III. Kohärente Zustände

Da es in der Vielteilchen-Theorie praktisch ist mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren zu arbeiten (statt mit Orts- und Impulsoperatoren), ist es sinnvoll auch Darstellungen zu finden, wo a, a^+ als Funktionen bzw. Differentialoperatoren wirken (ähnlich zu Orts- und Impulsdarstellung). Dies bedeutet, dass man nach Eigenfunktionen der Vernichtungsoperatoren sucht:

$$a_\alpha |\xi\rangle = \xi_\alpha |\xi\rangle \quad , \quad \xi = \{\xi_\alpha\}_\alpha$$

und jeden beliebigen Zustand $|\psi\rangle$ in der ξ-Darstellung als $\langle \xi | \psi \rangle$ beschreibt. Die Zustände $|\xi\rangle$ nennt man kohärente Zustände. Für Bosonen lassen sich diese Zustände leicht finden, für Fermionen ergeben sich wegen der Antivertauschungsrelationen Probleme, die man durch Einführung sogenannter Grassmann-Variable für die ξ_α löst. Die kohärenten Zustände bilden die Basis für die in Kap. IV zu definierende Funktionalintegrale.

1. Bosonen

Bereits in der QM I+II habe wir kohärente Zustände für harmonische Oszillatoren und Photonen benutzt. Es gilt:

$$\boxed{|\xi\rangle := e^{\sum_\alpha \xi_\alpha a_\alpha^+} |0\rangle}, \quad \xi_\alpha \in \mathbb{C} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_\alpha |\xi\rangle = \xi_\alpha |\xi\rangle} \qquad (2)$$

Bew.: $[a, a^+] = 1 \Rightarrow [a, f(a^+)] = f'(a^+)$

$$a\, e^{\xi a^+} |0\rangle = e^{\xi a^+} \underbrace{a\,|0\rangle}_{=0} + \xi\, e^{\xi a^+} |0\rangle = \xi\, |\xi\rangle$$

□

Für Bosonen lässt sich also leicht Eigenfunktionen der Vernichtungsoperatoren finde. Für Erzeugungsoperatoren geht dies nicht, da a^+ die Teilchenzahl erhöht und damit $a^+|\psi\rangle$ nicht mehr der minimalen Teilchenzahl-sektor von $|\psi\rangle$ enthält.

Aus (1) folgt

$$|\xi\rangle = \prod_\alpha e^{\xi_\alpha a_\alpha^+} |0\rangle = \prod_\alpha \sum_{n_\alpha=0}^{\infty} \frac{(\xi_\alpha)^{n_\alpha}}{n_\alpha!} \underbrace{(a_\alpha^+)^{n_\alpha} |0\rangle}_{\sqrt{n_\alpha!}\,|n_\alpha\rangle}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\xi\rangle = \sum_{\{n_\alpha\}} \left(\prod_\alpha \frac{(\xi_\alpha)^{n_\alpha}}{\sqrt{n_\alpha!}} \right) |\{n_\alpha\}\rangle} \qquad (3)$$

oder

$$\boxed{|\langle \{n_\alpha\} | \xi \rangle|^2 = \prod_\alpha \frac{(|\xi_\alpha|^2)^{n_\alpha}}{n_\alpha!}} \qquad (4)$$

Für gegebenes α sind die Besetzungszahlen n_α in $|\psi\rangle$ also gemäss einer Poisson-Verteilung gegeben.

Die kohärenten Zustände sind nicht orthonormiert. Es gilt:

$$\boxed{\langle \xi | \xi' \rangle = e^{\sum_\alpha \xi_\alpha^* \xi_\alpha'}} \qquad (5)$$

Bew.:

$$\langle \xi | \xi' \rangle = \langle 0 | \underbrace{e^{\xi^* a}\, e^{\xi' a^+}}_{e^{\xi' a^+}\, e^{\xi^* a}\, e^{[\xi^* a,\, \xi' a^+]}} |0\rangle = e^{\xi^* \xi'}$$

(für jeden α-Sektor separat machen)

□

Konventionsgemäss habe ein die Normierung nicht in die kohärente Zustände mitdefiniert. Daher wird im folgenden immer wieder der Normierungsfaktor $\langle \eta | \eta \rangle$ auftauchen.

Es gilt für die mittlere Teilchenzahl und deren Abweichung im Zustand $|\eta\rangle$: ($\bar{A} := \langle \eta | A | \eta \rangle / \langle \eta | \eta \rangle$)

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{n}_\alpha &= |\eta_\alpha|^2 \\ \overline{(N-\bar{N})^2} &= \bar{N} \end{aligned}} \qquad (\hat{N} = \sum_\alpha \hat{n}_\alpha) \tag{6}$$

Bew.:

$$\bar{n}_\alpha = \frac{1}{\langle \eta | \eta \rangle} \underbrace{\langle \eta | a_\alpha^+}_{\eta_\alpha^* \langle \eta |} \underbrace{a_\alpha | \eta \rangle}_{\eta_\alpha | \eta \rangle} = |\eta_\alpha|^2$$

$$\overline{(N-\bar{N})^2} = \bar{N}^2 - \bar{N}^2 = \frac{1}{\langle \eta | \eta \rangle} \sum_{\alpha\alpha'} \langle \eta | a_\alpha^+ \underbrace{a_\alpha a_{\alpha'}^+}_{a_{\alpha'}^+ a_\alpha + \delta_{\alpha\alpha'}} a_{\alpha'} | \eta \rangle - \bar{N}^2$$

$$(|\eta_\alpha|^2 |\eta_{\alpha'}|^2 + |\eta_\alpha|^2 \delta_{\alpha\alpha'}) \langle \eta | \eta \rangle$$

$$= \underbrace{\Big(\sum_\alpha |\eta_\alpha|^2\Big)^2}_{\bar{N}^2} + \underbrace{\sum_\alpha |\eta_\alpha|^2}_{\bar{N}} - \bar{N}^2 = \bar{N}$$

□

Für $\bar{N} \to \infty$ ist also die Teilchenzahl in $|\eta\rangle$ sehr scharf um $\bar{N}$ konzentriert.

Wirkung von a_α^+ auf $|\eta\rangle$ entspricht einer Ableitung:

$$\boxed{a_\alpha^+ |\eta\rangle = \frac{\partial}{\partial \eta_\alpha} |\eta\rangle} \tag{7}$$

Bew.:

$$a_\alpha^+ |1\rangle = a_\alpha^+ e^{\sum_{\alpha'} \eta_{\alpha'} a_{\alpha'}^+} |0\rangle = \frac{\partial}{\partial \eta_\alpha} e^{\sum_{\alpha'} \eta_{\alpha'} a_{\alpha'}^+} |0\rangle$$

Definieren wir daher die ξ-Darstellung wie folgt:

$$\boxed{\psi(\xi^*) = \langle \xi | \psi \rangle = \langle 0 | e^{\sum_\alpha \xi_\alpha^* a_\alpha} | \psi \rangle} \tag{8}$$

so wirken die Operatoren a_α, a_α^+ wie folgt

$$\boxed{a_\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha^*}, \quad a_\alpha^+ = \xi_\alpha^* \cdot} \tag{9}$$

Bew.:

$$(a_\alpha \psi)(\xi^*) = \langle \xi | a_\alpha | \psi \rangle = \langle a_\alpha^+ \xi | \psi \rangle \overset{(7)}{=} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha^*} \underbrace{\langle \xi | \psi \rangle}_{\psi(\xi^*)}$$

$$(a_\alpha^+ \psi)(\xi^*) = \langle \xi | a_\alpha^+ | \psi \rangle = \langle a_\alpha \xi | \psi \rangle \overset{(2)}{=} \xi_\alpha^* \overbrace{\langle \xi | \psi \rangle}$$

□

(Beachte, dass (9) umgekehrt zu (2), (7) ist! (→ liegt daran, dass a_α nicht selbstadj. ist))

Ein beliebiger Operator $A(a^+, a)$ wird daher in der ξ-Darstellung:

$$\boxed{A(a^+, a) \to A\left(\xi^*, \frac{\partial}{\partial \xi^*}\right)} \tag{10}$$

Mit den Zuständen $|\xi\rangle$ kann jeder Zustand $|\psi\rangle$ dargestellt werde. Dies folgt aus der folgenden Zerlegung der eins:

$$\boxed{\int_\xi \frac{|\xi\rangle\langle\xi|}{\langle\xi|\xi\rangle} = \mathbb{1}} \tag{11}$$

mit

$$\boxed{\int_\xi := \int \prod_\alpha \frac{d(\mathrm{Re}\,\xi_\alpha)\, d(\mathrm{Im}\,\xi_\alpha)}{\pi}} \tag{12}$$

Bem.: $\zeta_\alpha = s_\alpha e^{i\theta_\alpha} \Rightarrow \frac{d(\mathrm{Re}\,\zeta_\alpha)\,d(\mathrm{Im}\,\zeta_\alpha)}{\pi} = \frac{1}{\pi} s_\alpha\, ds_\alpha\, d\theta_\alpha$

$$\int_\zeta \frac{|\zeta\rangle\langle\zeta|}{\langle\zeta|\zeta\rangle} \underset{(3),(5)}{=} \sum_{\substack{\{n_\alpha\}\\ \{m_\alpha\}}} \int_\zeta \left(\prod_\alpha \frac{(\zeta_\alpha)^{n_\alpha}(\zeta_\alpha^*)^{m_\alpha}}{\sqrt{n_\alpha!\, m_\alpha!}}\right) e^{-\sum_\alpha |\zeta_\alpha|^2} |\{n_\alpha\}\rangle\langle\{m_\alpha\}|$$

$$= \sum_{\substack{\{n_\alpha\}\\ \{m_\alpha\}}} |\{n_\alpha\}\rangle\langle\{m_\alpha\}| \prod_\alpha \Bigg\{ \frac{1}{\sqrt{n_\alpha!\, m_\alpha!}} \underbrace{\int ds_\alpha\, s_\alpha^{n_\alpha+m_\alpha+1} e^{-s_\alpha^2}}_{\frac{1}{2}\left(\frac{n_\alpha+m_\alpha}{2}\right)!} \underbrace{\frac{1}{\pi}\int d\theta_\alpha\, e^{i(n_\alpha-m_\alpha)\theta_\alpha}}_{2\delta_{n_\alpha m_\alpha}} \Bigg\}$$

$$= \sum_{\{n_\alpha\}} |\{n_\alpha\}\rangle\langle\{n_\alpha\}| = \mathbb{1}$$

□

Die Vollständigkeitsrelation (11) ist eine zentrale Identität für kohärente Zustände. Sie ist nicht identisch zu den bisher bekannten Vollständigkeitsrelationen, da die kohärenten Zustände nicht orthonormiert und übervollständig (d.h. nicht linear unabhängig) sind.

Man kann (11) formal so umschreiben, dass man altbekannte Identitäten wiedererkennt. Dazu schreibt man:

$$\frac{d(\mathrm{Re}\,\zeta_\alpha)\,d(\mathrm{Im}\,\zeta_\alpha)}{\pi} = \frac{d\zeta_\alpha^*\, d\zeta_\alpha}{2\pi i} \qquad (13)$$

was man formal aus der Gleichung

$$\begin{pmatrix} \zeta_\alpha^* \\ \zeta_\alpha \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}}_{\det() = 2i} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\zeta_\alpha \\ \mathrm{Im}\,\zeta_\alpha \end{pmatrix} \qquad (14)$$

ableitet. Damit lässt sich formal die zu (11)

äquivalente Identität ($|\psi\rangle$ → beliebiger Zustand)

$$\langle q|\psi\rangle = \int_{q'} \frac{\langle q|q'\rangle\langle q'|\psi\rangle}{\langle q'|q'\rangle} \tag{15}$$

herleiten : (α-Index unterdrückt)

$$\int_{q'} \frac{\langle q|q'\rangle\langle q'|\psi\rangle}{\langle q'|q'\rangle} = \int \frac{dq'^* dq'}{2\pi i}\, e^{-(q'^*-q^*)q'}\, \psi(q'^*)$$

$$\underset{q'=iz}{=} \int dq'^* \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int dz\, e^{-i(q'^*-q^*)z}}_{\delta(q'^*-q^*)} \psi(q'^*) = \psi(q^*) = \langle q|\psi\rangle$$

(alle Schritte nur formal auffasse !)

Wir haben also eine komplexe Verallgemeinerung der δ-Funktion gefunden:

$$\boxed{\psi(q^*) = \int \frac{dq'^* dq'}{2\pi i}\, e^{-(q'^*-q^*)q'}\, \psi(q'^*)} \tag{16}$$

Mit der Vollständigkeitsrelation lässt sich auch leicht die Spur eines Operators berechnen:

$$\boxed{\mathrm{Tr}\, A = \int_1 \frac{\langle q|A|1\rangle}{\langle q|q\rangle}} \tag{17}$$

Beweis:

$$\mathrm{Tr}\, A \underset{(11)}{=} \int_q \frac{1}{\langle q|q\rangle} \underbrace{\mathrm{Tr}\, |q\rangle\langle q|A}_{=\sum_u \langle u|q\rangle\langle q|A|u\rangle} = \int_1 \frac{\langle q|A|q\rangle}{\langle q|q\rangle}$$

$$\left(|u\rangle \to \text{VONS}\right) = \sum_u \langle q|A|u\rangle\langle u|q\rangle = \langle q|A|q\rangle \qquad \square$$

2. Fermionen

Bei Fermionen tritt ein grundsätzliches Problem auf wenn man nach Eigenfunktionen von a_α sucht:

$$a_\alpha a_\beta |\eta\rangle = \eta_\beta a_\alpha |\eta\rangle = \eta_\beta \eta_\alpha |\eta\rangle$$
$$a_\beta a_\alpha |\eta\rangle = \eta_\alpha a_\beta |\eta\rangle = \eta_\alpha \eta_\beta |\eta\rangle$$

Aber:
$$a_\alpha a_\beta |\eta\rangle = - a_\beta a_\alpha |\eta\rangle$$

Es folgt:
$$\eta_\beta \eta_\alpha = - \eta_\alpha \eta_\beta$$

d.h. die Eigenwerte können keine normalen komplexen Zahlen sein. Man benötigt zu diesem Zwecke neue Algebren, die antivertauschende Elemente besitzen. Dies sind die sogenannten Grassmann-Algebren, die wir zunächst formal definieren wollen:

Grassmann-Algebra

Eine Grassmann-Algebra wird durch abstrakte Generatoren erzeugt, die man mit

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \qquad (1)$$

bezeichnet. Deren Anzahl wollen wir zunächst als endlich annehmen. Multipliziert man diese Generatoren miteinander und bildet beliebige Linearkombinationen, so erhält man alle Elemente der Grassmann-Algebra:

$$\sum_{r=0}^{n} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_r \le n} \lambda_{i_1 \dots i_r} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_r} = \tag{2}$$

$$= \text{beliebiges Element der Grassmann-Algebra}$$

wobei $\lambda_{i_1 \dots i_r} \in \mathbb{C}$. 2 Elemente der Grassmann-Algebra sind gleich, wenn alle Koeffizienten $\lambda_{i_1 \dots i_r}$ identisch sind. Die Basis einer Grassmann-Algebra besteht also aus den abstrakten Elementen

$$\{1, \xi_{i_1}, \xi_{i_1}\xi_{i_2}, \xi_{i_1}\xi_{i_2}\xi_{i_3}, \dots, \xi_1 \dots \xi_n\} \tag{3}$$

mit $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_r \le n$.

Das Produkt von beliebigen Generatoren wird wie folgt auf das Basiselement zurückgeführt:

$$\xi_{i_1} \dots \xi_{i_r} = (-1)^P \xi_{i_{P(1)}} \dots \xi_{i_{P(r)}} \tag{4}$$

wobei P irgendeine Permutation ist.

Mit diesen Definitionen sind also beliebige Produkte und Linearkombinationen von Elementen der Grassmann-Algebra definiert. Aus (4) folgt, dass die Generatoren antivertauschen:

$$\xi_i \xi_j = -\xi_j \xi_i \quad , \quad \xi_i^2 = 0 \tag{5}$$

<u>Funktionen</u>:

Sei $f(x_1, \dots, x_n)$ irgendeine Funktion von n Variablen, die sich in eine Taylorreihe entwickeln lässt:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{i_1 < \dots < i_r} \sum_{n_1 \dots n_r} \lambda_{i_1 \dots i_r}^{n_1 \dots n_r} (x_{i_1})^{n_1} \dots (x_{i_r})^{n_r}$$

Ersetzt man die Variablen $x_1, \dots, x_n$ durch die Generatoren $\xi_1 - \xi_n$ und benutzt $\xi_i^2 = 0$, so erhält man eine Funktion der Generatore (d.h. man kann irgendwelche Generatoren von verschiedene Grassmann-Algebren einsetzen):

$$f(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{i_1 < \dots < i_r} \lambda_{i_1 \dots i_r} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_r} \qquad (6)$$

Bsp.: $f(\xi) = e^{\sum_i \xi_i \zeta_i}$ mit ξ, ζ aus verschiedene Grassmann-Algebren

$$\Rightarrow f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_i \xi_i \zeta_i \right)^n$$

$$= 1 + \sum_i \xi_i \zeta_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \xi_i \zeta_i \xi_j \zeta_j + \dots$$

Da per Definition Generatore von verschiedene Grassmann-Algebren auch antivertausche sollte, folgt:

$$f(\xi) = 1 + \sum_i \xi_i \zeta_i + \sum_{i<j} \xi_i \zeta_i \xi_j \zeta_j + \dots$$

$$= (1 + \xi_1 \zeta_1)(1 + \xi_2 \zeta_2) \cdots (1 + \xi_n \zeta_n)$$

da $\xi_i^2 = \zeta_i^2 = 0$.

$$\Rightarrow \boxed{e^{\sum_i \xi_i \zeta_i} = \prod_{i=1}^{n} (1 + \xi_i \zeta_i) = \prod_{i=1}^{n} e^{\xi_i \zeta_i}} \qquad (7)$$

wobei beim $\prod_{i=1}^{n}$ die Reihenfolge der Faktore egal ist, da die Paare $\xi_i \zeta_i$ miteinander vertauschen.

Differentiation und Integration:

Def.:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vartheta_i}\, \vartheta_1 \cdots \vartheta_r &:= (-1)^{i-1} \vartheta_1 \cdots \vartheta_{i-1} \vartheta_{i+1} \cdots \vartheta_r \\ \int d\vartheta_i\, \vartheta_1 \cdots \vartheta_r &:= (-1)^{i-1} \vartheta_1 \cdots \vartheta_{i-1} \vartheta_{i+1} \cdots \vartheta_r \end{aligned}} \qquad (8)$$

→ null, wenn $r < i$ (d.h. ϑ_i muss vorkommen)

und $\frac{\partial}{\partial \vartheta_i}$, $\int d\vartheta_i$ sollen lineare Operationen sein.

Differentiation und Integration sind also identisch definiert! (Die Integration gemäß $\int d\vartheta\, \vartheta = \frac{1}{2}\vartheta^2$ zu definieren, macht keinen Sinn, da $\vartheta^2 = 0$).

Es gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} \{\vartheta_i, \vartheta_j\} &= \left\{\frac{\partial}{\partial \vartheta_i}, \frac{\partial}{\partial \vartheta_j}\right\} = 0 \\ \left\{\frac{\partial}{\partial \vartheta_i}, \vartheta_j\right\} &= \delta_{ij} \end{aligned}} \qquad (9)$$

Bew.: o.B.d.A. $i=1$, $j=2$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \frac{\partial}{\partial \vartheta_2} \vartheta_1 \vartheta_2 &= -\frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \vartheta_1 = -1 \\ \frac{\partial}{\partial \vartheta_2} \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \vartheta_1 \vartheta_2 &= \frac{\partial}{\partial \vartheta_2} \vartheta_2 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\frac{\partial}{\partial \vartheta_1}, \frac{\partial}{\partial \vartheta_2}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \vartheta_2 \vartheta_1 \vartheta_3 &= -\vartheta_2 \vartheta_3 \\ \vartheta_2 \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \vartheta_1 \vartheta_3 &= \vartheta_2 \vartheta_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\frac{\partial}{\partial \vartheta_1}, \vartheta_2\right\} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3 &= \vartheta_2 \vartheta_3 \\ \vartheta_1 \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \vartheta_2 \vartheta_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\frac{\partial}{\partial \vartheta_1}, \vartheta_1\right\} = 1$$

□

Auch für die Integration gilt also:

$$\boxed{\int d\xi_1 d\xi_2 = -\int d\xi_2 d\xi_1} \tag{10}$$

δ-Funktion:

Seien $\xi_1, \dots, \xi_n$ und $\xi_1', \dots, \xi_n'$ Generatoren von zwei verschiedenen Grassmann-Algebren. Wir definieren eine δ-Funktion wie folgt:

$$\boxed{\delta(\xi - \xi') := \int d\zeta_n \dots d\zeta_1 \, e^{-\sum_i \zeta_i (\xi_i - \xi_i')}} \tag{11}$$

wobei $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ eine unabhängige Grassmann-Algebra ist. Es gilt:

$$\boxed{\delta(\xi - \xi') = (-1)^n (\xi_n - \xi_n') \cdots (\xi_1 - \xi_1')} \tag{12}$$

Bew.:

$$\int d\zeta_n \dots d\zeta_1 \, e^{-\sum_i \zeta_i (\xi_i - \xi_i')} \overset{(7)}{=}$$

$$= \int d\zeta_n \dots d\zeta_1 \, [1 - \zeta_n (\xi_n - \xi_n')] \cdots [1 - \zeta_1 (\xi_1 - \xi_1')]$$

$$= \int d\zeta_n \, [1 - \zeta_n (\xi_n - \xi_n')] \cdots \int d\zeta_1 \, [1 - \zeta_1 (\xi_1 - \xi_1')]$$

$$\overset{(8)}{=} (-1)^n (\xi_n - \xi_n') \cdots (\xi_1 - \xi_1')$$

Die Definition der δ-Funktion ist naheliegend, da für jede Funktion gilt:

$$\boxed{f(\xi) = \int d\xi_1' \dots \xi_n' \, \delta(\xi - \xi') f(\xi')} \tag{13}$$

Bew.: o.B.d.A. $f(1') = 1_1' \cdots 1_r'$

$$\int d1_1' \cdots d1_n' \; \delta(1-1') f(1') \overset{(12)}{=}$$

$$= \int d1_1' \cdots d1_n' \; (-1)^n (1_n - 1_n') \cdots (1_1 - 1_1') \, 1_1' \cdots 1_r'$$

$$= \int d1_1' \cdots d1_n' \; (-1)^n (-1_n') \cdots (-1_{r+1}') \underbrace{1_r \cdots 1_1 \, 1_1' \cdots 1_r'}$$

$= (1_r 1_r') \cdots (1_1 1_1')$

$= (-1_r' 1_r) \cdots (-1_1' 1_1)$

$= (-1_r') \cdots (-1_1') \, 1_1 1_2 \cdots 1_r$

↑ 1_r zuerst nach rechts ziehen etc.

↑ $(1_i')^2 = 0$, jedes $1_i'$ muss vorkommen damit $\int \neq 0$

$$= \int d1_1' \cdots d1_n' \; 1_n' \cdots 1_1' \, 1_1 \cdots 1_r = 1_n \cdots 1_r$$

□

Konjugation:

Ist n gerade, so schreibt man

$$1_1, \cdots, 1_n = 1_1, \cdots, 1_p, 1_1^*, \cdots, 1_p^* \quad , \quad n = 2p$$

und bezeichnet 1_i^* als den konjugierten Generator zu 1_i.

Weiterhin definiert man die allgemeine Konjugation durch

$$\boxed{(\lambda \, 1_{i_1} \cdots 1_{i_r})^* := \lambda^* \, 1_{i_r}^* \cdots 1_{i_1}^*} \qquad (14)$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Produktregel für Differentiation:

Es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} f(\xi_1, \dots, \xi_n)\, g(\xi_1, \dots, \xi_n) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi_i} \{ f(\xi_1, \dots, \overset{\downarrow}{\xi_i}, \dots, \xi_n)\, g(\xi_1 \dots \xi_n) + \tag{14a}$$

$$+ f(\xi_1 \dots \xi_n)\, g(\xi_1 \dots \overset{\downarrow}{\xi_i} \dots \xi_n) \}$$

wobei der Pfeil andeutet auf welches ξ_i die Ableitung wirken soll (i.a. können noch Vorzeichen auftauchen wenn man $\frac{\partial}{\partial \xi_i}$ durch f durchzieht).

Bew.:

Taucht ξ_i gar nicht oder nur einmal in $f \cdot g$ auf, so ist der Beweis trivial.
Taucht ξ_i sowohl in f als auch in g auf, so ist $f \cdot g$ offensichtlich null. Dasselbe gilt für die rechte Seite von (14a), da:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} (\xi'_1 \dots \xi'_m \overset{\downarrow}{\xi_i} \xi''_1 \dots \xi''_n \xi_i \dots + \xi'_1 \dots \xi'_m \xi_i \xi''_1 \dots \xi''_n \overset{\downarrow}{\xi_i} \dots) =$$

$$= (-1)^m \xi'_1 \dots \xi'_m \underbrace{\xi''_1 \dots \xi''_n \xi_i \dots}_{(-1)^n \xi_i \xi''_1 \dots \xi''_n \dots} + (-1)^m (-1)^{n+1} \xi'_1 \dots \xi'_m \xi_i \xi''_1 \dots \xi''_n \dots$$

$$= 0$$

□

Partielle Integration:

Es gilt:

$$\boxed{\int d\xi_1 \cdots d\xi_n \; \frac{\partial}{\partial \xi_i} f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0} \tag{146}$$

da $\int d\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} = 0$ (wie doppelte Differentiation).

Zusammen mit der Produktregel (14a) folgt daraus

$$\boxed{\begin{aligned} &\int d\xi_1 \cdots d\xi_n \; \frac{\partial}{\partial \xi_i} f(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, g(\xi_1, \ldots, \overset{\downarrow}{\xi_i}, \ldots, \xi_n) \\ &= -\int d\xi_1 \cdots d\xi_n \; \frac{\partial}{\partial \xi_i} f(\xi_1, \ldots, \overset{\downarrow}{\xi_i}, \ldots, \xi_n)\, g(\xi_1, \ldots, \xi_n) \end{aligned}} \tag{14c}$$

Variablen-Transformationen:

Integrale über Grassmann-Variablen können mit Hilfe von Variablen-Transformationen umgeformt werden.

① Translation

Es gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} &\int d\xi_1 \cdots d\xi_n \; f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \\ &= \int d\xi_1 \cdots d\xi_n \; f(\xi_1 + \theta_1, \ldots, \xi_n + \theta_n) \end{aligned}} \tag{14d}$$

wobei $\theta_1, \ldots, \theta_n$ Generatoren einer anderen Grassmann-Algebra sind, die ebenfalls mit $\xi_1 \ldots \xi_n$ antivertausche sollen (d.h. $\xi_1, \ldots, \xi_n, \theta_1, \ldots, \theta_n$ sind die Generatoren einer erweiterten Grassmann-Algebra).

Bew.: o.B.d.A. $f(k_1 - k_n) = k_1 k_2 \cdots k_n$!

$$\int dk_1 \cdots dk_n \, (k_1+\theta_1)(k_2+\theta_2)\cdots(k_n+\theta_n) =$$

$$= \int dk_1 \cdots dk_n \, k_1 k_2 \cdots k_n$$

↑ alle $k_1, \dots, k_n$ müssen im Integral da vorkommen

□

② Lineare Transformation

Sei

$$\boxed{\tilde{k}_i := \sum_j A_{ij} k_j} \qquad (14e)$$

und

$$g(\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n) = f(k_1, \dots, k_n)$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\begin{aligned} &\int dk_1 \cdots dk_n \, f(k_1, \dots, k_n) = \\ &= \det A \int d\tilde{k}_1 \cdots d\tilde{k}_n \, g(\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n) \end{aligned}} \qquad (14f)$$

Beachte, dass die Jacobi-Determinante $\det A = \det \frac{\partial \tilde{k}_i}{\partial k_j}$ nicht wie üblich mit der inversen auftaucht !!!

Bew.: o.B.d.A. $g(\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n) = \tilde{k}_n \cdots \tilde{k}_1 \rightsquigarrow \int d\tilde{k}_1 \cdots d\tilde{k}_n \, g(\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n) = 1$

$$\int dk_1 \cdots dk_n \, f(k_1, \dots, k_n) =$$

$$= \int dk_1 \cdots dk_n \sum_{j_1 \cdots j_n} A_{nj_n} \cdots A_{1j_1} \, \underbrace{k_{j_n} \cdots k_{j_1}}_{\text{alle verschieden } (k_i^2 = 0)}$$

$$= \int dk_1 \cdots dk_n \sum_P A_{nP(n)} \cdots A_{1P(1)} \, \underbrace{k_{P(n)} \cdots k_{P(1)}}_{(-1)^P k_n \cdots k_1}$$

$$= \sum_P (-1)^P A_{1P(1)} \cdots A_{nP(n)} = \det A$$

□

Kohärente Zustände für Fermionen

Seien a_α, a_α^+ die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatore für Fermionen. Wir definieren dann eine Grassmann-Algebra mit den unendlich vielen Generatoren

$$\{\xi_\alpha, \xi_\alpha^*\}_\alpha \tag{15}$$

Durch Multiplikation von Elemente der Grassmann-Algebra mit Zustände des Fockraumes erhalten wir einen verallgemeinerten Fockraum, z.B.

$$\xi_{\alpha_1}^* \cdots \xi_{\alpha_r}^* \, \xi_{\beta_1} \cdots \xi_{\beta_s} \, a_{\gamma_1}^+ \cdots a_{\gamma_e}^+ |0\rangle = |\Psi\rangle \tag{16}$$

und Linearkombinationen von solche Zuständen.

Der adjungierte Zustand ist durch

$$\langle\Psi| = \langle 0| a_{\gamma_e} \cdots a_{\gamma_1} \xi_{\beta_s}^* \cdots \xi_{\beta_1}^* \xi_{\alpha_r} \cdots \xi_{\alpha_1} \tag{17}$$

definiert.

Bei Skalarprodukte zieht man die Grassmann-Variablen heraus, z.B.:

$$\left.\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \xi_\alpha |\{n_\alpha\}\rangle \\ |\chi\rangle &= \xi_\beta |\{m_\alpha\}\rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow \langle\chi|\Psi\rangle := \xi_\beta^* \xi_\alpha \langle\{m_\alpha\}|\{n_\alpha\}\rangle$$

$$\text{!} \rightarrow \cdot(-1)^{\sum_\alpha n_\alpha} \tag{18}$$

Die Wirkung von a_α, a_α^+ auf den verallgemeinerte Fockraum wird durch die Antivertauschungsrelationen definiert:

$$\begin{aligned} \{\xi_\alpha, a_\alpha\} = \{\xi_\alpha^*, a_\alpha\} &:= 0 \\ \{\xi_\alpha, a_\alpha^+\} = \{\xi_\alpha^*, a_\alpha^+\} &:= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

d.h. z.B.:

$$a_\alpha^+ \left(\xi_\beta | \{n_\alpha\} \right) := - \xi_\beta \left(a_\alpha^+ | \{n_\alpha\} \right) \quad , \text{ etc.}$$

Im verallgemeinerten Fockraum lässt sich nun leicht Eigenzustände von a_α finden, deren Eigenwerte die Generatoren ξ_α sind:

$$\boxed{|\xi\rangle := e^{-\sum_\alpha \xi_\alpha a_\alpha^+} |0\rangle = e^{\sum_\alpha a_\alpha^+ \xi_\alpha} |0\rangle} \tag{20}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} a_\alpha |\xi\rangle &= \xi_\alpha |\xi\rangle \\ a_\alpha^+ |\xi\rangle &= - \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} |\xi\rangle \end{aligned}} \tag{21}$$

anderes Vorzeichen als bei Bosonen (vgl. (1.7))

Der Beweis folgt unmittelbar aus (vgl. Bew. von (7))

$$\boxed{|\xi\rangle = \prod_\alpha (1 - \xi_\alpha a_\alpha^+) |0\rangle} \tag{22}$$

Damit folgt (21), da: (α-Index unterdrückt)

$$a(1 - \xi a^+)|0\rangle = \underbrace{a|0\rangle}_{=0} + \xi \underbrace{aa^+}_{-a^+a+1} |0\rangle = \xi |0\rangle = \xi (1 - \xi a^+)|0\rangle$$

$$\uparrow \; \xi^2 = 0$$

$$a^+ (1 - \xi a^+)|0\rangle = a^+|0\rangle = - \frac{\partial}{\partial \xi} (1 - \xi a^+)|0\rangle$$

$$\uparrow \; (a^+)^2 = 0$$

Mit (21) lassen sich a, a^+ in der ξ-Darstellung schreiben. Nun definiert für einen beliebigen Zustand aus dem Fockraum (nicht den vollgemeinerten!):

$$\boxed{\Psi(\xi^*) = \langle \xi | \Psi \rangle = \langle 0 | e^{\sum_\alpha \xi_\alpha^* a_\alpha} | \Psi \rangle} \tag{23}$$

Es folgt in dieser Darstellung:

$$\boxed{a_\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha^*}\,, \quad a_\alpha^+ = \xi_\alpha^*.} \tag{24}$$

d.h. dasselbe wie bei Fock! (vgl. (1.9))

Bew.:

$$(a_\alpha \psi)(\xi^*) = \langle \xi | a_\alpha | \psi \rangle \underset{(22)}{=} \langle 0 | \prod_{\beta \neq \alpha} (1 + \xi_\beta^* a_\beta) \underbrace{(1 + \xi_\alpha^* a_\alpha) a_\alpha}_{= a_\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha^*}(1 + \xi_\alpha^* a_\alpha)} | \psi \rangle$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha^*} \langle \xi | \psi \rangle$$

nach links ziehen

$$(a_\alpha^+ \psi)(\xi^*) = \langle \xi | a_\alpha^+ | \psi \rangle \underset{(21)}{=} \xi_\alpha^* \langle \xi | \psi \rangle$$

□

Für das Skalarprodukt von 2 kohärente Zustände mit Generatoren aus unterschiedliche Grassmann-Algebren folgt:

$$\boxed{\langle \xi | \xi' \rangle = e^{\sum_\alpha \xi_\alpha^* \xi_\alpha'}} \tag{25}$$

Bew.:

$$\langle \xi | \xi' \rangle \underset{(22)}{=} \langle 0 | \prod_\alpha \underbrace{(1 + \xi_\alpha^* a_\alpha)(1 + a_\alpha^+ \xi_\alpha')}_{\to\ 1 + \xi_\alpha^* \underbrace{a_\alpha a_\alpha^+}_{-a_\alpha^+ a_\alpha + 1} \xi_\alpha'} | 0 \rangle$$

$\langle 0 | a_\alpha^+ = 0$, $a_\alpha | 0 \rangle = 0$ $\to\ 1 + \xi_\alpha^* \xi_\alpha'$

$$= \prod_\alpha (1 + \xi_\alpha^* \xi_\alpha') \underset{(7)}{=} e^{\sum_\alpha \xi_\alpha^* \xi_\alpha'}$$

□

Mit Hilfe der in (11) eingeführten δ-Funktion lässt sich nun leicht auch eine Zerlegung der $\mathbb{1}$ im Fockraum finden. Für ein beliebiges $\Psi \in$ Fockraum gilt:

$$\langle \eta | \Psi \rangle = \Psi(\eta^*) \underset{(13)}{=} \int d\eta'^* \, \underbrace{\delta(\eta^* - \eta'^*)}_{\overset{(11)}{=} \int d\eta' \, e^{-\eta'(\eta^* - \eta'^*)}} \Psi(\eta'^*)$$

$$e^{\eta^* \eta'} \, e^{-\eta'^* \eta'} \underset{(25)}{=} \langle \eta | \eta' \rangle \, e^{-\eta'^* \eta'}$$

$$\Rightarrow \quad \langle \eta | \Psi \rangle = \langle \eta | \int d\eta'^* \int d\eta' \, e^{-\eta'^* \eta'} | \eta' \rangle \langle \eta' | \Psi \rangle$$

wobei der Index α unterdrückt wurde. Da dies für alle Ψ gilt, folgt die Vollständigkeitsrelation

$$\boxed{\int \prod_\alpha d\eta_\alpha^* d\eta_\alpha \, e^{-\sum_\alpha \eta_\alpha^* \eta_\alpha} | \eta \rangle \langle \eta | = \mathbb{1}} \quad \text{im Fock-Raum} \qquad (26)$$

Dabei haben wir verwendet:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \langle \eta | \Psi \rangle = \langle \eta | \Psi' \rangle \\ \Psi, \Psi' \in \text{Fockraum} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad | \Psi \rangle = | \Psi' \rangle} \qquad (27)$$

Bew.: $\langle \eta | \Psi \rangle = \langle \eta | \Psi' \rangle \overset{(22)}{\Rightarrow}$

$$\langle 0 | \prod_\alpha (1 + \eta_\alpha^* a_\alpha) | \Psi \rangle = \langle 0 | \prod_\alpha (1 + \eta_\alpha^* a_\alpha) | \Psi' \rangle$$

Da jedes Produkt von r η-Generatoren separat gleich sein muss (alle unabhängig!) folgt

$$\langle 0 | a_{\alpha_1} \cdots a_{\alpha_r} | \Psi \rangle = \langle 0 | a_{\alpha_1} \cdots a_{\alpha_r} | \Psi' \rangle, \quad \forall \alpha_1 \cdots \alpha_r$$

$$\Rightarrow \quad | \Psi \rangle = | \Psi' \rangle$$

□

Für die Spur eines Operators erhalten wir damit analog wie bei Bosonen:

$$\boxed{\mathrm{Tr}\,A = \int \prod_\alpha d\xi_\alpha^* d\xi_\alpha \; e^{-\sum_\alpha \xi_\alpha^* \xi_\alpha} \langle -\xi | A | \xi \rangle} \qquad (28)$$

↑ anderes Vorzeichen!

Bew.: Damit $\mathrm{Tr}\,A \neq 0$ ist, muss A die Teilchenzahl der Fermionen erhalten

$$\mathrm{Tr}\,A = \sum_n \langle n | A | n \rangle$$

$$\underset{(26)}{=} \sum_n \int d\xi^* d\xi \; e^{-\xi^* \xi} \underbrace{\langle n | \xi \rangle \langle \xi | A | n \rangle} \qquad (*)$$

$$\underbrace{\langle n |}\, e^{\sum_\alpha a_\alpha^+ \xi_\alpha} |0\rangle \langle 0 | e^{\sum_\alpha \xi_\alpha^+ a_\alpha}\, \underbrace{A | n \rangle}$$

↘ enthalte die gleiche Fermionenzahl! (da A die Teilchenzahl erhält) ↙

$\Rightarrow$ In $\langle n | \xi \rangle$ und $\langle \xi | A | n \rangle$ treten gleich viele ξ-Generatoren in den Produkten auf

$\Rightarrow$ $\langle n | \xi \rangle \langle \xi | A | n \rangle = \langle -\xi | A | n \rangle \langle n | \xi \rangle$

da $\xi_{\alpha_1} \xi_{\alpha_2} \xi_{\alpha_1'} \xi_{\alpha_n'} = (-\xi_{\alpha_1'})(-\xi_{\alpha_n'}) \xi_{\alpha_1} \xi_{\alpha_n}$

(für n gerade / ungerade jeweils klar)

Damit wird (*):

$$\mathrm{Tr}\,A = \int d\xi^* d\xi \; e^{-\xi^* \xi} \underbrace{\sum_n \langle -\xi | A | n \rangle \langle n | \xi \rangle}_{\langle -\xi | A | \xi \rangle}$$

□