3. Grassmann-Variablen

Wir betrachten nun ein Gauss-Integral über Grassmann-Variablen:

$$\boxed{\int \prod_{i=1}^{n} d\eta_i^* d\eta_i \; e^{-\frac{1}{2}(\eta_i\, \eta_i^+)\, \underline{\underline{A}}_{ij} \begin{pmatrix}\eta_i \\ \eta_i^*\end{pmatrix} + (\eta_i\, \eta_i^+)\begin{pmatrix}\theta_i \\ \varphi_i\end{pmatrix}}} \qquad (1)$$

wobei $\theta_i, \varphi_i, \eta_i, \eta_i^*$ Grassmann-Variable sind und $A_{ij}^{(\sigma\sigma')} \in \mathbb{C}$.

Wie bei komplexen Variablen führen wir Indizes $k \equiv i\sigma$ ein und schreiben

$$\psi_k \equiv \psi_{i\sigma} = \begin{cases} \eta_i & \text{für } \sigma = 1 \\ \eta_i^* & \text{für } \sigma = 2 \end{cases}$$

$$\chi_k \equiv \chi_{i\sigma} = \begin{cases} \theta_i & \text{für } \sigma = 1 \\ \varphi_i & \text{für } \sigma = 2 \end{cases} \quad ; \quad A_{k\ell} \equiv A_{ij}^{\sigma\sigma'} \qquad (2)$$

(1) erhält dann die Form:

$$\int d\psi_{2n} \ldots d\psi_1 \, e^{-\frac{1}{2}\psi_k A_{k\ell} \psi_\ell + \psi_k \chi_k} = ? \qquad (3)$$

mit (vgl. (2.6))

$$\psi_{2n} \ldots \psi_1 \;\hat{=}\; \eta_n^+ \eta_n \ldots \eta_1^+ \eta_1 \qquad (4)$$

Ein wichtiger Unterschied zu reellen und komplexen Variablen ist die <u>Anti-Vertauschung</u> der ψ_k's:

$$\psi_k \psi_\ell = - \psi_\ell \psi_k$$

Dementsprechend ist die Matrix A_{ke} anti-symmetrisch (o.B.d.A., d.h. der symmetrische Teil gibt keinen Beitrag):

$$\boxed{A_{ke} = -A_{ek}} \Rightarrow \boxed{A_{kk}=0} \quad \text{oder} \quad \boxed{A_{ij}^{\sigma\sigma'} = -A_{ji}^{\sigma'\sigma}} \quad ! \tag{5}$$

Dieser "kleine" Unterschied führt dazu, dass (4) nicht genau analog wie bei reellen/komplexen Variablen herauskommt, sondern

!

$$\boxed{\int d^{2n}\psi \, e^{-\frac{1}{2}\psi_k A_{ke} \psi_e + \psi_k \chi_k} = \sqrt{\det A} \; e^{-\frac{1}{2}\chi_k A^{-1}_{ke} \chi_e}} \tag{6}$$

d.h. im Vergleich zu (2.8) steht die $\sqrt{\det A}$ im Zähler, im Exponenten steht ein $\ominus$ Zeichen, und der Faktor ist anders. Letzteren erhält man aus dem Spezialfall

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = (-1)^n \det \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_n \end{pmatrix} = (-1)^{2n} = 1$$

$$-\frac{1}{2}\,(\eta_i \;\; \eta_i^*) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_i \\ \eta_i^* \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\left(-\eta_i \eta_i^* + \eta_i^* \eta_i\right) = -\eta_i^* \eta_i$$

$$\Rightarrow \int d^{2n}\psi \, e^{-\frac{1}{2}\psi A \psi} = \Big(\underbrace{\int d\eta^* d\eta \, e^{-\eta^*\eta}}_{\int d\eta^* d\eta\,(1-\eta^*\eta) = 1}\Big)^n = 1 \tag{6a}$$

Der Beweis von (6) geht wiederum analog wie bei reellen/komplexen Variablen, nur dass man die Antisymmetrie von A berücksichtigen muss.

Zunächst kann der Term $\psi_k \chi_k$ durch eine Translation beseitigt werden (beachte, dass man dies gemäss (III. 2.14d) auch für Grassmann-Integrationen durchführen kann):

$$\boxed{\psi_k \to \psi_k + A^{-1}_{kl}\chi_l} \implies \tag{7}$$

$$-\tfrac{1}{2}\psi_k A_{kl}\psi_l + \psi_k\chi_k \to -\tfrac{1}{2}(\psi_k + A^{-1}_{kr}\chi_r)A_{kl}(\psi_l + A^{-1}_{ls}\chi_s) + (\psi_k + A^{-1}_{kl}\chi_l)\chi_k$$

$$\underset{A_{kl}=-A_{lk}}{=} -\tfrac{1}{2}\psi_k A_{kl}\psi_l - \tfrac{1}{2}\Big(-\chi_r \underbrace{A^{-1}_{rk}A_{kl}}_{\delta_{rl}}\psi_l + \psi_k \underbrace{A_{kl}A^{-1}_{ls}}_{\delta_{ks}}\chi_s\Big)$$

$$+\tfrac{1}{2}\chi_r \underbrace{A^{-1}_{rk}A_{kl}A^{-1}_{ls}}_{A^{-1}_{rs}}\chi_s + \psi_k\chi_k - \chi_l A^{-1}_{lk}\chi_k$$

$$= -\tfrac{1}{2}\psi_k A_{kl}\psi_l - \tfrac{1}{2}\chi_k A^{-1}_{kl}\chi_l - \tfrac{1}{2}\big(-\underbrace{\chi_k\psi_k}_{-\psi_k\chi_k} + \psi_k\chi_k\big) + \psi_k\chi_k$$

$$= -\tfrac{1}{2}\psi_k A_{kl}\psi_l - \tfrac{1}{2}\chi_k A^{-1}_{kl}\chi_l$$

d.h. mit

$$\boxed{I := \int d^{2n}\psi\, e^{-\frac{1}{2}\psi_k A_{kl}\psi_l}} \tag{8}$$

folgt:

$$\int d^{2n}\psi\, e^{-\frac{1}{2}\psi A\psi + \psi\chi} = I\, e^{-\frac{1}{2}\chi_k A^{-1}_{kl}\chi_l} \tag{9}$$

Zur Berechnung von I definiert man wieder den Erwartungswert

$$\boxed{\langle f(\underline{\psi})\rangle = \frac{\int d^{2n}\psi\, e^{-\frac{1}{2}\psi A\psi} f(\underline{\psi})}{\int d^{2n}\psi\, e^{-\frac{1}{2}\psi A\psi}}} \tag{10}$$

und beweist analog zu (1.7) und (2.11):

$$\boxed{\langle \psi_k f(\underline{\psi})\rangle = \sum_l A^{-1}_{kl}\langle \frac{\partial}{\partial\psi_l} f(\underline{\psi})\rangle} \tag{11}$$

Dabei nützt man aus, dass die partielle Integration gemäss (III.2.14c) auch für Grassmann-Variablen verwendet werden darf:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \psi_r} f(\underline{\psi}) \right\rangle = \frac{1}{I} \int d^{2n}\psi \left(\frac{\partial}{\partial \psi_r} f(\underline{\psi}) \right) e^{-\frac{1}{2}\psi A \psi}$$

$$\overset{(III.2.14c)}{=} -\frac{1}{I} \int d^{2n}\psi \, f(\underline{\psi}) \frac{\partial}{\partial \psi_r} e^{-\frac{1}{2}\psi A \psi} \quad (-1)^p \qquad (*)$$

Vorzeichen gemäss der Zahl der ψ's in $f(\underline{\psi})$

Nun gilt weiterhin analog zum Beweis von (III.2.7):

$$e^{-\frac{1}{2}\sum_{rl} \psi_r A_{rl} \psi_l} = \prod_{rl} e^{-\frac{1}{2} A_{rl} \psi_r \psi_l}$$

$$= \prod_{rl} \left(1 - \tfrac{1}{2} A_{rl} \psi_r \psi_l\right) \underset{A_{rr}=0}{=} \prod_{r<l} \underbrace{\left(1 - \tfrac{1}{2} A_{rl}\psi_r\psi_l\right)\left(1 - \tfrac{1}{2} \underbrace{A_{lr}\psi_l\psi_r}_{A_{rl}\psi_r\psi_l}\right)}_{1 - A_{rl}\psi_r\psi_l}$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{-\frac{1}{2}\sum_{rl} \psi_r A_{rl} \psi_l} = \prod_{r<l} \left(1 - A_{rl}\psi_r\psi_l\right)} \qquad (12)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \psi_r} e^{-\frac{1}{2}\psi A \psi} = \prod_{\substack{r<s \\ r,s \neq r}} \left(1 - A_{rs}\psi_r\psi_s\right) \,\cdot$$

$$\cdot \, \frac{\partial}{\partial \psi_r} \underbrace{\prod_{k<s} \left(1 - A_{ks}\psi_k\psi_s\right) \prod_{r<k} \left(1 - \underbrace{A_{rk}\psi_r\psi_k}_{A_{kr}\psi_k\psi_r}\right)}_{\prod_{s\neq k} \left(1 - A_{ks}\psi_k\psi_s\right)}$$

$$\underset{\substack{\text{Produktregel} \\ (III.2.14a)}}{=} \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq k}}^{2n} \left(1 - A_{k1}\psi_k\psi_1\right) \ldots \underbrace{\frac{\partial}{\partial \psi_k} \left(1 - A_{ks}\psi_k\psi_s\right)}_{= -A_{ks}\psi_s \,=\, -A_{ks}\psi_s\left(1 - A_{ks}\psi_k\psi_s\right)} \ldots \left(1 - A_{k,2n}\psi_k\psi_{2n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial \psi_k} e^{-\frac{1}{2}\psi A \psi} = -\sum_l A_{kl} \psi_l \; e^{-\frac{1}{2}\psi A \psi}} \qquad (13)$$

Eingesetzt in (*) erhalten wir also

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \psi_k} f(\underline{\psi}) \right\rangle = \sum_l A_{kl} \frac{1}{I} \int d^{2n}\psi \; \underbrace{f(\underline{\psi})\, (-1)^p \psi_l}_{= \psi_l f(\underline{\psi})} \; e^{-\frac{1}{2}\psi A \psi}$$

$$= \sum_l A_{kl} \langle \psi_l f(\underline{\psi}) \rangle$$

womit (11) nach Multiplikation mit A^{-1} bewiesen ist.
Setzen wir $f(\underline{\psi}) = \psi_l$, so folgt wieder die wichtige Identität

$$\boxed{\langle \psi_k \psi_l \rangle = A^{-1}_{kl}} \qquad (14)$$

Weiterhin folgt aus (12) für $k<l$:

$$\frac{\partial}{\partial A_{kl}} e^{-\frac{1}{2}\psi A \psi} = \frac{\partial}{\partial A_{kl}} \prod_{r<s} (1 - A_{rs} \psi_r \psi_s)$$

$$= \underbrace{-\psi_k \psi_l}_{-\psi_k\psi_l (1 - A_{kl}\psi_k\psi_l)} \prod_{\substack{r<s \\ (r,s) \neq (k,l)}} (1 - A_{rs} \psi_r \psi_s)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial A_{kl}} e^{-\frac{1}{2}\psi A \psi} = -\psi_k \psi_l \; e^{-\frac{1}{2}\psi A \psi}, \quad k<l \qquad (15)$$

Daraus folgt sofort wie bei reeller Variable (vgl. (1.9))

$$\frac{\partial}{\partial A_{kl}} \ln I = \frac{1}{I} \int d^{2n}\psi \; \underbrace{\frac{\partial}{\partial A_{kl}} e^{-\frac{1}{2}\psi A \psi}}_{-\psi_k \psi_l e^{-\frac{1}{2}\psi A \psi}} = -\langle \psi_k \psi_l \rangle$$

$$\overset{(14)}{\Longrightarrow} \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial A_{kl}} \ln I = -A^{-1}_{kl} = A^{-1}_{lk}} \quad \underline{k<l} \tag{16}$$

Diese Gleichung wird gemäß (1.12) durch

$$\ln I = \frac{1}{2} \ln \det A + \text{const}$$

für eine <u>antisymmetrische</u> Matrix erfüllt. Es folgt

$$I = c \sqrt{\det A} \tag{17}$$

und die Konstante $c = 1$ wird durch (6a) festgelegt. Damit ist (6) bewiesen.

Aus (6) folgt wiederum

$$\boxed{\langle e^{\underline{\psi}\,\underline{\chi}} \rangle = e^{-\frac{1}{2} \chi A^{-1} \chi} = e^{\frac{1}{2} \langle (\underline{\psi}\,\underline{\chi})^2 \rangle}} \tag{18}$$

!

<u>Bew.:</u>

$$-\frac{1}{2} \chi_k \underbrace{A^{-1}_{kl}}_{\langle \psi_k \psi_l \rangle} \chi_l = -\frac{1}{2} \langle \underbrace{\chi_k \psi_k}_{-\psi_k \chi_k} \psi_l \chi_l \rangle = \frac{1}{2} \langle (\underline{\psi}\,\underline{\chi})^2 \rangle$$

□

Beim Wick-Theorem und bei der Normal-Ordnung bleibt alles gleich, es kommen nur zusätzliche Vorzeichen ins Spiel:

$$\langle \underbrace{\psi_1 \psi_2 \ldots \psi_m}_{f(\underline{\psi})} \rangle \underset{(14)}{\overset{(11)}{=}} \sum_k \langle \psi_1 \psi_k \rangle \langle \frac{\partial}{\partial \psi_k} \psi_2 \ldots \psi_m \rangle$$

$$= \sum_k (-1)^k \langle \psi_1 \psi_k \rangle \langle \psi_2 \ldots \cancel{\psi_k} \ldots \psi_m \rangle$$

Man sieht also, dass bei der Bildung von Kontraktione

Vorzeichen auftreten, die der Zahl der noch nicht kontrahierten ψ's zwischen den zu kontrahierenden ψ's entspricht. Man erhält also für Grassmann-Variable

Wick-Theorem (A_i linear in $\underline{\psi}$)

$$\boxed{\langle A_1 \ldots A_m \rangle = \sum_{\substack{\text{Kontraktions-}\\ \text{möglichkeiten}}} (-1)^\sigma \, \overbrace{A_{i_1} A_{i_2}} \, \overbrace{A_{i_3} A_{i_4}} \ldots \overbrace{A_{i_{m-1}} A_{i_m}}} \tag{19}$$

mit

σ = Zahl der Kreuzungen von Kontraktionen

z.B.:

$$\wick{\c1 A \c2 B \c1 C \c2 D} = - \overbrace{AC}\,\overbrace{BD}$$

$$\wick{\c1 A \c2 B \c3 C \c1 D \c2 E \c3 F} = \wick{\c1 A \c2 B \c1 D \c2 E}\,\overbrace{CF} = - \overbrace{AD}\,\overbrace{BE}\,\overbrace{CF}$$

Entsprechend müssen Vorzeichen bei der Definition der Normalordnung in (1.22) eingeführt werden.

Verschobene Erwartungswerte berechnen sich analog zu (1.24) bzw. (1.17):

$$\boxed{\langle f(\underline{\psi}) \rangle_{\underline{\chi}} := \frac{\int d^{2n}\psi \, e^{-\frac{1}{2}\psi A \psi + \psi \chi} f(\underline{\psi})}{\int d^{2n}\psi \, e^{-\frac{1}{2}\psi A \psi + \psi\chi}}} \tag{20}$$

$$\overset{(7)}{\Longrightarrow} \quad \boxed{\langle f(\underline{\psi}) \rangle_{\underline{\chi}} = \langle f(\underline{\psi} + \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\chi}) \rangle} \tag{21}$$

Berechnung der inversen Matrix:

Im Unterschied zu komplexen Variablen muss A anti-symmetrisch sein, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} C & -B^T \\ B & \bar{C} \end{pmatrix}, \quad C = -C^T, \quad \bar{C} = -\bar{C}^T \tag{22}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} (C + B^T \bar{C}^{-1} B)^{-1} & (B + \bar{C} B^{T^{-1}} C)^{-1} \\ -(B^T + C B^{-1} \bar{C})^{-1} & (\bar{C} + B C^{-1} B^T)^{-1} \end{pmatrix}} \tag{23}$$

und damit:

$$\boxed{\begin{aligned} \langle \eta_i \eta_j \rangle &= (C + B^T \bar{C}^{-1} B)^{-1}_{ij} \\ \langle \eta_i \eta_j^* \rangle &= (B + \bar{C} B^{T^{-1}} C)^{-1}_{ij} \\ \langle \eta_i^* \eta_j^* \rangle &= (\bar{C} + B C^{-1} B^T)^{-1}_{ij} \end{aligned}} \tag{24}$$

Spezialfall: $A^{11} = A^{22} = 0$

Wie bei komplexen Variablen werden in dieser Vorlesung nur Gauss-Integrale der Form

$$\int d^{2n}\eta \; e^{-\eta_i^* B_{ij} \eta_j + \eta_i \theta_i + \eta_i^* \varphi_i} = ? \tag{25}$$

auftreten. Dann gilt in (6):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \det A = (-1)^n \det \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B^T \end{pmatrix} = (-1)^n \det B \det(-B^T)$$

$$= (-1)^n (-1)^n (\det B)^2 = (\det B)^2 \Rightarrow \sqrt{\det A} = \det B$$

(Vorzeichen gemäss (6a))

$$\frac{1}{2}(\eta_i\,\eta_i^*)\begin{pmatrix}0 & -B_{ij}^T\\ B_{ij} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_j\\ \eta_j^*\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(-\eta_i \underbrace{B_{ij}^T}_{B_{ji}} \eta_j^* + \eta_i^* B_{ij}\,\eta_j)$$

$$= \eta_i^* B_{ij}\,\eta_j$$

$$-\frac{1}{2}(\Theta\ \varphi)\begin{pmatrix}0 & -B^T\\ B & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\Theta\\ \varphi\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(\Theta\ \varphi)\begin{pmatrix}0 & B^{-1}\\ -B^{-1T} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Theta\\ \varphi\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}(\Theta_i B_{ij}^{-1}\varphi_j - \varphi_i \underbrace{B_{ij}^{-1T}}_{B_{ji}^{-1}}\Theta_j) = -\Theta_i B_{ij}^{-1}\varphi_j$$

und somit gemäss (6):

!

$$\boxed{\int\prod_{i=1}^{n} d\eta_i^*\, d\eta_i\; e^{-\eta_i^* B_{ij}\eta_j + \eta_i\Theta_i + \eta_i^*\varphi_i} = \det B\; e^{-\Theta_i B_{ij}^{-1}\varphi_j}} \tag{26}$$

wobei B_{ij} eine <u>beliebige</u> Matrix sein kann (das Integral existiert für Grassmann-Variable immer).

Beachte das Vorzeichen im Exponenten auf der rechten Seite im Unterschied zu (2.24). Dieses Vorzeichen kann man wegbringen, wenn man auf der linken Seite $\Theta_i\eta_i$ oder $\varphi_i\eta_i^*$ im Exponenten schreibt.

Mit (24) folgt:

$$\boxed{\begin{aligned}\langle \eta_i\eta_j\rangle = \langle \eta_i^*\eta_j^*\rangle &= 0\\ \langle \eta_i\,\eta_j^*\rangle &= B_{ij}^{-1}\end{aligned}} \tag{27}$$

und für verschobene Erwartungswerte gemäss (21)

$$\boxed{\langle f(\underline{\eta},\underline{\eta}^*)\rangle_{\underline{\Theta\varphi}} = \langle f(\underline{\eta} + \underline{B}^{-1}\underline{\varphi},\ \underline{\eta}^* - \underline{B}^{T-1}\underline{\Theta})\rangle} \tag{28}$$

da

$$\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{X} = \begin{pmatrix}0 & -B^T\\ B & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\Theta\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & B^{-1}\\ -B^{T-1} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Theta\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B^{-1}\varphi\\ -B^{T-1}\Theta\end{pmatrix}$$