüllt ist, bilden Hy-

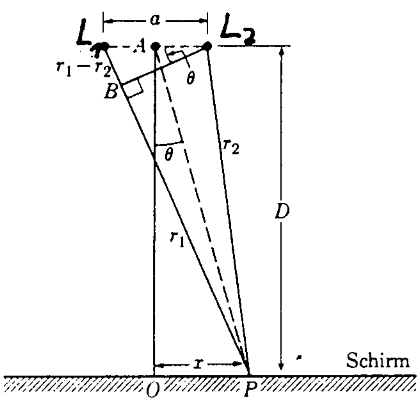


Abbildung 9.6: *P in großen Abständen* r_1 , r_2 *von* L_1 *und* L_2

perbeln (Abb. 9.5) mit den Brennpunkten L_1 und L_2!

Ist die Entfernung des Interferenzpunktes P von der Ebene der virtuellen Lichtquellen sehr groß gegenüber dem Abstand d der Quellen (Abb. 9.6), $r_1 - r_2 \gg d$, so gilt die Näherung

$$r_1 - r_2 \approx d \cdot \sin\alpha$$

Damit lautet in diesem Fall die Bedingung für konstruktive Interferenz

$$d \cdot \sin\alpha = n \cdot \lambda$$

Dies wird anhand der Abbildung 9.2 zum FRESNELschen Spiegelversuch noch deutlicher: Die Hyperbeln, Orte gleichen Gangunterschiedes, schmiegen sich in großer Entfernung von den Lichtquellen an Geraden an, welche mit der y – Achse die Winkel α_m einschließen.

Für den m – ten konstruktiven Interferenzstreifen ergibt sich daraus die Bedingung

$$\boxed{\sin\alpha_m = m \cdot \frac{\lambda}{d}} \quad \text{Interferenzmaxima}$$

9.3.2 Lichtinterferenz durch Aufspalten der Amplitude

Interferenzen gleicher Neigung

Darunter faßt man Interferenzerscheinungen zusammen, die durch den Neigungswinkel bestimmt werden. Anders ausgedrückt: Bei der Interferenz durch Reflexion oder Brechung rufen diejenigen Strahlen, die unter gleichem Neigungswinkel auf das Medium (planparallele Platte, dünne Schicht) auffallen, die gleichen Interferenzerscheinungen hervor.

a) Planparallele Platte (PPP)
Von der Lichtquelle L herkommend falle ein Lichtstrahl aus Luft ($n_L = 1$) auf eine dünne planparallele Platte mit der Dicke d und dem Brechungsindex n (Abb. 9.7). Der Einfallswinkel sei ε.

Der Strahl wird durch Reflexion und Brechung an der Vorder– und Rückseite der Platte wiederholt aufgespalten. Aus beiden Seitenflächen der Platte treten kohärente parallele Strahlen aus. Wir betrachten im folgenden die Überlagerung der beiden

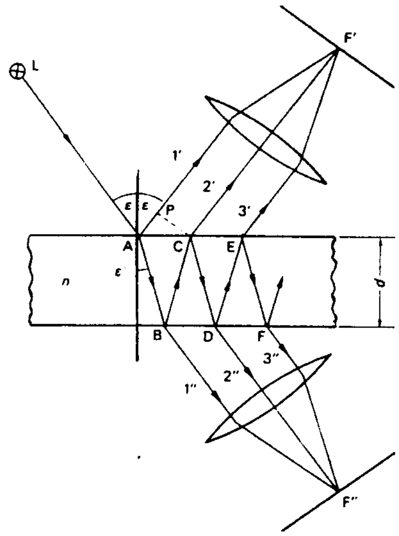


Abbildung 9.7: *Interferenzen an einer planparalleler Platte. (aus [14])*

Strahlen 1′ und 2′. Die weiteren Strahlen 3′, 4′,... usw. besitzen aufgrund der mehrmaligen Reflexion verschwindend kleine Intensitäten. Daher kann ihr Anteil an der Interferenz vernachlässigt werden.

Die Parallelstrahlen interferieren im Unendlichen. Vereinigt man sie aber mit Hilfe einer Linse in deren Brennweite (dies geschieht z.B. bei der Betrachtung mit entspanntem Auge), so lassen sich die Interferenzen im Endlichen beobachten. Im Brennpunkt F′ liegt Helligkeit oder Dunkelheit vor in Abhängigkeit vom Gangunterschied Δ der interferierenden Strahlen, welchen wir nun berechnen wollen:

Strahl 2′ pflanzt sich innerhalb der Platte entlang der Strecken AB+BC fort, während Strahl 1′ von A nach P fortschreitet. Die optische Wegdifferenz beträgt also

$$\text{optische Wegdifferenz} = n \cdot (\mathrm{AB} + \mathrm{BC}) - \mathrm{AP}$$

Strahl 1′ erfährt bei der Reflexion am dichteren Medium einen Phasensprung um π. Dies entspricht einem Gangunterschied von $\lambda/2$. Insgesamt gilt also

$$\text{Gangunterschied } \Delta_R = n \cdot (\mathrm{AB} + \mathrm{BC}) - \mathrm{AP} + \frac{\lambda}{2}$$

$$= \; 2 \cdot n \cdot \mathrm{AB} \; - \; \mathrm{AP} \; + \; \frac{\lambda}{2}$$

Nach dem Brechungsgesetz $\sin\varepsilon \; = \; n \cdot \sin\varepsilon'$ gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{AB} \; &= \; \frac{d}{\cos\varepsilon'} \; = \; \frac{d}{\sqrt{1 - \sin^2\varepsilon'}} \; = \; \frac{n \cdot d}{\sqrt{n^2 - \sin^2\varepsilon}} \\ \mathrm{AC} \; &= \; 2 \cdot \mathrm{AB} \cdot \sin\varepsilon' \; = \; 2 \cdot \mathrm{AB} \cdot \frac{\sin\varepsilon}{n} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mathrm{AP} \; = \; \mathrm{AC} \cdot \sin\varepsilon \; = \; \frac{2 \cdot \mathrm{AB}}{n} \cdot \sin^2\varepsilon \; = \; \frac{2 \cdot d \cdot \sin^2\varepsilon}{\sqrt{n^2 - \sin^2\varepsilon}}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\Delta_R \; = \; \frac{2 \cdot n^2 \cdot d \; - \; 2 \cdot d \cdot \sin^2\varepsilon}{\sqrt{n^2 - \sin^2\varepsilon}} \; + \; \frac{\lambda}{2}$$

$\Rightarrow$ Gangunterschied bei Reflexion

$$\boxed{\Delta_R \; = \; 2 \cdot d \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2\varepsilon} \; + \; \frac{\lambda}{2}}$$

Wir erhalten also

<u>Auslöschung</u> für $\Delta_R \; = \; (2m+1) \cdot \frac{\lambda}{2} \; = \; m \cdot \lambda \; + \frac{\lambda}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{2 \cdot d \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2\varepsilon} \; = \; m \cdot \lambda \quad (m \; = \; 0, 1, 2, \ldots)}$$

Bedingung für Dunkelheit

<u>Verstärkung</u> für $\Delta_R \; = \; m \cdot \lambda$

$$\Rightarrow \boxed{2 \cdot d \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2\varepsilon} \; = \; (m + \frac{1}{2}) \cdot \lambda \quad (m \; = \; 0, 1, 2, \ldots)}$$

Bedingung für Helligkeit

Die in der Brennebene der Linse entstehenden Interferenzmaxima und – minima bilden Kurven, die jeweils zum gleichen Winkel ε gehören, die **Interferenzen gleicher Neigung**. Aufgrund der Symmetrie sind die Interferenzlinien kreisförmig (siehe POHLscher Interferenzversuch).

Für die durchgelassenen Lichtwellen $1''$ und $2''$ erhält man

$$\boxed{\Delta_T \; = \; 2 \cdot d \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2\varepsilon}}$$

Gangunterschied bei Transmission

Die Bedingungen für Verstärkung und Auslöschung sind hier gegenüber der Reflexion genau vertauscht. Die Interferenzerscheinungen des transmittierten Lichtes sind jedoch wesentlich schwächer als die in Reflexion, da die Intensitäten der Strahlen $1''$ und $2''$ sehr unterschiedlich sind.

Interferenzkurven gleicher Neigung lassen sich besonders eindrucksvoll nach einem von R.W. POHL entwickelten Verfahren beobachten.

Versuch: POHLscher Interferenzversuch

Eine dünne Glimmerplatte ($d \approx 0,04\,\mathrm{mm}$) wird mit dem Licht einer Hg– oder Na–Lampe beleuchtet (Abb. 9.8). Je nach Versuchsanordnung erhält man ein Interferenzbild großer konzentrischer Kreise sowohl des reflektierten, als auch des transmittierten Lichtes.

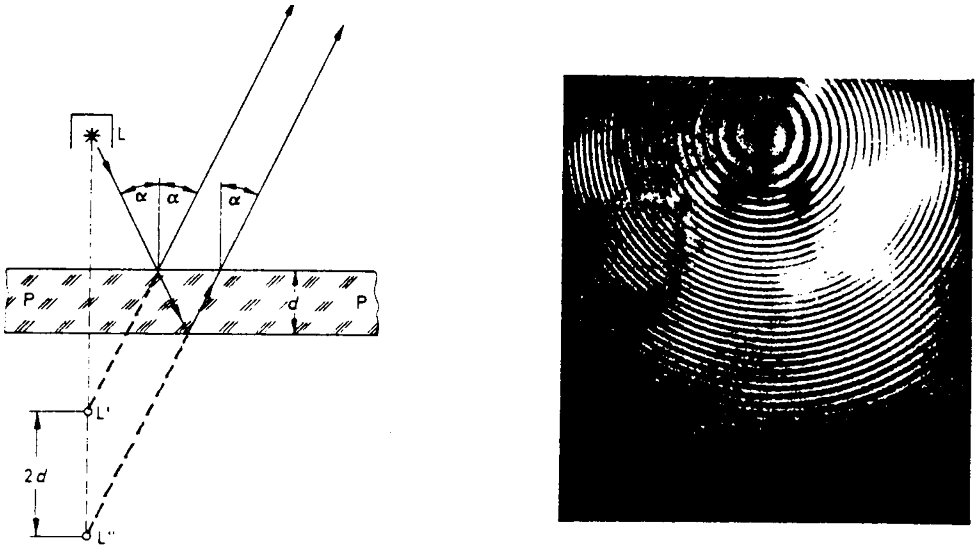


Abbildung 9.8: *a) Versuchsanordnung zur Projektion von Interferenzen gleicher Neigung nach R.W.Pohl, b) Interferenzkurven gleicher Neigung. (aus [4])*

b) Spezielle Effekte und Anwendungen

(a) Farben dünner Blättchen

Dünne Schichten, z.B. Lamellen von Seifenwasser, Ölschichten auf Wasser oder Oxydschichten auf Metallen, die mit weißem Licht bestrahlt werden, erscheinen im reflektierten und durchgehenden Licht in schillernden **Interferenzfarben**.

Je nach Dicke und Brechungsindex der Schicht sowie nach Beobachtungswinkel ε interferieren die reflektierten Wellen so miteinander, daß bestimmte Wellenlängen (Farben) sich auslöschen, andere sich verstärken. Unter dem Beobachtungswinkel ε wird daher die Komplementärfarbe des ausgelöschten Anteils des weißen Lichtes sichtbar. Da die verschiedenen Orte einer Oberfläche unter unterschiedlichen Winkeln gesehen werden, erscheint die Oberfläche von Ort zu Ort (je nach Blickwinkel) andersfarbig.

Beispielsweise werden bei senkrechtem Lichteinfall ($\varepsilon = 0$, $m = 1$) die Wellenlängen $\lambda = 2\,n\,d$ ausgelöscht.

Versuch: Seifenblasen

Ein interessanter Spezialfall liegt vor, wenn die Schichtdicke d sehr viel kleiner als die Wellenlänge des weißen Lichtes ist. Dann gilt näherungsweise für den

Gangunterschied

$$d \ll \lambda \;\Rightarrow\; \Delta_R \approx \frac{\lambda}{2}$$

d.h. alle Wellenlängen löschen sich aus. Das Blättchen erscheint schwarz, da kein Licht reflektiert wird.

Bei den durchgelassenen Lichtwellen findet dagegen maximale Verstärkung statt, das Blättchen erscheint weiß.

(b) Antireflex – Belag (Vergütung)
Zur Reflexverminderung werden Glasoberflächen (z.B. Linsen für optische Geräte) mit einer dünnen sogenannten Vergütungsschicht überzogen, deren Wirkungsweise auf der destruktiven Interferenz des reflektierten Lichtes beruht. Eine

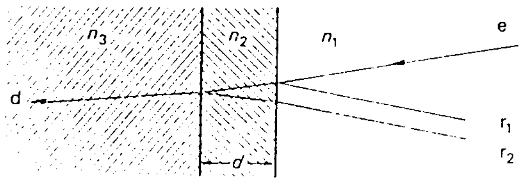


Abbildung 9.9: *Reflexvermindernde Schicht*

Glasoberfläche (Brechungsindex n_3) sei mit einer dünnen Schicht der Dicke d mit dem Brechungsindex n_2 überzogen (siehe Abb. 9.9). Darüber befinde sich Luft ($n_L = 1$).
Ein einfallender Lichtstrahl e wird an beiden Grenzflächen sowohl gebrochen, als auch reflektiert, wobei beide reflektierten Strahlen r_1 und r_2 einen Phasensprung erfahren. Bei senkrechter Lichteinstrahlung beträgt daher die Gangdifferenz $\Delta_R = 2\,n_2\,d$. Die Schichtdicke d und der Brechungsindex n_2 sind so zu wählen, daß $\Delta_R = 2\,n_2\,d = (2m+1)\cdot\lambda/2$ gilt. Dann kommt es zu Auslöschung.
Für $m = 0$ erhält man die kleinste Dicke der Vergütungsschicht

$$\boxed{d = \frac{\lambda}{4\,n_2}}$$

Die Reflexionsunterdrückung ist optimal, wenn die Amplituden der reflektierten Wellen gleich sind.

$$R_{n_1\to n_2} = R_{n_2\to n_3} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2 = \left(\frac{n_2-n_3}{n_2+n_3}\right)^2$$

Dies ist erfüllt, wenn der Brechungsindex n_2 des Vergütungsmaterials der Bedingung

$$\boxed{n_2 = \sqrt{n_1\cdot n_3}}$$

genügt. Für $n_1 = n_L = 1$ muß gelten $\boxed{n_2 = \sqrt{n_3}}$.

Beispiel: Als Vergütungssubstanzen für optisches Glas ($n_3 = 1,7$) haben sich Magnesiumfluorid mit $n_2 = 1,38$ und Kryolith (Na_3AlF_6) mit $n_2 = 1.33$ bewährt. Die optimale Reflexionsunterdrückung würde hier durch ein Vergütungsmaterial mit dem Brechungsindex $n_2 = \sqrt{1,7} = 1,3$ erreicht.

9.3.3 Interferenzen gleicher Dicke

Spaltet man Licht nicht an einer Platte mit parallelen Flächen auf, sondern an einem Keil, dessen Flächen einen sehr kleinen Winkel α miteinander einschließen, so treten ebenfalls Interferenzerscheinungen auf.

Wir betrachten den Fall, daß der Keil mit parallelem Licht bestrahlt wird (Abb. 9.10). Im Punkt P (bei x_P) überlagern sich die kohärenten Teilstrahlen $1'$ und $2'$, welche mit

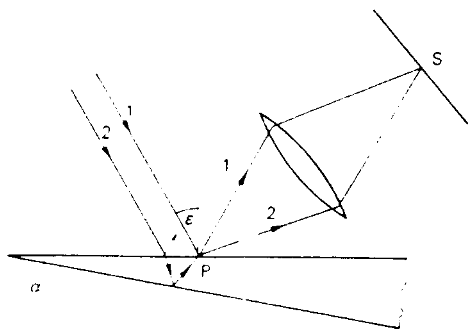


Abbildung 9.10: *Interferenzen an einem Keil. (aus [14])*

Hilfe einer Linse auf einem Schirm oder bei akkomodiertem Auge auf der Netzhaut vereinigt werden können. Da die Keildicke ortsabhängig ist, $d = d(x)$, betrachten wir bei der Bestimmung der Interferenzbedingungen kleine Teilgebiete des Keils. Für sehr kleine Keilwinkel α können wir dann die entsprechenden Ergebnisse der planparallelen Platte übernehmen.

$$\Delta_R = 2 \cdot d(x) \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon} + \frac{\lambda}{2}$$

Für nahezu senkrechten Lichteinfall gilt $\Delta_R \approx 2\,n\,d(x) + \frac{\lambda}{2}$ und die Interferenzbedingungen lauten:

$$\boxed{d = \frac{m \cdot \lambda}{2 \cdot n}} \quad \text{Dunkelheit}$$

$$\boxed{d = \frac{2\,m - 1}{2 \cdot n} \cdot \frac{\lambda}{2}} \quad \text{Helligkeit}$$

Die hellen und dunklen Interferenzstreifen sind den Stellen gleicher Dicke des Keils zugeordnet und heißen deshalb Interferenzstreifen gleicher Dicke. Sie verlaufen in regelmäßigen Abständen parallel zur Keilkante. An der Keilkante selbst herrscht stets Dunkelheit, da hier $d = 0$ und damit $\Delta_R = \lambda/2$ ist.

Versuch: Gezeigt wird das Interferenzbild eines Luftkeils mit variablem Keilwinkel.

Für sehr kleine Winkel α gilt

$$d(x) \;=\; x \cdot \tan\alpha \;\approx\; x \cdot \alpha$$

Man erhält also Auslöschung für $x \cdot \alpha = (m \cdot \lambda)/2 \cdot n$, d.h. dunkle Interferenzstreifen werden sichtbar an den äquidistanten Orten

$$x = m \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot n \cdot \alpha}.$$

Je größer der Keilwinkel ist, desto dichter liegen die Interferenzmaxima und – minima.

Newtonsche Ringe

Im Jahr 1976 beobachtete Newton mit der im folgenden Versuch nachgestellten Anordnung Interferenzkurven, die ebenfalls den Interferenzen gleicher Dicke zuzuordnen sind. Aufgrund der Symmetrie der Versuchsanordnung erhielt er ein Bild konzentrischer Interferenzkreise, welche heute als Newtonsche Ringe bekannt sind.

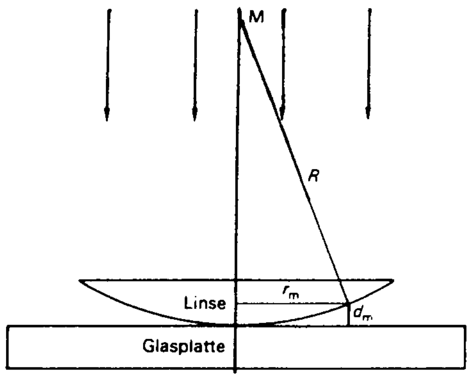


Abbildung 9.11: *Versuchsanordnung zur Erzeugung Newtonscher Interferenzringe. (aus [14])*

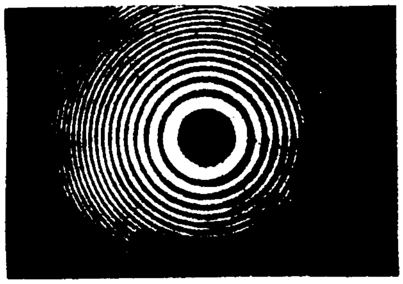


Abbildung 9.12: *Newtonsche Interferenzringe im reflektierten monochromatischen Licht. (aus [4])*

<u>Versuch:</u> Auf eine ebene Glasplatte wird eine nur gering gekrümmte plankonvexe Linse gelegt. Wird die Anordnung (Abb. 9.11) senkrecht von oben mit parallelem Licht beleuchtet, so entstehen in Reflexion und Durchsicht konzentrische Interferenzringe. Je nach Art der Beleuchtung, ob annähernd monochromatisches oder weißes Licht, erscheinen helle und dunkle oder farbige Kreise. Das Zentrum des Interferenzbildes, der Berührpunkt von Linse und Platte, erscheint schwarz (Abb. 9.12).

Die Aufspaltung des Lichtes geschieht in der keilförmigen Luftschicht zwischen Linse und Platte. Die allgemeine Gangdifferenz interferierender Wellen am Keil (in Reflexion)

$$\Delta_R = 2 \cdot d \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon} + \frac{\lambda}{2}$$

vereinfacht sich hier wegen $n = 1$ und $\varepsilon = 0$ zu

$$\Delta_R = 2 \cdot d + \frac{\lambda}{2} \, .$$

Der m – te dunkle Interferenzring tritt bei einer Keildicke d_m auf, für die gilt

$$2 \cdot d_m + \frac{\lambda}{2} = (2 \cdot m + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \text{bzw.} \quad d_m = m \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

Die Dicke d_m ist mit dem Radius r_m des m – ten Kreises und dem Krümmungsradius R der Linsenfläche verknüpft über die Beziehung

$$\begin{aligned} d_m &= R - \sqrt{R^2 - r_m^2} = R - R \cdot \sqrt{1 - \frac{r_m^2}{R^2}} \\ &= R - R \cdot (1 - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{r_m^2}{R^2} + \ldots) \end{aligned}$$

Für $r_m \ll R$ gilt die Näherung

$$d_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{r_m^2}{R} \tag{2}$$

Gleichsetzen von (1) und (2) ergibt für die <u>Radien der dunklen Kreise</u>

$$\boxed{r_m = \sqrt{m \cdot \lambda \cdot R} \quad (m = 1, 2, \ldots)}$$

Man erhält konzentrische Interferenzringe, deren Radien mit $\sqrt{m}$ zunehmen. Die Abstände der einzelnen Interferenzringe werden also vom Zentrum nach außen hin kleiner. Dies ist dadurch zu erklären, daß aufgrund der Krümmung der Linsenfläche der Keilwinkel des Luftkeils nicht konstant ist, sondern nach außen hin anwächst.
Am Berührpunkt, bei $m = 0$, gilt $d_0 = 0$. Wegen $\Delta_R = \lambda/2$ herrscht hier stets Dunkelheit.

Anwendungen

Interferenzen gleicher Dicke werden bei Planaritäts – und Dickenmessungen ausgenutzt. Zum Beispiel werden die Oberflächen von Optikbauteilen anhand ihrer Interferenzmuster geprüft. Kleinste Rauhigkeiten und Unebenheiten können aus Verschiebungen der Interferenzstreifen vermessen werden.

9.4 Interferometer

Interferometer sind optische Geräte, die mit Hilfe von Lichtinterferenz die präzise Messung physikalischer Größen, wie z.B. Länge (Eichung), Brechzahl, Winkel und Wellenlänge, erlauben. Ihre Anwendung ist daher besonders in der physikalischen Meßtechnik von Bedeutung.

Ihre Funktionsweise beruht auf der Aufspaltung einer Lichtwelle in kohärente Teilwellen, die nach Durchlaufen getrennter Wege wieder zusammengeführt werden. Die resultierenden Interferenzerscheinungen lassen Rückschlüsse auf im Strahlengang befindliche Objekte zu. Die genaue Messung der optischen Wegdifferenz ermöglicht es, z.B. die geometrische Dicke oder den Brechungsindex eines durchstrahlten Objektes zu bestimmen.

9.4.1 Zweistrahl – Interferometer

Als wichtigsten Typ eines Zweistrahl – Interferometers betrachten wir hier das

Michelson – Interferometer

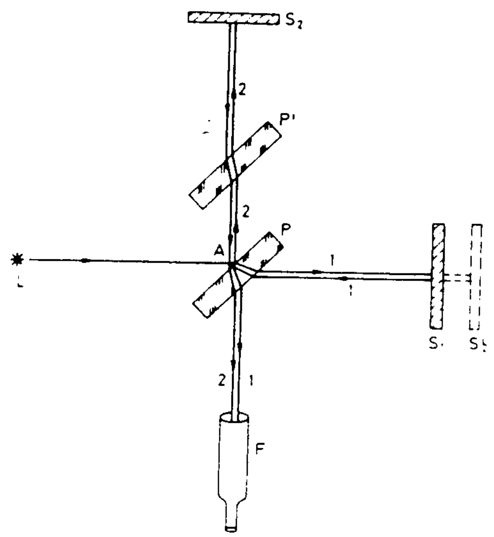


Abbildung 9.13: *Aufbau des* MICHELSON*–Interferometers. (aus [4])*

Als <u>Strahlteiler</u> dient hier die halbdurchlässige Platte P, welche den von der Lichtquelle L herkommenden Strahl in die Teilstrahlen 1 und 2 aufspaltet. Diese werden nach der Reflexion an den Spiegeln S_1 und S_2 in sich selbst zurückgeworfen und beim Auftreffen auf die Platte P erneut in zwei Teile zerlegt. Man beobachtet die Interferenz der Strahlanteile

$1''$ und $2''$, die in das Fernrohr F gelangen. Die gleich dicke, aber unverspiegelte Glasplatte P', die Kompensationsplatte, sorgt dafür, daß die interferierenden Teilstrahlen gleiche Weglängen in Glas zurücklegen.
Wenn die beiden Spiegel gleich weit vom Punkt A entfernt sind, treffen die Strahlen $1''$ und $2''$ ohne Gangunterschied am Beobachtungsort ein und verstärken sich. Verschiebt man den Spiegel S_1 um eine Viertelwellenlänge, so ändert sich der Gangunterschied um $\lambda/2$. Es findet Auslöschung statt. Der helle Interferenzstreifen wechselt in einen dunklen. Bei erneuter Verschiebung um $\lambda/4$, insgesamt also um $\lambda/2$, tritt wieder Verstärkung ein. Durch Auszählen der Interferenzstreifen, die den Beobachtungsort durchlaufen, kann also die Verschiebung des Spiegels in Vielfachen von $\lambda/2$ gemessen werden.

Dies ermöglicht eine sehr genaue Längenmessung. So wurde 1960 die Länge des Urmeters in Vielfachen der Vakuumwellenlänge der orangen Krypton– Spektrallinie (Isotop ^{86}Kr) ausgemessen. Dies wurde als neue Meterdefinition eingeführt, welche bis 1983 Gültigkeit besaß.

Versuch: Die Wellenlänge eines HeNe – Lasers wird interferometrisch ausgemessen. Der Versuchsaufbau unterscheidet sich von dem weiter oben beschriebenen nur dadurch, daß hier wegen der großen Kohärenzlänge des Laserlichtes auf die Kompensationsplatte verzichtet werden kann. Der Spiegel S_1 wird über eine Mikrometerschraube bewegt, so daß m Interferenzminima durchlaufen werden. Die Verschiebung Δl des Spiegels wird an der Mikrometerschraube abgelesen. Über die Beziehung $\Delta l = m \cdot \lambda/2$ wird die Wellenlänge des Laserlichtes bestimmt.
Beispiel:

$$\begin{array}{rcl} m &=& 50 \\ \Delta l &=& 16\mu\mathrm{m} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2 \cdot \Delta l}{m} = \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-5}}{50}\,\mathrm{m} = \underline{\underline{640\mathrm{nm}}}$$

(Herstellerangabe: $\lambda = 632$nm)

Auf die bedeutende Anwendung des Michelson – Interferometers im Rahmen des Michelson – Morley – Experimentes (1881 –1887) werden wir im Kapitel Relativitätstheorie genauer eingehen. An dieser Stelle seien jedoch bereits einige wichtige Punkte zusammengefaßt:

Motivation:
Im vergangenen Jahrhundert herrschte unter vielen Wissenschaftlern die Vorstellung von einem den gesamten Raum ausfüllenden, ruhenden "Äther". Dieser Äther wurde als Träger der Lichtwellen angesehen, von denen man zunächst annahm, daß sie wie die Schallwellen zur Ausbreitung ein besonderes Medium benötigten. Als Konsequenz nahm man weiter an, daß die Erdbewegung einen Einfluß auf die Beobachtung der Lichtgeschwindigkeit von der Erde aus habe. Man vermutete eine anisotrope Lichtausbreitung parallel und senkrecht zur Bewegungsrichtung der Erde. Der amerikanische Physiker Michelson, dem sich später auch E.W. Morley anschloß, glaubte, die anisotrope Ausbreitungsgeschwindigkeit nachweisen zu können.

Ergebnis:
Das Versuchsergebnis fiel negativ aus

$\Rightarrow$ Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

$\Rightarrow$ Nichtexistenz des Lichtäthers.

Meßgenauigkeit:
Die mit dem damaligen Interferometer meßbare relative Änderung des Lichtweges betrug

$$\frac{\Delta l}{l} \approx \frac{\lambda/10}{l} \approx \frac{60\,\mathrm{nm}}{10\,\mathrm{m}} \approx 6 \cdot 10^{-9}$$

In der **Astronomie** stellt die "aktive Optik" ein bedeutendes Anwendungsgebiet des MICHELSON – Interferometers dar.
Mit **Wellenfront – Sensoren**, die nach dem Prinzip des MICHELSON – Interferometers aufgebaut sind, wird z.B. Sternenlicht auf Störungen in der Atmossphäre hin untersucht. Durch Interferenz mit einer ebenen Referenzwelle (Laser) können die Störungen einer Wellenfront exakt analysiert werden.

Das Prinzip eines Wellenfront – Sensors ist aus Abbildung 9.14 erkenntlich. Zusätzlich zur

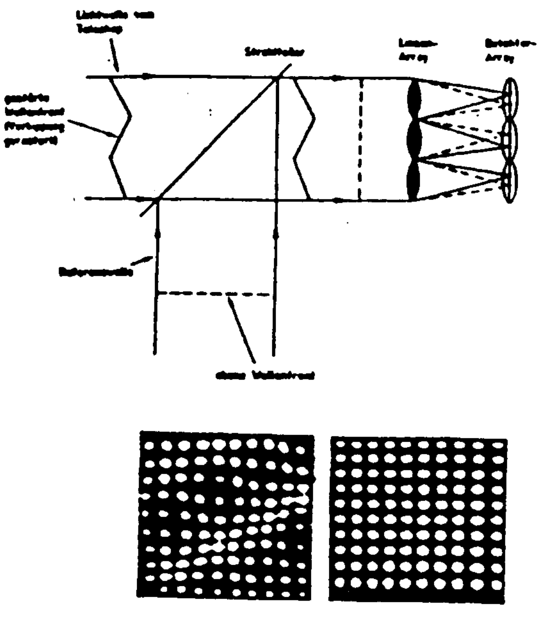


Abbildung 9.14: *a) Aufbau eines Wellenfront–Sensors, b) Interferenzbilder einer ungestörten und gestörten Wellenfront.*

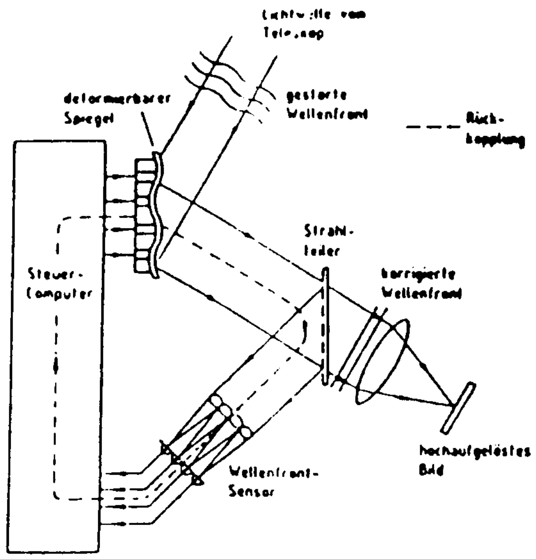


Abbildung 9.15: *Anordnung zum Ausgleich der Störungen in einer Wellenfront.*

Analyse ermöglichen weiterentwickelte Anordnungen (siehe Abb. 9.15), die Störungen in einer Wellenfront auszugleichen.
Die ankommende Lichtwelle wird über einen deformierbaren Spiegel zu einem Strahlteiler gelenkt. Der Reflexionsanteil des Lichtes wird über einen Wellenfront – Sensor analysiert,

welcher über einen Computer die Deformation des Spiegels so steuert, daß die Störungen in der Wellenfront korrigiert werden.

Andere Ausführungsformen eines Zweistrahl – Interferometers sind das JAMINsche (siehe Abb. 9.16) sowie das MACH – ZEHNDER – Interferometer (Abb. 9.17). Aufgrund ihrer hohen Genauigkeit eignen sie sich insbesondere zur Bestimmung minimaler Änderungen des Brechungsindexes eines Stoffes.

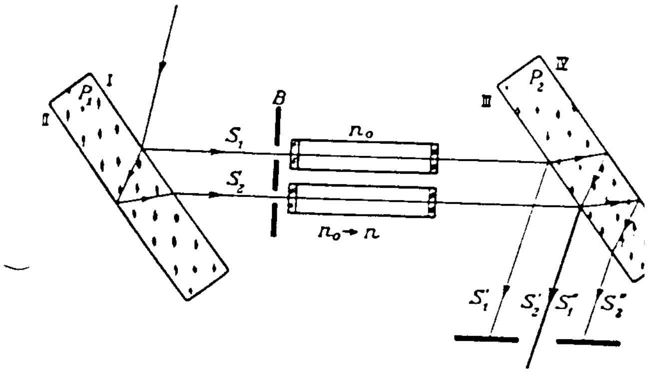


Abbildung 9.16: *Jaminsches Interferometer (aus [18])*

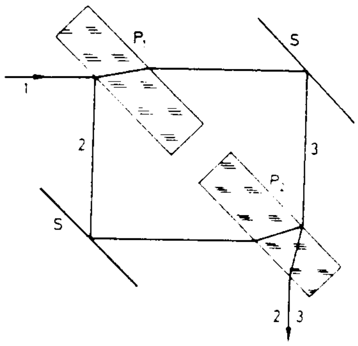


Abbildung 9.17: *Mach – Zehnder – Interferometer (aus [4])*

9.5 Vielstrahl – Interferenzen

Eine besonders interessante und wichtige Interferenzerscheinung läßt sich erzeugen, indem man eine größere Zahl kohärenter Lichtwellen zur Überlagerung bringt.

Zur Bestimmung der gültigen Gesetzmäßigkeiten betrachten wir die Anordnung in Abbildung 9.18 (aus [14]).

N kohärente Lichtquellen senden ebene Wellen von gleicher Amplitude A_0 in x – Richtung aus. Aufgrund der Parallelität besitzen im Übergang $x \to \infty$ jeweils zwei Lichtstrahlen den Gangunterschied $\Delta(x \to \infty) = a \sin\alpha$. Die <u>$N$ – Wellen</u> besitzen also <u>relativ zu einander</u> die <u>Phasendifferenz</u>

$$\boxed{\delta = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}\, a\, \sin\alpha}$$

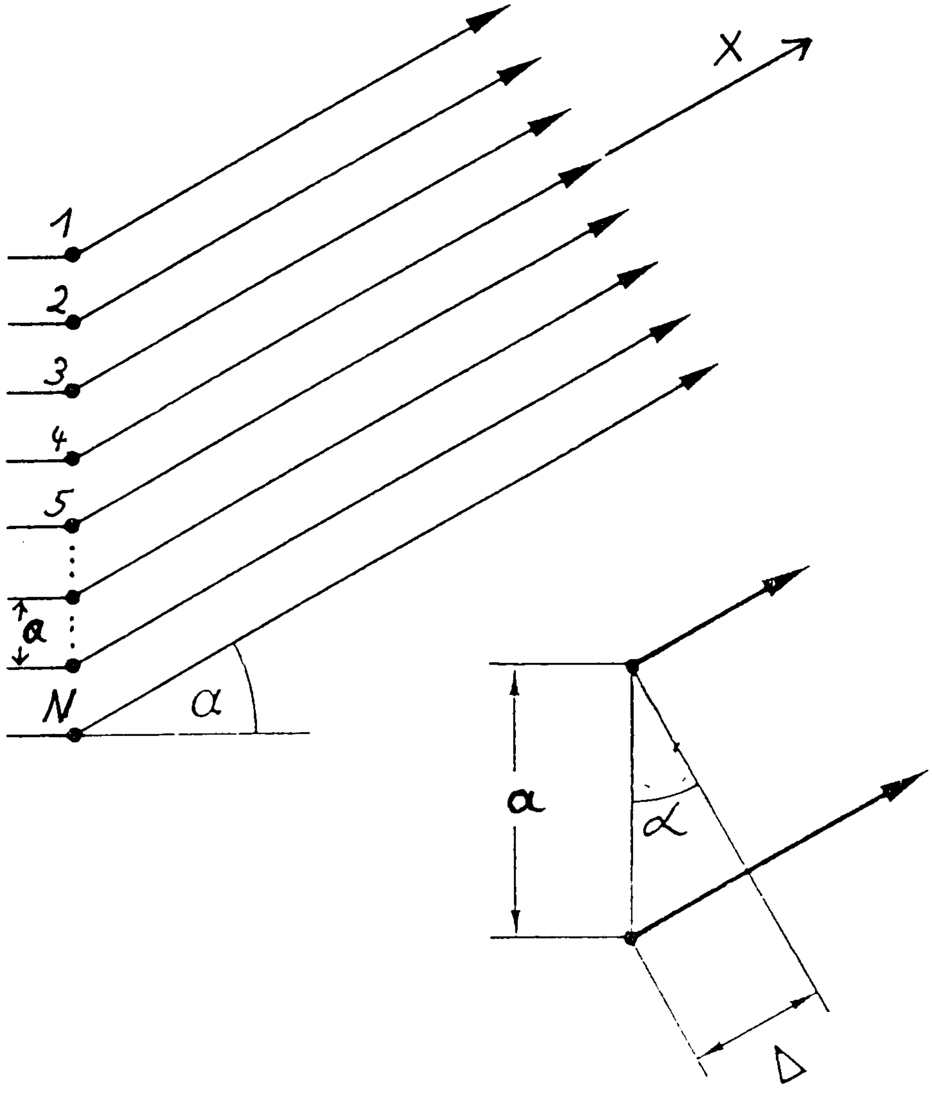


Abbildung 9.18: Zur theoretischen Herleitung der Bedingungen der Vielstrahlinterferenz.

Die mathematische Darstellung der Wellen lautet:

$$\begin{array}{lcl}
\text{1.Welle} \;\; E_1 & = & A_0\, e^{i\,(\omega t\,-\,kx)} \\
\text{2.Welle} \;\; E_2 & = & E_1\, e^{i\,\delta} = A_0\, e^{i\,(\omega t\,-\,kx)}\, e^{i\,\delta} \\
\text{3.Welle} \;\; E_3 & = & E_2\, e^{i\,\delta} = A_0\, e^{i\,(\omega t\,-\,kx)}\, e^{i\,2\,\delta} \\
\quad\vdots \quad\quad \vdots & & \\
N\text{.Welle} \;\; E_N & = & E_{N-1}\, e^{i\,\delta} = A_0\, e^{i\,(\omega t\,-\,kx)}\, e^{i\,(N\,-\,1)\,\delta}
\end{array}$$

Jede n – te Welle eilt der (n-1) – ten um δ voraus. Läßt man die Parallelstrahlen interferieren (z.B. mit Hilfe einer Sammellinse in deren Brennebene), dann berechnet sich die resultierende Feldstärke E zu

$$E = \sum_{m=1}^{N} E_m = A_0\, e^{i\,(\omega t\,-\,kx)} \underbrace{\sum_{m=1}^{N} e^{i\,(m\,-\,1)\,\delta}}_{S}$$

Die Summe S stellt eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $e^{i\,\delta}$ dar. Der Summenwert lautet

$$S = \frac{1 - e^{i\,N\,\delta}}{1 - e^{i\,\delta}} = \frac{e^{i\,\frac{N}{2}\,\delta}\left(e^{-i\,\frac{N}{2}\,\delta} - e^{i\,\frac{N}{2}\,\delta}\right)}{e^{i\,\frac{\delta}{2}}\left(e^{-i\,\frac{\delta}{2}} - e^{i\,\frac{\delta}{2}}\right)} = e^{i\,\frac{N\,-\,1}{2}\,\delta}\,\frac{\sin\frac{N}{2}\,\delta}{\sin\frac{\delta}{2}} \quad .$$

Damit erhält man für die Interferenzwelle

$$\boxed{E = A_0\,\frac{\sin\frac{N}{2}\,\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\; e^{i\,(\omega t\,-\,kx)}\; e^{i\,\frac{N\,-\,1}{2}\,\delta}} \quad .$$

Wie sieht die Intensitätsverteilung des Interferenzbildes aus?

Aus der Amplitude der Gesamtwelle

$$E = A_0\,\frac{\sin\frac{N}{2}\,\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

ergibt sich die Intensität zu

$$\boxed{I = A^2 = A_0^2\left(\frac{\sin\frac{N}{2}\,\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\right)^2} \quad ,$$

wobei $\delta = \frac{2\,\pi}{\lambda}\, a\, \sin\alpha$ ist.

Der Bruch wird minimal, wenn der Zähler seine Minimalwerte annimmt. Dieser Fall liegt vor, wenn $\delta = 2\pi\, k/N$ und der Nenner ungleich Null ist. Es müssen also diejenigen δ ausgeschlossen werden, für die $k/N = m$ eine ganze Zahl ist.
Für $\delta = 2\pi\, m$ mit $m = k/N \in \mathbf{Z}$ ist der Bruch unbestimmt $(0:0)$ und hat, wie weitere mathematische Diskussionen zeigen, den Wert N. Die Nullstellen des Nenners liefern Intensitätsmaxima der Interferenzwelle

$$\boxed{I = A_0^2\, N^2} \;,$$

welche als **Hauptmaxima** bezeichnet werden. Zwischen diesen entstehen an den Extremstellen des Zählers $(N-2)$ sogenannte **Nebenmaxima**. Die Abbildung 9.19 zeigt

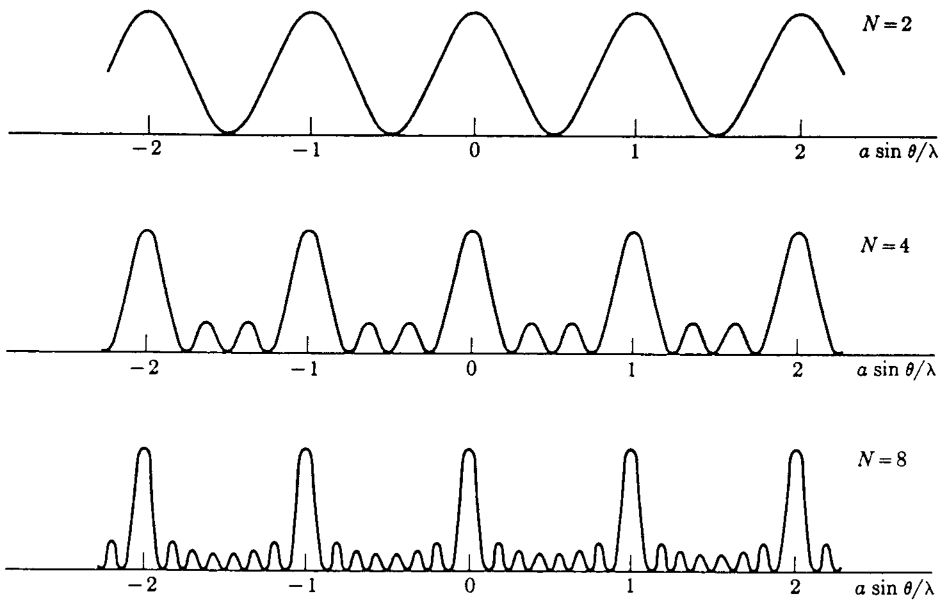


Abbildung 9.19: *Interferenzfunktion bei N=2, 4 und 8 Strahlen. (aus [14])*

die Interferenzfunktionen von (a) $N = 2$, (b) $N = 4$ und (c) $N = 8$ Strahlen. Die Hauptmaxima liegen bei $\delta = 0\,, 2\pi\,, 4\pi\, \ldots$. Dazwischen befinden sich $N - 2 = 0/2/6$ Nebenmaxima an den Extremstellen und $N - 1 = 1/3/7$ Minima an den Nullstellen des Zählers.

Mit zunehmender Zahl N der interferierender Strahlen wachsen die Hauptmaxima stark an, so daß diese für sehr große N das Interferenzbild dominieren. Sie sind dann besonders scharf ausgeprägt!
Aus diesem Grund ist die Vielstrahlinterferenz auf dem Gebiet der **Spektroskopie**, d.h. der Wellenlängenausmessung eines Spektrums, von großer Bedeutung.
Da die Lage der Interferenzstrukturen von der Wellenlänge des verwendeten Lichtes abhängt, erhält man für polychromatisches Licht farbige Interferenzerscheinungen, die voneinander getrennt liegen oder sich überlappen. Für jede Interferenzordnung bilden die

Hauptmaxima ein (Linien–) Spektrum des verwendeten Lichtes. Diese Tatsache nutzt man bei den Interferenzspektrometern aus, um die spektrale Struktur von Licht zu analysieren. Mit zunehmender Schärfe der Hauptmaxima wird es möglich, selbst feinere Details der Struktur der Spektrallinien (Feinstruktur) zu erkennen.

Das Fabry – Perot – Interferometer

Das erste Vielstrahlinterferometer wurde gegen Ende des 18. Jahrhunderts von Ch. Fabry und A. Perot konstruiert (Abb. 9.20). Es besteht aus zwei ganz schwach keilförmigen Glasplatten, die parallel zueinander angeordnet sind. Zur Erhöhung des Reflexionsvermögens sind die einander zugewandten Flächen teildurchlässig versilbert. Die Platte P_1 ist fest angebracht, durch Parallelverschieben von P_2 kann der Abstand d (Größenordnung cm) beider Platten verändert werden.
Ein Lichtstrahl, der durch P_1 in die Luftschicht zwischen den Platten eingedrungen ist, wird dort mehrfach hin – und herreflektiert, wobei jeweils ein Bruchteil des Lichtes aus P_2 austritt. Die transmittierten, parallelen Teilstrahlen sind kohärent und werden durch eine Linse in deren Brennebene zur Interferenz gebracht. Bei Beleuchtung mit divergentem Licht bilden die Maxima aller unter gleichem Winkel α einfallenden Strahlen konzentrische Kreise um die Plattennormale. Die Kreisradien variieren mit der Wellenlänge, so daß aus den Radien benachbarter Ringe bzw. aus den zugehörigen Einfallswinkeln die Wellenlängen der Spektrallinien ermittelt werden können.
Oft arbeitet man mit senkrecht einfallendem parallelen Licht und bestimmt die Wellenlänge durch Veränderung der Dicke der Luftschicht. Dabei mißt man den Wechsel der transmittierten Intensität als Funktion des Plattenabstandes.

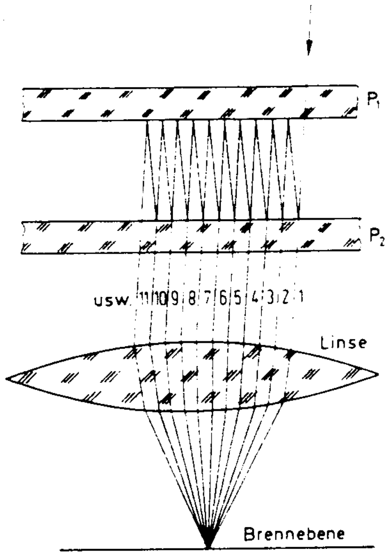


Abbildung 9.20: Fabry – Perot – *Interferometer (aus [4])*

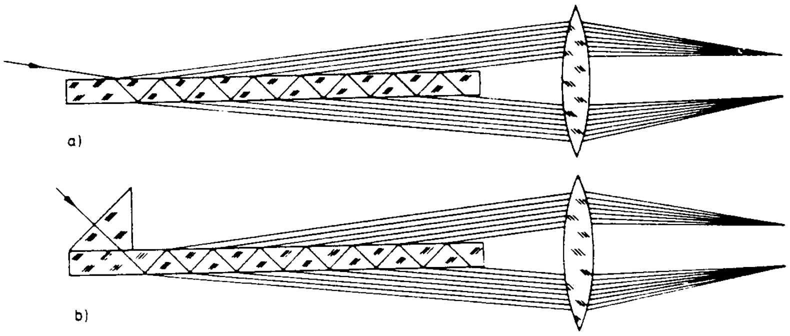


Abbildung 9.21: *Interferometer (a) nach* Lummer *und (b) nach* Lummer *u.* Gehrke. *(aus [4])*

Die Lummer – Gehrke – Platte

Bei dem Interferometer von LUMMER und GEHRKE (Abb. 9.21) fällt ein Lichtstrahl durch ein Glasprisma derart in eine planparallele Glasplatte ein, daß er fast unter dem Grenzwinkel der Totalreflexion auf deren Außenflächen trifft. Der Strahl wird fast vollständig nach innen reflektiert. Er läuft daher mehrfach zwischen den Plattenflächen hin und her. Die seitlich austretenden kohärenten Teilstrahlen interferieren in der Brennebene einer Linse. Bei Beleuchtung mit einem divergenten Lichtbündel ergeben sich Interferenzkurven gleicher Neigung, die für verschiedene Wellenlängen voneinander getrennt sind.

Weitere Anwendung findet die Vielstrahlinterferenz bei Interferenz – Filtern und – Mikroskopen.

9.6 Das Auflösungsvermögen eines Interferometers

Wir kommen noch einmal auf die Bedeutung von Interferometern in der Spektroskopie zurück. Für die Güte eines Spektralapparates ist das **Auflösungsvermögen** entscheidend, welches Aufschluß über die Fähigkeiten eines optischen Gerätes gibt, zwei unterschiedliche Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ noch getrennt zu registrieren, d.h., deutlich als unterschiedliche Spektrallinien darzustellen. Das Auflösungsvermögen ist gegeben durch den Ausdruck $\lambda/d\lambda$. Dabei bezeichnet $d\lambda$ den spektralen Abstand zweier gerade noch getrennt wahrnehmbarer Wellenlängen.

Bei einem Interferenzspektrometer werden zwei Wellenlängen umso besser unterschieden, je schärfer die einzelnen Hauptmaxima sind. Die Schärfe ist wiederum abhängig von der Anzahl N der interferierenden Teilstrahlen.
Bei Erhöhung von N

- werden die Hauptmaxima mit $I \sim N^2$ höher.
- nimmt die Zahl der dazwischen befindlichen Minima mit $N-1$ zu.
  $\Rightarrow$ Die Hauptmaxima werden mit $\dfrac{1}{N-1} \approx \dfrac{1}{N}$ schmäler (schärfer).

Nach dem **Rayleigh–Kriterium** gilt:

> *Zwei Linien I_λ und $I_{\lambda+d\lambda}$ werden in der m.ten Ordnung gerade noch unterschieden, wenn das Hauptmaximum von $I_{\lambda+d\lambda}$ auf das erste Minimum von I_λ fällt.*

Das Kriterium ist gleichbedeutend mit der Forderung, daß sich die Halbwertsbreiten H nicht überlappen dürfen, da sich sonst nur noch ein einziges Maximum ausbildet. Die Bedingung für Hauptmaxima m.ter Ordnung lautet

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\alpha = \quad \delta \quad &= 2\,m\,\pi \\ \Leftrightarrow \qquad \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\alpha &= 2\,m\,\pi \\ \Leftrightarrow \qquad a \sin\alpha &= m\,\lambda \quad , \end{aligned}$$

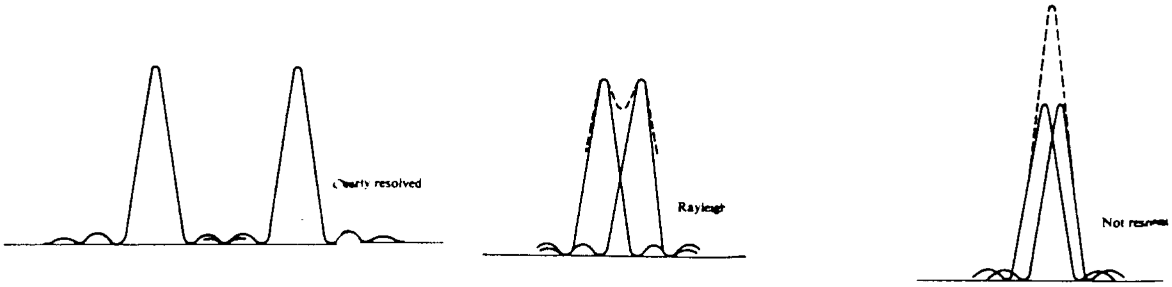


Abbildung 9.22: *Rayleigh–Kriterium für das Auflösungsvermögen. (aus [13])*

d.h. der Abstand zweier Hauptmaxima ist λ. Der Abstand zwischen dem Hauptmaximum und dem ersten Nebenmaximum m.ter Ordnung beträgt dann

$$\frac{\lambda}{N-1} \simeq \frac{\lambda}{N}$$

Damit lassen sich nun die Bedingungen für das Hauptmaximum der Linie $I_{\lambda+d\lambda}$ und das erste Minimum der Linie I_λ in der m.ten Ordnung aufstellen:

$$\begin{array}{ll} \text{Hauptmaximum von } I_{\lambda+d\lambda}: & \sin\alpha_{max} = m(\lambda + d\lambda) \\ \text{Minimum von } I_\lambda: & \sin\alpha_{min} = m\,\lambda + \dfrac{\lambda}{N} \end{array}$$

Das Rayleigh – Kriterium ist für $\alpha_{max} = \alpha_{min}$ erfüllt. Daraus folgt

$$m\,(\lambda + d\lambda) = m\,\lambda + \frac{\lambda}{N}$$

$\Rightarrow$ <u>Auflösungsvermögen eines Interferenzspektrometers</u>

$$\boxed{\frac{\lambda}{d\lambda} = N\,m} \qquad \text{mit} \quad \begin{array}{ll} N: & \text{Anzahl der interferierenden Strahlen} \\ m: & \text{Ordnung der Interferenz} \end{array}$$

Beispiele:

Interferometer von	N	m	Auflösungsvermögen $\frac{\lambda}{d\lambda}$
Fabry – Perot	60	$7 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^6$
Lummmer – Gehrke	10	$4 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^5$

Interferenzspektrometer haben den Nachteil, daß die Spektroskopie bei ihnen auf einen kleinen Wellenlängenbereich beschränkt ist, da sich sonst Linien verschiedener Ordnungen und Wellenlängen überlagern. Die zugehörige kennzeichnende Größe ist der **nutzbare**

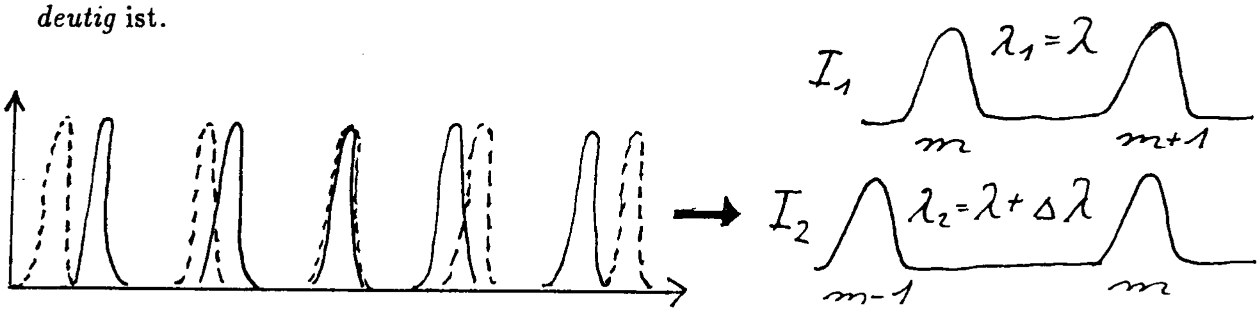


Abbildung 9.23: *Die Hauptmaxima zweier Interferenzfunktionen verschiedener Wellenlängen λ_1 und λ_2 rücken mit zunehmender Ordnung der Interferenz auseinander.*

Wellenlängenbereich $\Delta\lambda$, d.h. der Bereich, in dem die Wellenlängenbestimmung *eindeutig* ist.

Wir betrachten zwei Intensitätsverteilungen I_1 und I_2 mit $\lambda_1 = \lambda$ und $\lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda$. Da die Trennung der Hauptmaxima linear mit der Ordnung zunimmt (Abb. 9.23), werden die Linien von I_1 und I_2 immer weiter auseinanderlaufen, bis schließlich das m.te Maximum von I_2 das $(m+1)$.te Maximum von von I_1 überdeckt. Dann gilt

$$(m+1)\,\lambda = m\,(\lambda + \Delta\lambda)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}} \quad \underline{\text{nutzbarer Wellenlängenbereich}}$$

Bei Vielstahlinterferenzen treten Ordnungen $m = 40\,000 - 70\,000$ auf. Für eine Wellenlänge $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$ (im sichtbaren Bereich) ist der nutzbare Wellenlängenbereich $\Delta\lambda \simeq 10^{-2}\,\mathrm{nm}$ sehr gering. Man wendet Interferenzspektrometer daher meist erst an, nachdem eine Vorzerlegung des Lichtes z.B. mit Hilfe eines Prismenspektralapparates stattgefunden hat (Abb. 9.24).

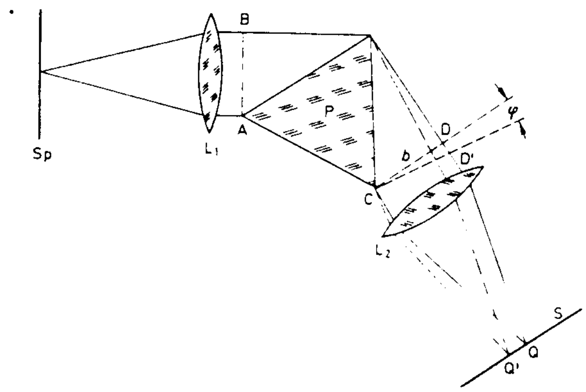


Abbildung 9.24: *Zerlegung des Lichtes mit Hilfe eines Prismenpektralapparates. (aus [4])*

Kapitel 10

Beugung

Wir haben bisher Optik betrieben unter der Voraussetzung, daß die charakteristischen Abmessungen sehr groß im Vergleich zur Wellenlänge des verwendeten Lichtes sind ($d \gg \lambda$). Die grundlegende Gesetzmäßigkeit der geometrischen Optik, die geradlinige Ausbreitung der Lichtstrahlen, war erfüllt.

Wie verhalten sich nun Lichtwellen an Hindernissen im Strahlengang bzw. an optischen Vorrichtungen, deren Dimensionen ungefähr gleich der Größenordnung der Wellenlänge sind?

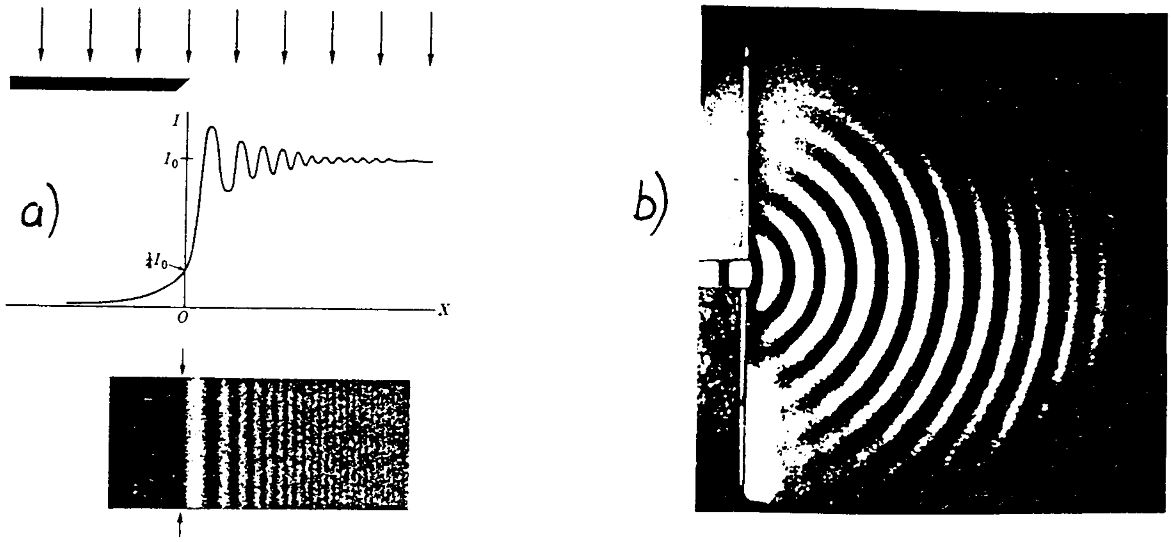


Abbildung 10.1: *(a) Fresnelsche Beugung an einer Kante, (b) Beugung an einem Einzelspalt. (aus [1])*

(a) Wird die freie Ausbreitung einer Welle durch ein Hindernis gestört, so stellt man wider Erwarten auch im geometrischen Schattenbereich des Hindernisses eine Wellenerregung fest.

(b) Trifft eine ebene Welle auf einen Spalt mit $d \ll \lambda$, so tritt aus dem Spalt eine Kugel– bzw. Kreiswelle aus.

In beiden Fällen erfolgt eine Abweichung von der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes, die zugehörigen Lichtstrahlen erfahren eine Richtungsänderung. Diese Erscheinung bezeichnet man als **Beugung**. Das Licht wird an Hindernissen und freien Durchlässen (Spalt, Blendenöffnung) **gebeugt**.
Die Erklärung geschieht mit dem Huygensschen Prinzip: Trifft eine ausgedehnte Wellenfront auf ein Hindernis, welches nur einen Teil der Wellenfront hindurch - bzw. an den Rändern vorbeilaufen läßt, dann wird jeder Punkt der ungestörten Partien der Wellenfront Ausgangspunkt einer Elementarwelle. Letzere breiten sich kugel– bzw. kreisförmig aus, so daß sie auch in den Schattenraum des Hindernisses gelangen, wo sie interferieren. Das zugehörige Interferenzbild heißt **Beugungsfigur**.

Man unterscheidet zwei experimentelle Vorgehensweisen, Beugungserscheinungen zu erzeugen und zu beobachten.

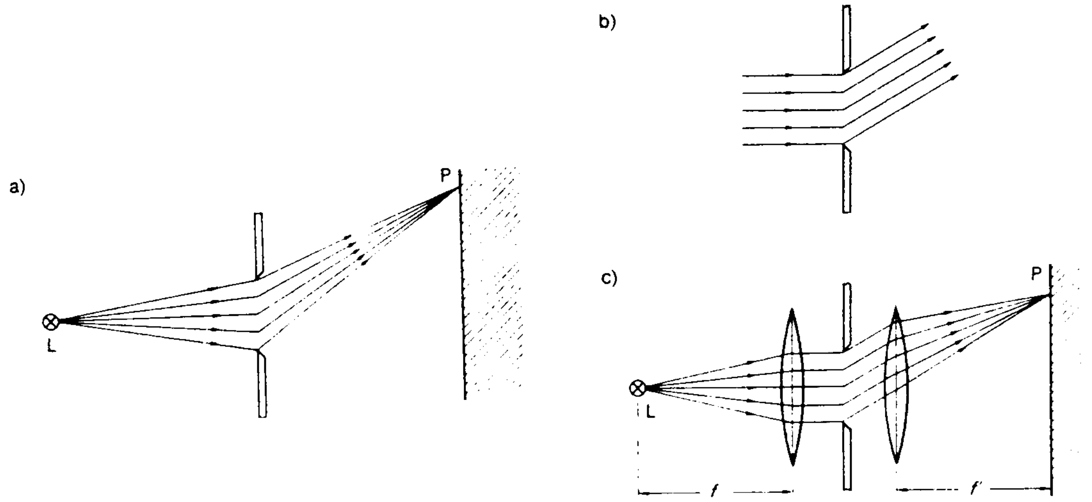


Abbildung 10.2: *Beugung an einer Öffnung: a)* FRESNEL*sche Betrachtungsweise, b) und c)* FRAUNHOFER*sche Betrachtung. (aus [14])*

Bild a) zeigt die **Beugung nach Fresnel**. Sie zeichnet sich dadurch aus, daß Lichtquelle L und/oder Beobachtungspunkt P der Beugungserscheinung einen endlichen Abstand zur Durchlaßöffnung besitzen. Die experimentelle Untersuchung der Beugungserscheinung geschieht mit divergenten und konvergenten Lichtbündeln.
Im Gegensatz dazu befinden sich bei der **Fraunhoferschen Beugung** (J.FRAUNHOFER

1787 – 1826) sowohl L, als auch P im Unendlichen. Dies erreicht man, indem man zu beiden Seiten der Durchlaßöffnung eine Linse derart einfügt, daß Lichtquelle und Beobachtungsschirm in den Brennebenen liegen. Man arbeitet hier mit ebenen Wellen.

10.1 Fraunhofersche Beugung am Spalt

Versuch:

(a) Ein Laserstrahl wird an einem Einzelspalt gebeugt. Das Beugungsbild zeigt in der Mitte einen breiten, hellen Streifen, der symmetrisch von dunklen und hellen Beugungsstreifen umgeben ist (Abb. 10.3).
Bei Verbreiterung des Spaltes rücken die Intensitätsmaxima immer dichter zusammen, bis sie schließlich verschwinden.

(b) Die Intensitätsverteilung der Beugungsfigur wird mit Hilfe einer Photodiode ausgemessen, um die Beugungsbedingungen zu ermitteln.
Ergebnis: Man beobachtet **Beugungsminima** bei

$$\boxed{\sin\alpha_m = \frac{m\,\lambda}{d}} \qquad \begin{array}{rcl} d &=& \text{Spaltbreite} \\ m &\in& \mathbf{Z}\setminus\{0\} \end{array}$$

Theoretische Herleitung der Beugungsbedingung

Abbildung 10.3: *Intensitätsverteilung bei Fraunhoferscher Beugung am Einzelspalt. (aus [1])*

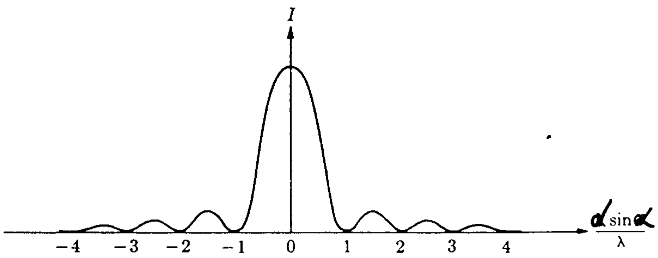


Abbildung 10.4: *Zur theoretischen Herleitung der Beugungsbedingungen am Einzelspalt. (aus [14])*

Fällt eine ebene Welle senkrecht auf einen Spalt ($d \gg \lambda$), dann begrenzt dieser eine Wellenfläche, deren Punkte gleichphasig schwingende Erregungszentren darstellen. Wir unterteilen den Spalt in N Teilstücke mit $N \to \infty$. Von jedem Teilstück geht unter dem Winkel α zur Spaltnormale eine Elementarwelle E_k aus. Das Koordinatensystem sei so gewählt, daß die Wellen in x – Richtung fortschreiten. In Analogie zur Vielstrahlinterferenz besitzen jeweils zwei Strahlen den Gangunterschied $\Delta = \sin\alpha\, d/N$. Zwischen den Elementarwellenstrahlen besteht also die relative Phasendifferenz

$$\delta = 2\,\pi\,\frac{\Delta}{\lambda} = 2\,\pi\,\frac{d\,\sin\alpha}{N\,\lambda}$$

Die Elementarwellen

$$E_k = A_k\, e^{i\,(\omega t - kx)}\; e^{i\,(k-1)\,\delta}$$

sind kohärent und von gleicher Amplitude, ihre Überlagerung ergibt im Unendlichen die Fraunhofersche Beugungsfigur. Die resultierende elektrische Feldstärke berechnet sich zu

$$E(\alpha) = \sum_{k=1}^{N} E_k = E_0^\alpha\, \frac{\sin\frac{N}{2}\,\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\; e^{i\,\frac{N-1}{2}\,\delta}$$

Dabei ist E_0^α die elektrische Feldstärke der ebenen Welle in Richtung α. darstellt. Bezeichnet man mit φ die Phasenverschiebung zwischen den beiden äußeren Strahlen, d.h. $\varphi = N\,\delta$, so läßt sich im Grenzübergang $N \to \infty$ folgende Umformung vornehmen:

$$\frac{\sin\frac{N}{2}\,\delta}{\sin\frac{\delta}{2}} = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{1}{N}\,\frac{\varphi}{2}} \overset{N\to\infty}{=} \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{1}{N}\,\frac{\varphi}{2}} = N\,\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad E(\alpha) = E_0^\alpha\; N\; \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}\; e^{i\,\frac{N-1}{2}\,\delta}$$

Wir betrachten nun die Feldstärke $E(0)$, welche die Überlagerung der Wellen in der Richtung $\alpha = 0$, d.h. ohne Phasenverschiebung ergeben würde. Die Amplitude A_0^α von E_0^α ergibt sich aus dem Zusammenhang

$$|E(0)| = A_0^\alpha\, N = A_0$$

zu $A_0^\alpha = A_0\,\frac{1}{N}$. Für die resultierende Amplitude $A(\alpha)$ von $E(\alpha)$ und die Intensität $I(\alpha)$, die in Richtung des Winkels α zur Spaltnormalen auftritt, gilt also

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Amplitude} & A(\alpha) = A_0\,\dfrac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} & \\ & & \text{mit}\quad \varphi = \dfrac{2\,\pi\,d}{\lambda}\,\sin\alpha \\ \text{Intensität} & I(\alpha) = A(\alpha)^2 = A_0^2\,\left(\dfrac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}\right)^2 & \end{array}}$$

Beugungsminima liegen vor, falls $\sin\frac{\varphi}{2} = 0$, also $\varphi/2 = m\,\pi$ gilt, wobei $\varphi/2$ nicht gleich Null sein darf.

$$\boxed{\sin\alpha_m = \frac{m\,\lambda}{d} \qquad m \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}} \quad \underline{\text{Beugungsminima}}$$

Für $\underline{m = 0}$ ist der Bruch $\dfrac{\sin\varphi/2}{\varphi/2}$ unbestimmt und nimmt den Wert 1 an. In 0.ter Ordnung liegt also ein **Beugungsmaximum** mit der Intensität

$$I(\alpha) = I_0 = A_0^2 \qquad \text{zentrales Hauptmaximum}$$

vor. Diese Intensität wäre auch bei der Überlagerung der Strahlen in Richtung $\alpha = 0$, also ohne Phasenverschiebung zu beobachten. Außer dem zentralen Beugungsmaximum nullter Ordnung existieren noch Nebenmaxima höherer Ordnungen, deren Lage näherungsweise durch

$$\sin\alpha_m \approx \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d} \quad m \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$$

angegeben werden kann. Die Superposition der Teilwellen unter Berücksichtigung ihrer

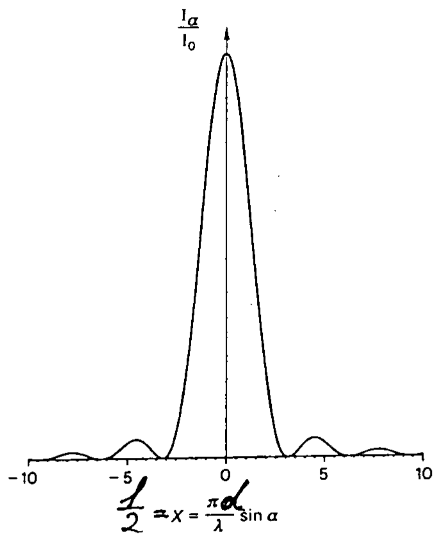


Abbildung 10.5: *Intensitätsverteilung bei der Beugung am Spalt. (aus [14])*

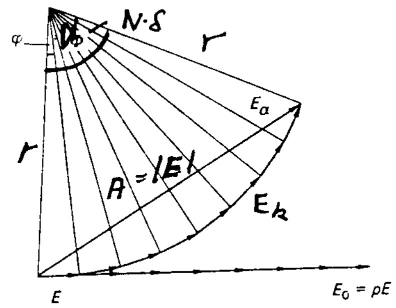


Abbildung 10.6: *Zur anschaulichen Herleitung der Beugungsbedingungen am Einzelspalt. (aus [14])*

Phasenlage kann als Vektoraddition in der Gaußschen Zahlenebene veranschaulicht werden (Abb. 10.6).

Die Elementarwellen

$$E_k = A_k\, e^{i\,(\omega t - kx)}\, e^{i\,(k-1)\,\delta}$$

sind Zeiger gleicher Länge, die gegeneinander um δ gedreht sind. In der *Näherung sehr kleiner Verschiebungen* δ liest man aus der Zeichnung für $A(\alpha) = |E(\alpha)|$ ab

$$A(\alpha) = 2\,r \overset{(r \simeq A_k/\delta)}{=} 2\,\frac{A_k}{\delta}\,\sin\frac{N\,\delta}{2}$$

ab. Daraus folgt mit $A_k = A_0/N$ und $\varphi = N\,\delta$ für die Länge (Amplitude) des resultierenden Vektors

$$A(\alpha) = A_0\,\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}\ .$$

Beugungsminima ergeben sich für $\sum E_k = 0$. Im Grenzfall $N \to \infty$ liegt dann ein geschlossener *Kreis* vor und es gilt

$$\varphi = N\,\delta = \frac{2\,\pi\,d\,\sin\alpha}{\lambda} = 2\,m\,\pi \qquad \Rightarrow \qquad \sin\alpha_m = \frac{m\,\lambda}{d}$$

10.2 Beugung am Draht

<u>Versuch:</u> Ein Laserstrahl wird zunächst an einem Spalt, anschließend an einem Draht gebeugt, wobei Spaltbreite und Drahtdicke übereinstimmen.
Es bildet sich in beiden Fällen die gleiche Beugungsfigur aus.

Die beiden Hindernisse, bei denen durchlässige und undurchlässige Stellen genau vertauscht sind, heißen **komplementäre Blenden**. Allgemein gilt für beliebige komplementäre Blenden (Spalt – Draht, Lochblende – Kreisblende, usw.) das **Prinzip von Babinet**:

Komplementäre Blenden liefern außerhalb des direkten Strahls identische Beugungserscheinungen.

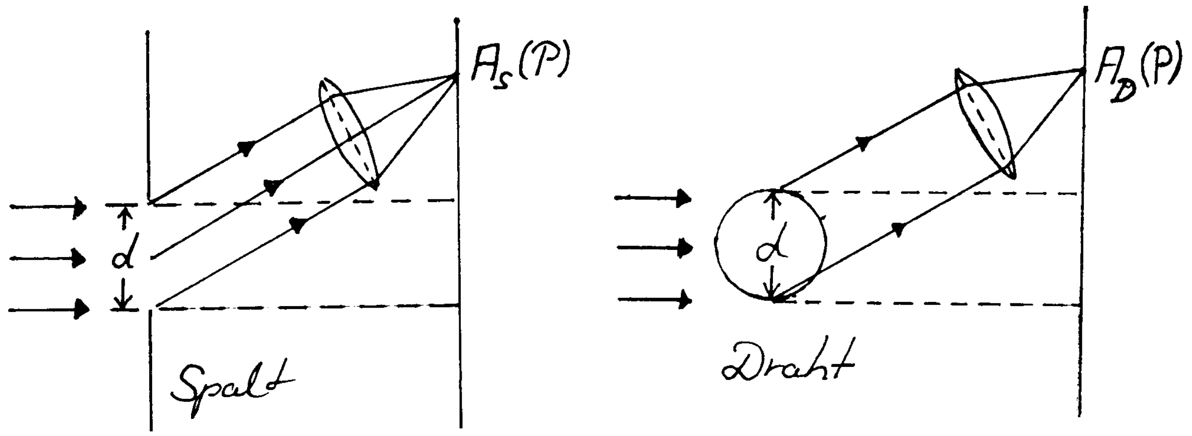


Abbildung 10.7: *Zum* BABINET*schen Theorem:* FRAUNHOFER*sche Beugung (a) an einem Spalt und (b) an einem gleichdicken Draht. (aus [8])*

Das Theorem läßt sich in der FRAUNHOFERschen Betrachtungsweise wie folgt erklären: Eine ebene Lichtwelle falle senkrecht auf einen Schirm. Wir betrachten (Abb. 10.7) auf dem Schirm außerhalb des direkten Strahls einen Punkt P. Bringt man jeweils nur eines der komplementären Hindernisse, Spalt oder Draht in den Strahl ein, so erzeugt dieses Hindernis in P eine Amplitude A_S oder A_D der elektrischen Feldstärke. Beide Hindernisse zusammen müssen, da sie komplementär sind, sich gegenseitig in ihrer Wirkung aufheben. Bei Kombination der komplementären Blenden muß also in P Dunkelheit herrschen,d.h. Auslöschung stattfinden.

$$A_S + A_L = 0 \quad \Rightarrow \quad A_S = -A_D$$

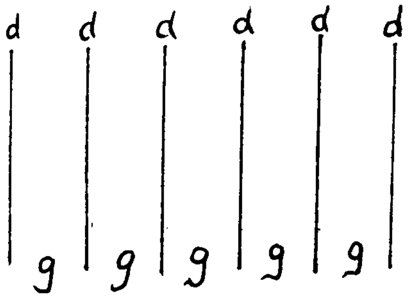
Für die in P auftretenden Intensitäten folgt mit $I \sim A^2$

$$I_S = c\,A_S^2 = c\,(-A_D)^2 = I_D$$

Die Intensitätsverteilung ist für alle Punkte P außerhalb der direkten optischen Abbildung gleich, es entstehen identische Beugungsfiguren.

10.3 Fraunhofersche Beugung am ebenen Strichgitter

Uns interessiert nun das Beugungsbild vieler Spalte der Breite d, die in konstantem Abstand g voneinander angeordnet sind. Zur Herstellung solcher **Strichgitter** mit der **Gitterkonstante** g benutzt man meist durchsichtige Glasplatten, in welche lichtundurchlässige Striche eingeritzt werden, so daß die unbehandelten Stellen als Spalte wirken.



Trifft eine ebene Welle auf ein Gitter mit N Spalten, so überlagern sich die von den einzelnen Spalten entworfenen Beugungsfiguren. Es entsteht im wesentlichen das Bild eines Einzelspaltes, welches jedoch aufgrund von Interferenzen des von den einzelnen Spalten unter gleichem Winkel gebeugten Lichtes moduliert ist.

Zur genaueren Erläuterung greifen wir aus dem Gitter zwei Spalte heraus und betrachten zwei Lichtbündel, die unter dem Winkel α gebeugt werden. Die Interferenz der von einem

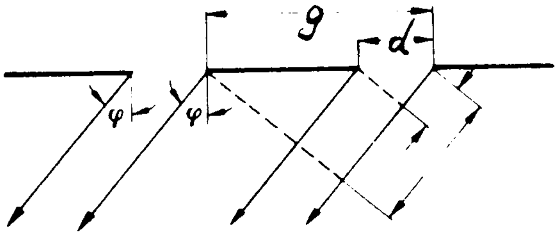


Abbildung 10.8: *Lichtbeugung an zwei benachbarten Spalten eines Strichgitters. (aus [4])*

Spalt ausgehenden Elementarwellenstrahlen ergibt das Beugungsbild des Einzelspaltes. Die Randstrahlen eines solchen Strahlenbündels besitzen, wie in Abschnitt 9.1 gezeigt wurde, die Phasendifferenz

$$\varphi_1 = \frac{2\,\pi\,d}{\lambda}\,\sin\alpha \quad .$$

Dies gilt für alle N Spalte des Gitters. Die Intensitätsverteilung der Beugungsfigur eines einzelnen Spaltes lautet (siehe Abschnitt 9.1)

$$I_S(\alpha) = I_0 \left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\frac{\varphi_1}{2}} \right)^2$$

Zusätzlich interferieren nun aber auch Strahlen aus verschiedenen Spalten miteinander. Daher muß auch die Phasenverschiebung **korrespondierender** oder **homologer Strahlen** beachtet werden. Dabei handelt es sich um sich entsprechende Strahlen zweier benachbarter Spalte.

$$\varphi_2 = \frac{2\,\pi\,g}{\lambda}\,\sin\alpha$$

Wir nehmen zunächst eine so kleine Spaltbreite $\underline{d \ll \lambda\,,\; d \ll g}$ an, daß von jedem Spalt nur eine einzige Elementarwelle ausgehe. Dann erzeugt das Gitter eine Vielstrahlinterferenz, deren Intensitätsverteilung nach Abschnitt 8. durch

$$I_G(\alpha) = \left(\frac{\sin\frac{N}{2}\,\varphi_2}{\sin\frac{\varphi_2}{2}}\right)^2$$

gegeben ist.

Lassen wir nun eine endliche Spaltbreite zu, dann überlagern sich die bisher getrennt dargestellten Intensitätsverteilungen von Spalt und Gitter zu einer Gesamtintensität $I(\alpha) = I_0\,I_S(\alpha)\,I_G(\alpha)$:

$$\boxed{I(\alpha) = I_0\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi\,d}{\lambda}\,\sin\alpha\right)}{\frac{\pi\,d}{\lambda}\,\sin\alpha}\right]^2\left[\frac{\sin\left(\frac{N\,\pi\,g}{\lambda}\,\sin\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi\,g}{\lambda}\,\sin\alpha\right)}\right]^2}$$

Wir haben hier auf die exakte theoretische Herleitung der Gesamtintensität, d.h. die Ad-

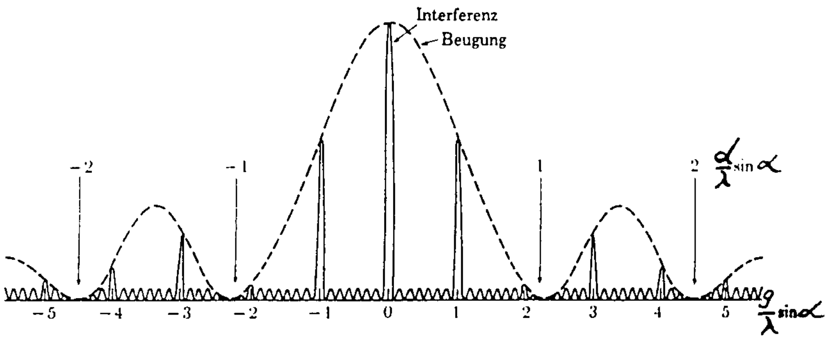


Abbildung 10.9: *Intensitätsverteilung (qualitativ) bei der Beugung an einem Strichgitter mit $N = 8$ Spalten. (aus [1])*

dition der Elemenatarwellenausdrücke unter Berücksichtigung der Phasenlage verzichtet, da dies im Rahmen dieser Vorlesung zu aufwendig wäre.

Wie bei der Vielstrahlinterferenz werden auch bei der Beugung am Gitter die Beugungsmaxima umso schärfer, je mehr Strahlen an der Überlagerung beteiligt sind. Größere

Schärfe erzielt man daher mit Gittern höherer Strichzahl N. Die Schärfe sowie auch die Tatsache, daß die Maxima mit zunehmender Ordnung der Beugung auseinandergezogen werden, macht man sich bei der Konstruktion von Spektralapparaten zunutze, bei denen Gitter das Kernstück bilden. Die in Abschnitt 9.6 für das Auflösungsvermögen und den nutzbaren Wellenlängenbereich eines Interferenzspektrometers gefundenen Ergebnisse lassen sich auf den **Gitterspektralapparat** übertragen.

Auflösungsvermögen	nutzbarer Wellenlängenbereich
$\dfrac{\lambda}{d\lambda} = N\,m$	$\Delta\lambda = \dfrac{\lambda}{m}$

Bei einer anderen Ausführung eines Spektralapparates wird die räumliche Trennung der Lichtwellenlängen von einem Prisma geleistet. Wir wollen an dieser Stelle der Vollständigkeit halber das **Auflösungsvermögen eines Prismenspektralapparates** (ohne Beweis!) angeben.

Das Prisma bildet den Beleuchtungsspalt aufgrund seiner endlichen Abmessungen nicht

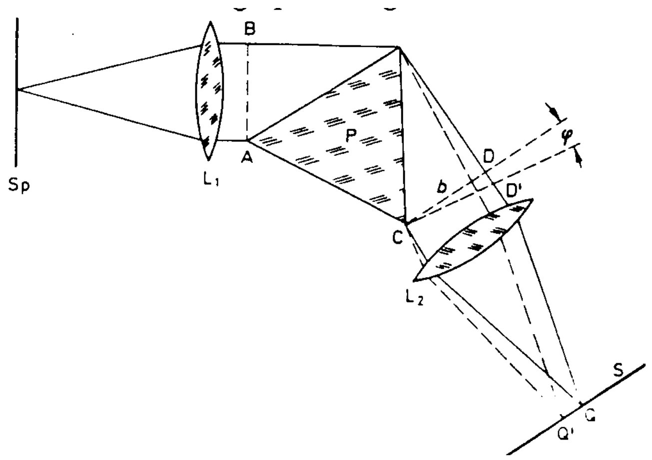


Abbildung 10.10: *Zum Auflösungsvermögen eines Prismenspektralapparates. (aus [4])*

scharf, sondern als Beugungserscheinung ab (siehe Abb. 10.10). Die Beugungsbilder Q und Q′ nur wenig verschiedener Wellenlängen werden durch die Dispersion des Prismenmaterials räumlich auseinandergezogen. Für das Auflösungsvermögen des Prismas gilt

$$\boxed{\frac{\lambda}{d\lambda} = b\,\frac{dn}{d\lambda}}$$

b : Basisbreite des Prismas

$\dfrac{dn}{d\lambda}$: Dispersion

Mit $b = 5\,\mathrm{cm}$ und $dn/d\lambda = 10^{-4}\,\mathrm{nm}^{-1}$ erhält man $\lambda/d\lambda = 5\,000$ als typischen Wert für das Auflösungsvermögen eines Prismas.

10.4 Fraunhofersche Beugung am Youngschen Doppelspalt

Reduziert man beim Beugungsgitter die Anzahl der Spalte auf $N = 2$, so erhält man einen Doppelspalt. Die Intensitätsverteilung entnimmt man dem vorangehenden Abschnitt. Die Abbildung 10.11 zeigt die Intensitätsverteilung der von einem Doppelspalt entworfenen Beugungsfigur.

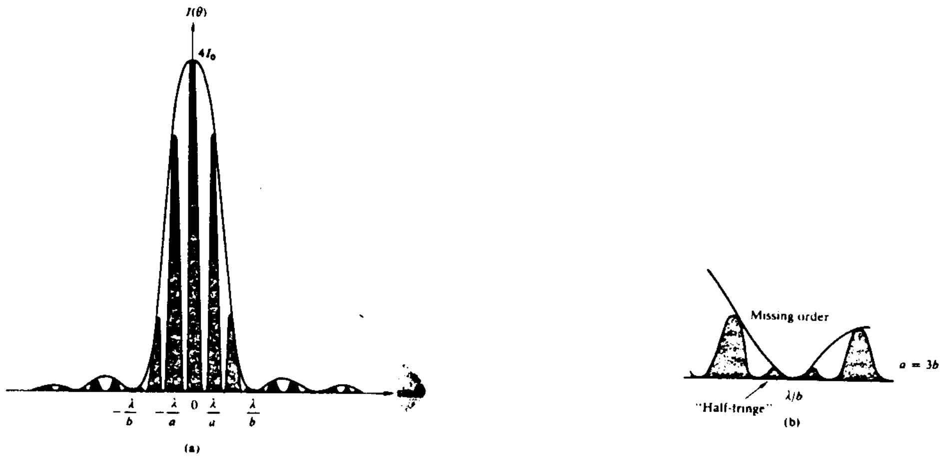


Abbildung 10.11: *Intensitätsverteilung bei der Beugung an einem Doppelspalt. (aus [13])*

Darin gibt die Einhüllende die Interferenzstruktur des Einzelspaltes an, die grau gefärbte Kurve beschreibt die Überlagerung der homologen Strahlen und damit die Interferenzstruktur des Gitters.

10.5 Beugung an mehrdimensionalen Strukturen

10.5.1 Fraunhofersche Beugung an der Loch – bzw. Kreisblende

Eine Lochblende mit Radius r, die senkrecht mit parallelem Licht bestrahlt wird, entwirft eine Beugungsfigur, die aus Symmetriegründen rotationssymmetrisch um die Blendenachse ist. Das Beugungsbild weist in der Mitte ein kreisförmiges Hauptmaximum auf, welches von konzentrischen dunklen und hellen Ringen umgeben ist. Dabei ist die Intensität der Nebenmaxima wesentlich geringer als die Intensität des Hauptmaximums.

Da die Berechnung der Intensitätsverteilung sehr kompliziert ist, seien hier nur die Ergebnisse angegeben:

Die Minima liegen bei $\boxed{\sin\alpha = \kappa_m \, \frac{\lambda}{r}}$.

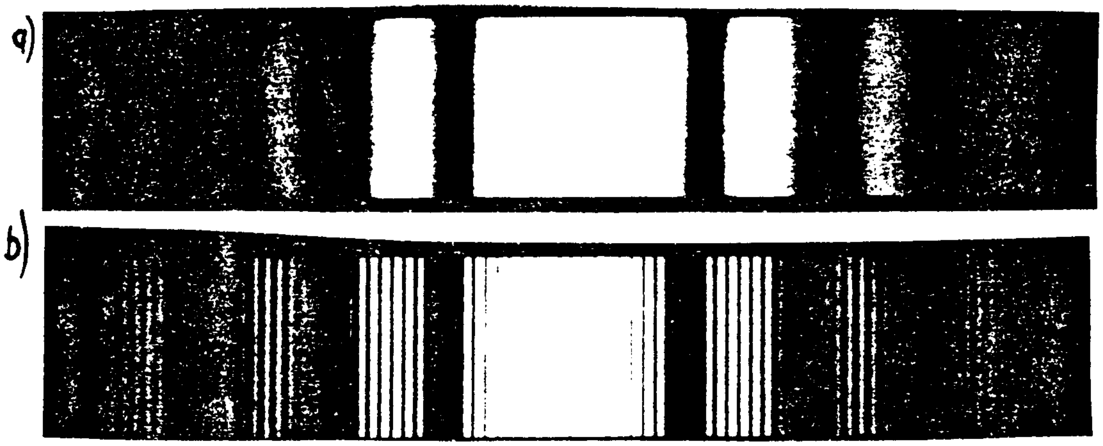


Abbildung 10.12: *Fraunhofersche Beugungsfigur (a) am Einzelspalt und (b) am Doppelspalt. (aus [13])*

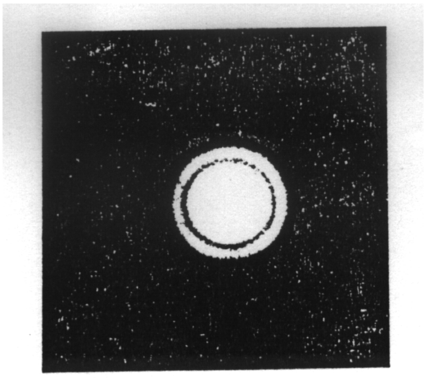


Abbildung 10.13: FRAUNHOFER*sche Beugung an einer Kreisblende. (aus [1])*

Der Abstand der Ringe wird nach außen hin, d.h. mit steigender Ordnungszahl kleiner:

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= 0,610\\ \kappa_2 &= 1,116\\ \kappa_3 &= 1,619\end{aligned}$$

Die Intensitätsverteilung ist gegeben durch

$$I(\alpha) = I_0 \left[\frac{2\,J_1(\varrho)}{\varrho}\right]^2 \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \varrho = \dfrac{2\,\pi\,r\,\sin\alpha}{\lambda} \\ J_1: \text{BESSELfunktion 1.Art 1.Ordnung} \end{array}$$

Die Kenntnisse über die Loch – bzw. die dazu komplementäre Kreisblende sind von großer Wichtigkeit, da die Beugung an einer Lochblende das Auflösungsvermögen vieler optischer Abbildungsvorrichtungen (Auge, Kamera, Teleskop usw.) begrenzt, wie wir in den nächsten Abschnitten sehen werden. Daher sei noch gesondert die Lage des 1.Minimums angegeben:

$$\boxed{\sin\alpha_1 = 0,61\,\frac{\lambda}{r}}$$

10.5.2 Fraunhofersche Beugung an Flächen – und Raumgittern

Bringt man in den Strahlengang eines parallelen Lichtbündels ein Hindernis, bei dem lichtdurchlässige und – undurchlässige Stellen flächenhaft oder räumlich periodisch angeordnet sind, so treten Interferenzen auf, für die die Bedingungen der Form

$$\sin\alpha_m = \frac{m\,\lambda}{d} \qquad \text{für Maxima}$$

in zwei oder drei Dimensionen gelten.

Beugung am Flächengitter

Ein Beispiel eines zweidimensionalen Beugungsgitters ist das Kreuzgitter, welches man einfach konstruieren kann, indem man zwei Strichgitter um 90° gegeneinander verdreht übereinanderlegt.

Versuch: Das Beugungsbild eines Kreuzgitters wird vorgeführt.

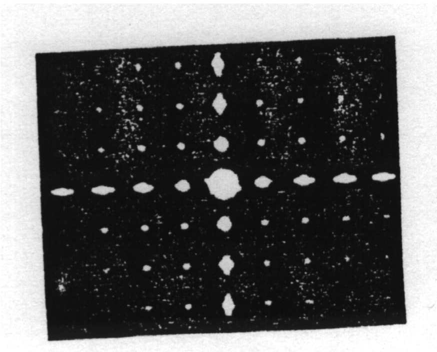


Abbildung 10.14: *An einem Kreuzgitter mit monochromatischem Licht aufgenommenes* FRAUNHOFER*sches Beugungsspektrum. (aus [4])*

Bei Beleuchtung mit monochromatischem Licht bilden die Beugungsmaxima ein System heller Punkte (Abb. 10.14), welche an den Kreuzungsstellen eines rechtwinkligen Netzes liegen.

Streuung von Röntgenlicht an Kristallen

Die Kristallgitter der Festkörper stellen ideale dreidimensionale Gitter dar. der Physiker W.H.Bragg (1862 – 1942) untersuchte gemeinsam mit seinem Sohn W.L.Bragg die Beugung von Röntgenlicht an Kristallen. Diese kommt dadurch zustande, daß das Licht an den Atomen (Molekülen) des Kristalls gestreut wird und anschließend aufgrund der regelmäßigen Gitterstruktur interferiert. Eine erste Voraussetzung ist, daß die Wellenlänge des verwendeten Lichtes die Größenordnung der Gitterkonstanten besitzt. Daher sind im sichtbaren Bereich keine Beugungserscheinungen zu beobachten.

Die in den Kristall einfallenden Lichtstrahlen werden an Atomen verschiedener Ebenen des Kristalls gestreut. Konstruktive Interferenz der an den verschiedenen Netzebenen reflektierten Strahlung liegt vor, wenn der Gangunterschied benachbarter Strahlen ein ganzes Vielfaches der Wellenlänge beträgt, d.h., wenn die **Braggsche Bedingung**

$$2\,\Delta = \boxed{2\,d\,\sin\vartheta = m\,\lambda} \quad (m = 0\,,\,1\,,\,2\,,\,\ldots)$$

erfüllt ist.

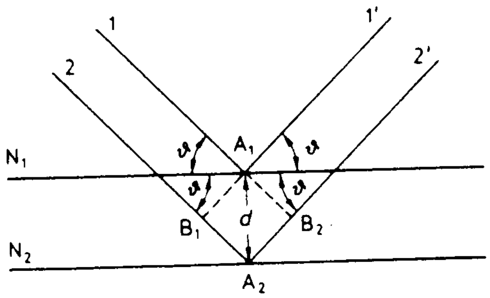


Abbildung 10.15: *Röntgenstrahlreflexion an zwei Netzebenen. (aus [4])*

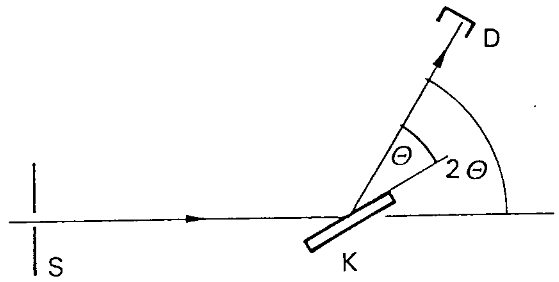


Abbildung 10.16: *Schema eines Drehkristall – Spektrometers. (aus [14])*

Auch diese Beugungserscheinung nutzt man zur Wellenlängenbestimmung aus. Registriert der Detektor eines **Drehkristall – Spektrometers** (Abb. 10.16) unter einem Winkel ϑ konstruktive Interferenz, so läßt sich bei bekanntem Netzebenenabstand die Wellenlänge ermitteln.

10.6 Auflösungsvermögen optischer Instrumente

Optische Instrumente sind aus Linsen und Blenden aufgebaut. Wir haben bei ihrer Behandlung außer Acht gelassen, daß an den Blendenbildern sowie an den Linsenfassungen, die wie Lochblenden wirken, Beugung auftritt, welche die Leistungsfähigkeit der optischen Vorrichtungen beeinträchtigt. Die Gegenstandspunkte werden nicht als Bildpunkte, sondern als Beugungsfiguren abgebildet. Die Qualität eines Abbildungssytems wird also entscheidend durch das endliche Auflösungsvermögen bestimmt. Dieses wurde im Rahmen der geometrischen Optik als unendlich angenommen, so daß die geometrisch – optischen Größen (transversale und angulare Vergrößerung) darüber keine Aussage machen.

Das Auflösungsvermögen einer Lochblende

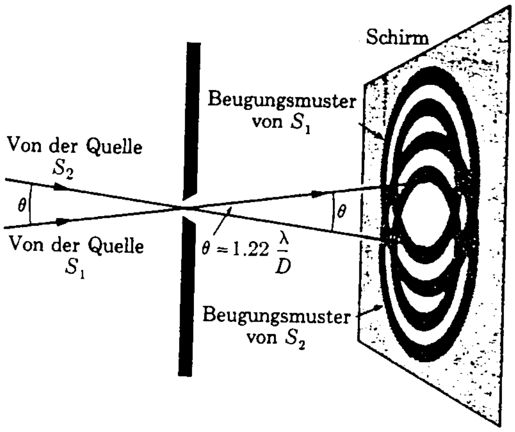


Abbildung 10.17: Rayleigh*sche Regel für das Auflösungsvermögen an einer kreisförmigen Öffnung. (aus [1])*

Wir betrachten zwei aus dem Unendlichen, von zwei Punkten (z.B. Fixsternen) P und P′ kommende Strahlen, die in eine Öffnung mit dem Durchmesser $D = 2r$ wie abgebildet eintreten (Abb. 10.17).

Wie weit müssen P und P′ auseinanderliegen bzw. wie groß muß der Winkel α mindestens sein, damit die Punkte noch aufgelöst werden?

Die von P und P′ erzeugten Beugungsfiguren auf dem Schirm müssen das Rayleigh – Kriterium erfüllen, damit die Gegenstandspunkte noch getrennt wahrgenommen werden. Das Maximum von P′ muß in das erste Minimum von P fallen. Mit

$$\sin\alpha = 0,61\,\frac{\lambda}{r}$$

ergibt sich für den Grenzwinkel

$$\alpha_{min} = \alpha \simeq \sin\alpha = 0,61\,\frac{\lambda}{r} = 1,22\,\frac{\lambda}{D}$$

Damit definiert man

$$\boxed{\frac{1}{\alpha_{min}} = 0,82\,\frac{D}{\lambda}} \qquad \underline{\text{Auflösungsvermögen einer Lochblende}}$$

Das Auflösungsvermögen bei einer optischen Abbildung

Wir betrachten nun Abbildungssysteme (Auge, Fernrohr, usw.). Hier wirkt die Linsenfassung als Lochblende. Wir untersuchen zwei aus dem Unendlichen kommende Lichtbündel

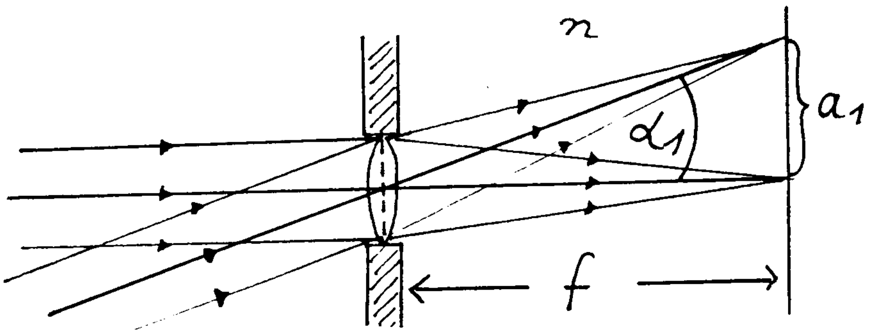


Abbildung 10.18: *Zur Ermittlung des Auflösungsvermögens bei einer optischen Abbildung.*

(Abb. 10.18), deren Beugungsbilder in der Brennebene der Linse auf einem Schirm aufgefangen werden. Die Mittelpunktstrahlen schließen wie im vorangehenden Abschnitt den Winkel α miteinander ein. Das senkrecht auf die Pupille fallende Lichtbündel entwerfe ein Hauptmaximum mit Radius a_1. Damit beide Beugungsfiguren dem Rayleigh – Kriterium genügen, muß

$$a_1 = f\ \sin\alpha_1 = 0,61\,\frac{\lambda f}{r}$$

gelten. Befindet sich zwischen Linse und Schirm ein Medium mit Brechungsindex n, dann findet Dispersion statt und die Wellenlänge ändert sich zu $\lambda' = \lambda/n$.

$$a_1 = f\ \sin\alpha_1 = 0,61\,\frac{\lambda' f}{r} = 0,61\,\frac{\lambda f}{n\,r}$$

Die kleinste auflösbare Struktur ist $a = 2\,a_1$, so daß

$$\boxed{\frac{1}{a} = \frac{n\,r}{1,22\,\lambda f} = 0,82\,\frac{A}{\lambda}} \quad \underline{\text{Auflösungsvermögen bei}} \atop \underline{\text{der optischen Abbildung}}$$

folgt. Die Größe

$$\boxed{A = \frac{n\,r}{f}}$$

heißt **Apertur** der optischen Abbildung.

Wir geben ein quantitatives Beispiel am Abbildungssystem 'Auge':

$$\underbrace{\begin{array}{ll} \text{Brechungsindex des Glaskörpers } n = 1,33 & \text{Pupillenradius } r = 2\,\text{mm} \\ \text{Brennweite der Augenlinse } f = 1,7\,\text{cm} & \text{Wellenlänge } \lambda = 550\,\text{nm} \end{array}}_{\Rightarrow\ a = 4,3\,\mu\text{m}}$$

Die kleinste durch das Auge auflösbare Struktur a entspricht ungefähr der Größe eines Stäbchens (ca. $5\,\mu$m). Der Durchmesser der Augenpupille ist daher der Struktur der Netzhaut gut angepaßt.

Das Auflösungsvermögen eines Mikroskopes

Die Überlegungen sind hier analog zu den bei den Abbildungssystemen 'Auge' und 'Fernrohr' gemachten Ableitungen mit dem Unterschied, daß der umgekehrte Strahlengang betrachtet wird (Abb. 10.19), Objekt und Beobachter sind zu vertauschen.

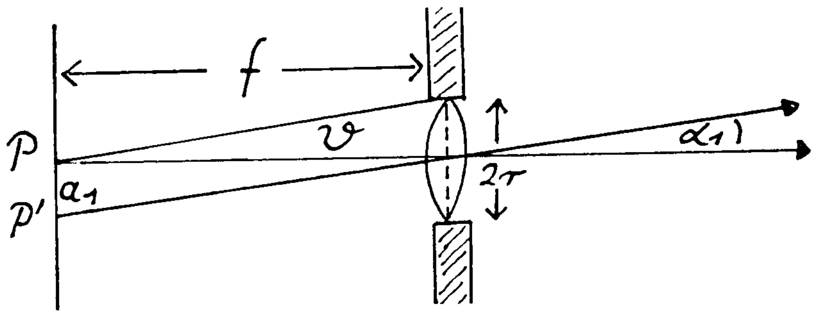


Abbildung 10.19: *Zur Ermittlung des Auflösungsvermögens eines Mikroskopes*

Die begrenzende Eintrittsöffnung ist das Objektiv des Mikroskopes, in dessen Brennebene die zu observierenden Objektpunkte angeordnet sind.
Die Linse erzeugt vom Punkt P eine Beugungsfigur, deren erstes Minimum (erster dunkler Ring) unter dem Winkel α_1 zur optischen Achse erscheint. Wird der Punkt P$'$ unter diesem Winkel abgebildet, dann fallen das Hauptmaximum von P$'$ und das erste Minimum von P zusammen. Analog zum Fernrohr gilt für die kleinste auflösbare Struktur

$$a = 2\,a_1 = 1,22\,\frac{\lambda\,f}{n\,r}$$

Unter Verwendung der Beziehung $r/f = \tan\vartheta \simeq \sin\vartheta$ für den Öffnungswinkel des Objektivs kann man dies umformen und man erhält

$$\boxed{\frac{1}{a} = 0,82\,\frac{\lambda}{n\,\sin\vartheta} = 0,82\,\frac{\lambda}{A}}$$ Auflösungsvermögen des Mikroskops

Man nennt $\boxed{A = n\,\sin\vartheta}$ die **numerische Apertur**.

Theorie der Abbildung von Abbe

Wir haben in den vorangehenden Überlegungen zur Leistungsfähigkeit optischer Instrumente stets das Rayleigh – Kriterium benutzt und die Minderung des Auflösungsvermögens auf die Beugung an einer Blende (Apertur) zurückgeführt. Dies war für Abbildungen, wie sie mit Auge, Fernrohr, Kamera und anderen optischen Systemen durchgeführt werden, angebracht. Dabei handelt es sich um Abbildungen selbstleuchtender Objekte (natürliche und künstliche Lichtquellen, Bsp.: Sonnen, Sterne), die inkohärentes

Licht ausstrahlen. Die meisten Gegenstände leuchten, da sie das Umgebungslicht streuen. Auch für die Abbildung solcher lichtstreuender Objekte besitzt das RAYLEIGH – Kriterium Gültigkeit.

Bei der Abbildung sehr kleiner Objekte, die aufgrund ihres Formats nicht über ein ausreichend großes Streuvermögen verfügen, ist oft kohärente Beleuchtung erforderlich, so daß ein Beugungsbild der Struktur selbst entsteht.

Dies ist z.B. beim Mikroskop der Fall. Die Strukturen der feinen Objekte, die beim Mikroskopieren von unten mit kohärentem Licht durchstrahlt werden, wirken wie ein Beugungsgitter (Abb. 10.20). Auf das Objektiv treffen daher Beugungserscheinungen verschiedener Ordnungen des Gitters, die in der Brennebene der Objektivlinse zu einem Beugungsbild des Objektes vereinigt werden. Diejenigen Strahlen aus den verschiedenen Maxima, die jeweils von demselben Gegenstandspunkt ausgehen, interferieren miteinander in der Zwischenbildebene. Das Interferenzbild stellt das reelle Bild des Objektes dar.

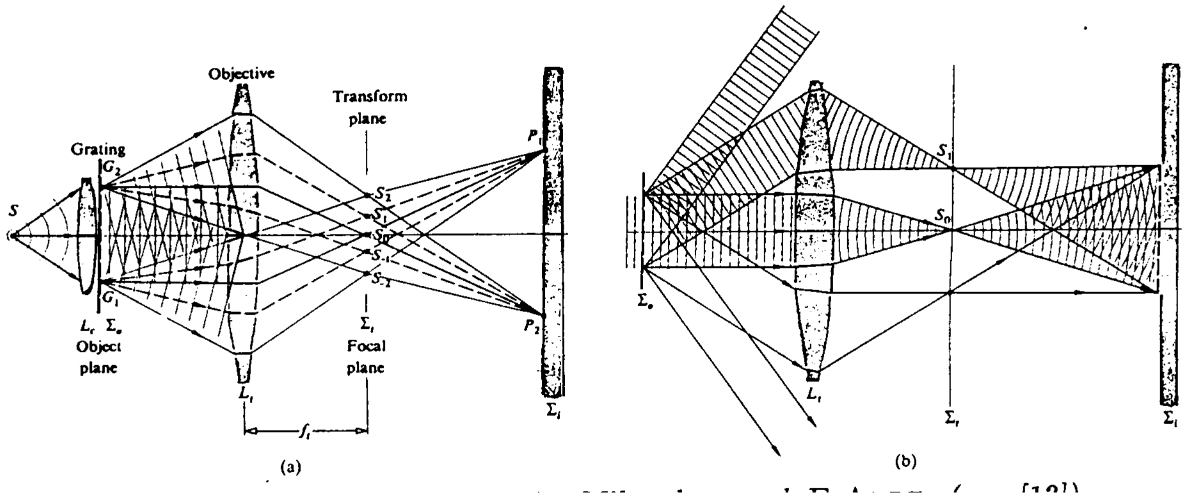


Abbildung 10.20: *Bildentstehung im Mikroskop nach* E.ABBE. *(aus [13])*

Versuch: Blendet man bei der Abbildung durch ein Mikroskop die höheren Ordnungen des Beugungsbildes in der Brennebene aus, so verschlechtert sich die Qualität des reellen Bildes. Dieses wird völlig unkenntlich, wenn man auch die 1.Ordnung ausblendet!

Dieser Versuch untermauert die Theorie von E.ABBE (1873), nach der die Beugung zwar einerseits zu einer Beeinträchtigung der Abbildung führt, andererseits aber die Abbildung erst durch das Zusammenwirken von Beugung und Interferenz möglich wird. Er stellte das **Abbesche Theorem** auf, welches allgemein gültig ist:

Zur Erzeugung eines getreuen (scharfen) Bildes sind alle Ordnungen der Beugung erforderlich. Damit überhaupt noch ein Bild zustande kommt, muß mindestens die 1.Ordnung zum Bildaufbau beitragen.

Wie läßt sich dies formal ausdrücken?

Die Bedingung für die Maxima 1.Ordnung lautet

$$\sin\alpha_1 = \frac{\lambda}{n\,a} \qquad \text{mit} \quad a: \text{Gitterabstand}$$

Damit diese noch erfaßt werden, muß zwischen dem zugehörigen Beugungswinkel und dem Öffnungswinkel des Objektivs die Beziehung

$$\sin\alpha_1 = \sin\vartheta$$

bestehen. Dann folgt für das Auflösungsvermögen des Mikroskops

$$\boxed{\frac{1}{a} = \frac{A}{\lambda}} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} A = n\,\sin\vartheta \text{ numerische Apertur} \\ a: \text{Gitterkonstante} \end{array}$$

Das aus dem ABBEschen Theorem abgeleitete Auflösungsvermögen stimmt bis auf den konstanten Faktor $c = 0,82$ mit der über das Rayleigh – Kriterium gefundenen Formel überein.

Je nachdem, ob bei einem Mikroskop der Zwischenraum zwischen Objekt und Objektiv mit Luft oder sogenannten Immersionsflüssigkeiten gefüllt ist, besitzt das Mikroskop eine andere Apertur und damit ein anderes Auflösungsvermögen. Die Tabelle 10.1 gibt Werte für das Auflösungsvermögen und die Vergrößerung verschiedener Mikroskopausführungen an.

Benutztes Objektiv	Objektiv-Apertur A	Objektiv-brennweite f in mm	Reziprokes Auflösungsvermögen (in λ-Einheit) $d = 0{,}61\,\lambda/A$	Objektiv-Vergrößerung $V_{Obj.}$	Okular-Vergrößerung $V_{Ok.} = \frac{750\,A}{V_{Obj.}}$	Gesamt-Vergrößerung $V_{Obj.} \cdot V_{Ok.}$
Trocken-systeme	0,05	39	12,2	2,4	15	36
	0,1	32	6,1	3,5	20	70
	0,25	16	2,5	10	20	200
	0,65	6	0,95	30	16	480
	0,85	3	0,7	62	10	620
Wasser-Immersion	1,0	3,6	0,6	50	15	750
	1,2	2,1	0,5	90	10	900
Öl-Immersion	1,3	1,8	0,45	100	10	1000

Tabelle 10.1: *Auflösungsvermögen und Vergrößerung verschiedener Mikroskopausführungen.(aus [4])*

10.7 Fresnelsche Beugung

In der Natur treten wesentlich häufiger FRESNELsche als FRAUNHOFERsche Beugungserscheinungen auf. Zur Berechnung der Intensitätsverteilungen müssen auch hier die Wellenfunktionen unter Berücksichtigung der Phasendifferenzen aufaddiert und das Quadrat der Amplitude gebildet werden. Da keine ebenen Wellen Voraussetzung sind, ist die mathematische Behandlung der Fresnelschen Beugung sehr kompliziert.

Wir wollen uns daher hier mit dem noch relativ einfachen Fall FRESNELscher Beugung an einer Lochblende beschäftigen, bei dem die Lichtquelle wie bei der FRAUNHOFERschen Betrachtungsweise im Unendlichen liegt, der Beobachter sich aber auf der Blendenachse in *endlicher* Entfernung r_0 zur Beugungsebene befinde. Für diesen Spezialfall läßt sich ein Näherungsverfahren angeben, die **Fresnelsche Zonenkonstruktion**, die eine Analyse des Beugungsbildes ermöglicht.

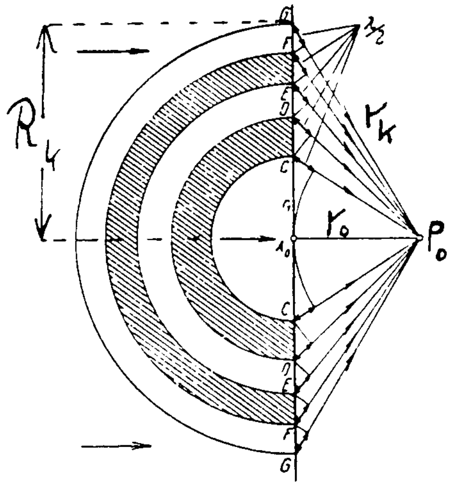


Abbildung 10.21: *Zur* FRESNEL*schen Beugung an einer Kreisblende*

Um die Interferenzerscheinungen bei P_0 von der Lochblende in der Beugungsebene zu beschreiben, verfolgen wir den Lichtweg von P_0 zurück zur Blende. Die Blendenöffnung wird so in konzentrische Ringe, sogenannte **Fresnelsche Zonen** aufgeteilt, daß für die Abstände der Zonenrandpunkte von P_0 gilt

$$r_k = r_0 + k\,\frac{\lambda}{2} \quad (k = 1\,,\,2\,,\,3\,,\,\ldots) \ .$$

Für die zugehörigen Ringradien R_k läßt sich dann folgende Beziehung aufstellen:

$$R_k^2 = r_k^2 - r_0^2 = \left(r_0 + k\,\frac{\lambda}{2}\right)^2 - r_0^2 = k\,\lambda\,r_0 + \frac{1}{4}\,k^2\,\lambda^2$$

Wir nehmen an, daß $r_0 \gg \lambda$ ist, dann können wir den letzten Term vernachlässigen und erhalten

$$\boxed{R_k = \sqrt{k\,\lambda\,r_0}} \quad \underline{\text{FRESNELsche Zonen}}$$

Die Zonenradien wachsen proportional zu $\sqrt{k}$ an, dies hat zur Folge, daß alle Zonen die gleiche Fläche besitzen:

$$A_k = \pi \left(R_k^2 - R_{k-1}^2 \right) = \pi \, \lambda \, r_0 \, \left(k - (k-1) \right)$$
$$\boxed{A_k = \pi \, \lambda \, r_0}$$

Wir untersuchen nun die Interferenz von Elementarwellen zweier benachbarter Zonen in P_0:
Die von verschiedenen Flächenelementen derselben Zone ausgehenden Elementarwellen haben maximal einen Gangunterschied von $\lambda/2$. Ihre Interferenz erzeugt in P_0 eine Amplitude E_0^k. Vernachlässigt man die geringfügigen Differenzen des Abstandes, den benachbarte Zonen vom Beobachtungspunkt P_0 haben, dann haben die Amplituden der zugehörigen Interferenzwellen den gleichen Betrag $|E_0^k| = |E_0^{k\pm1}|$, da die Zonen flächengleich sind. Die von homologen Flächenelementen verschiedener Zonen kommenden Strahlen besitzen jeweils einen Weglängenunterschied von $\lambda/2$. Vereinfacht läßt sich sagen, daß die Strahlen benachbarter Zonen den Punkt P_0 mit einer Phasendifferenz π erreichen. Dann folgt für die in P_0 von aufeinanderfolgenden Zonen erzeugte Amplitude der elektrischen Feldstärke

$$E_0^k = -E_0^{k\pm1}$$

Die Gesamtamplitude in P_0 ergibt sich durch Addition der Einzelamplituden aller Zonen bei Beachtung der gegenseitigen Phasenunterschiede:

$$\begin{aligned} E_0(\mathrm{P}_0) &= E_0^1 + E_0^2 + E_0^3 + \cdots + E_0^k \\ &= \underbrace{E_0^1 - E_0^1 + E_0^1 - \cdots \pm E_0^1}_{k \text{ Summanden}} \end{aligned}$$

Für die Interferenzerscheinung im Beobachtungspunkt läßt sich also festhalten:

(i) Ist die Anzahl k der Zonen gerade, so löschen sich in P_0 die Elementarwellen gegenseitig aus, es liegt ein Beugungsminimum vor.

(ii) Ist die Gesamtzahl k der Zonen ungerade, dann existiert eine Zone, deren Strahlen nicht durch ihnen entsprechende ausgelöscht werden. In P_0 herrscht Helligkeit (Beugungsmaximum).

(iii) Variiert man r_0, indem man den Beobachtungspunkt senkrecht zur Beugungsebene verschiebt, so ändert sich die Anzahl der Zonen, was einen Wechsel von Minima und Maxima in P_0 bedeutet. Die Intensität der Maxima ist proportional zur Zonenfläche $A_k = \pi \, \lambda \, r_0$.

Für jeden Punkt P_i in der zur Beugungsebene parallelen Beobachtungsebene läßt sich eine solche Zonenkonstruktion angeben (siehe Abb. 10.22). Die Fresnelzonen umgeben dann allerdings nicht mehr konzentrisch die Blendenmitte, sondern denjenigen Punkt O_i, der durch Projektion von P in die Beugungsebene entsteht. Insgesamt wird in der Beobachtungsebene ein Beugungsbild entworfen, welches aus konzentrischen hellen und

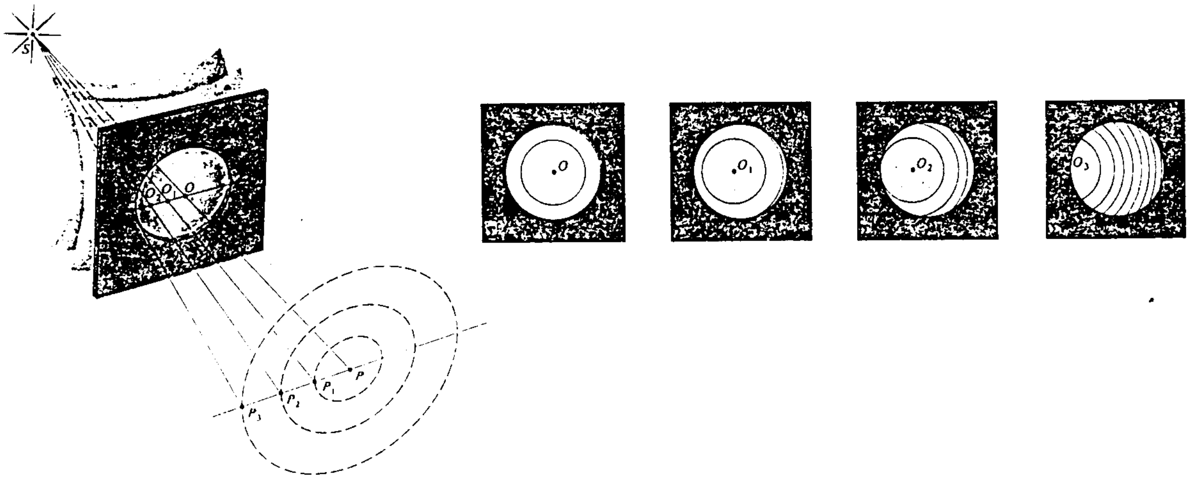


Abbildung 10.22: FRESNEL*sche Zonen in einer Kreisblende für beliebige Punkte P_i in der Beobachtungsebene. (aus [13])*

dunklen Ringen um die Blendenachse besteht, welche (siehe oben) ein Maximum oder Minimum als Zentrum haben.

Was geschieht, wenn man die Fresnelschen Zonen abwechselnd durchsichtig und undurchsichtig macht?

Zu jedem Bündel von Elementarwellen, welches von einer Zone ausgesendet wird, fehlt dann das entsprechende benachbarte, das mit ihm destruktiv interferieren würde. An den durchsichtigen Zonen der Blende wird also nur solches Licht gebeugt, das sich in P_0 verstärkt. Die homologen Lichtanteile, die Auslöschung bewirken würden, werden in den undurchlässigen Zonen absorbiert.

$$E_0(\mathrm{P}_0) = E_O^1 + E_0^3 + \cdots = \frac{k}{2}\, E_0^1$$

Eine derartige Blende nennt man **Fresnelsche Zonenplatte** (Abb. 10.23). Sie ist z.B. in Form einer Glasplatte verwirklicht, in die entsprechende Ringe eingearbeitet sind. Ist die Platte so beschaffen, daß die Zonenradien die Bedingung $R_k = \sqrt{k\,\lambda\, r_0}$ erfüllen, dann ist bei Bestrahlung mit parallelem Licht die in P_0 vorliegende Lichtintensität besonders hoch. Die Zonenplatte fokussiert also paralleles Licht in einem Punkt ähnlich wie eine Sammellinse. Man spricht daher auch von der **Zonenlinse** mit

$$\boxed{f_0 = r_0 = \frac{R_k^2}{k\,\lambda} = \frac{R_1^2}{\lambda}} \quad \underline{\text{“Brennweite” der Zonenlinse}}$$

Im Unterschied zur Sammellinse besitzt die Zonenplatte aber mehrere Brennpunkte! Wie aus Punkt (iii) hervorgeht, tritt außer in P_0 noch an den Stellen konstruktive Interferenz auf, die durch

$$f_n = \frac{f_0}{2\,n+1} \quad (n = 1\,,\, 2\,,\, 3\,,\, \ldots)$$

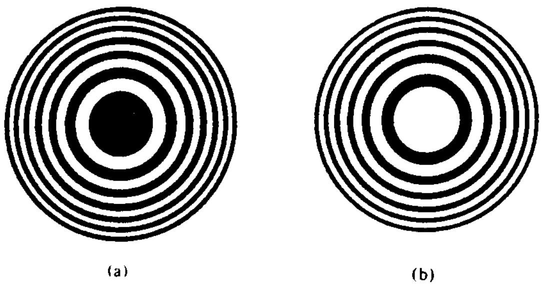


Abbildung 10.23: FRESNEL*sche Zonenplatten. (aus [13])*

gegeben sind. In den Brennpunkten P_n herrscht mit steigendem n eine zunehmend geringere Lichtintensität als in P_0.

<u>*Versuch:*</u> Abbildung durch eine Zonenlinse

Kapitel 11

Holographie

Eine der interessantesten Abbildungstechniken der modernen Optik ist die **Holographie** (grch.: holos = vollständig, graphein = schreiben). Dabei handelt es sich um ein zweistufiges Verfahren zur Speicherung und getreuen *dreidimensionalen* Wiedergabe von Bildern beliebiger Gegenstände, welches ganz ohne Linsen auskommt. Entwickelt wurde die Holographie 1948 von dem ungarischen Physiker D.Gabor, der dafür im Jahre 1971 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet wurde. Da das Verfahren beste Ergebnisse bei Verwendung sehr intensitätsreichen, kohärenten und monochromatischen Lichtes erzielt, gewannen die Forschungen auf dem Gebiet der Holographie erst 1960 mit Erfindung des Lasers Bedeutung für die Praxis.

Bei der konventionellen Photographie wird von einem dreidimensionalen Gegenstand auf einer Photoplatte ein zweidimensionales Bild entworfen, das die objektgetreue Intensitätsverteilung wiedergibt. In der Schwärzungsverteilung der Platte ist nur die Amplitude des vom Objekt kommenden Lichtwellenfeldes aufgezeichnet, so daß das Wellenfeld nicht vollständig wiedererzeugt werden kann. Bei der Holographie dagegen wird das *Interferenz*bild der **Gegenstandswelle** mit einer sogenannten **Referenzwelle** gleicher Wellenlänge aufgezeichnet, so daß auch die Phase des Lichtwellenfeldes gespeichert wird. Die photographische Aufnahme des Interferenzmusters, das **Hologramm**, enthält also die vollständige Information über den räumlichen Gegenstand, weist aber im Gegensatz zu einem gewöhnlichen Photo keinerlei Ähnlichkeit mit ihm auf. Das originalgetreue, dreidimensionale Bild entsteht in der zweiten Stufe des Abbildungsverfahrens. Hier wird durch geeignete Beleuchtung des Hologramms, genauer durch *Beugung* einer **Wiedergabewelle** am Hologramm, das ursprüngliche, vom Gegenstand abgestrahlte Lichtwellenfeld wieder rekonstruiert.
Die Grundidee der Holographie ist, daß nach dem Huygensschen Prinzip aus der in einer *Fläche* enthaltenen Verteilung der elektrischen Feldstärke durch Überlagerung der von jedem Punkt der Fläche ausgehenden Elementarwellen das entsprechende Lichtwellenfeld im *Raum* konstruiert werden kann. Danach reicht auch ein Ausschnitt aus dem Hologramm aus, um das gesamte Bild des Objektes wiederzugeben.

Hologramm eines einzelnen Objektpunktes

Wir erläutern das Prinzip der Holographie am Beispiel der Abbildung eines einzelnen Lichtpunktes, der sich in endlicher Entfernung zur Photoplatte befindet (Abb. 11.1). Dabei fügen wir auch Bemerkungen zum einfacheren Fall eines unendlich weit entfernten Objektpunktes ein.

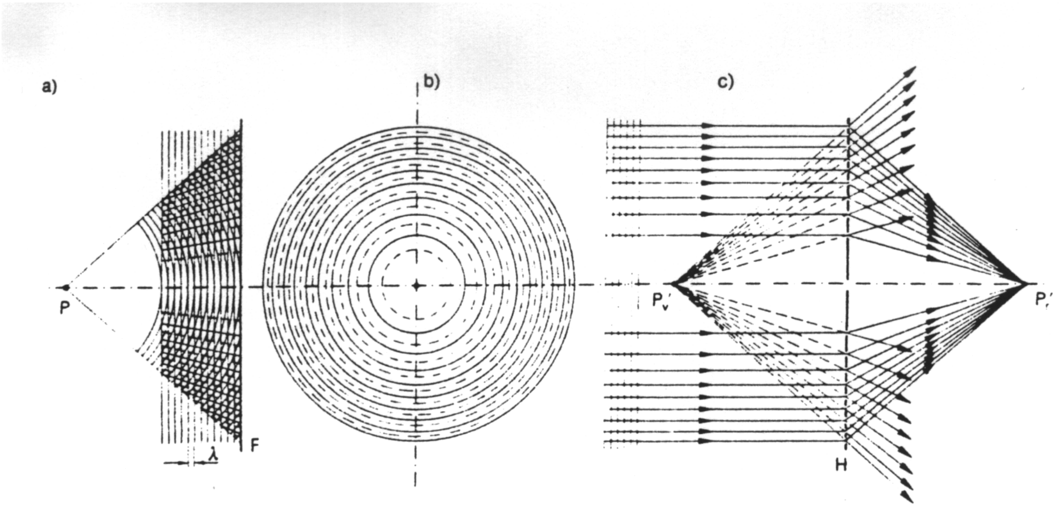


Abbildung 11.1: *Prinzip der Holographie, Hologramm eines einzelnen Objektpunktes. (aus [14])*

(a) **Aufnahme eines Hologramms**

Der vom Objektpunkt P abgestrahlten kugelförmigen **Objektwelle** wird eine ebene **Referenzwelle** gleicher Wellenlänge überlagert, so daß als Interferenzbild ein System konzentrischer Ringe maximaler und minimaler Intensität entsteht. Bei unendlicher Entfernung von P ist die Objektwelle eben, die Interferenz ergibt dann ein System von Interferenzstreifen.

(b) Die Ringe, in denen Verstärkung stattfindet, rufen auf einem photoempfindlichen Material eine Schwärzung hervor. Das entstehende Hologramm stellt eine Fresnelsche Zonenplatte dar. Aus den Abständen der Interferenzringe läßt sich die Phasendifferenz zwischen Objekt – und Referenzwelle ermitteln. Allgemein wird eine Phasenänderung in der Gegenstandswelle als Verschiebung der Interferenzstreifen im Hologramm gespeichert. Eine Amplitudenänderung der Objektwelle führt zu Schwärzungsänderungen auf der Photoplatte. Das vom Objektpunkt ausgehende Lichtwellenfeld legt die Gitterstruktur fest, die das Hologramm darstellt.

(c) **Wiedergabe des Bildes**

Zur Rekonstruktion des ursprünglichen Wellenfeldes wird das Hologramm mit einer ebenen **Wiedergabewelle** bestrahlt. Wir betrachten den Spezialfall, daß diese mit der Referenzwelle übereinstimmt. Die Wiedergabewelle wird an dem Interferenzmuster gebeugt. Dabei wirkt ein Streifensystem wie ein Strichgitter, das vorliegende Ringsystem wie eine Zerstreuungs – bzw. Sammellinse der Brennweite $\mp f$, wobei f gleich dem Abstand des Gegenstandspunktes von der Photoplatte (Beugungsebene) ist. In Abschnitt 10.7 haben wir unsere Untersuchungen auf die $+1$.Beugungsordnung der Zonenplatte beschränkt und daher nur deren Wirkung als Sammellinse herausgestellt. Zusätzlich ergibt sich eine Zerstreuungslinsenwirkung als Konsequenz der -1.Beugungsordnung.
Neben der ungebeugt durch das Hologramm durchtretenden ebenen Welle liefern die HUYGENSschen Elementarwellen als Einhüllende zwei Kugelwellen. Die divergierende Beugungswelle, die vom hinteren Brennpunkt zu kommen scheint, stellt die direkte Fortsetzung der vom Lichtpunkt P ausgegangenen Objektkugelwelle dar. Blickt ein Beobachter entgegen der Ausbreitungsrichtung dieser Welle durch das Hologramm hindurch, so sieht er ein <u>virtuelles Bild P'_v</u> des Objektpunktes. Die konvergierende Beugungswelle entwirft am Ort des positiven Brennpunktes der Zonenlinse ein <u>reelles Bild P'_r</u>, welches mit einem Schirm aufgefangen werden kann. Die Erzeugung von zwei konjugierten Bildern (Spiegelbildern), meist einem reellem und einem virtuellem Bild, ist charakteristisch für die holographische Bildkonstruktion!

<u>*Versuch:*</u> Die Anfertigung und Rekonstruktion eines Hologramms wird mit Hilfe von Moiré – Modell – Folien veranschaulicht.
Auf den Folien sind verschiedenförmige Wellenfelder aufgezeichnet. Auf dem Overheadprojektor werden die Folien geeignet übereinandergelegt, um die Interferenzerscheinungen der Wellen zu veranschaulichen. Durch Verschieben der Folien gegeneinander können die Auswirkungen einer Phasenänderung auf die Hologrammstrukter sichtbar gemacht werden.

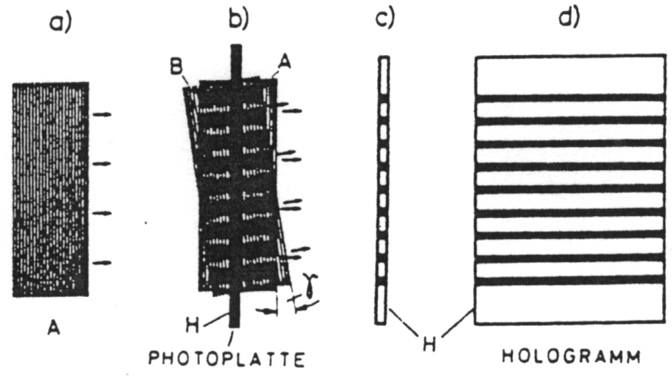


Abbildung 11.2: *Moiré–Modellversuch: Hologrammaufnahme mit ebener Referenzwelle A und ebener Objektwelle B. (aus [16])*

Hologramm eines ausgedehnten Gegenstandes

Die abzubildenden Gegenstände bestehen im Normalfall nicht aus *einem*, sondern aus *vielen* lichtstreuenden Gegenstandspunkten, die nach dem Huygensschen Prinzip jeweils eine Kugelwelle aussenden. Bei der Hologramm – Aufnahme interferiert jede dieser Elementarwellen mit der Referenzwelle, so daß das Hologramm eine Überlagerung vieler Interferenz – Gitterstrukturen darstellt. (Wir können bei dieser Betrachtung die Interferenz der Elementarwellen untereinander vernachlässigen, da diese die Bildrekonstruktion nicht stört.)
Bei endlicher Entfernung zur Photoschicht erzeugt jeder Objektpunkt eine Fresnelsche Zonenplatte oder einen Ausschnitt daraus. Es ergibt sich eine Überlagerung vieler seitlich versetzter Zonenringsysteme, in der die vollständige Information über die Objektpunkte enthalten ist. Die räumlich näher an der Photoplatte befindlichen Objektpunkte liefern kleinere Zonensysteme mit kürzerer "Brennweite".
Bei der Bildwiedergabe setzen sich die in der $+1$.Beugungsordnung rekonstruierten Bildpunkte zu einem räumlichen reellen Bild zusammen. Schaut man den in der -1.Ordnung gebeugten Lichtwellen entgegen, so scheinen diese von Punkten hinter dem Hologramm herzukommen, sie konstruieren ein dreidimensionales virtuelles Bild an dem Ort, an dem bei der Hologrammaufnahme das Objekt stand. Das Bild ist stereoskopisch. Derjenige *Teilbereich* des Hologramms, durch den der Beobachter mit beiden Augen blickt, ist für die Rekonstruktion des *gesamten* virtuellen Bildes maßgebend. Bewegt sich der Betrachter seitlich, so ändert sich mit dem maßgeblichen Hologrammausschnitt die Perspektive der abgebildeten Gegenstände und der Beobachter kann z.B. vorher verdeckte Objektteile wahrnehmen.

Versuch: Verschiedene Transmissionshologramme werden mit einem HeNe – Laser belichtet und die virtuellen Bilder mit Hilfe einer Kamera in Großbildprojektion gezeigt.

(a) Beim Schwenken der Kamera verändert sich die Perspektive und es entsteht ein dreidimensionaler Eindruck des abgebildeten Objektes.

(b) Die Kamera wird auf verschiedene Tiefen fokussiert, so daß ein begrenzter Ausschnitt des Bildes wie durch eine Lupe betrachtet werden kann.

In – Line – Holographie

Bei den ersten Experimenten, die D.Gabor zur Holographie durchführte, benutzte er eine sehr einfache Anordnung (Abb. 11.3). Er durchstrahlte ein transparentes Objekt (stark verkleinerte Schriftprobe auf einem Mikrofilm) mit dem monochromatischen, fast parallelen, aber nur begrenzt kohärenten Licht einer Quecksilberdampfentladungslampe. Das am Objekt gebeugte Licht überlagerte sich mit dem ungebeugt durchtretenden Lichtbündel, welches als Referenzwelle diente. Zur Bildrekonstruktion verwendete er wieder das Referenzbündel. Bei diesem "Geradeaus" – Aufbau, bei dem sich das Objekt im Referenzstrahl befindet, liegen virtuelles und reelles Bild auf einer Linie. Die zugehörigen Beugungsbündel sowie das ungebeugt durch das Hologramm tretende Bündel überlappen und stören sich daher gegenseitig. Der Beobachter sieht ein unvollkommenes, doppeltes Bild.

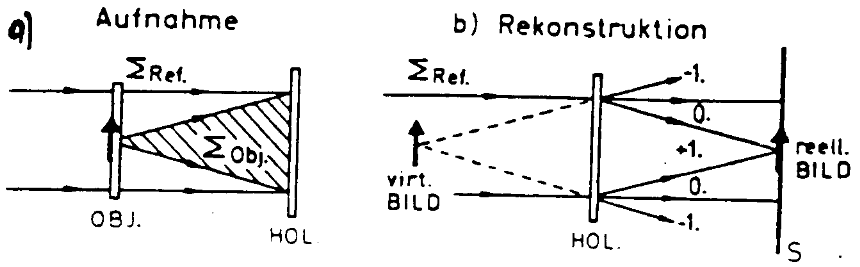


Abbildung 11.3: *In – Line – Holographie nach Gabor (1949). (aus [16])*

Off – Axis – Holographie

N.Leith und J.Upatnieks haben 1962 eine Anordnung vorgeschlagen, in der die störende Überlagerung der Beugungswellen +1. und −1.Ordnung vermieden wird, indem Referenz – und Objektwelle räumlich getrennt geführt werden. Diese sieht die Verwendung kohärenten Laserlichtes vor.

Je nachdem, ob das Objekt durchsichtig oder undurchsichtig ist, wird die Anordnung der Hologramm – Aufnahme etwas variiert. Bei der Aufnahme eines undurchsichtigen Ob-

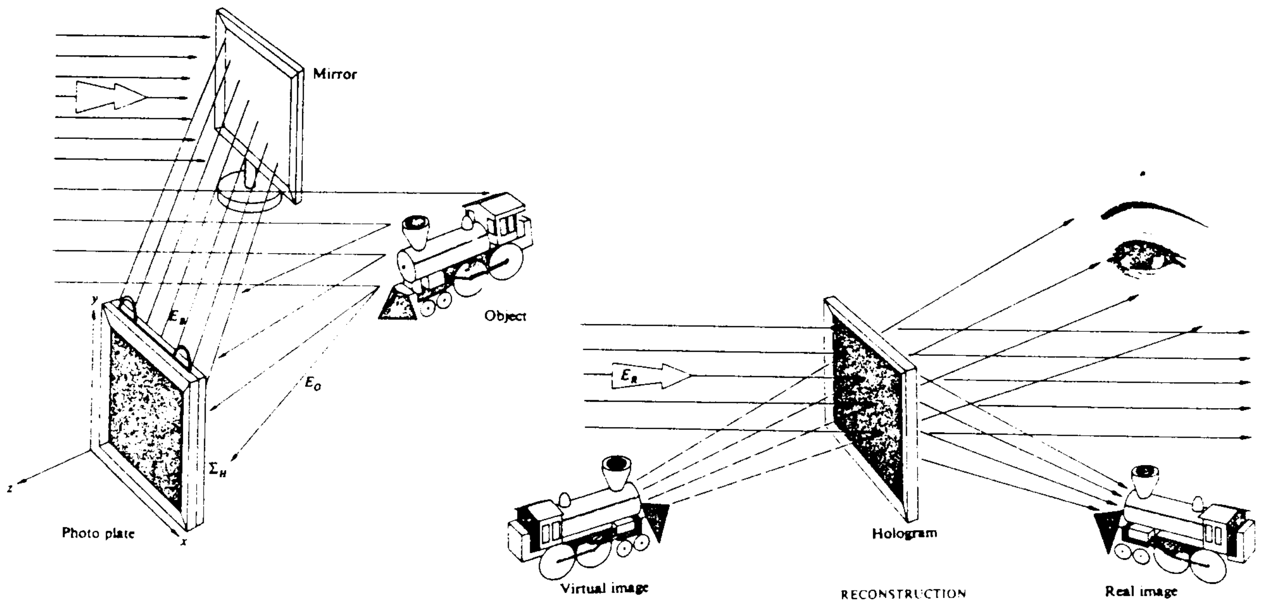


Abbildung 11.4: *Holographische Aufnahme und Wiedergabe eines undurchsichtigen Objektes. (aus [13])*

jektes (Abb. 11.4) wird ein Teil des Laserbündels am Objekt reflektiert (Objektbündel), der restliche Teil wird über einen Spiegel unter großem Einfallswinkel auf die Photoplatte gelenkt (Referenzbündel). Bei der Aufnahme eines transparenten Objektes (Abb. 11.5)

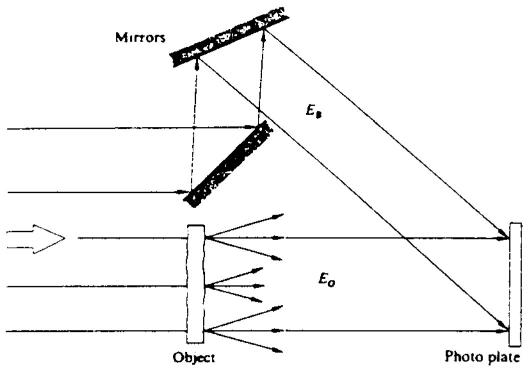


Abbildung 11.5: *Aufnahme eines durchsichtigen Objektes. (aus [13])*

durchstrahlt ein Teil des Laserlichtes dieses, der andere Teil wird über eine Spiegelkombination oder ein Prisma abgelenkt.

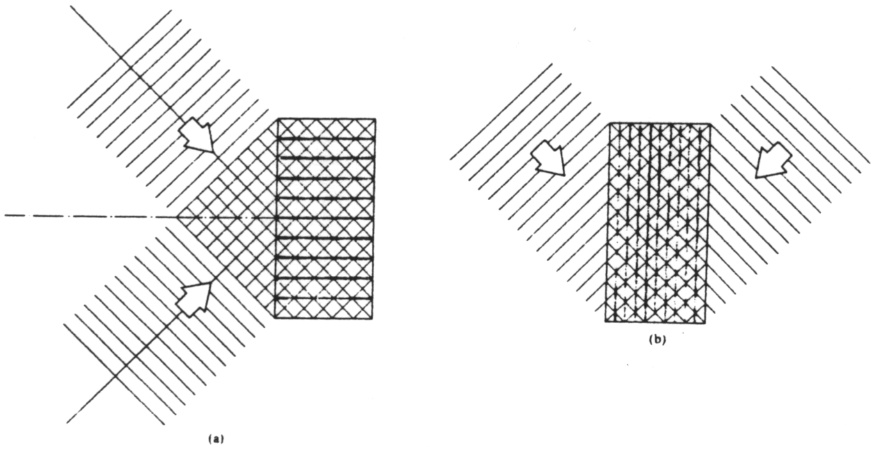


Abbildung 11.6: *Entstehung eines Transmissions– (a) und eines Reflexionshologramms (b). (aus [13])*

Wir haben bisher nur den Fall in Betracht gezogen, daß Referenz – und Objektwelle von der gleichen Seite auf ein photoempfindliches Material fallen. Man spricht von **Transmissionshologrammen** (Abb. 11.6a).
Wir nehmen nun an, das lichtempfindliche Material besitze eine gewisse Tiefe und werde von den beiden Wellen aus entgegengesetzten Richtungen durchsetzt (Abb. 11.6b). Dann entsteht als Hologramm ein dreidimensionales Gitter, welches man als **Reflektionshologramm** bezeichnet. Bei der Bildrekonstruktion wird das Wiedergabelicht an den

Gitterebenen zurückgestreut. Der in das reflektierte Licht blickende Beobachter sieht ein virtuelles Bild hinter dem Hologramm. Solche Reflexionshologramme haben den Vorteil, daß sie auch mit Weißlicht betrachtet werden können (Wiedergabelicht = Weißlicht).

11.1 Weißlichtholographie

Volumen – Weißlicht – Hologramme

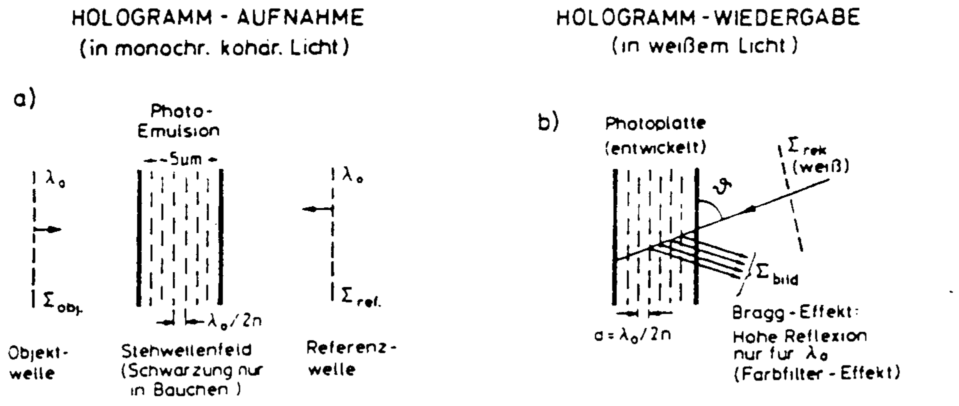


Abbildung 11.7: *Aufnahme und Rekonstuktion eines Volumen – Weißlichthologramms. (aus [16])*

Die Aufnahme von Weißlichthologrammen geschieht wie bei allen Hologrammen mit Laserlicht. Bei einem Volumenhologramm überlagern sich Objekt– und Referenzwelle, welche eine viele Wellenlängen dicke Photoschicht *gegenläufig* durchsetzen, zu einem stehenden Wellenfeld (Abb. 11.7). Schwärzung findet nur in den Schwingungsbäuchen statt, d.h. es entstehen äquidistante Gitterebenen im Abstand $d = \lambda_0/2n$, wobei n die Brechzahl der Photoschicht ist. Beleuchtet man das Hologramm auf der dem Beobachter zugewandten Seite, dann treten ähnliche Verhältnisse wie bei der Reflexion von Röntgenstrahlen an den regelmäßigen Gitternetzebenen im Kristall auf. Nur diejenige Wellenlänge wird reflektiert, welche die Braggsche Reflexionsbedingung

$$2\,d\,\sin\vartheta = m\,\lambda \qquad (m = 0\,,\,1\,,\,2\,,\,\ldots)$$

erfüllt (siehe Abschnitt 10.5.2). Bei senkrechtem Einfall des rekonstruierenden Bündels ist dies genau die bei der Hologrammaufnahme verwendete Wellenlänge. Mit abnehmendem Einfallswinkel ϑ verschiebt sich das reflektierte Licht zu kürzeren Wellenlänge hin. Je nach Beleuchtungswinkel sieht der Beobachter also ein andersfarbiges Bild.

<u>Versuch:</u> Ein mit rotem HeNe – Laserlicht erstelltes Weißlichthologramm wird zur Bildwiedergabe mit einem Weißlichtbündel beleuchtet. Die Bestrahlung

erfolgt zunächst senkrecht, dann wird der Einfallswinkel kontinuierlich verringert. ⇒ Die Farbe des rekonstruierten Bildes verschiebt sich von rot über gelb nach grün.

Regenbogenhologramme

Bei einem Regenbogenhologramm handelt es sich um ein Transmissionshologramm, bei dem die Bildwiedergabe mit weißem Licht erfolgt. Dabei werden die rekonstruierten Objektwellen verschiedener Wellenlängen am Hologramm unterschiedlich stark gebeugt, sie laufen in unterschiedliche Richtungen. Ist die Objektwelle genügend schmal und parallel, dann stören sich die Beugungswellen gegenseitig nicht wesentlich. Ein Betrachter sieht in einer Blickrichtung ein scharfes, sehr helles, im wesentlichen einfarbiges räumliches Bild. Bewegt er den Kopf etwas auf– oder abwärts, so ändert sich die Farbe des Bildes und durchläuft alle Regenbogenfarben. Bei der vertikalen Kopfbewegung bleibt allerdings die Perspektive des Bildes konstant, diese ändert sich nur bei seitlicher Verschiebung des Blickwinkels.

Die Herstellung geschieht in einem zweistufigen Verfahren nach S.A.Benton (1976). Zuerst wird von dem Gegenstand (z.B. einem Würfel) ein Transmissionshologramm auf-

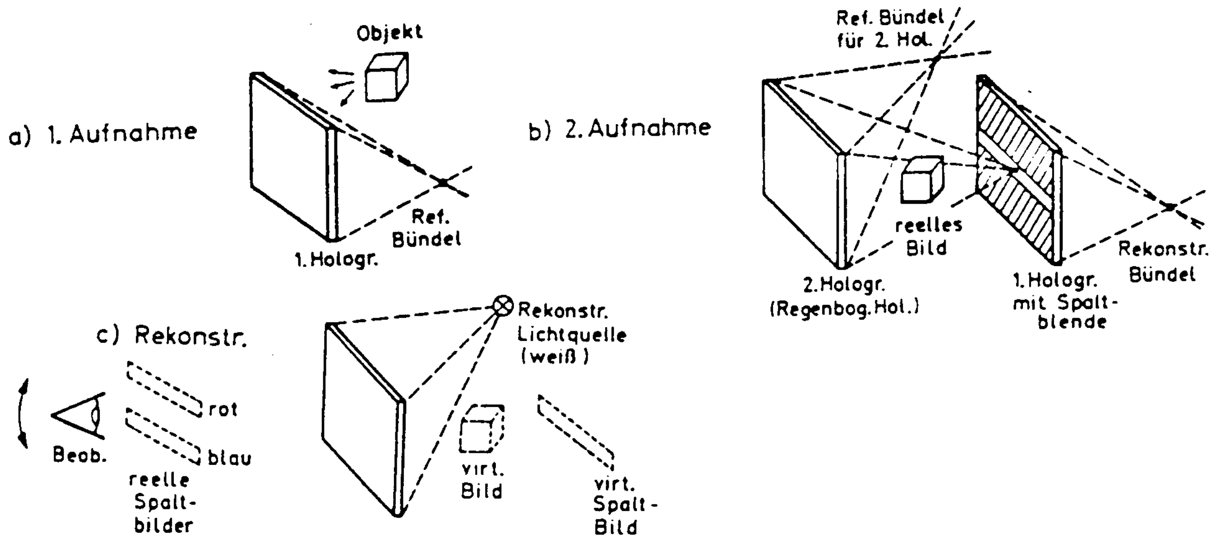


Abbildung 11.8: *Herstellung (a,b) und Rekonstruktion (c) eines Regenbogenhologramms. (aus [16])*

genommen. Durch Beleuchtung eines einzelnen horizontalen Streifens aus diesem Hologramm wird ein reelles Bild des Würfels erzeugt, welches allerdings keine vertikale Tiefenwirkung besitzt. Dieses Bild dient dann als *Objekt* für die Aufzeichnung des eigentlichen Regenbogenhologramms, bei der von oben eine zur Objektwelle kohärente Referenzwelle eingestrahlt wird.
Wird das so belichtete Regenbogenhologramm zur Bildrekonstruktion erneut von oben

aus der Richtung des Referenzbündels mit einfarbigem Licht beleuchtet, so entsteht ein virtuelles Bild des Objektes. Gleichzeitig werden aber sowohl ein virtuelles, als auch ein reelles Bild des Beleuchtungsspaltes aus der 1.Aufnahme erzeugt. Die rekonstruierten Objektwellen laufen durch diese Spaltbilder, so daß ein Beobachter das virtuelle Bild des Würfels nur erkennt, wenn er durch das reelle Spaltbild hindurchschaut.
Wird nun zur Bildwiedergabe weißes Licht verwendet, dann liegen aufgrund der unterschiedlich starken Beugung der verschiedenen Wellenlängen die zugehörigen Spaltbilder vertikal getrennt. Da der Durchmesser der Augenpupille beschränkt ist, kann der Betrachter bei einer Augenstellung das Bild des Würfels nur in einer Spektralfarbe sehen.

Gedruckte Hologramme

Hologramm – Aufzeichnungen, die ähnliche Effekte wie die Regenbogenhologramme zeigen, lassen sich auch auf Kunststoffolie herstellen. In die erwärmte Plastikfolie wird das Phasenhologramm als Oberflächenrelief eingeprägt und durch Aufdampfen einer metallischen Schicht verspiegelt. Bei Beleuchtung mit weißem Licht entstehen dann in Reflexion dreidimensionale Bilder, deren Farbe mit dem Beobachtungswinkel wechselt. Mit diesem Verfahren läßt sich ein geeignetes Hologramm finanziell relativ günstig vervielfältigen. Dies nutzen z.B. Banken aus, um Kredit– und Scheckkarten abzusichern.

11.2 Anwendungen der Holographie

Interferenzholographie

Die Interferenzholographie wird zur zerstörungsfreien Werkstoffprüfung eingesetzt. Aufgrund von Temperatur– oder Druckschwankungen hervorgerufene Veränderungen in der Form eines Werkstückes können durch Interferenzlinien kenntlich gemacht werden. Auch Materialschwingungen können auf diese Weise analysiert werden.
Fertigt man von einem Gegenstand ein Hologramm an, verformt ihn dann leicht und nimmt anschließend auf derselben Photoplatte erneut ein Hologramm auf, so erhält man bei der Wiedergabe ein Bild, welches von Interferenzstreifen durchsetzt ist, ein sogenanntes **holographisches Interferogramm**. Die Interferenzstreifen rühren daher, daß die Rekonstruktionswellen der beiden Objektzustände miteinander interferieren, so, als ob der Gegenstand gleichzeitig beide Zustände einnehmen würde. Verschiebt sich ein Punkt der Objektoberfläche aufgrund der Deformation um ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge des verwendeten Lichtes, so erscheint im Interferogramm an dieser Stelle ein heller Punkt. Dabei wird jeweils nur die Verschiebung in der Richtung, in der das Objekt aufgenommen und beobachtet wird, registriert. Benachbarte helle Streifen geben also an, daß die auf ihnen liegenden Objektpunkte eine Abstandsdifferenz von einer halben Wellenlänge besitzen. Durch Auswertung des Interferogramms kann die Verformung des Objekts ermittelt werden.

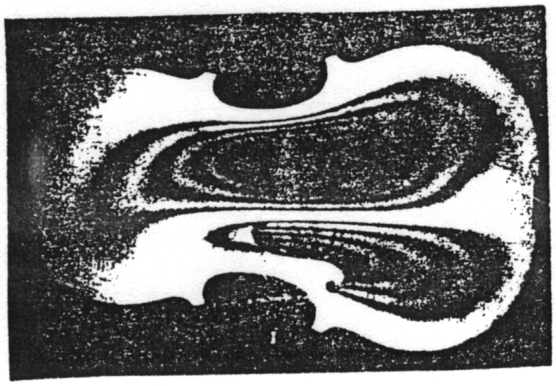


Abbildung 11.9: *Holographisches Interferogramm einer schwingenden Bratschendecke. (aus [4])*

Datenspeicherung

Digitale Daten, die in Form von ebenen Punktmustern gegeben sind, können auf ein Hologramm aufgenommen werden. Dabei wird das Hologramm für jede neue Aufzeichnung um einem festgelegten Winkel gedreht. Angestrebt wird eine Speicherkapazität von 10^{11} bis 10^{12} bit auf einem Hologramm. Der Vorteil gegenüber anderen Speichermethoden liegt in der besonderen Sicherheit, bei Zerstörung des Hologramms kann aus einem einzigen Bruchstück die gesamte Information wiedergewonnen werden!

Anwendungen in der Optik

Optische Bauteile wie z.B. Beugungsgitter und Zonenlinsen können holographisch hergestellt werden. Andere optische Elemente wie Spiegel, Linsen, Prismen usw. lassen sich durch Hologramme ersetzen.

Kapitel 12

Relativitätstheorie

12.1 Relativität in der Newtonschen Mechanik

12.1.1 Grundhypothesen der Newtonschen Mechanik bezüglich Raum und Zeit

Wir haben uns im ersten Semester mit der NEWTONschen Mechanik beschäftigt, deren gesamter physikalischer Inhalt aus drei von ISAAC NEWTON (1642 – 1727) im Jahre 1687 publizierten Gesetzen abgeleitet werden kann. Die beiden ersten NEWTONschen Gesetze sollen hier noch einmal formuliert werden:

> 1.NEWTONsches Gesetz:
> *Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.*
>
> 2.NEWTONsches Gesetz:
> *Die Änderung pro Zeiteinheit der Bewegungsgröße ist der einwirkenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach der die Kraft wirkt.*
> Mathematische Formulierung: allgemein $\vec{F} \sim \frac{d}{dt}(m\,\vec{v})$, speziell für $m = const.$ gilt $\vec{F} \sim m\,\vec{a}$.

Die NEWTONschen Gesetze basieren auf einer Reihe von Hypothesen, die in der NEWTONschen Mechanik als selbstverständlich angenommen werden, von denen aber einige im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie wesentlich abgeändert werden müssen. Die Hypothesen sollen daher an dieser Stelle kurz erläutert werden:

Die erste Annahme bezieht sich auf die Struktur des Raumes. Die zeitliche Bewegung eines Massepunktes im Raum wird immer relativ zu einem anderen Punkt (**Bezugspunkt**) beschrieben, besser eignet sich zur Beschreibung ein **Bezugssystem**. Der Raum wird als euklidisch angenommen, die Lage eines Punktes im Raum relativ zum Bezugssystem wird

durch drei Koordinaten x, y, z angegeben, welche sich auf ein kartesisches Koordinatensystem beziehen. Der Koordinatenursprung O eines solchen Bezugssystems kann willkürlich festgelegt werden.
Das oben formulierte erste NEWTONsche Gesetz impliziert insbesondere die Existenz eines Bezugssystems, in dem ein kräftefreier Körper ruht oder sich geradlinig und gleichförmig bewegt. Ein solches Bezugssystem nennt man **Inertialsystem**. Ein Inertialsystem wäre z.B. verwirklicht in einem Raumschiff in schwerelosem Zustand, dessen Triebwerke abgeschaltet sind und das sich nicht dreht. In Inertialsystemen nehmen die Gesetze der NEWTONschen Mechanik ihre einfachste Form an.

Zur vollständigen Beschreibung der Lage eines Massepunktes ist es noch wichtig anzugeben, zu welcher Zeit t dieser sich am Ort (x, y, z) befindet. Die zweite Hypothese betrifft daher die Zeit. Sie besagt, daß eine einheitliche Zeitskala festgelegt werden kann, welche unabhängig von einem speziellen Koordinatensystem ist und universell für alle relativ zueinander bewegten Beobachter gilt. Dabei wird der Zeitnullpunkt willkürlich festgesetzt.

Weiter wird in der dritten Hypothese angenommen, daß die Masse eines Körpers beim Übergang von einem Bezugssystem in ein anderes unverändert bleibt. Die Masse soll also gegenüber Koordinatentransformationen invariant sein.

Wie lassen sich Längen und Zeiten messen?

Vorgänge, welche ein Zeitmaß definieren, heißen <u>Uhren</u>. Sie dienen zur Zeitmessung. Die Zeiteinheit Sekunde wird heute festgelegt als das 9 192 631 770 fache der Schwingungsdauer der Lichtwellen, welche die ^{133}Cäsium–Atome unter bestimmten Voraussetzungen abstrahlen.
Es gibt keine absoluten Längen, nur Längenvergleiche z.B. mit einem Metermaßstab sind möglich. Der Einheitsmaßstab Meter wird seit 1983 definiert als die Strecke, die das Licht in 299 792 458 s zurücklegt.

12.1.2 Die Galilei – Transformation

Wie im vorangehenden Abschnitt erläutert, beschreiben wir die örtliche und zeitliche Lage eines Massepunktes durch Angabe von vier Koordinaten x, y, z, t. Am einfachsten läßt sich seine Bewegung in einem Inertialsystem angeben. Es gibt beliebig viele Inertialsysteme. Jedes System S', welches sich relativ zu einem Inertialsystem S mit konstanter Geschwindigkeit $\mathcal{V}$ geradlinig bewegt, ist wieder ein Inertialsystem. Die verschiedenen Inertialsysteme lassen sich durch die GALILEI – Transformation ineinander überführen. Wir betrachten ein Inertialsystem $S(O, x, y, z)$, relativ zu dem sich ein System $S'(O', x', y', z')$ gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\mathcal{V}$ längs der x – Achse bewegt (Abb. 12.1). Die Beobachter B und B' in den verschiedenen Systemen beziehen die Kinematik eines Körpers auf das jeweilige System. B und B' sollen gleiche Maßstäbe und Uhren besitzen.
Zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ fallen die Systeme zusammen, so daß zur Zeit t die Ursprünge O und O' um die Strecke $\mathcal{V}\,t$ in x – Richtung gegeneinander verschoben sind. Wenn nun ein Beobachter B im System S die Koordinaten eines Massepunktes zu (x, y, z, t) bestimmt,

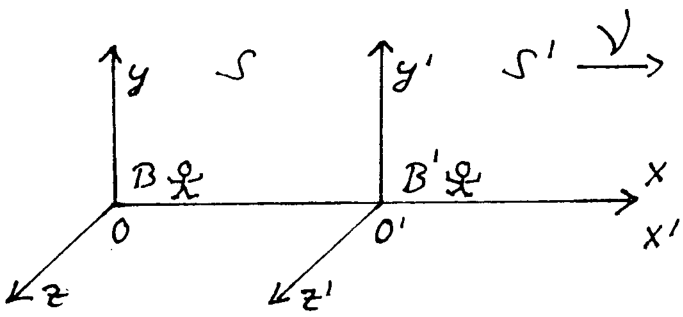


Abbildung 12.1: *Zur* GALILEI – *Transformation.*

so ermittelt B' in S' die Koordinaten (x', y', z', t). Den Zusammenhang dieser Angaben findet man durch die GALILEI – Transformation:

Galilei – Transformation	*Umkehrung*
$S \rightarrow S'$	$S' \rightarrow S$
$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{v}\,t$	$\vec{r} = \vec{r'} + \vec{v}\,t'$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x' & = & x - v\,t \\ y' & = & y \\ z' & = & z \\ t' & = & t \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{rcl} x & = & x' + v\,t' \\ y & = & y' \\ z & = & z' \\ t & = & t' \end{array}}$$

Das System S' ist ebenfalls ein Inertialsystem, denn ein Massepunkt, der in S die konstante Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

besitzt, bewegt sich auch in S' geradlinig und gleichförmig, wie sich leicht zeigen läßt:

$$\underbrace{\begin{array}{lll} x' = x - \mathcal{V}\,t & \Rightarrow & v'_x = \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{dx'}{dt} = \dfrac{d(x - \mathcal{V}\,t)}{dt} = \dfrac{dx}{dt} - \mathcal{V} = v_x - \mathcal{V} = const.! \\[2ex] y' = y & \Rightarrow & v'_y = \dfrac{dy'}{dt'} = \dfrac{dy}{dt} = v_y = const.! \\[2ex] z' = z & \Rightarrow & (\text{analog zu } v'_y) \quad v'_z = v_z = const.! \end{array}}_{v' = const.!}$$

<u>Es resultiert das **Galileische Relativitätsprinzip** der klassischen Mechanik:</u>

> *Die Newtonschen Gesetze sind invariant gegenüber der Galilei – Transformation, sie bleiben unverändert beim Übergang von einem in ein anderes Inertialsystem. Alle Inertialsysteme sind demnach gleichwertig hinsichtlich der Darstellung der Gesetze der Mechanik. Es ist nicht möglich, durch rein mechanische*

> *Versuche ein "absolut ruhendes" System auszuzeichnen. Die Geschwindigkeit kann nicht absolut gemessen werden.*

Die **Galilei – Invarianz** wollen wir hier am Beispiel des zweiten NEWTONschen Gesetzes illustrieren:
Im System S wirke auf die reibungslos verschiebbare Masse m in x – Richtung die Kraft F. Ein Beobachter B registiert die Beschleunigung $a = d^2x/dt^2$. Es gelte das zweite NEWTONsche Gesetz.

$$F = m\,a = m\,\frac{d^2x}{dt^2}$$

Durch welches Gesetz läßt sich die Bewegung im System S' beschreiben? B' beobachtet eine Beschleunigung $a' = d^2x'/dt'^2$.

$$a' = \frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2(x - \mathcal{V}t)}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} - \underbrace{\frac{d\mathcal{V}}{dt}}_{=0} = \frac{d^2x}{dt^2} = a$$

Der zweite Bruchterm verschwindet, da $\mathcal{V}$ konstant ist. Da nach der dritten Hypothese die Masse invariant ist, wirkt im System S' die Kraft

$$F' = m\,a' = m\,a = F \quad ,$$

d.h. beide Beobachter finden dasselbe Bewegungsgesetz! Gesetze, die wie das Bewegungsgesetz unter der GALILEI – Transformation die *gleiche Form* beibehalten, heißen **forminvariant** oder **kovariant**. Das GALILEIsche Relativitätsprinzip, auch Invarianzprinzip genannt, kann mit dieser Bezeichnung noch präziser formuliert werden: Die Gesetze der NEWTONschen Mechanik sind unter der GALILEI – Transformation kovariant.
Als Beispiel sei noch einmal das Bewegungsgesetz angeführt, diesmal in der allgemeinen Form.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad \vec{F'} = \frac{d\vec{p'}}{dt'}$$

Betrachtet man nun den Impuls, so stellt man fest, daß dieser nicht invariant unter der GALILEI – Transformation ist.

$$\vec{p} = m\,\vec{v} = m\,\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{p'} = m\,\vec{v'} = m\,\frac{d\vec{r'}}{dt} = m\,\left(\frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{\mathcal{V}}\right)$$

$$\boxed{\vec{p'} = \vec{p} - m\,\vec{\mathcal{V}}} \quad \text{Impuls \underline{nicht} GALILEI – invariant}$$

Wird die Kraft $\vec{F}$ über die Gleichung $\vec{F} = m\,\vec{a}$ definiert, so gilt mit $\vec{a'} = \vec{a}$ und $m' = m$

$$\boxed{\vec{F'} = \vec{F}} \quad \text{Kraft ist GALILEI – invariant}$$

12.1.3 Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

Bei der historischen Entwicklung der Relativitätstheorie spielte die Tatsache, daß die Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum einen *absoluten* und konstanten Wert besitzt eine sehr wichtige Rolle

Die Ergebnisse, die wir in den vorangehenden Kapiteln die Lichtgeschwindigkeit betreffend erarbeitet haben, erhalten nun in der Relativitätstheorie besondere Bedeutung.
Wir haben in Abschnitt 3.4 verschiedene Methoden der Lichtgeschwindigkeitsmessung besprochen und den bisher genauesten, mit Hilfe modernster Interferenzmessungen ermittelten Wert

$$c = 299\,792\,458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

als den Wert der Lichtgeschwindigkeit in Vakuum *definiert*. Anhand des MICHELSON – MORLEY – Experimentes haben wir in Abschnitt 9.4.1 herausgestellt, daß dieser Wert *absolut* und konstant ist, d.h. sich nicht mit der Wahl des Bezugssystems ändert. Diese Tatsache spielte in der geschichtlichen Entwicklung der Relativitätstheorie eine große Rolle. Sie zeigte die Grenzen des GALILEIschen Relativitätsprinzips auf, wie wir im folgenden darlegen werden.

12.1.4 Das Michelson – Morley – Experiment (1887)

Wir haben in Abschnitt 6.1 die historische Entwicklung der Theorien über das " Licht" aufgezeigt, unter anderem die Vorstellung, das Licht benötige in Analogie zu den Schallwellen zur Ausbreitung ein tragendes Medium, den "Äther". Bei Existenz eines solchen ruhenden Äthers könnte dieser als *absolutes* Inertialsystem gewählt werden. Dann wäre nach der GALILEI – Transformation die Lichtgeschwindigkeit abhängig vom Bezugssystem: Für jede Geschwindigkeit gilt nach der GALILEI – Transformation beim Übergang zwischen Inertialsystemen

$$\frac{d\vec{r'}}{dt'} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{\mathcal{V}} \quad .$$

In einem Inertialsystem, welches sich mit $\mathcal{V}$ relativ zum absoluten Äther bewegt, würde also für die Lichtgeschwindigkeit folgen

$$\vec{c'} = \vec{c} - \vec{\mathcal{V}} \quad .$$

Der amerikanische Physiker MICHELSON, dem sich später auch E.W. MORLEY anschloß, wollte die Existenz des Äthers, an den nach der vorherrschenden Theorie die Ausbreitung des Lichtes gebunden war, experimentell nachweisen. Ausgangspunkt seiner Überlegungen war, daß sich die Erde mit einer Geschwindigkeit $v = 30\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ um die Sonne bewegt. Die Lichtgeschwindigkeit relativ zum Äther sei c. Vernachlässigt man die Krümmung der Bahn und die Erddrehung, so müßte die Lichtgeschwindigkeit unterschiedlich sein, je nachdem, ob sich das Licht gegen ($c' = c + v$) oder in Richtung ($c' = c - v$) der Erdbewegung fortpflanzt.

Zur technischen Durchführung des Experimentes diente das MICHELSON – Interferometer (Abb. 12.2). Wenn die Spiegel S_1 und S_2 nicht exakt senkrecht aufeinander stehen,

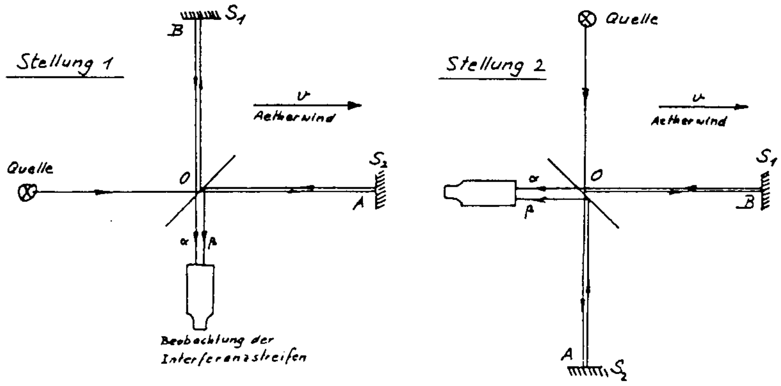


Abbildung 12.2: *Versuchsanordnung des* Michelson – Morley – *Experimentes. (aus [15])*

dann sind die ins Fernrohr einlaufenden Wellen nicht parallel und man beobachtet Interferenzstreifen. Wenn die Lichtgeschwindigkeit in verschiedenen Richtungen unterschiedlich wäre, dann müßte sich bei Drehung des Interferometers der Gangunterschied der beiden Strahlen α und β ändern und dadurch eine Verschiebung des Interferenzmusters eintreten. Wir berechnen zunächst für Stellung 1 die Laufzeiten, die das Licht benötigt, um von der halbdurchlässigen Platte zum Spiegel S_1 bzw S_2 und zurück zu gelangen. Dabei bezeichnen wir mit c die Geschwindigkeit, mit der sich das Licht relativ zum Äther bewegt. Der Äther strömt seinerseits relativ zu einem Beobachter auf der Erde mit der Geschwindigkeit v, man spricht vom **Ätherwind**.
Für die Reflexion am Spiegel S_2 gilt

$$t_{OAO} = t_{OA} + t_{AO} = \underbrace{\frac{l}{c+v}}_{\substack{\text{gegen}\\ \text{Äther}}} + \underbrace{\frac{l}{c-v}}_{\substack{\text{mit}\\ \text{Äther}}} = \frac{2l}{c}\,\frac{1}{1-v^2/c^2}$$

Wir entwickeln das Ergebnis nach v^2/c^2.

$$t_{OAO} = \frac{2l}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}+\frac{v^4}{c^4}+\ldots\right) \approx \frac{2l}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) \quad \text{mit} \quad \frac{v^2}{c^2} \ll 1$$

Zur Berechnung der Laufzeit t_{OBO} zum Spiegel S_1 und zurück müssen wir die Geschwindigkeiten vektoriell addieren. Zum besseren Verständnis wollen wir den Vorgang bildlich veranschaulichen. Wir stellen uns das Licht als ein Boot vor, welches sich auf einem Fluß mit der Geschwindigkeit c quer zur Strömungsrichtung bewegt. Das Wasser des Flusses (Äther) strömt seinerseits mit der Geschwindigkeit v relativ zu einem am Ufer ruhenden Beobachter. Damit das Boot am Uferort B ankommt, muß es in Richtung auf B' starten, da es aufgrund der Strömung (Ätherwind) abgetrieben wird. Es gilt $BB' = v\,t_{OB}$. Die Rückfahrt zum Punkt O muß unter demselben Winkel wie die Hinfahrt (in Richtung auf

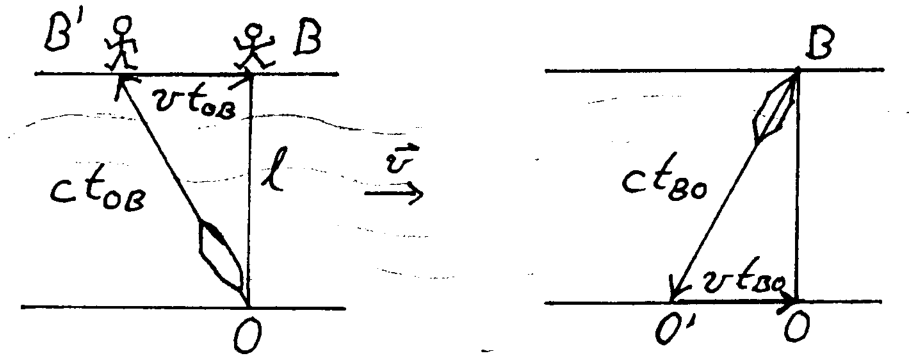


Abbildung 12.3: *Veranschaulichung des* MICHELSON – MORLEY – *Versuches (aus [15])*

O') erfolgen. Dann gilt $BB' = OO' \Rightarrow t_{0B} = t_{BO}$.
Aus der Abbildung 12.3 sind nun folgende Beziehungen ersichtlich:

$$l^2 + v^2\, t_{OB}^2 = c^2\, t_{OB}^2 \;\Rightarrow\; t_{OB}^2 = \frac{l^2}{c^2 - v^2} = \frac{l^2}{c^2}\,\frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

$$t_{OB} = \frac{l}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \simeq \frac{l}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{v^2}{c^2} + \ldots\right)$$

$$t_{OBO} = 2\, t_{OB} \simeq \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{v^2}{c^2} + \ldots\right)$$

Die Differenz der Laufzeiten für die Wege OAO und OBO beträgt also in Stellung 1

$$t_{OAO} - t_{OBO} \simeq \frac{l}{c}\,\frac{v^2}{c^2}$$

Für die Stellung 2 erhält man analog eine Zeitdifferenz

$$t_{OAO} - t_{OBO} \simeq -\frac{l}{c}\,\frac{v^2}{c^2}$$

Damit ändert sich die Zeitdifferenz der beiden Strahlen bei Drehung der Anordnung um 90° um

$$\Delta t = \frac{2l}{c}\,\frac{v^2}{c^2}$$

Welcher Gangunterschied wäre zu erwarten, wenn der Äther existierte?

$$c\,\Delta t = 2l\,\frac{v^2}{c^2}$$

Um eine meßbare Verschiebung des Interferenzmusters zu erzielen, muß der Lichtweg l möglichst groß gewählt werden. MICHELSON und MORLEY gelang dies durch die in Abbildung 12.4 skizzierte Verbesserung der Versuchsanordnung. Beispielsweise träte bei

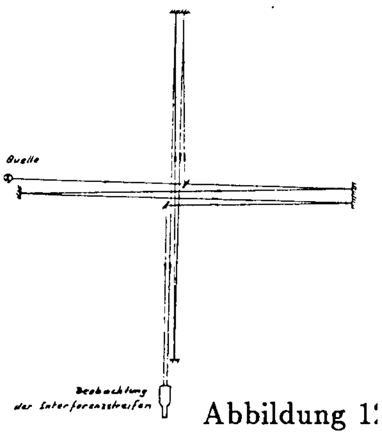


Abbildung 12.4: *Vergrößerung des Lichtweges (aus [15])*

einem Abstand Platte $\leftrightarrow$ Spiegel $l = 10\,\mathrm{m}$ mit $c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ und $v = 3 \cdot 10^4\,\mathrm{m/s}$ eine Gangdifferenz $c\,\Delta t = 2 \cdot 10\,\mathrm{m} \cdot 10^{-8} = 2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} = 0,2\,\mu\mathrm{m}$ auf. Verwendet man die grüne Spektrallinie einer Hg – Lampe ($\lambda = 5,46 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$), dann würde die Verschiebung ungefähr 40% der Lichtwellenlänge betragen und wäre damit meßbar!

$$\lambda \approx 5 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} \;\Rightarrow\; \frac{c\,\Delta t}{\lambda} = \frac{2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}}{5 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}} = \frac{2}{5} = 40\,\% \;\text{ meßbar!}$$

Michelson und Morley konnten trotz ausreichender Meßgenauigkeit keinen Effekt feststellen! Wie in Abschnitt 9.4.1 bereits dargelegt wurde, wurden ihre Messungen später mit weitaus verbesserten Versuchsaufbauten überprüft. Heute wird das negative Ergebnis mit einer Präzision $c\,\Delta t = 10^{-10}\,\lambda$ bestätigt.

Das Resultat ist also, daß der angenommene Lichtäther nicht existiert. Es gibt kein absolutes Bezugssystem: Die Lichtgeschwindigkeit ist unabhängig vom Bezugssystem!

Dies steht im Widerspruch zur Galilei – Transformation. Es muß also ein allgemeineres als das Galileische Relativitätsprinzip gelten, dessen Koordinatentransformationen noch gefunden werden müssen.

12.2 Spezielle Relativitätstheorie

Wir beschränken unsere Betrachtungen auf die **spezielle Relativitätstheorie** Einsteins im Gegensatz zur **allgemeinen Relativitätstheorie**, welche auch beschleunigte Bezugssysteme sowie die Gravitation einbezieht.

12.2.1 Einsteins Postulate

A.Einstein (1879 –1955) lieferte im Jahre 1905 ein Relativitätsprinzip, welches mit dem Ergebnis des Michelson – Morley – Experimentes in Einklang steht:

> *Alle Gesetze der Physik sind in Inertialsystemen,d.h. in gleichförmig zueinander bewegten Bezugssystemen gleichwertig.*
>
> *Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist absolut und konstant,d.h. unabhängig von der Bewegung der Lichtquelle oder des Empfängers.*

Auf diesen Postulaten basiert der umfangreiche Gehalt der speziellen Relativitätstheorie. Wir werden in der genannten Reihenfolge folgende Punkte behandeln:

Lorentz – Transformation
Transformation der Geschwindigkeit
Transformation der Beschleunigung
Längenkontraktion
Zeitdilatation
Relativistische Dynamik

12.2.2 Die Lorentztransformation

Die Lorentz – Transformation wurde bereits 1899 von H.A.Lorentz (1853 –1928) aufgestellt. Er bezog allerdings seine Gleichungen nur auf elektrodynamische Vorgänge und ging von der falschen Hypothese eines im Raum ruhenden Äthers mit $\vec{E}$– und $\vec{B}$–Feldern aus. Erst Einstein forderte, daß die Lorentz – Transformation *alle* mit Materie verbundenen physikalischen Vorgänge betreffen solle.

Wie muß die Galilei – Transformation abgewandelt werden, damit die Gleichungen Einsteins Postulate erfüllen?

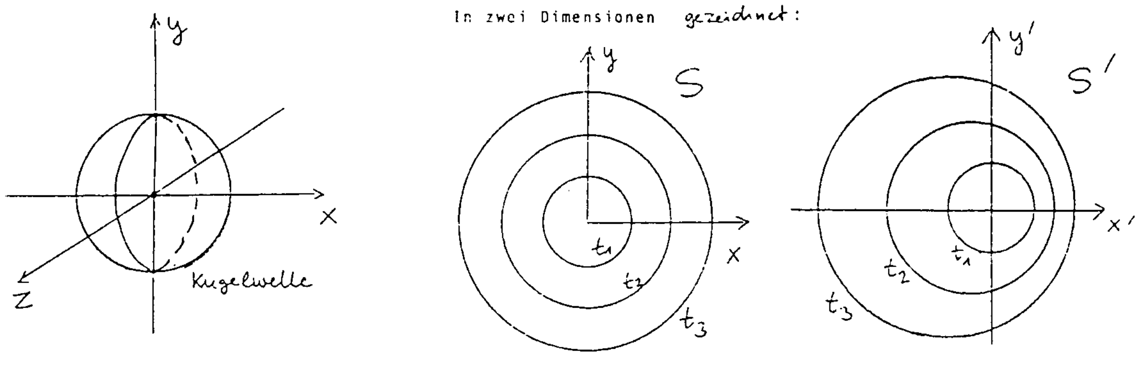


Abbildung 12.5: *Lichtblitz breitet sich in Form einer Kugelwelle aus. (aus [7])*

Im Ursprung des Systems $\mathrm{S}(O,x,y,z)$ ruhe eine Lichtquelle, von der zur Zeit $t=0$ ein Lichtblitz emittiert werde. Die Gleichung der sich ausbreitenden Kugelwelle lautet dann im System S

$$x^2+y^2+z^2=c^2\,t^2 \qquad (1)$$

Wie läßt sich die Fortpflanzung des Lichtblitzes im System S′ beschreiben, welches sich relativ zu S mit der Geschwindigkeit $\mathcal{V}$ bewegt?

Die beiden Systeme sollen im Moment der Lichtaussendung zusammenfallen. Nach dem zweiten Postulat ist die Lichtgeschwindigkeit unabhängig vom Bezugssystem. Daher wird in S′ die Wellenfront formal dargestellt durch

$$x'^2+y'^2+z'^2=c^2\,t'^2 \qquad (2)$$

Die beiden Gleichungen (1) und (2) lassen sich durch die Galilei – Transformation nicht ineinander überführen:

$$\left.\begin{aligned} x'&=x-\mathcal{V}\,t\\ y'&=y\\ z'&=z\\ t'&=t \end{aligned}\right\}\ \text{eingesetzt in (2)} \ \Rightarrow\ x^2-2\,x\,\mathcal{V}\,t+\mathcal{V}^2\,t^2+y^2+z^2=c^2\,t^2 \qquad (3)$$

Der Widerspruch zwischen den Gleichungen (1) und (2) liegt in den Gliedern $-2\,x\,\mathcal{V}\,t+\mathcal{V}^2\,t$. Er kann nur durch <u>Aufgabe der Hypothese der absoluten Zeit $t'=t$</u> beseitigt werden! Da die Wellenfronten in beiden Systemen mit konstanter Geschwindigkeit fortschreiten, muß die gesuchte Transformation linear sein. Wir machen daher den Ansatz $t'=t+\alpha\,x$ bei Beibehaltung der übrigen Gleichungen. Einsetzen in (2) liefert

$$x^2-2\,x\,\mathcal{V}\,t+\mathcal{V}^2\,t^2+y^2+z^2=c^2\,(t^2+2\,\alpha\,x\,t+\alpha^2\,x^2) \qquad (5)$$

Die gemischten Terme auf beiden Seiten der Gleichung sind identisch, wenn man

$$\alpha=-\frac{\mathcal{V}}{c^2}\ \Rightarrow\ t'=t-\frac{\mathcal{V}}{c^2}\,x$$

setzt. Dann stimmen die Gleichungen (1) und (5) bis auf den Faktor $\sqrt{1-\mathcal{V}^2/c^2}$ überein. Dieser Faktor verschwindet für den Fall, daß man

$$x'=\frac{x-\mathcal{V}\,t}{\sqrt{1-\mathcal{V}^2/c^2}} \quad \text{und} \quad t'=\frac{t-\frac{\mathcal{V}}{c^2}\,x}{\sqrt{1-\mathcal{V}^2/c^2}}$$

setzt. Wir führen folgende Abkürzungen ein:

$$\beta=\frac{\mathcal{V}^2}{c^2} \qquad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\mathcal{V}^2/c^2}}\ \Rightarrow\ \gamma^2=\frac{1}{1-\beta^2}$$

Aus unseren Überlegungen resultiert die **Lorentz – Transformation**:

Lorentztransformation	*Umkehrung*
$x' = \gamma\,(x - \mathcal{V}\,t)$	$x = \gamma\,(x' + \mathcal{V}\,t')$
$y' = y$	$y = y'$
$z' = z$	$z = z'$
$t' = \gamma\,(t - \frac{\mathcal{V}}{c^2}\,x)$	$t = \gamma\,(t' + \frac{\mathcal{V}}{c^2}\,x')$

Hier sind im Vergleich zur GALILEI – Transformation die Ortskoordinaten durch den relativistischen Faktor γ korrigiert. Für den Fall $c \to \infty$ wird $\gamma = 1$, und die LORENTZ – Transformation geht bezüglich der Ortskoordinaten in die GALILEI – Transformation über. Für diesen Übergang ist das Argument $\mathcal{V}/c \to 0$ nicht ausreichend: Die relativistischen Effekte rühren daher, daß sich Lichtsignale aufgrund der endlichen Lichtgeschwindigkeit nicht unendlich schnell ausbreiten können. Wählt man im Fall $\mathcal{V}/c \approx 0$ sehr große Entfernungen, so treten immer noch relativistische Effekte auf.
Auf der Erde besitzen aber bei kleinen Geschwindigkeiten $\mathcal{V} \ll c$ die Gesetze der *klassischen* Mechanik sowie die GALILEI – Transformation stets Gültigkeit.

Die Erfüllung der EINSTEINschen Postulate ist gleichbedeutend mit der Forderung, daß alle physikalischen Gesetze forminvariant unter der LORENTZ – Transformation sein müssen.

12.2.3 Relativität der Gleichzeitigkeit

Wir haben bei der Herleitung der LORENTZ – Transformation die Vorstellung von der absoluten Zeit aufgeben müssen. Dies bedeutet, daß zwei Ereignisse, die in einem System S gleichzeitig stattfinden, in einem anderen System S′ nicht mehr unbedingt gleichzeitig sind.

Unter welchen Bedingungen bleibt die Gleichzeitigkeit unter der Lorentztransformation erhalten?

Wir nehmen an, daß in S zur Zeit $t_1 = t_2 = t$ zwei Ereignisse stattfinden. In einem relativ mit $\mathcal{V}$ dazu bewegten Inertialsystem S′ gilt dann

$$\underbrace{\begin{array}{ll} x'_1 = \gamma\,(x_1 - \mathcal{V}\,t_1) & \qquad x'_2 = \gamma\,(x_2 - \mathcal{V}\,t_2) \\ t'_1 = \gamma\,(t_1 - \frac{\mathcal{V}}{c^2}\,x_1) & \qquad t'_2 = \gamma\,(t_2 - \frac{\mathcal{V}}{c^2}\,x_2) \end{array}}_{\Delta t' = t'_1 - t'_2 = \gamma\,\frac{\mathcal{V}}{c^2}\,(x_2 - x_1)}$$

Die Ereignisse sind in S′ nur dann gleichzeitig, wenn sie in S gleichzeitig und am selben Ort stattfinden.

Wir gehen nun auf einige Konsequenzen der LORENTZ – Transformation ein.

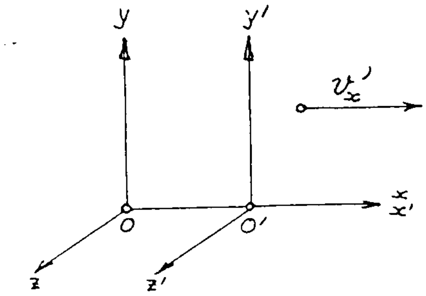


Abbildung 12.6: *Zur Transformation der Geschwindigkeit. (aus [15])*

12.2.4 Die Transformation der Geschwindigkeit

Wir betrachten wieder zwei Inertialsysteme, die sich längs der x – Richtung relativ zueinander mit der Geschwindigkeit $\mathcal{V}$ bewegen. In S$'$ bewege sich ein Teilchen mit der Geschwindigkeit

$$\vec{v'} = \begin{pmatrix} v_x' \\ v_y' \\ v_z' \end{pmatrix} \quad .$$

Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Teilchens, die ein Beobachter feststellt, der in S ruht, ergibt sich aus der Lorentz – Transformation. Es ist

$$\begin{aligned}
dx &= \gamma\, dx' + \gamma\, \mathcal{V}\, dt' \\
dy &= dy' \\
dz &= dz' \\
dt &= \gamma\, dt' + \gamma\, \frac{\mathcal{V}}{c^2}\, dx' \quad .
\end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst die Geschwindigkeitskomponente in x – Richtung.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma\, dx' + \gamma\, \mathcal{V}\, dt'}{\gamma\, dt' + \gamma\, \frac{\mathcal{V}}{c^2}\, dx'} = \frac{dx' + \mathcal{V}\, dt'}{dt' + \frac{\mathcal{V}}{c^2}\, dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + \mathcal{V}}{1 + \frac{\mathcal{V}}{c^2}\, \frac{dx'}{dt'}}$$

Mit $v_x' = dx'/dt'$ erhält man

$$v_x = \frac{v_x' + \mathcal{V}}{1 + \frac{\mathcal{V}}{c^2}\, v_x'}$$

Auf analoge Weise transformiert man die y – und z – Komponente der Geschwindigkeit. Insgesamt lauten die Transformationsformeln

$$\boxed{\begin{array}{ll} v_x = \dfrac{v'_x + \mathcal{V}}{1 + \dfrac{\mathcal{V}}{c^2}\, v'_x} & v'_x = \dfrac{v_x - \mathcal{V}}{1 - \dfrac{\mathcal{V}}{c^2}\, v_x} \\ v_y = \dfrac{v'_y}{\gamma\left(1 + \dfrac{\mathcal{V}}{c^2}\, v'_x\right)} & v'_y = \dfrac{v_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{\mathcal{V}}{c^2}\, v_x\right)} \\ v_z = \dfrac{v'_z}{\gamma\left(1 + \dfrac{\mathcal{V}}{c^2}\, v'_x\right)} & v'_z = \dfrac{v_z}{\gamma\left(1 - \dfrac{\mathcal{V}}{c^2}\, v_x\right)} \end{array}}$$

Zur Probe untersuchen wir den Spezialfall, daß sich das Teilchen in S$'$ längs x mit der Lichtgeschwindigkeit c bewegt. Es gelte also $v'_x = c$. Dann liefert die entsprechende Transformationsformel für die Geschwindigkeit in S

$$v_x = \frac{c + \mathcal{V}}{1 + \dfrac{\mathcal{V}}{c^2}\, c} = c \;\; !!$$

Das zweite EINSTEINsche Postulat ist also – wie gefordert – erfüllt. Zusätzlich läßt dieses Ergebnis auf eine weitere Bedeutung des relativistischen Faktors schließen: Der relativistische Faktor der LORENTZ – Transformation stellt sicher, daß die Lichtgeschwindigkeit die höchste Teilchengeschwindigkeit darstellt.

Ein weiterer wichtiger Unterschied der LORENTZ – Transformation zur GALILEI – Transformation ist, daß die Geschwindigkeiten nicht mehr additiv sind! Dazu sei folgendes Beispiel angegeben:
Eine Rakete fliege mit $\mathcal{V} = 0.5\,c$ in x – Richtung und schieße Geschosse (z.B. einen Elektronenstrahl) mit $v = 0,9\,c$ in Flugrichtung ab. Ein ruhender Beobachter, an dem die Rakete mit $\mathcal{V} = 0.5\,c$ vorbei fliegt, mißt für die Geschosse die Geschwindigkeit

$$v_x = \frac{v'_x + \mathcal{V}}{1 + \dfrac{\mathcal{V}}{c^2}\, v'_x} = \frac{0,9 + 0,5}{1 + 0,9 \cdot 0,5}\, c = 0,966\, c$$

12.2.5 Die Transformation der Beschleunigung

Aus den Transformationsformeln für die Zeit und die Geschwindigkeit läßt sich nun durch Differentiation die Transformation der Beschleungigung berechnen. Im System S bzw. S' gilt

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\,, \quad \vec{a}' = \begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{dv'_x}{dt'} \\ \dfrac{dv'_y}{dt'} \\ \dfrac{dv'_z}{dt'} \end{pmatrix}$$

Wir werden hier die Rechnung nicht durchführen, sondern lediglich das Resultat angeben:

$$\boxed{\vec{a}' = \begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} a'_x &= \frac{a_x}{\gamma^3 \left(1 - v_x \frac{\mathcal{V}}{c^2}\right)^3} \\ a'_y &= \frac{1}{\gamma^2 \left(1 - v_x \frac{\mathcal{V}}{c^2}\right)^2} \left[a_y + a_x \frac{v_y \frac{\mathcal{V}}{c^2}}{\left(1 - v_x \frac{\mathcal{V}}{c^2}\right)}\right] \\ a'_z &= \frac{1}{\gamma^2 \left(1 - v_x \frac{\mathcal{V}}{c^2}\right)^2} \left[a_z + a_x \frac{v_z \frac{\mathcal{V}}{c^2}}{\left(1 - v_x \frac{\mathcal{V}}{c^2}\right)}\right] \end{aligned}}$$

Wir betrachten noch einen Spezialfall, in dem sich die Formeln wesentlich vereinfachen: Ein Teilchen habe in dem Moment, in dem es im System S beobachtet wird, die Geschwindigkeit $\vec{v} = 0$, aber dennoch eine Beschleunigung $\vec{a}$ (Beispiel: Schwingendes Teilchen im Umkehrpunkt). Das Inertialsystem S wird in diesem Fall als das **momentane Ruhesystem** des Teilchens bezeichnet. Mit $v_x = v_y = v_z = 0$ vereinfachen sich dann die Formeln zu

$$a'_x = a_x \frac{1}{\gamma^3} \quad a'_y = a_y \frac{1}{\gamma^2} \quad a'_z = a_z \frac{1}{\gamma^2}$$

12.2.6 Längenkontraktion

a.) Transformation einer Länge senkrecht zur Relativgeschwindigkeit $\mathcal{V}$ der Systeme

Wir betrachten einen im System S ruhenden Stab, der parallel zur y – bzw. zur z – Achse ausgerichtet ist, wobei sich S und S′ längs x bewegen. Aus den Transformationsformeln für die Ortskoordinaten $y' = y$ und $z' = z$ läßt sich der Schluß ziehen, daß die Länge des Stabes in beiden Systemen gleich ist.

b.) Transformation einer Länge parallel zur Relativgeschwindigkeit $\mathcal{V}$ der Systeme

Wir untersuchen nun die Länge eines Stabes, der parallel zur x – Achse liegt. Im Bezugsystem S befinde sich der Stab in Ruhe, so daß die Koordinaten der Stabenden x_1 und x_2 unabhängig von der Zeit sind. Die sogenannte **Ruhelänge** des Stabes ist also gegeben durch

$$L_0 = x_2 - x_1 \quad .$$

Bezüglich des Systems S′, welches mit $\mathcal{V}$ relativ zu S fortschreitet, ist der Stab in Bewegung. Wir erhalten die Länge des Stabes, indem wir zu einem Zeitpunkt t' die mit den Stabenden zusammenfallenden Koordinaten $x_1(t')$ und $x_2(t')$ ermitteln. Dabei ist es wichtig, daß die Endkoordinaten gleichzeitig gemessen werden! Dann kann die Strecke zwischen den gemessenen Punkten als Länge L des Stabes im bewegten System S′ definiert werden.

$$L = x'_2 - x'_1$$

Die LORENTZ – Transformation liefert nun

$$L_0 = x_2 - x_1 = \gamma\,(x_2' + \mathcal{V}\,t_2') - \gamma\,(x_1' + \mathcal{V}\,t_1')$$

Die Messungen im bewegten Sytem müssen gleichzeitig erfolgen, d.h. es muß $t_2' = t_1' = t'$ gelten. Damit ergibt sich

$$L_0 = \gamma\,(x_2' - x_1') = \gamma\,L$$

$$\boxed{L = \frac{1}{\gamma}\,L_0} \quad \underline{\text{Längenkontraktion}}$$

Der in seiner Längsrichtung bewegte Stab erscheint gegenüber seiner Ruhelänge verkürzt.

<u>Beachte</u> Die Rechnung

$$L = x_2' - x_1' = \gamma\,(x_2 - \mathcal{V}\,t) - \gamma\,(x_1 - \mathcal{V}\,t) = \gamma\,L_0$$

ist falsch, da sie die Gleichzeitigkeit der Längenmessung im *Ruhe*system voraussetzt. Da für die LORENTZ – Transformation keine absolute Zeit gilt, finden dann die Meßvorgänge im *bewegten* System <u>nicht</u> gleichzeitig statt! Dadurch wird die Messung verfälscht.

12.2.7 Die Zeitdilatation

Wir untersuchen nun ein Zeitintervall in den verschiedenen Bezugssystemen, z.B. die Lebensdauer eines Elementarteilchens.

Das Teilchen sei im System S in Ruhe, es befinde sich stets am Ort $x = x_0$. Es zerfalle nach der Zeit τ.

$$\tau = \Delta t = t_2 - t_1$$

Wir transformieren nun vom Ruhesystem zum bewegten System S'.

$$\tau' = \Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma\left(t_2 - \frac{\mathcal{V}}{c^2}\,x_0\right) - \gamma\left(t_1 - \frac{\mathcal{V}}{c^2}\,x_0\right)$$

$$\tau' = \gamma\,(t_2 - t_1) = \gamma\,\Delta t = \gamma\,\tau$$

$$\boxed{\tau' = \gamma\,\tau} \quad \underline{\text{Zeitdilatation}}$$

In bewegten Systemen laufen die Uhren langsamer! Ein Beobachter, relativ zu dem sich das Elementarteilchen bewegt, registriert eine längere Lebensdauer als ein anderer Beobachter, der das Teilchen in Ruhe sieht (gleiche Uhren vorausgesetzt).

Die Zeitdilatation kommt in der Elementarteilchenphysik zum Tragen. Es lassen sich hochenergetische Teilchenstrahlen erzeugen, in denen die Teilchen bezogen auf das "Laborsystem" annähernd mit Lichtgeschwindigkeit fliegen. Für π^+ – Mesonen z.B. tritt in einem solchen Strahl ($\mathcal{V}/c = 1 - 5 \cdot 10^{-5}$) der Zerfall wesentlich später ein, als aufgrund ihrer Lebensdauer im Ruhezustand zu erwarten wäre. Der Faktor der Zeitdilatation beträgt hier etwa 10^2.

12.3 Relativistische Dynamik

Wir wollen nun sehen, welche Form die Größen und Gesetze der Dynamik relativistisch annehmen. Folgende Grundsätze müssen erfüllt sein:

1. Die relativistischen Größen und Gesetze sollen bei kleinen Geschwindigkeiten ($v/c \ll 1$) in die klassischen Größen und Gesetze übergehen.

2. Wir setzen voraus, daß die Erhaltungssätze wie Energie–, Impuls– und Drehimpulserhaltung auch bei hohen Geschwindigkeiten gelten. (Experimenteller Nachweis!)

3. Die Gesetze sollen forminvariant unter der LORENTZtransformation sein.

Zuerst befassen wir uns mit dem Impuls.

12.3.1 Der relativistische Impuls

In der klassischen Mechanik lautet der Impuls eines Systems $\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v_i}$. Wie sieht der relativistische Impuls aus?
Zur Klärung dieser Frage untersuchen wir den Stoß zweier Körper in einem abgeschlossenen System. Klassisch betrachtet verläuft dieser unter Erhaltung des Gesamtimpulses, wenn keine äußeren Kräfte wirken. Die Impulserhaltung ist also GALILEI – invariant. Ist sie auch invariant unter der LORENTZ – Transformation?

Der Stoß der beiden Körper, welche gleiche Masse m_0 besitzen, sei elastisch und nicht–zentral. Als Bezugssystem dient zunächst das Schwerpunktsystem (Abb. 12.7). Die beiden Körper nähern sich mit entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeiten. Nach den Gesetzen der klassischen Mechanik sind die Geschwindigkeiten, mit denen sie sich vom nach dem Stoß vom Schwerpunkt entfernen, wieder entgegengesetzt gleich. Der Gesamtimpuls $\vec{p} = \sum_i^2 m_i \vec{v_i}$ hat vor und nach dem Stoß den Wert Null. Wie sieht der Stoß in einem System

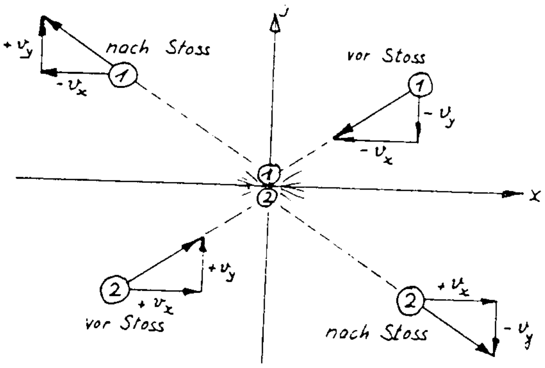


Abbildung 12.7: *Elastischer, nicht – zentraler Stoß zweier Massen im Schwerpunktsystem. (aus [5])*

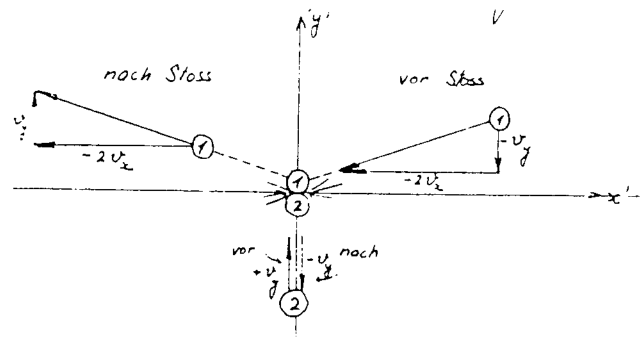


Abbildung 12.8: *Stoß im mit $\mathcal{V}$ längs x bewegten System S′ (aus [5])*

S′ aus, welches sich mit $\mathcal{V}$ in x – Richtung bewegt? Wir setzen $\mathcal{V} = +v_x$, d.h. die Systemgeschwindigkeit soll gleich der x – Geschwindigkeitkomponente von Teilchen 2 vor dem Stoß sein (Abb. 12.8). Die y' – Komponente des Impulses ist vor und nach dem Stoß Null, die x – Komponente ist vor und nach dem Stoß $-2\, m_0\, v_x$. Der Impuls bleibt also erhalten.

Wir betrachten nun den Stoßvorgang unter der Lorentz – Transformation. Diese liefert für die y –Geschwindigkeitskomponente der Teilchen im gestrichenen System folgende Ausdrücke:

Teilchen 1	
vor dem Stoß	nach dem Stoß
$v'_y = -\dfrac{v_y}{1+\frac{v_x^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}$	$v'_y = \dfrac{v_y}{1+\frac{v_x^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}$

Teilchen 2	
vor dem Stoß	nach dem Stoß
$v'_y = \dfrac{v_y}{1-\frac{v_x^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}$	$v'_y = -\dfrac{v_y}{1-\frac{v_x^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}$

Welche Impulsänderung erfahren die Teilchen beim Stoß? Wir nehmen nun an, wir könnten den Impuls in S′ als $\vec{p'} = m_0\, \vec{v'}$ definieren. Dann würden die Teilchen beim Stoß folgende Impulsänderung erfahren:

Teilchen 1

$$\Delta p'_y = \frac{2\, m_0\, v_y}{1+\frac{v_x^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}$$

Teilchen 2

$$\Delta p'_y = -\frac{2\, m_0\, v_y}{1-\frac{v_x^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}$$

Die Impulsänderungen wären nicht entgegengesetzt gleich, was eine Verletzung der Impulserhaltung bedeutet. Diese haben wir aber in Grundsatz 2 vorausgesetzt. Damit die Impulserhaltung unter der Lorentz – Transformation gewährleistet ist, muß also die Definition des Impulses abgewandelt werden. Der relativistische Ausdruck für den Impuls lautet (ohne Herleitung):

$$\boxed{\vec{P} = \frac{m_0\, \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\, m_0\, \vec{v}} \quad \text{relativistischer Impuls}$$

Dabei ist v die Geschwindigkeit des Teilchens, m_0 wird als **Ruhemasse** bezeichnet. Der Verlauf des relativistischen und nicht relativistischen Impulses in Abhängigkeit von v/c ist in Abbildung 12.9 aufgezeigt. Der relativistische Impuls eines Teilchens steigt drastisch an, wenn die Teilchengeschwindigkeit in die Nähe der Lichtgeschwindigkeit anwächst. Für $v/c \ll 1$ geht er in die klassische Form $\vec{p} = m_0\, \vec{v}$ über.

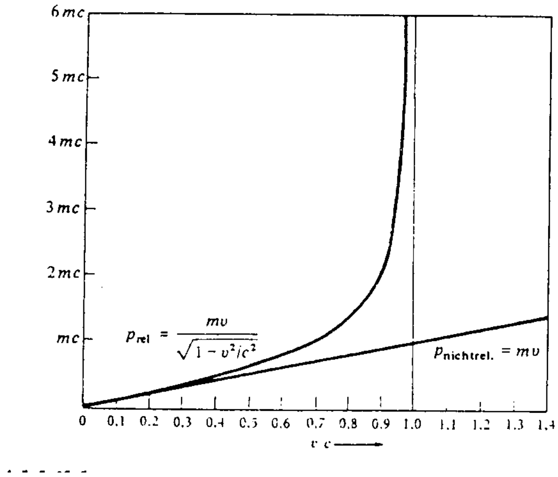


Abbildung 12.9: *Verlauf des relativischen und nicht relativistischen Impulses. (aus [5])*

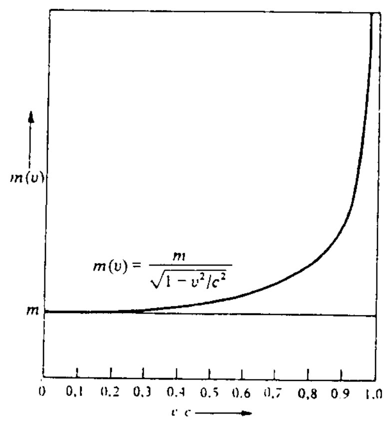


Abbildung 12.10: *Relativistische Massenzunahme in Abhängigkeit von der Teilchengeschwindigkeit. (aus [5])*

Der Ausdruck für den Impuls kann auch in der Form

$$\vec{p} = m(v)\,\vec{v}$$

geschrieben werden. Dann wird die Masse als geschwindigkeitsabhängig interpretiert! Man spricht von der **relativistischen Masse** $m(v)$.

$$\boxed{m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \gamma\, m_0} \quad \underline{\text{relativistische Masse}}$$

Ein Teilchen, welches sich mit der Geschwindigkeit v relativ zu einem Inertialsystem bewegt, erfährt einen **relativistischen Massenzuwachs**. Dies erklärt, warum die Teilchengeschwindigkeit niemals bis zur Lichtgeschwindigkeit anwachsen kann: Die Teilchenmasse wäre dann unendlich größ und es müßte eine unendlich hohe Beschleunigungsarbeit geleistet werden.

12.3.2 Die relativistische Energie

In der klassischen Mechanik ist der Zusammenhang zwischen kinetischer Energie und Impuls gegeben durch

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2\,m_0}$$

Welche Form nimmt die kinetische Energie in der Relativitätstheorie an?

Wir gehen aus von der klassischen Definition der kinetischen Energie: E_{kin} ist diejenige Energie, die ein anfänglich ruhender Körper erhält, wenn an ihm die Beschleunigungsarbeit W geleistet wird.

Ein Teilchen im System S werde von $v = 0$ auf v beschleunigt. Die angreifende Kraft wird allgemein beschrieben durch

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m\,\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Damit erhalten wir als Arbeit

$$\begin{aligned} W &= \int F\,dx = \int \frac{d}{dt} \frac{m_0\,v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,dx \\ &= \int \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0\,v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \frac{dx}{dt}\,dt \\ &= \int \left[\frac{m_0\,v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{dv}{dt} + \frac{m_0\,v^3\,c^{-2}}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)^3}} \frac{dv}{dt} \right] dt \\ &= \int \frac{m_0\,v\,dv/dt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}^3}\,dt = \int \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0\,c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) dt \quad . \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Integrationsgrenzen $v = 0$ und v folgt

$$W = \frac{m_0\,c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0\,c^2 = E_{kin}$$

$$\boxed{E_{kin} = m_0\,c^2\,(\gamma - 1)} \quad \underline{\text{relativistische kinetische Energie}}$$

Der relativistische Ausdruck der kinetischen Energie besitzt auf den ersten Blick keine Ähnlichkeit mit der klassischen Form. Für kleine Werte $v/c \ll 1$ geht aber $E_{kin} = m_0\,c^2\,(\gamma - 1)$ in $E_{kin} = m_0\,v^2/2$ über, wie wir nun zeigen werden. Wir entwickeln γ

$$\gamma = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \cdots \quad ,$$

und können die Näherung

$$\gamma - 1 = \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

vornehmen. Dann gilt

$$E_{kin} = m_0\,c^2\,(\gamma - 1) \xrightarrow{v/c \ll 1} E_{kin} = m_0\,c^2\,\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2}\,m_0\,v^2$$

Wie lautet die relativistische Gesamtenergie? Wir betrachten dazu noch einmal den Ausdruck für die relativistische kinetische Energie

$$E_{kin} = \gamma\,m_0\,c^2 - m_0\,c^2 = m\,c^2 - m_0\,c^2$$

Die einzelnen Glieder der Gleichung haben folgende Bedeutung: Der zweite Term beschreibt die **Ruheenergie**, die ein Teilchen mit der Ruhemasse m_0 besitzt.

$$\boxed{E_0 = m_0\,c^2} \quad \underline{\textbf{Ruheenergie}}$$

Den ersten Term können wir als Gesamtenergie des Teilchens definieren.

$$\boxed{E = m\,c^2} \quad \textbf{relativistische Gesamtenergie}$$

Es gilt also

$$E_{kin} = E - E_0 \quad .$$

Aus diesen Ergebnissen leitete EINSTEIN das **Prinzip der Äquivalenz von Masse und Energie** ab. Danach ist Materie eine Form von Energie. Energie und Materie können ineinander umgewandelt werden.

$$\Delta E = \Delta m\,c^2$$

Die experimentelle Bestätigung dieser Vorgänge (z.B. Paarerzeugung) werden wir in der Vorlesung Physik IV behandeln.

Wir wollen nun noch die relativistische Gesamtenergie durch den Impuls ausdrücken: Das Quadrat des relativistischen Impulses lautet

$$p^2 = m_0^2\,c^2\beta^2\,\gamma^2 \quad .$$

Wir betrachten die Identität

$$\gamma^2 - \beta^2\,\gamma^2 = 1$$

und formen diese Gleichung zu $\gamma^2 = 1 + \beta^2\,\gamma^2$ um. Wir bilden das Quadrat der relativistischen Energie und ersetzen γ^2.

$$E^2 = \gamma^2\,m_0^2\,c^4 = (1 + \beta^2\,\gamma^2)\,m_0^2\,c^4 = \beta^2\,\gamma^2\,m_0^2\,c^4 + m_0^2\,c^4$$

Der erste Summand enthält das Quadrat des relativistischen Impulses, so daß

$$\boxed{E^2 = p^2\,c^2 + m_0^2\,c^4}$$

folgt.

12.3.3 Die Transformation von Energie und Impuls

Man kann zeigen, daß sich die relativistische Gesamtenergie und der Impuls wie die Ortskoordinaten x, y, z und die Zeit transformieren.

Wir wollen hier die Transformationsbeziehungen ohne Herleitung angeben. Dabei sei wieder ein System S′ betrachtet, welches sich mit $\mathcal{V}$ längs x relativ zu dem Inertialsystem S bewegt.

$$\boxed{\begin{array}{lll} p'_x = \gamma\,\left(p_x - \beta\,\dfrac{E}{c}\right) & & \\ \qquad\quad p'_y = p_y & \text{mit} & \beta = \dfrac{\mathcal{V}}{c} \\ \qquad\quad p'_z = p_z & & \gamma = \dfrac{1}{1-\beta^2} \\ E' = \gamma\,(E - \beta\,c\,p_x) & & \end{array}}$$

Literaturverzeichnis

[1] Alonso, Marcelo. *Physik*. [Übers.:Anneliese Schimpl]. Addison–Wesley Verlag (Deutschland) GmbH, Bonn, 1988

[2] Bergmann, Ludwig und Schaefer, Clemens. *Lehrbuch der Experimentalphysik Bd. I Mechanik, Akustik, Wärme*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1974

[3] Bergmann, Ludwig und Schaefer, Clemens. *Lehrbuch der Experimentalphysik Bd. II Elektrizität und Magnetismus*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1987

[4] Bergmann, Ludwig und Schaefer, Clemens. *Lehrbuch der Experimentalphysik Bd. III Optik*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1987

[5] Berkeley Physik Kurs Bd.1 – Kittel, Charles. *Mechanik*. Vieweg, Braunschweig, 1986

[6] Berkeley Physik Kurs Bd.3 – Frank S. Crawford, Jr. *Schwingungen und Wellen*. Vieweg, Braunschweig, 1984

[7] Böhm, Albrecht. *Manuskript zur Vorlesung Physik III RWTH Aachen*. Aachen

[8] Bormann, Manfred. *Experimentalphysik Bd. 3 Optik, Atomphysik*. Studienverlag Dr. N.Brockmeyer, Bochum, 1986

[9] Brauers, Martina. *Demonstrationsversuche zu Schwingungen und Wellen*. Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt für die Sekundarstufe I/II, Aachen, 1991

[10] Gerlach, Ekard und Grosse, Peter. *Physik Eine Einführung für Ingenieure*. B.G.Teubner, Stuttgart, 1991

[11] Grimsehl, Ernst. *Lehrbuch der Physik Bd. 1 Mechanik, Akustik, Wärmelehre*. BSB B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1977

[12] Grimsehl, Ernst. *Lehrbuch der Physik Bd. 3 Optik*. BSB B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1978

[13] Hecht, Eugene und Zajac, Alfred. *Optics*. Addison – Wesley Publishing Company, Inc., 1974

[14] Hering, Ekbert; Martin, Rolf; Stohrer, Martin. *Physik für Ingenieure*. VDI–Verlag, Düsseldorf, 1989

[15] Känzig, Werner. *Mechanik und Wellenlehre, Manuskript zur Vorlesung Physik I ETH Zürich*. Verlag der Fachvereine an den Schweizerischen Hochschulen und Techniken, Zürich, 1986

[16] Koppelmann, Gerd. *Holographie*. Themenheft Praxis der Naturwissenschaften – Physik 1/35 Jahrgang 1986

[17] Pohl, Robert Wichard. *Optik und Atomphysik*. Springer–Verlag, Berlin, 1976

[18] Westphal, Wilhelm unter Mitarbeit von Westphal, Walter. *Physik* . Springer–Verlag, Berlin, 1970